ETSI Telecomunicación

Sistemas Lineales II

Ejemplo serie de Fourier

Periodo: $x(n) = x(n+N)$ $\quad N = 8$

Pulsación: $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{8}$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{8}$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{8} + 2\pi$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{8} + 4\pi$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{8}(1+m)$

aunque también podría ser:

son indistinguibles una pulsación de otra.

TEMA 4. DISEÑO FILTROS ANALÓGICOS Y DIGITALES

Importancia de fase lineal:

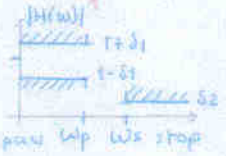
$Y(\Omega) = X(\Omega)|H(\Omega)|e^{\measuredangle H(\Omega)}$ $\quad \measuredangle H(\Omega) = -\Omega n_0$

$= X_F(\Omega)\, e^{-j\Omega n_0}$

$y(n) = x_F(n-n_0)$ ← solo retardo

Especificaciones

$|H(\omega)|^1$



Proceso F analógico

Diseño aproximado. Fuerza bruta. Colocando polos y ceros

según cercanía a $\pi \to$ eje $j\omega$, $\pi \to$ círculo unidad

$$H(\Omega) = \frac{\prod(1 - c_k e^{-j\Omega})}{\prod(1 - d_k e^{-j\Omega})}$$

polo o cero

$$|1 - re^{j\phi}e^{-j\Omega}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\Omega - \gamma)$$

mínimo: $1 + r^2 - 2r = (1-r)^2$

ej: cero en el nominador

Filtro Butterworth

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$H(s) = \frac{1}{P_N(s/\omega_c)}$$

P_N: polinomio butterworth grado N

$|H(\omega_p)|^1 = 1 - \delta_1$

$|H(\omega_s)|^1 = \delta_2$

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{1-\delta_1}\right)^2 - 1 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{\delta_2}\right)^2 - 1 \quad (2)$$

incognitas: N y ω_c

maximalmente plano
monótono decreciente

haciendo $\frac{(1)}{(2)}$
- despejamos N
- redondeamos arriba
- ajustamos en ω_p

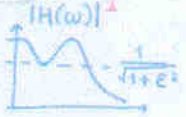
$|H(\omega_p)| = 1 - \delta_1$

sacamos ω_c

Filtro Chebyshev

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

C_N: pol. de Cheb. incognitas ε, N



$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \delta_1 \rightarrow \varepsilon$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}} \simeq \frac{1}{\varepsilon 2^{N-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^N} \Longrightarrow N$$

Diseño de Filtros Digitales: tenemos $H_a(s)$ y queremos $H(z)$

- Método respuesta al impulso invariante: coger el equivalente con $T = 1$ $\quad h(n) = h_a(n)$

i.e. solo repetir cada 2π

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(\Omega + 2\pi k)$$

Simplemente repetir cada 2π si habrá solapamiento

si $H_a(s)$ racional

$$H_a(s) = \sum \frac{A_i}{s - p_i} \rightarrow H(z) = \sum \frac{A_i}{1 - e^{+p_i} z^{-1}}$$

- Método transformación bilineal

$\Omega = 2\,\mathrm{arctg}(\omega)$, No confundir

convertir el eje $j\omega$ a la circunferencia unidad $\quad s = \frac{z-1}{z+1}$ $\quad H(z) = H_a(s)\big|_{s = \frac{z-1}{z+1}}$

Apuntes de Pak

Sistemas Lineales II

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Segundo cuatrimestre de 2º curso
Curso 2004/2005

Contenido:

Los apuntes de ésta asignatura son algo particulares ya que tienen TRES niveles de detalle:

- Referencia rápida
- Apuntes **resumen** hechos en limpio en casa
- Apuntes **extensos** tomados en clase

Fecha de última actualización: 21 Julio 2009

Sistemas Lineales II – Referencia Rápida

TEMA 1. SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS

$x(n)$ periódica N $\Longleftrightarrow$ $\frac{m}{N}2\pi$ pulsación convolución: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) \circledast h(n)$

sistemas ecs en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k D^k y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k D^k x(n) \Rightarrow h(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k h(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k)$$

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \ldots = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \ldots \qquad h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \ldots + b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \ldots$$

$h(n)$ finita $\Rightarrow$ FIR: $a_{k>0} = 0$ ej $h(n) = 5\delta(n-1) + 10\delta(n-2)$

$h(n)$ infinita $\Rightarrow$ IIR: hay que proceder recursivamente

ej. $h(n) = 0'5\, h(n-1) + \delta(n)$ suponer $h(n)$ causal

TEMA 2. ANALISIS DE FOURIER

$\Omega = \Omega_0 k$

Serie de Fourier: $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

secuencia a_k – periódica periodo N

$x(n)$ real $\Rightarrow$ $|a_k|$ par, $\measuredangle a_k$ impar

$a_k = a_{-k}^*$

$a_k = a_{N-k}^*$

- Lineal.
- Desplaz $x(n-m) \leftrightarrow a_k e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$

$x_1 \circledast x_2 \leftrightarrow N \cdot a_{1k} \cdot a_{2k}$

$x_1 \cdot x_2 \leftrightarrow a_{1k} \circledast a_{2k}$

$a_k \rightarrow \boxed{H(\Omega)} \rightarrow a_k H(\frac{2\pi}{N}k)$

Tª Parseval: $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2$ Pot media

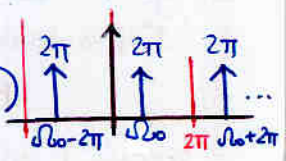
Transformada de Fourier

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$+\alpha^n \cdot u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$ ⚠ signos

$$e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$$



Propiedades

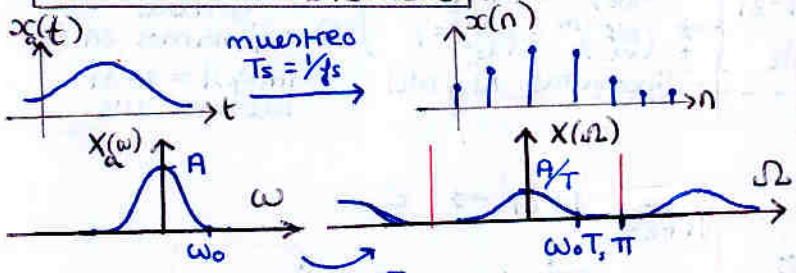
- Linealidad
- $x(t)$ real $\Rightarrow X(\Omega) = X^*(-\Omega)$ i.e. módulo par, fase impar
- Desplaz temp: $x(n-n_0) \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
- Diferenciación $n \cdot x(n) \longleftrightarrow j\frac{dX}{d\Omega}$
- Desplaz frec: $x(n) e^{+j\Omega_0 n} \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$

coinciden signos / no

- convolución: $x(n) * y(n) \leftrightarrow X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$
- modulación $x_1(n) \cdot x_2(n) \longleftrightarrow X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$

Tª Parseval: $\sum |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$

Continuo → Discreto (Muestreo)



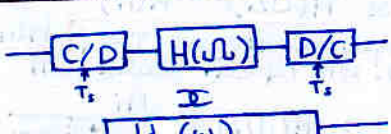
se chafa T_s
se ensancha T_s

$$x(n) = x_a(nT)$$

$$X(\Omega) = \sum_k \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\Omega + 2\pi k}{T}\right)$$

para no aliasing $\omega_0 T_s \leq \pi \Rightarrow$ $f_s \geq 2f_0$ Tª de Nyquist

SL continuo a partir de discreto



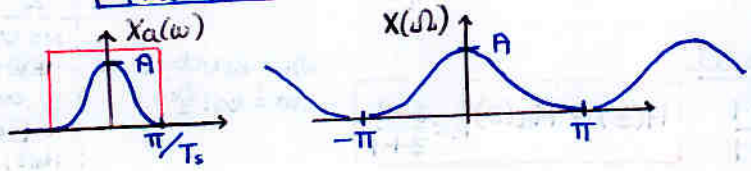
$$H_a(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T_s}\right) H(\omega T_s)$$

$$T_s \cdot h_a(nT_s) = h(n)$$

nota: no es simplemente el equivalente discreto: $h(n) \neq h_a(nT)$

La ALTURA de la respuesta en frecuencia se mantiene

→ $h(n)$ es t veces mas grande que su equivalente continuo



TEMA 3. TRANSFORMADA Z

estable $\Leftrightarrow |p|=1 \in ROC$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = TF\left[\frac{x(n)}{r^n}\right]$$

$z = re^{j\Omega}$

$z^{-n} = r^{-n} e^{-j\Omega n}$

↳ $x(n)$ causal ⇒ si converge para r_0 converge para $r > r_0$

Propiedades:

- Linealidad
- Desplazamiento: $x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$
- Diferenciación: $n^k x(n) \leftrightarrow \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k X(z)$
- Escalado ⚠ no confundir $a^n x(n) \leftrightarrow X(z/a)$

$x(n) \;—\boxed{z^{-1}}—\; x(n-1)$

Teoremas valor inicial y final

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0) \quad [x(n) \text{ causal}] \\ &\lim_{z\to 1} X(z)(1-z^{-1}) = x(\infty) \end{aligned}}$$

Transformada Z racional

$$\frac{\sum_0^M b_i z^{-i}}{\sum_0^N a_i z^{-i}} = \frac{\sum_0^M b_i' z^{i}}{\sum_0^N a_i' z^{i}} = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots}{(z-p_1)(z-p_2)\dots}$$

ceros (raíces del num)

polos (raíces den)

$$\boxed{\frac{A_i}{z-p_i} \xrightarrow{TZ^{-1}} A_i\, p_i^{n-1} u(n-1)}$$

⚠ $= \frac{A_i}{1-p_i z^{-1}} \cdot z^{-1}$

Transformada Z inversa

- Integración: difícil
- Series polinómicas
  $X(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$
  $x(n) = a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) + \dots$
- Fracciones simples

$$\boxed{\begin{aligned} X(z) &= \sum \frac{A_i z^{-1}}{1-p_i z^{-1}} = \sum \frac{A_i}{z-p_i} \\ x(n) &= \sum A_i\, p_i^{n-1} u(n-1) \end{aligned}}$$

TEMA 4. DISEÑO FILTROS ANALÓGICOS Y DIGITALES

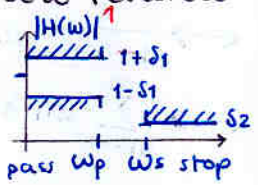
Importancia de fase lineal:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)|H(\Omega)|e^{\measuredangle(H(\Omega))} \quad \measuredangle H(\Omega) = -\Omega n_0$$
$$= X_F(\Omega)\, e^{-j\Omega n_0}$$

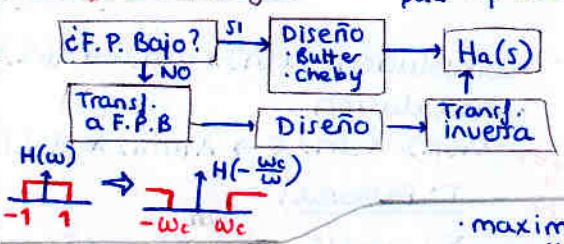
$y(n) = x_F(n-n_0)$ ← sólo retardo

Especificaciones

$|H(\omega)|^1$



Proceso F. analógico



especificaciones $\equiv |H(\omega)|^1$

Diseño aproximado:

Fuerza bruta.

Colocando polos y ceros

según cercanía a π → eje jω; TZ → circ. unidad

$$H(\Omega) = \frac{\prod(1-c_k e^{-j\Omega})}{\prod(1-d_k e^{-j\Omega})}$$

polo o cero

$$|1 - re^{j\phi}e^{-j\Omega}|^2$$
$$= 1 + r^2 - 2r\cos(\Omega - \gamma)$$

mínimo: $1 + r^2 - 2r = (1-r)^2$

ej: cero en el nominador

Expresiones filtros $\equiv |H(\omega)|^2$

Filtro Butterworth:

$$\boxed{|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{P_N(s/\omega_c)}}$$

P_N: polinomio butterworth grado N

· maximalmente plano
monótono decreciente

$$\left.\begin{aligned} |H(\omega_p)|^1 &= 1-\delta_1 \\ |H(\omega_s)|^1 &= \delta_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} &= \left(\frac{1}{1-\delta_1}\right)^2 - 1 \quad (1) \\ \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} &= \left(\frac{1}{\delta_2}\right)^2 - 1 \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

incognitas: N y ω_c

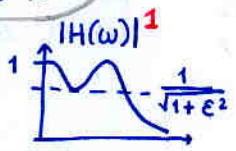
haciendo $\frac{(1)}{(2)}$

- despejamos N
- redondeamos arriba
- ajustamos en ω_p
  $|H(\omega_p)| = 1-\delta_1$
  sacamos ω_c

Filtro Chebyshev

$$\boxed{|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}}$$

C_N: pol. de Cheb. incognitas ε, N



$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1-\delta_1} \Rightarrow \varepsilon$$

$$\boxed{\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}} \simeq \frac{1}{\varepsilon 2^{N-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^N}} \Rightarrow N$$

Diseño de Filtros Digitales: tenemos $H_a(s)$ y queremos $H(z)$

- Metodo respuesta al impulso invariante: coger el equivalente con $T=1$ i.e. sólo repetir cada 2π $\boxed{h(n) = h_a(n)}$

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(\Omega + 2\pi k)$$

Simplemente repetir cada 2π
↳ habrá solapamiento

si $H_a(s)$ racional
$H_a(s) = \sum \frac{A_i}{s-p_i} \rightarrow H(z) = \sum \frac{A_i}{1-e^{+p_i}z^{-1}}$

- Método transformación bilineal

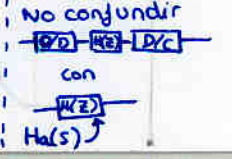
convertir el eje jω a la circunferencia unidad

$$s = \frac{z-1}{z+1} \qquad \boxed{H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}}$$

$\Omega = 2\,\mathrm{arctg}(\omega)$

$\omega = \mathrm{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$

No confundir



TEMA 5. PROCESOS ESTOCÁSTICOS DISCRETOS $\tilde{x}(n)$

· Valor instantáneo (1º nivel)

- media $\mu(n) = E[\tilde{x}(n)]$
- potencia media $P(n) = E[\tilde{x}^2(n)]$
- Varianza $\sigma^2(n) = E[|\tilde{x}(n) - E[\tilde{x}(n)]|^2] = P(n) - \mu^2(n)$

Proceso ergódico

media temporal = media estadística

· memoria o redundancia (2º nivel)

- autocorrelación

$$R(n,k) = E[x(n) \cdot x^*(k)]$$

Proceso estacionario:

- 1º nivel cte
- 2º nivel depende de $m = n - k$

$$\boxed{R(m) = E[x(n+m) \cdot x^*(n)]} \rightarrow R(0) = \text{Pot.}$$

D.e.p. $R(m) \xleftrightarrow{TF} S(\Omega) \rightarrow$ real ≥ 0

Relaciones de Filtrado

$$\tilde{x}(n) \longrightarrow \underset{h(n)}{\boxed{H(\Omega)}} \longrightarrow \tilde{y}(n)$$

Sabiendo $h(n)$

$$m_y = m_x \sum h(n)$$

$$\sigma^2_y = \sigma^2_x \sum h^2(n)$$

$$R_{yy}(m) = R_{xx}(m) * h^*(-m) * h(m)$$

Sabiendo $H(\Omega)$

$$m_y = m_x \cdot H(0)$$

$$S_{yy}(\Omega) = S_{xx}(\Omega) \, |H(\Omega)|^2$$

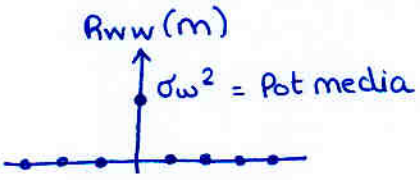
Ruido blanco gaussiano media nula

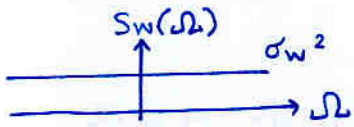
$$\tilde{w}(n) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow \tilde{y}(n)$$

$$m_y = 0$$

$$S_{yy}(\Omega) = \underset{\text{cte}}{(\sigma_w^2)} \cdot |H(\Omega)|^2$$

S_{yy} coge 'la forma' del filtro.





$$\text{Pot} = \sigma_w^2$$

$$m_w = 0$$

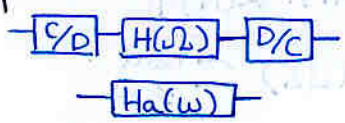
$$R_{ww}(m) = \delta(m)$$

Formulas dificiles a memorizar

Muestreo:

$$x(n) = x_a(nT)$$
$$X(\Omega) = \sum_k \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\Omega + 2\pi k}{T}\right)$$

Filtro equivalente:



$$H_a(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T_s}\right) H(\omega T_s)$$
$$T\, h_a(nT) = h(n)$$

i.e. es T veces como si lo muestrearas

Diseño Filtros Digitales:

Respuesta al impulso invariante

$$H(\Omega) = \sum_k X_a(\Omega + 2\pi k)$$

i.e. lo muestreas con T = 1

si Ha racional

$$H_a(s) = \sum \frac{a_i}{s - p_i} \Rightarrow H(z) = \sum \frac{a_i}{1 - e^{p_i} z^{-1}}$$

Transformación Bilineal

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s = \frac{z-1}{z+1}}$$

Filtro Butterworth

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$H(s) = \frac{1}{P_N(s/\omega_c)}$$

Filtro chebyshev

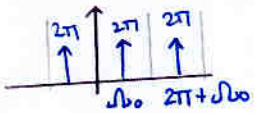
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

Transformada Fourier

$$n \cdot x(n) \longleftrightarrow j\frac{dX}{d\Omega}$$

$$\alpha^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

$$e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow$$



$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Transformada Z

$$n^k x(n) \longleftrightarrow \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k X(z)$$

$$a^n x(n) \longleftrightarrow X(z/a)$$

$$A_i\, p_i^{n-1} u(n-1) \longleftrightarrow \frac{A_i z^{-1}}{1 - p_i z^{-1}} = \frac{A_i}{z - p_i}$$

Serie de Fourier

$$x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Procesos estocásticos:

$$m_y = m_x \sum h(n)$$
$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum h^2(n)$$
$$R_{yy} = R_{xx} * h^*(-m) * h(m)$$

$$m_y = m_x H(0)$$
$$S_{yy} = S_{xx} |H(\Omega)|^2$$

TEMA 1. SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS

$x(t_n) =: x(n)$

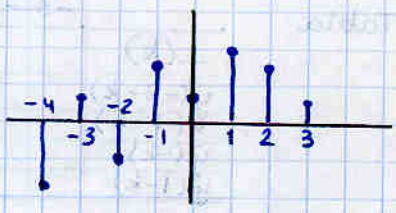
Secuencias periódicas:

$\Leftrightarrow \; x(n) = x(n+N)$

N entero := periodo fundamental

Representación:

1. $x(n) = 5\,\text{sen}(3n)$
2. $x(n): [3, \frac{1}{2}, -2, 5, 1, 0, 6]$ con origen en el 3º elemento
3. graficamente



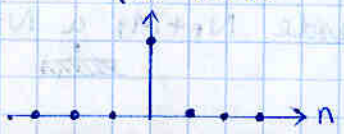
Desplazamiento temporal

$x(n-k)$ k entero

Señales discretas

Impulso unidad

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Escalón unidad

$$u(n) = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$

Secuencia exponencial

$\boxed{x(n) = C\alpha^n}$ $\quad C = |C|e^{j\phi}$, $\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$ $\Rightarrow$ si C y α reales $x(n)$ exponencial creciente/decrec.

$\Rightarrow$ caso general

$x(n) = |C||\alpha|e^{j(\Omega_0 n + \phi)}$

haciendo $x(n+N) = x(n)$ se demuestra que:

$x(n)$ periódica $\Longleftrightarrow$ su pulsación fundamental $\Omega_0 = \frac{m}{n} 2\pi$ es un número racional por 2π (n: periodo)

la pulsación Ω_0 y $\Omega_0 + 2\pi$ es la misma

$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n}$

la TF es 2π-periódica

Sistemas discretos

$\boxed{\text{Respuesta al impulso } h(n) = L[\delta(n)]}$

$\boxed{y(n) = x(n) * h(n)}$ $\rightarrow$ Propiedad: sistema identidad $h(n) = \delta(n)$

convolución discreta

$y(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$ $\rightarrow$ conmutativa

$z(n) = x(n) \cdot y(n)$

$z(n)$ será periódica si $x(n)$ e $y(n)$ lo son y su periodo será el mínimo comun multiplo del de x y de y.

Clasificación de h(n) según número de elementos

FIR – nº finito de elementos no nulos

IIR – nº infinito de elem no nulos

Estabilidad

* $\sum_n |h(n)| < \infty$

* BIBO

$\boxed{\text{sistema FIR} \Rightarrow \text{sistema estable}}$

(y acotado) → siempre supondremos esto

Cálculo de convoluciones

1- Tabla

	-3	-2	-1	0	1	2	3	n	$z(n) = x(n) * y(n)$
$x(k)$									
$y(-2-k)$								-2	
$y(-1-k)$								-1	
$y(-k)$								0	
$y(1-k)$								1	

sólo válido para funciones muy sencillas

2- Expresión analítica $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$

$$\boxed{\text{util: } \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{a_1 - \overbrace{a_n}^{\text{suele ser } a_{n+1}} r}{1-r}}$$

NOTAS:

- $x(n)$ con N elementos
  $y(n)$ con M elementos
  $x(n) * y(n)$ tiene $N+M-1$

- $x(n)$ desde N_1 a N_2
  $y(n)$ desde M_1 a M_2
  $x(n) * y(n)$ desde N_1+M_1 a N_2+M_2

Sistemas ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, x(n-k)$$

equivalente a ecuaciones diferenciales en continuo

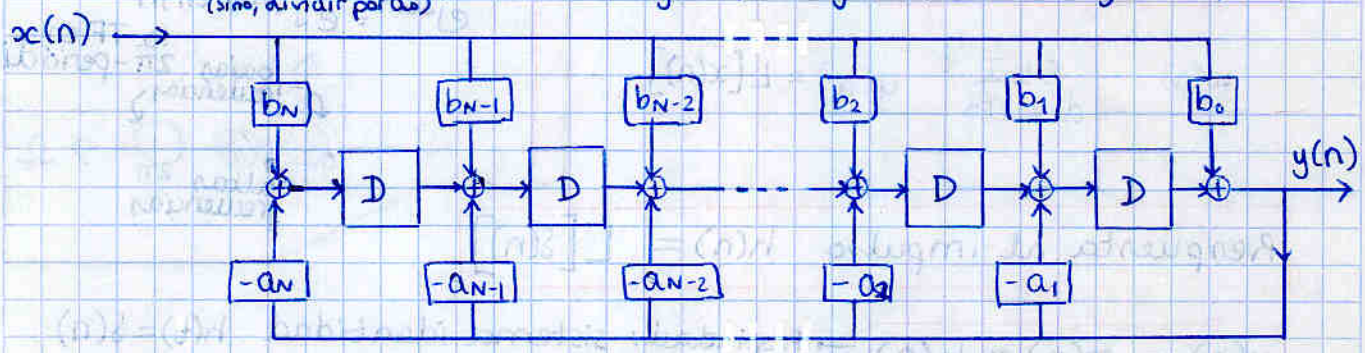
operador $\boxed{D^k x(n) = x(n-k)}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k D^k y(n) = \sum^{M} b_k D^k x(n)}$$

si c.i. nulas
$D^k y(n_0) = 0$
i.e. $y(n) = 0 \ \forall n < n_0$ $\Rightarrow$ la ecuación equivale a un SLI discreto

además: - si $N = M$
- si $a_0 = 1$ (sino, dividir por a_0)

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots + b_N x(n-N) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \ldots - a_N y(n-N)$$



Determinación de h(t) a partir de la ec. en diferencias

suponemos h(n) causal.

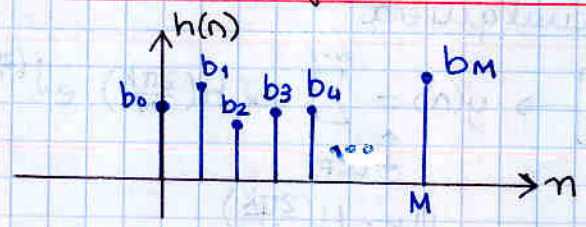
cualquier h(n) de un SLI discreto se puede escribir :

$$\boxed{h(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k h(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k \delta(n-k)}$$

* $\boxed{\text{Sistema FIR} \equiv h(n) \text{ finita} \Leftrightarrow a_k = 0}$ (salvo $a_0 = 1$)

ej: $h(n) = 5\delta(n-1) + 10\delta(n-2)$

h(n) es trivial



* $\boxed{\text{Sistema IIR} \equiv h(n) \text{ infinita} \Leftrightarrow \text{algun } a_k \neq 0}$

ej $h(n) = \underline{0'5\, h(n-1)} + \delta(n)$

$n=0 \quad h(0) = b_0$

$n=1 \quad h(1) = -a_1 h(0) + b_1$

$\vdots$

$n=M \quad h(M) = -a_1 h(M-1) - a_2 h(M-2) - \dots - a_M h(0) + b_M$

$\vdots$

∞

TEMA 2: ANALISIS DE FOURIER

Series de Fourier

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

siempre existe convergencia

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\boxed{\begin{array}{l} x(n) \text{ periódica periodo } N \\ \Downarrow \\ \text{los coef } a_k \text{ tambien} \\ \text{secuencia periódica} \\ \text{periodo } N \end{array}}$

Propiedades:

- Linealidad
- Desplaz. temporal $x(n-m) \leftrightarrow a_k e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$
- convolución: $x_1(n) \circledast x_2(n) \longleftrightarrow N \cdot a_{1k} \cdot a_{2k}$

  $= \sum_{m=0}^{N-1} (x_1(m) - x_2(n-m))$
- Producto: $x_1(n) \cdot x_2(n) \longleftrightarrow a_{1k} \circledast a_{2k}$
- Teorema parseval:

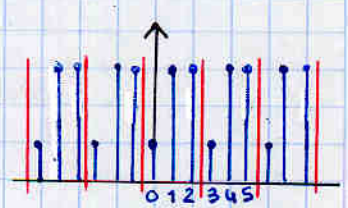
  $$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{1k} a_{2k}^*$$

  caso particular $x_1(n) = x_2(n)$

  Pot. media $= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2$
- periodicidad: $a_k = a_{k+N}$
- simetria:

además: si $x(t)$ es real: combinado con periodicidad

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k = a_{-k}^* \\ a_k = a_{N-k}^* \end{array}}$$



$a_1 = a_{3-1}^* = a_2^*$

en una sec con coeficientes $\left.\begin{array}{l} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{array}\right\}$ se cumple $a_1 = a_2^*$

SLI con entradas periódicas. Respuesta en frecuencia:

$$e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLI}\\ h(n)\end{matrix}} \longrightarrow \quad y(n) = H(\Omega_0)\cdot e^{j\Omega_0 n}$$

$$= |H(\Omega_0)|\, e^{j(\Omega_0 n + \measuredangle H(\Omega_0))}$$

la exponencial es una autofunción

siendo $H(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, e^{-j\Omega m}$ respuesta en frecuencia

para una señal $x(n)$ cualquiera

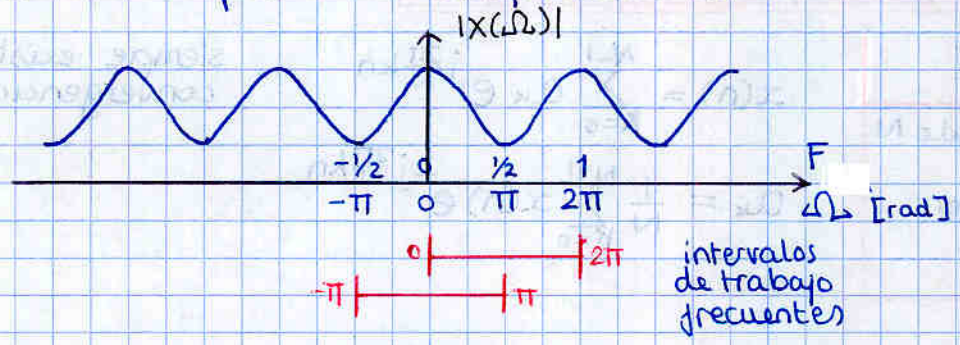
$$\boxed{\begin{array}{ccccc} x(n) = \sum^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & \longrightarrow & \boxed{\begin{matrix}\text{SLI}\\ H(n)\end{matrix}} & \longrightarrow & y(n) = \sum^{N-1} a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}n\right)} \\ \updownarrow \text{DSF} & & & & \updownarrow \text{DSF} \\ a_k & & & & a_k \cdot H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \end{array}}$$

Transformada de Fourier de una secuencia discreta

$$\boxed{\begin{aligned} X(\Omega) &= TF\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\Omega n} \\ x(n) &= TF^{-1}[X(\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \end{aligned}}$$

cond. de existencia: $\sum |x(n)| < \infty$ absolutamente sumable

La TF será periódica de periodo 2π



$F = \frac{\Omega}{2\pi}$

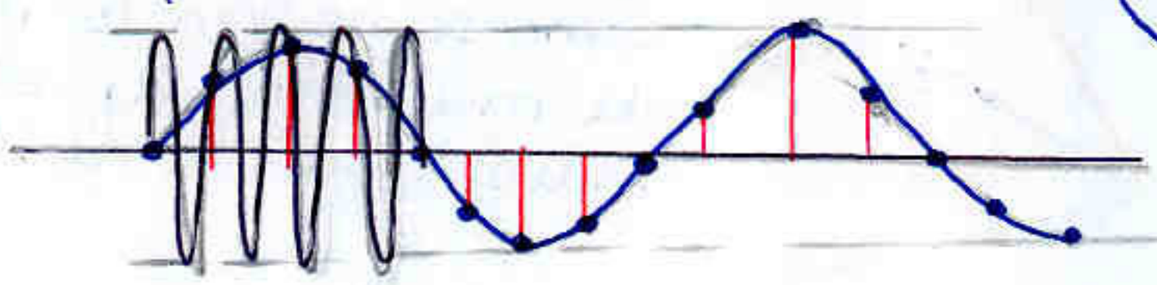
Ejemplo serie de Fourier

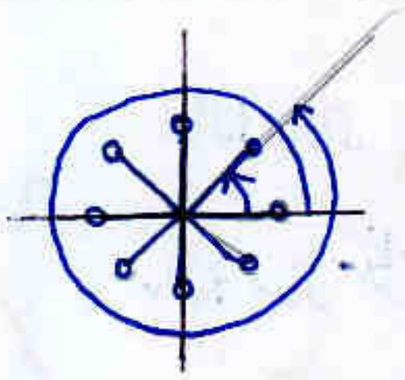
$$x(n) = \{\ldots, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 1, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots\}$$

Periodo: $x(n) = x(n+N)$ $\quad N = 8$

Pulsación: $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N} = \dfrac{2\pi}{8}$

aunque también podría ser:





$\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{8}$

$\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{8} + 2\pi$

$\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{8} + 4\pi$

$\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{8}(1+m)$

son indistinguibles una pulsación de otra.

Si aplicamos la definición de serie de Fourier

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

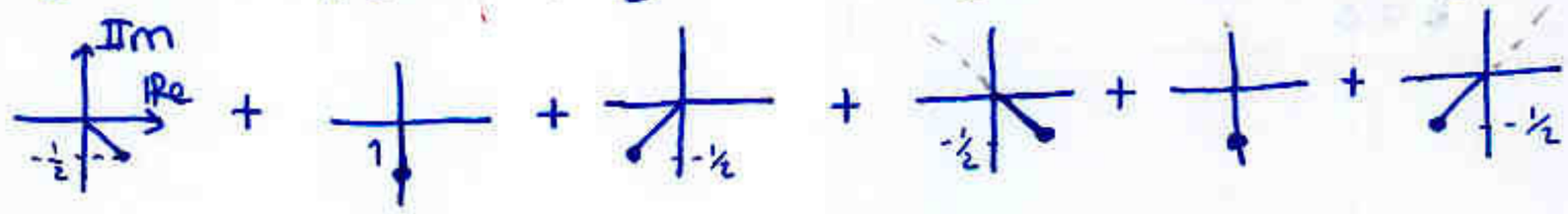
Ω_0

$$a_0 = \frac{1}{8}\left[x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + \ldots + x(7)\right] = 0 \Rightarrow \text{componente continua}$$

$$a_1 = \frac{1}{8}\left[x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{N}} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} + x(3)e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 3} + \ldots + x(7)e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 7}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} + 1e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} + -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{5\pi}{4}} - 1e^{-j\frac{3\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{7\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\Big[$$



$$\Big]$$

$$= \frac{-4j}{8} = -\frac{1}{2}j$$

$$a_2 = \frac{1}{8}\left[x(0) + x(1)e^{-j\frac{4\pi}{N}} + x(2)e^{-j\frac{8\pi}{N}} + x(3)e^{-j\frac{12\pi}{N}} + \ldots + x(7)e^{-j\frac{28\pi}{N}}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} + 1e^{-j\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{6\pi}{4}} + -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{10\pi}{4}} + -1e^{-j\frac{6\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{14\pi}{4}}\right]$$

$$= 0$$

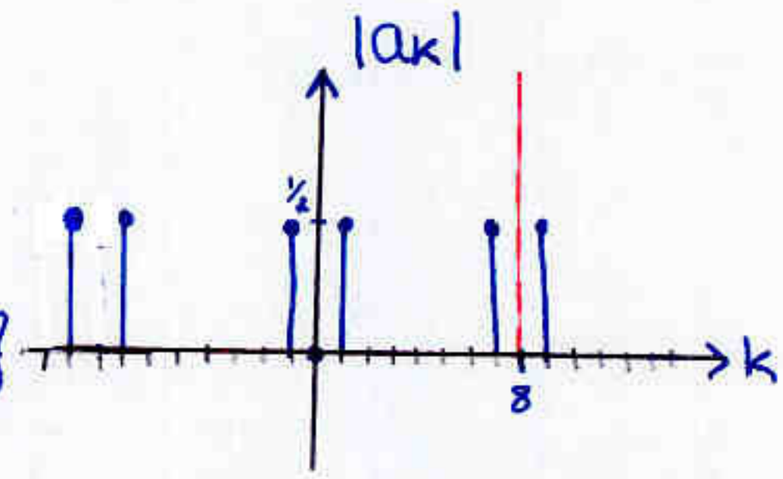
$a_3 = 0$

$a_4 = 0$

$\boxed{a_k = a^*_{N-k}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_k = a^*_{-k}}$

$\{a_1 = a_7^* \quad a_2 = a_6^* \quad a_3 = a_5^* \quad a_4 = a_4^*\}$

$a_7 = \frac{1}{2}j \quad a_6 = 0 \quad a_5 = 0$

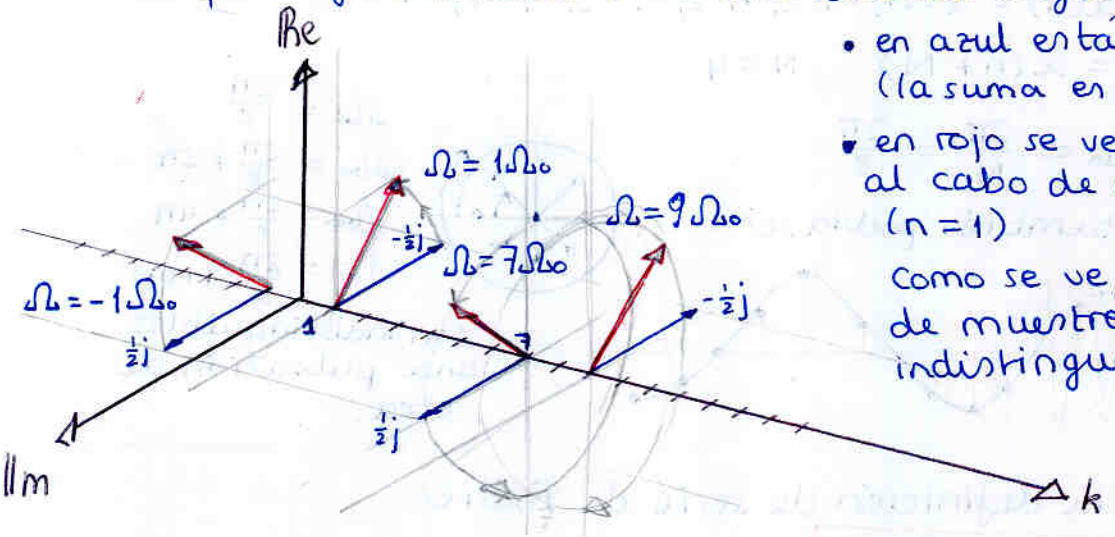


Como vemos, tiene módulo par y fase impar
$\Leftrightarrow$ es real

En efecto, el DSF es periódico de periodo N

Representación 3D by Pak!

Sabiendo que el fasor k-ésimo tiene una velocidad angular $k\Omega_0$



- en azul están los coeficientes (la suma en la señal en n=0)
- en rojo se ven los fasores al cabo de un muestreo (n=1)

Como se ve, en los instantes de muestreo a_1 es indistinguible de a_9

Ademas, en cada muestreo, la suma total de fasores es SIEMPRE real

Ademas, si en cada instante de muestreo sumamos todos los fasores de un mismo periodo, obtenemos exactamente el valor de la señal en ese instante;
lo cual es exactamente lo que nos dice la fórmula:

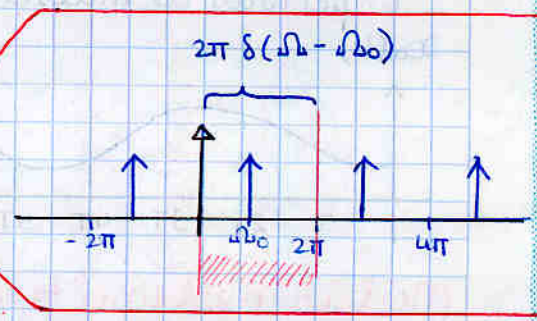
$$\boxed{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

Algunas TF típicas

$$\alpha^n \cdot u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

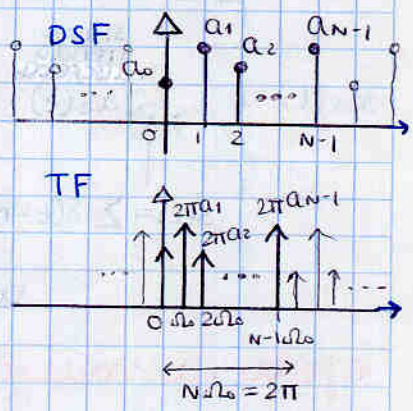
$$e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-\underbrace{2\pi m}_{\text{repite la } \delta})$$

$$1 \longleftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-2\pi m)$$



$x(t)$ cualquiera

$$\overset{DSF}{=} \sum_{0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \longleftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k\,\delta(\Omega-\tfrac{2\pi}{N}k-2\pi m)$$



el DSF y la TF dan la misma información

DSF → N-1 periódica, delta discreta cada entero

TF → 2π-periódica, delta continua cada multiplo de Ω_0

Propiedades:

- Linealidad
- Desplaz. temp: $x(n-n_0) \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
- Diferenciación $n \cdot x(n) \longleftrightarrow j\frac{dX}{d\Omega}$
- convolución $x(n) * y(n) \longleftrightarrow X(\Omega)\cdot Y(\Omega)$
- asociación de sistemas
- modulación: $x_1(n)\cdot x_2(n) \longleftrightarrow X_1(\Omega) * X_2(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cdot\, d\theta$

  $x(n)\cdot e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$
- Teorema Parseval

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\cdot y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)Y^*(\Omega)\,d\Omega$$

$$\sum |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega = \text{Energia}$$

- pequeñas propiedades:
  - $x(-n) = X(-\Omega)$
  - $x^*(n) = X^*(-\Omega)$

  ⇒ $x(n)$ real ⇒ $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$

Recordatorio: Transformada de Fourier continua vs. discreta

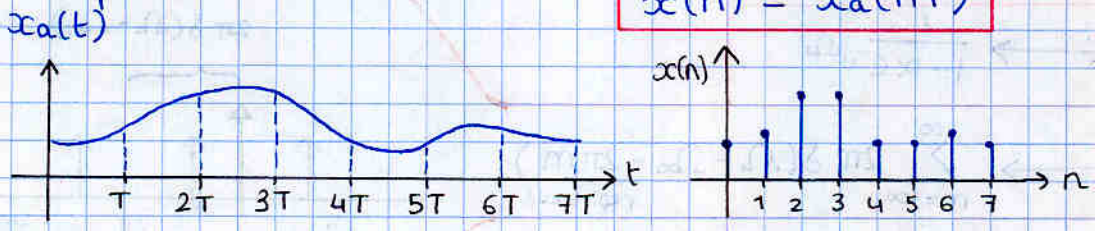
$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\,e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

$$X_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \qquad X(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)\,e^{-j\Omega n}$$

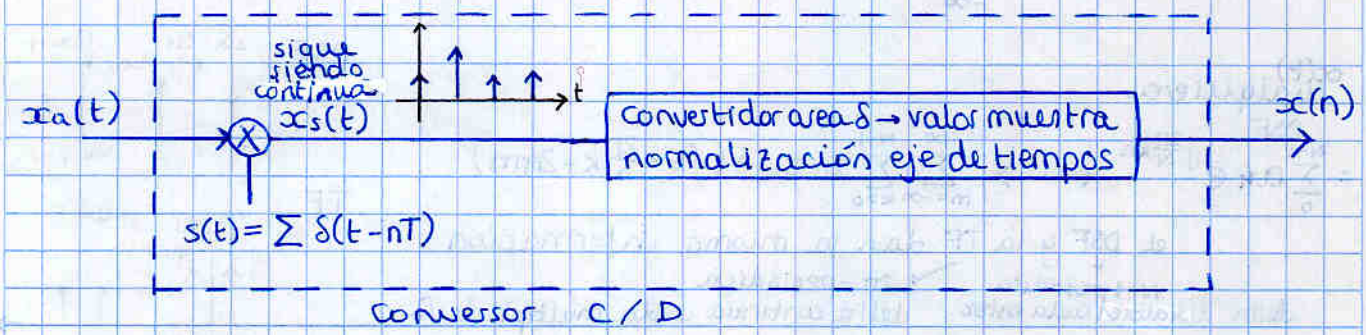
Muestreo de señales continuas

T: periodo de muestreo

$$\boxed{x(n) = x_a(nT)}$$



Modelo matemático de conversión C/D

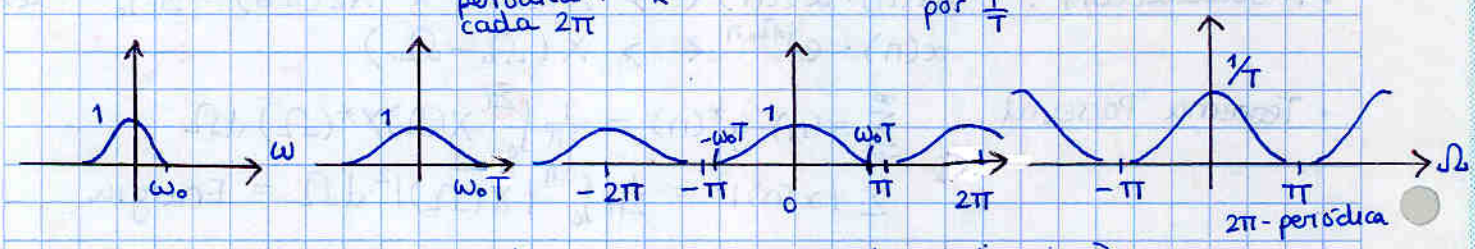


Efecto de muestreo en el dominio frecuencial

sustituyendo $x_a(nT)$ en la expresión de la TF^{-1}, y haciendo que se parezca a la TF^{-1} de $x(n)$ se obtiene

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_k \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\Omega + 2\pi k}{T}\right)}$$

$$X_a(\omega) \xrightarrow[\text{escalado}]{} X_a\left(\frac{\omega}{T}\right) \xrightarrow[\text{periodicam. cada } 2\pi]{\text{repetir}} \sum_k X_a\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T}\right) \xrightarrow[\text{por } \frac{1}{T}]{\text{multiplic}} X(\Omega)$$

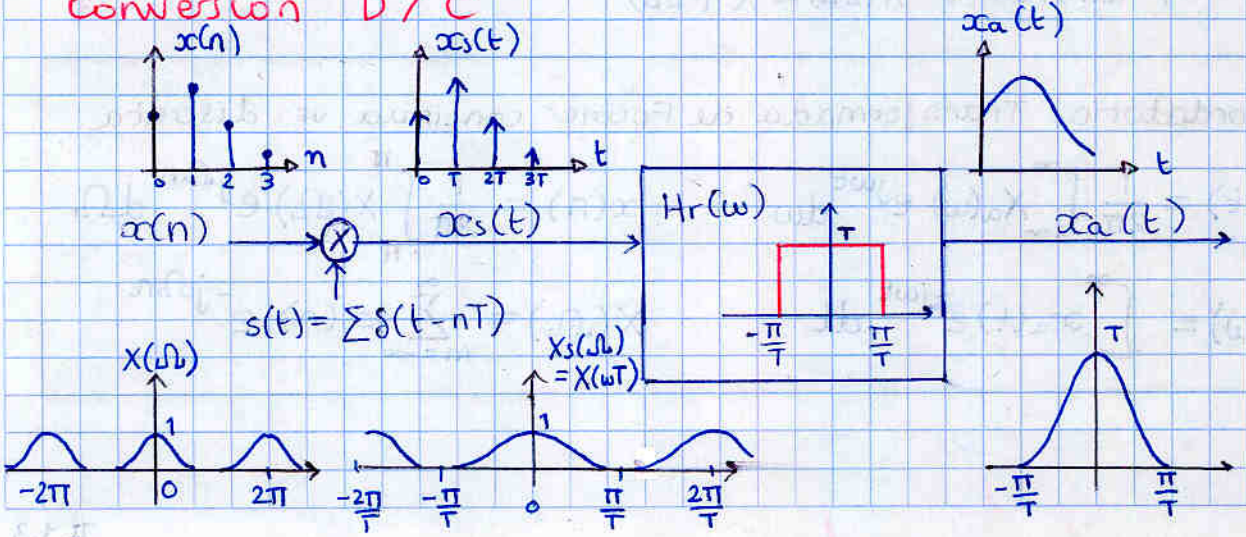


para que no haya solapamiento: (aliasing)

$$\omega_0 T \leq \pi \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = 2\pi f_0 \\ T = \frac{1}{f_s} \end{array} \right\} \Rightarrow f_s \geq 2 f_0 \Rightarrow \boxed{f_s \geq 2B \quad \text{Teorema de Nyquist}}$$

si justo $f_s = 2f_0 \Rightarrow \omega_0 T = \frac{2\pi f_0}{f_s} = \pi$

Conversión D/C



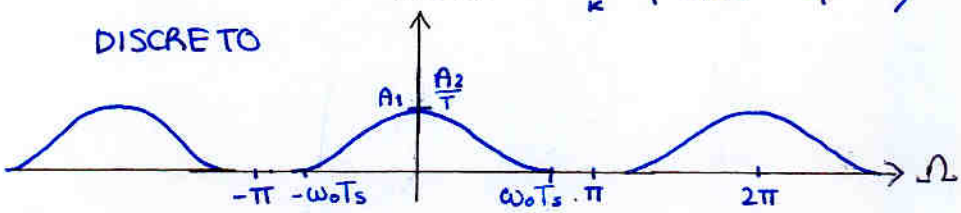
HOJA EXTRA DE REFERENCIA

Espectro de señales discretas ⟷ continuas

$x(n)$
señal discreta

TF: $X(\Omega) = \sum_k \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\Omega + 2\pi k}{T}\right)$

DISCRETO



$\boxed{2\pi\text{- periódica}}$

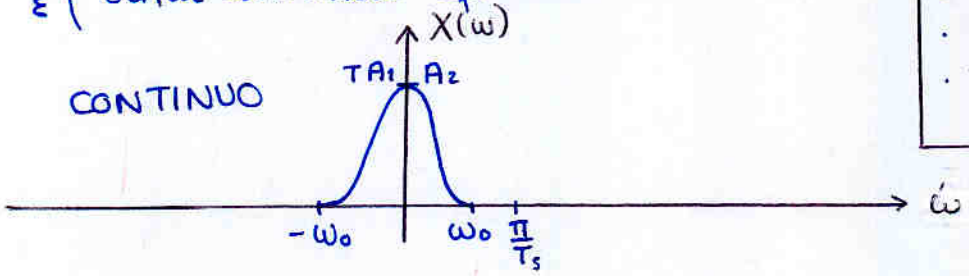
T_s: frecuencia de muestreo

$\boxed{x(n) = x_a(n \cdot T_s)}$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

muestreo

$x_a(t)$
señal continua equivalente

CONTINUO



- ya no es 2π periódica
- eje escalado en factor T
- 'amplitud' T veces mayor

Es facil comprobar que para pasar de una a otra sin perder información

$\omega_0 T_s \leq \pi$

$\omega_0 \leq \frac{\pi}{T_s}$

$2\pi f_0 \leq \pi f_s$

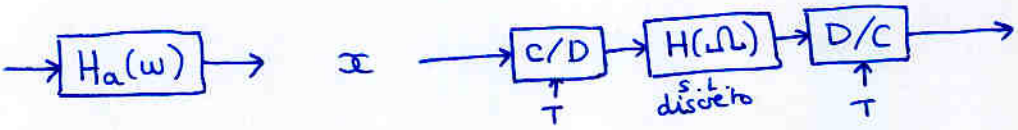
en el gráfico de $X(\omega)$ se ve que el ancho de banda $B = \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0$

además $T_s = \frac{1}{f_s}$ frecuencia de muestreo

Teorema de Nyquist. → $\boxed{f_s \geq 2B}$

$f_s \geq 2 f_0$

Creación de SL continuos a partir de discretos



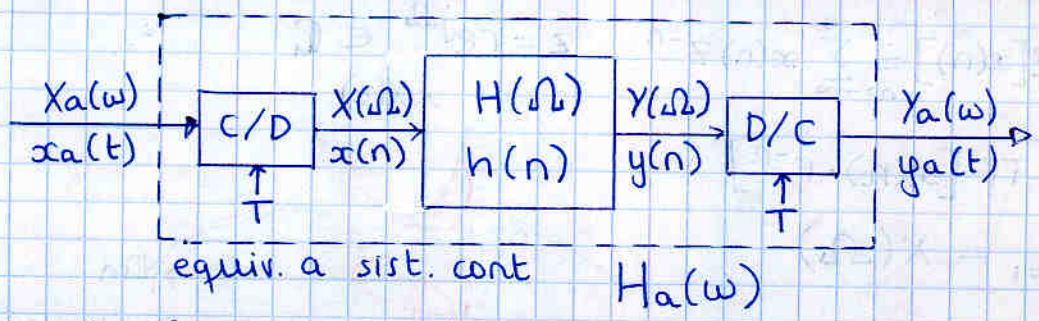
cuidado porq $H(\Omega)$ no es simplemente el equivalente discreto de $H_a(\omega)$ → $h(n) \neq h_a(nT)$

sino que es T veces el equivalente discreto

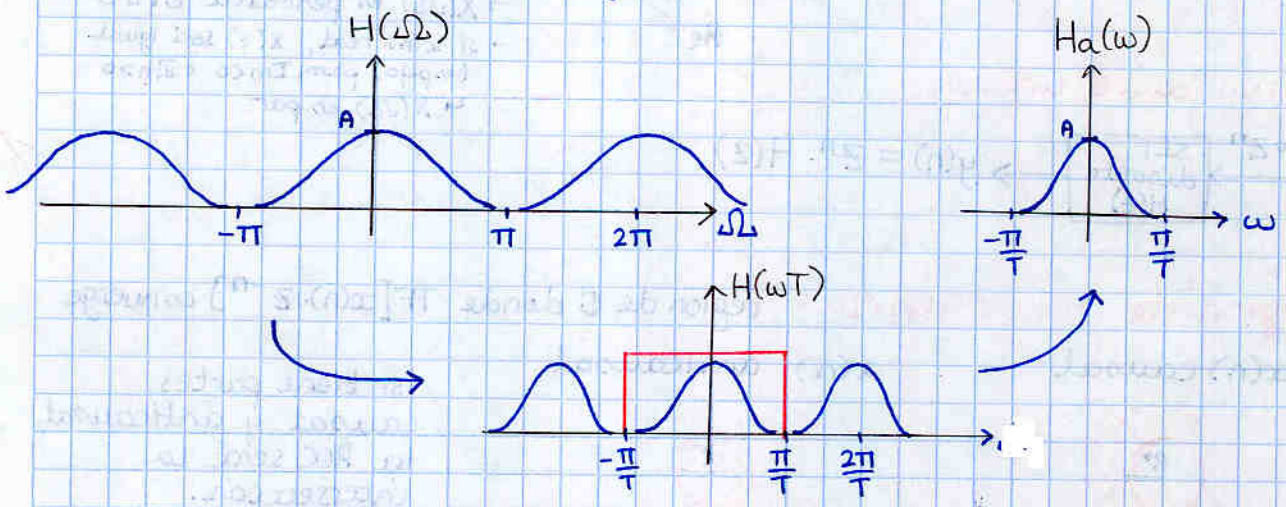
$$h(n) = T \cdot h_a(nT)$$

Esto hace que sus TF tengan la misma 'altura'

Procesado en el tiempo de señales continuas



la relación entre $H_a(\omega)$ y $H(\Omega)$ es:



$$H_a(\omega) = H(\omega T)\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)$$

$$H(\Omega) = \sum_k H_a\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T}\right)$$

comparando con expresiones de conversión

$$h(n) = T \cdot h_a(nT)$$

TEMA 3. TRANSFORMADA Z

Definición

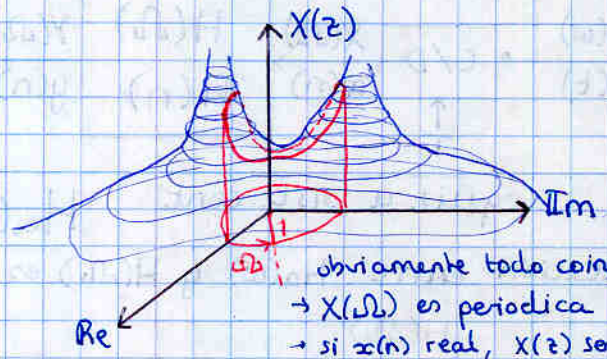
$$X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad z = re^{j\Omega} \in \mathbb{C}$$

$$X(z) = TF[x(n) \cdot r^{-n}]$$

$$X(z)\Big|_{r=1} = X(\Omega)$$

$$\parallel$$

$$X(e^{j\Omega})$$



obviamente todo coincide:
→ $X(\Omega)$ es periodica en Ω
→ si $x(n)$ real, $X(z)$ será igual (espejo) para $Im<0$ e $Im>0$
↳ $X(\Omega)$ es par

- **Nueva autofunción**

$$x(n)=z^n \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLI}\\ \text{discreto}\\ H(z)\end{matrix}} \longrightarrow y(n) = z^n \cdot H(z)$$

- **Region de convergencia:** region de $\mathbb{C}$ donde $TF[x(n) \cdot z^{-n}]$ converge

$x(n)$ causal

ROC $|z| > R^+$

$x(n)$ anticausal

ROC $|z| < R^-$

si tiene partes causal y anticausal, la ROC será la intersección.

si $x(n)(R^+e^{j\Omega})^{-n}$ converge
$\Rightarrow$ es $> x(n)(re^{j\Omega})^{-n}$
$r > R^+$
$n \geq 0$

Propiedades:

- Linealidad
- Desplazamiento $x(n-n_0) \Leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$ ROC puede variar en 0 o ∞
- Escalado en z $a^n x(n) \longleftrightarrow X(z/a)$
- Diferenciación en z $n^k x(n) \longleftrightarrow (-z\frac{d}{dz})^k X(z)$

- Teoremas valor inicial y final

		condiciones:
valor inicial:	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$	$[x(n)$ causal$]$
valor final:	$\lim_{z\to 1} X(z)(1-z^{-1}) = x(\infty)$	$[\exists\ x(\infty)]$

- **Sistema retardador**

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(z) = z^{-1}} \longrightarrow x(n-1)$$

Transformadas Z racionales

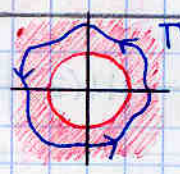
$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i' z^{i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i' z^{i}}$$

} ceros: raices del nominador $(z-z_1)(z-z_2)\ldots$

} polos: raices del denominador $(z-p_1)(z-p_2)\ldots$

↓ Estan fuera de la ROC

Transformada Z inversa



cualquier contorno cerrado en la ROC

- Método integración $x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$

- Transformadas conocidas + propiedades

- Desarrollo en series polinómicas

$$X(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots$$
$$\downarrow$$
$$x(n) = a_0 \delta(n) + a_1 \delta(n-1) + a_2 \delta(n-2) + \ldots$$
$$= [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

- Descomposición en fracciones simples:

$$X(z) = \frac{\sum_{0}^{M} b_i z^{i}}{\sum_{0}^{N} a_i z^{i}} = \underbrace{\frac{b_M}{a_M}}_{\text{si } M=N} + \sum_{1}^{N} \frac{A_i}{z-p_i}$$

p_i = polos

$A_i = (z-p_i) X(z)\big|_{z=p_i}$

$$X(z) = \frac{b_M}{a_M} + \sum \frac{A_i z^{-1}}{1-p_i z^{-1}}$$

$$\swarrow$$

$$x(n) = \frac{b_M}{a_M} \delta(n) + \sum_{1}^{N} A_i (p_i)^{n-1} u(n-1)$$

SLI's discretos racionales

SLI con condiciones iniciales nulas: $\sum_{0}^{N} a_k D^k y(n) = \sum_{0}^{M} b_k D^k x(n)$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum b_k z^{-k}}{\sum a_k z^{-k}}$$

ej: $y(n) = 0'5\, x(n) + 0'2\, x(n-1)$

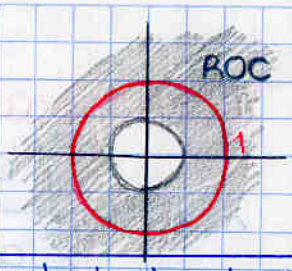
$\Rightarrow H(z) = 0'5 + 0'2 z^{-1} \rightarrow h(n) = 0'5\delta(n) + 0'2\delta(n-1)$

ej: $y(n) = x(n) + 0'3\, x(n-1) + 0'1\, y(n-1)$

$\Rightarrow Y(z)[1-0'1 z^{-1}] = X(z)[1+0'3 z^{-1}] \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+0'3 z^{-1}}{1-0'1 z^{-1}}$

- Estabilidad de SLI discretos

$$TZ \begin{cases} \sum_n |h(n)| < +\infty \\ \sum_n |h(n) \cdot z^{-n}| < +\infty \text{ en } |z| = 1 \end{cases}$$



$\boxed{\text{Sistema estable} \Longleftrightarrow \text{circunferencia unidad dentro de ROC}}$

$\Rightarrow$ si causal: polos dentro de la circunf. unidad

- Sistema inverso

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \xrightarrow{y(n)} \boxed{\frac{1}{H(z)}} \longrightarrow x(n)$$

$\frac{1}{H(z)}$ sistema inverso.

Intercambia polos $\leftrightarrow$ ceros

$H(z)$ invertible :

$H(z)$ estable = polos de $H(z)$

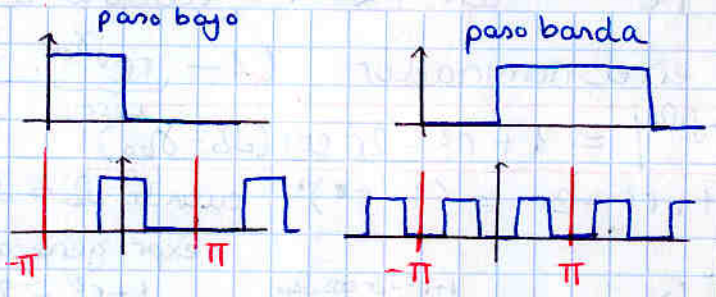
$\frac{1}{H(z)}$ estable = ceros de $H(z)$

} dentro de la circunferencia unidad (para SL causales)

TEMA 4. DISEÑO DE FILTROS ANALOGICOS Y DIGITALES

Continuo

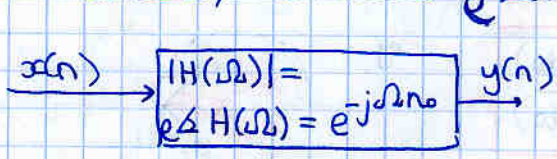
Discreto
{ 2π-periódico
{ fijarse en $(-\pi,\pi)$



similarmente:
- paso alto
- para banda

Importancia de la fase lineal

A veces la fase de un filtro cobra importancia (ej: tx de imagenes, vídeos)
Conviene que la respuesta en fase sea lineal, es decir $\angle H(\Omega) = e^{-j\Omega \cdot n_0}$

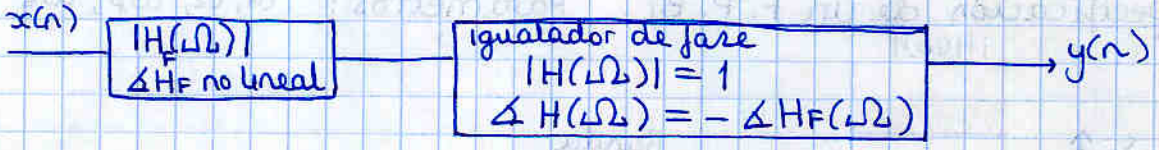


$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot |H(\Omega)| \cdot e^{-j\Omega n_0}$$
$$Y(\Omega) = X_F(\Omega)\, e^{-j\Omega n_0}$$
$\downarrow TF^{-1}$ señal filtrada deseada

$$y(n) = x_F(n - n_0)$$

no hay distorsión, sólo retraso.

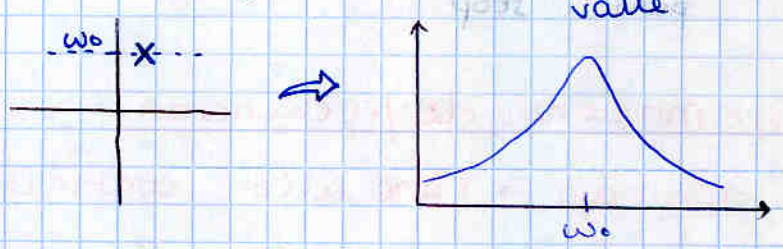
Si al diseñar un filtro no se consigue cumplir los dos requisitos a la vez ($|H(\Omega)|$ y $\angle H(\Omega)$) se pone un IGUALADOR de fase a la salida en cascada con el filtro.



Método de diseño aproximado: Fuerza Bruta

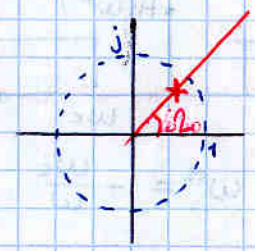
Continuo:

$H(s)$: Un polo / cero cercano a $j\omega_0$ introduce un pico / valle en $H(\omega_0)$



Discreto:

$H(z)$: Un polo / cero cercano a $e^{j\Omega_0}$ introduce un pico / valle en $H(\Omega_0)$



cuanto mas cercano esté el polo / cero a $j\omega_0$ en continua / $e^{j\Omega_0}$ en discreto, mayor será el efecto

Dem:

para un cero en $re^{j\Omega_0}$ con $r<\sim 1$ (cercano a $e^{j\Omega_0}$)

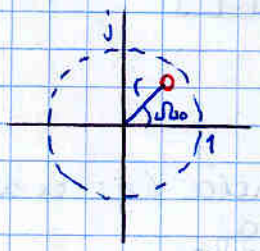
aparece un factor en el nominador $(1-\underbrace{re^{j\Omega_0}}_{\text{cero}}\cdot e^{-j\Omega})$ cuando Ω es Ω_0

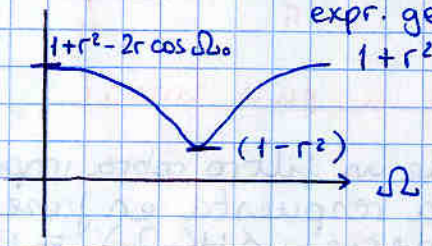
frec donde evaluamos

si r fuera 1, todo se anularia

$$\boxed{|1-re^{j\Omega_0}e^{-j\Omega}| = 1+r^2-2r\cos(\Omega-\Omega_0)}$$

• mínimo: $1+r^2-2r = (1-r)^2$ cuando $\Omega=\Omega_0$





expr. general de la curva: $1+r^2-2r\cos(\Omega-\Omega_0)$

$$\boxed{|H(\omega_0)| = \frac{\text{distancia de } e^{j\omega_0} \text{ a los ceros (producto)}}{\text{distancia a los polos (producto)}}}$$

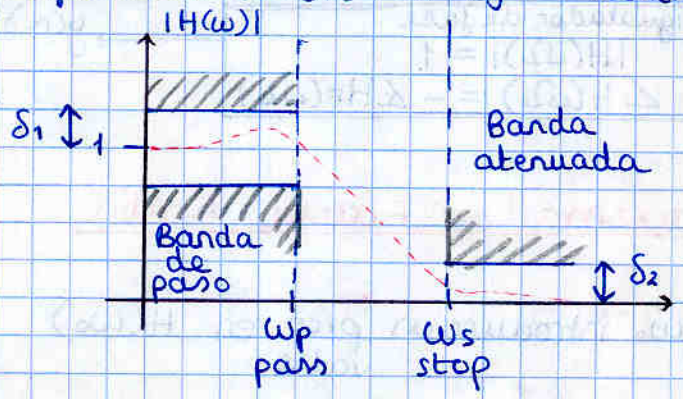
valido para pocos polos y ceros espaciados entre si.

ej

$$|H(0)| = \frac{|v_{z1}|\cdot|v_{z2}|}{|v_{p1}|\cdot|v_{p2}|\cdot|v_{p3}|}$$

Especificaciones para un filtro

ej. especificación de un F. P. Bj. Parámetros: $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$

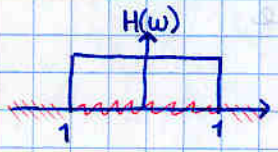


Transformaciones de frecuencias

ej: Paso bajo → Paso alto continuo

Paso Bajo

$H(s)$



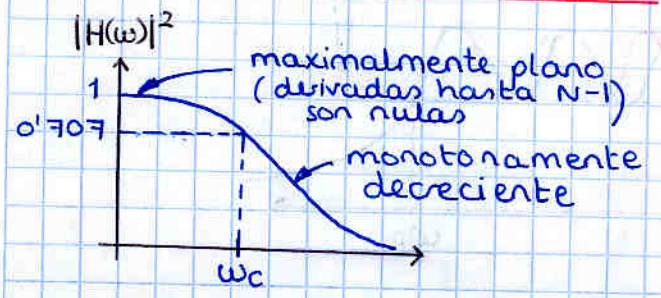
$$s = \frac{\omega_c}{s^\#}$$

Paso alto

$H(s^\#)$

$$\omega^\# = -\frac{\omega_c}{\omega}$$

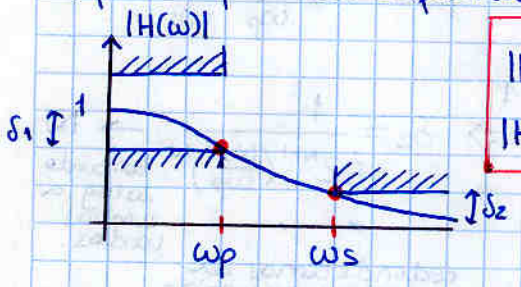
Filtro de Butterworth



$$\boxed{|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} \quad (1)$$

Diseño según especificaciones

Diseñamos el mas simple posible (que toque las esquinas)



$$\boxed{\begin{array}{l} |H(\omega_p)| = 1-\delta_1 \\ |H(\omega_s)| = \delta_2 \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{l} \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{1-\delta_1}\right)^2 - 1 \quad (2) \\ \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{\delta_2}\right)^2 - 1 \quad (3) \end{array}}$$

sistema 2x2 para hallar ω_c y N

1. haciendo $\frac{(1)}{(2)}$ se despeja N: $\quad N = \frac{1}{2}\,\frac{\log\frac{\delta_1(2-\delta_1)\delta_2^2}{(1-\delta_1)^2(1-\delta_2^2)}}{\log\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)}$

   - como N ha de ser entero → redondeo hacia arriba
     ↳ nos permite algo de holgadura
   - para hallar ω_c tenemos varias opciones
     - ajustar en ω_s
     - ajustar en ω_p ⟷ lo habitual es ajustar en ω_p

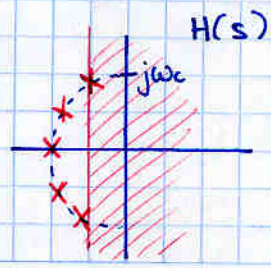
2. obtenido N, ajustamos en ω_p (de normal): $\quad |H(\omega_p)| = 1-\delta_1 \xrightarrow{(1)} \omega_c = \dfrac{\omega_s}{\left[\frac{1}{\delta_2^2}-1\right]^{1/2N}}$

Determinación de H(s)

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{P_N\left(\frac{s}{\omega_c}\right)}}$$

P_N: polinomio de Butterworth de orden N (estan tabulados)

- Si ganancia $\neq 1$ → mult. por cte
- Curiosidad:



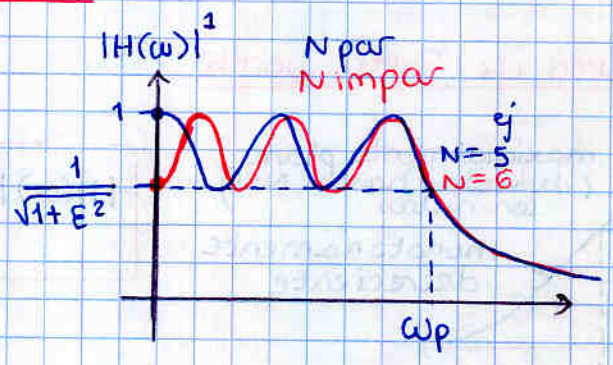
polos situados en circunf radio ω_c (no radio 1, no estamos en TZ) (en semiplano izquierdo por estabilidad)

Filtro de Chebyshev

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

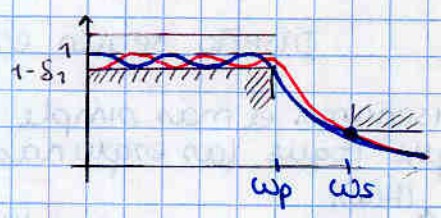
$\left.\begin{matrix}\varepsilon \\ N\end{matrix}\right\}$ variables

C_N : polinomio Chebyshev de orden N



Cálculo de ε y N

$$1-\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \longrightarrow \varepsilon$$



aproximación:
$x \uparrow\uparrow$ $N \uparrow\uparrow$

$$|H(\omega_s)| = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}} \xrightarrow{C_N(x) = 2^{N-1}\cdot x^N \gg 1} \delta_2 = \frac{1}{\varepsilon 2^{N-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^N} \rightarrow N$$

tomando 20log a ambos lados.

redondeamos al entero superior.

esta vez la holgura siempre estará en ω_s

Calculo de H(s) (no caerá en examen)

$$H(s) = \frac{A}{\prod_{i=0}^{N-1}(s-s_i)}$$

$s_i = \sigma_i + j\omega_i$ (polos de H(s))

$\sigma_i = \operatorname{sen}\left(\frac{2i-1}{N}\right)\frac{\pi}{2}\operatorname{senh}(\beta)$

$\omega_i = \cos\left(\frac{2i-1}{N}\right)\frac{\pi}{2}\cosh(\beta)$

con $\beta = \frac{1}{N}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

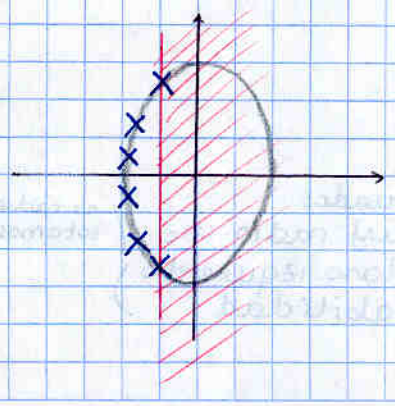
Calculo de A

sust H(s) en cero

$$|H(0)| = \frac{A}{\prod_{i=0}^{N-1}|(-s_i)|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & \text{si N par} \\ 1 & \text{si N impar} \end{cases}$$

Curiosidad

Los polos se encuentran sobre elipse (en semiplano izquierdo para sistema estable)



Diseño de Filtros digitales IIR

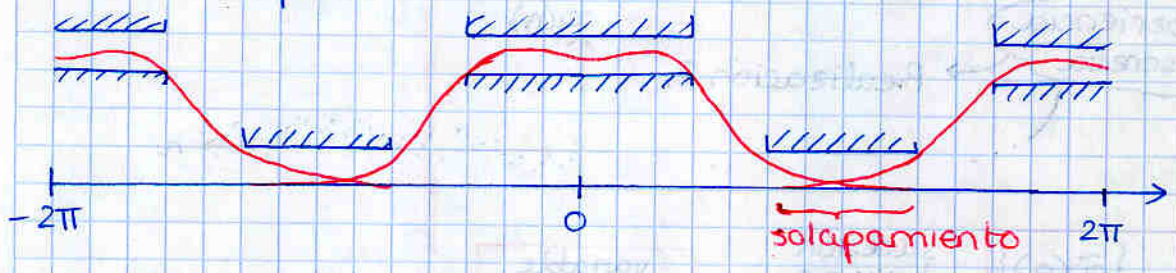
* Método respuesta al impulso invariante:

Esp. f. digital		Esp. f. analógico
δ_1, δ_2, Ω_p, Ω_s	$\xrightarrow[T=1]{\text{teorema muestreo}}$	δ_1, δ_2, ω_p, ω_s

se diseña el filtro analógico y se convierte en digital

$$H_a(s) \downarrow h_a(t) \xrightarrow[T=1]{h(n)=h_a(nT)} \begin{matrix} H(z) \\ \uparrow \\ h(n) \\ = h_a(n) \end{matrix} \Longrightarrow H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(\Omega + 2\pi k)$$

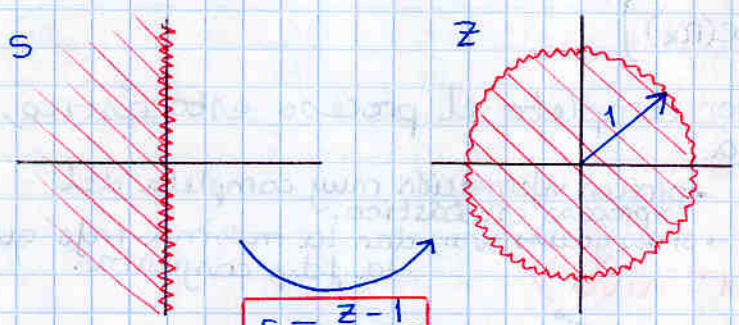
muestreamos la respuesta al impulso



Solo sirve para filtro paso bajo (el solapamiento no altera espectro)

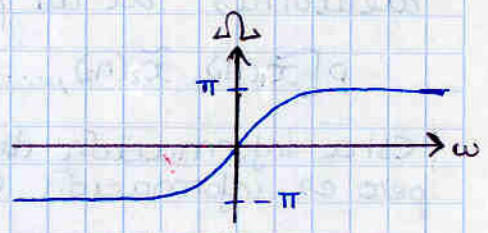
Si $H_a(s)$ racional		directamente aplicamos
$H_a(s) = \sum \frac{A_i}{s+p_i}$	$\Rightarrow$	$H(z) = \sum \frac{A_i}{1-e^{-p_i}z^{-1}}$

* Método transformación bilineal



$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

$\equiv$



$$\Omega = 2\,\mathrm{arctg}(\omega)$$

$$\omega = \mathrm{tg}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

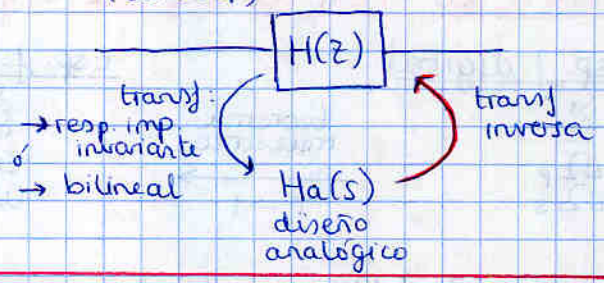
Esp. f. digital		Esp. f. analógico
δ_1, δ_2, Ω_p, Ω_s	$\xrightarrow[\text{Bilineal}]{\text{T.}}$	δ_1, δ_2, $\omega_p = \mathrm{tg}\left(\frac{\Omega_p}{2}\right)$, $\omega_s = \mathrm{tg}\left(\frac{\Omega_s}{2}\right)$

$$\longrightarrow H_a(s) \xrightarrow[\text{Bilineal inversa}]{\text{T.}} H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}$$

Cuidado:
no confundir las ecuaciones que aparecen en:

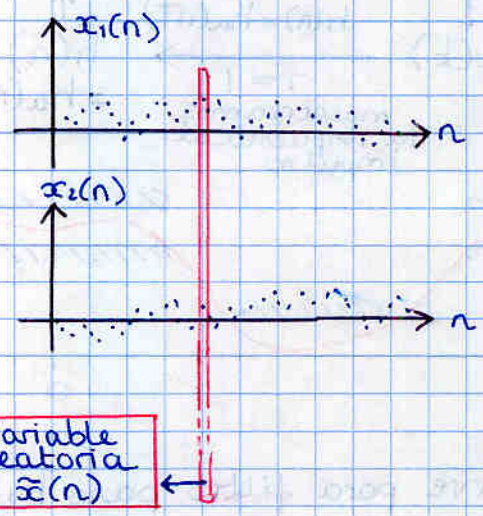
- Filtro analógico equivalente (tema 3)

- Diseño de filtro digital (tema 4)



TEMA 5. PROCESOS ESTOCÁSTICOS DISCRETOS

* Introducción



Proceso Estocástico $\{\tilde{x}(n)\}$ sucesión de v.v.a.a.

* Definiciones

- **Función densidad de probabilidad conjunta:**

Un vector que contiene las f.d.p. de todas las variables aleatorias de un proceso estocástico. $\forall n$

$$p[\tilde{x}(n_1), \tilde{x}(n_2), \ldots\ldots, x(n_k)]$$

Esta información define por completo el proceso estocástico, pero es información excesiva.

- **Valores representativos**
  - ofrecen información muy completa del proceso estocástico.
  - si es gaussiano, dan la misma info que la f.d.p conjunta.

↳ Valor instantáneo (1er nivel)

Valor medio: $\mu(n) = E[\tilde{x}(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n)\, p[\tilde{x}(n)] \cdot d\tilde{x}(n)$

Potencia media: $P(n) = E[|\tilde{x}(n)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)|^2\, p[\tilde{x}(n)]\, d\tilde{x}(n)$

Varianza: $\sigma^2(n) = E[|\tilde{x}(n) - E[\tilde{x}(n)]|^2]$

$$\boxed{P(n) = \mu(n)^2 + \sigma^2(n)}$$

↳ memoria o redundancia (2º nivel)

Autocorrelación: $R(n,k) = E[\tilde{x}(n) \cdot \tilde{x}^*(k)]$

Autocovarianza: $C(n,k) = E[(\tilde{x}(n) - E[\tilde{x}(n)]) \cdot (\tilde{x}^*(k) - E[\tilde{x}^*(k)])]$

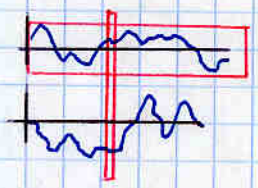
* Proceso estocástico estacionario:

- Información 1er nivel no depende de n
- Información 2º nivel depende de $(n-k)$

$$R(n-k) = R(m) = E[\tilde{x}(n+m)\tilde{x}^*(n)]$$
$$C(n-k) = C(m)$$

* Ergodicidad

media temporal = media estadística



* Densidad espectral de potencia

$$R(m) \xleftrightarrow{TF} S(\Omega)$$

una realización no permite TF por estar definido en potencia

$$R(m) = TF^{-1}[S(\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\Omega)e^{j\Omega m}\,d\Omega \qquad S(\Omega) = TF[R(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m)e^{-j\Omega m}$$

Propiedades

- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\Omega)\,d\Omega = \boxed{R(0) = \text{Potencia media}}$
- $R(m) = R^*(-m) \Rightarrow \boxed{S(\Omega) \text{ real}}$
- $\boxed{S(\Omega) \geq 0}$ (no ∃ pot negativas)

- Relaciones de filtrado

util cuando $h(m)$ son deltas. sino, sacar S_{YY} y hacer TZ

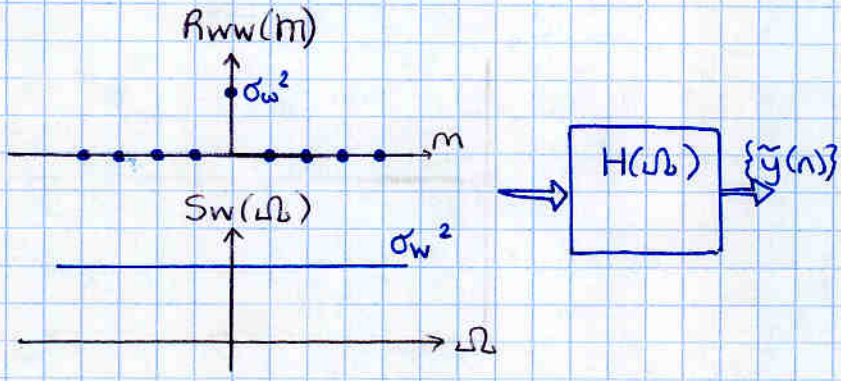
$$\boxed{\begin{aligned} m_y &= [\textstyle\sum h(n)]\,m_x \\ \sigma_y^2 &= [\textstyle\sum h^2(n)]\,\sigma_x^2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{m_y = H(0)\cdot m_x}$$

$$\boxed{R_{YY}(m) = R_{XX}(m) * h^*(-m) * h(m)}$$

$$\boxed{S_{YY}(\Omega) = S_{XX}(\Omega)\cdot|H(\Omega)|^2}$$

Ruido blanco de media nula $\{\tilde{w}(n)\}$



$$m_y = 0$$

$$\boxed{S_{YY}(\Omega) = \sigma_w^2\cdot|H(\Omega)|^2}$$

ya no es blanco

$$\sigma_y^2 = \sigma_w^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|^2$$

$$\text{Pot} = \sigma_w^2$$

$$m_w = 0$$

Examenes de Sistemas Lineales II

Junio 2004

Problema 1

a) $x(n)$ real, periódica $N = 5$

Se sabe: $a_0 = 2$

$a_2 = 3e^{j\frac{\pi}{6}}$

$a_4 = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$

• calcular el resto de coeficientes

aplicamos: $\boxed{a_k = a^*_{N-k}}$

$a_1 = a_4^* = 2e^{-j\frac{\pi}{3}}$

$a_3 = a_2^* = 3e^{-j\frac{\pi}{6}}$ ✓

• exprésese $x(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k n + \phi_k)$

sabiendo $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

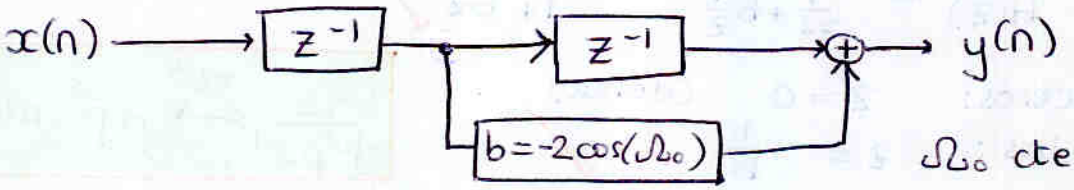
$$= 2 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{5}n} + 3e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{4\pi}{5}n} + 3e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{6\pi}{5}n} + 2e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{8\pi}{5}n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{j\frac{6\pi}{5}n} = e^{j(\frac{6\pi}{5} - \underbrace{\frac{10\pi}{5}}_{2\pi})n} = e^{-j\frac{4\pi}{5}n} \\ e^{j\frac{8\pi}{5}n} = e^{j(\frac{8\pi}{5} - \frac{10\pi}{5})n} = e^{-j\frac{2\pi}{5}n} \end{array} \right\}$$

$$= 2 + 2e^{j(\frac{2\pi}{5}n - \frac{\pi}{3})} + 2e^{-j(+\frac{2\pi}{5}n - \frac{\pi}{3})} + 3e^{j(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{6})} + 3e^{-j(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{6})}$$

$$= 2 + 4\cos(\tfrac{2\pi}{5}n - \tfrac{\pi}{3}) + 6\cos(\tfrac{4\pi}{5}n + \tfrac{\pi}{6})$$ ✓

b) Obtener $|H(\Omega)|$ de



Ω_0 cte conocida

$y(n) = x(n-2) + -2\cos(\Omega_0)x(n-1)$

$Y(\Omega) = X(\Omega)e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} + bX(\Omega)e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \left[e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} + be^{-j\frac{2\pi}{N}}\right] = e^{-j2\Omega} + be^{-j\Omega}$$ ✓

obtener $y(n)$ si $x_1(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n + 30^\circ\right)$

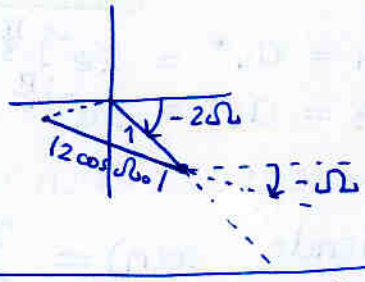
y $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$

$$y(n) = x(n-2) - 2\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} x(n-1)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n-2) \\ &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}(n-2) + 30^\circ\right) \\ &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right) \end{aligned}$$

Obtener $|H(\Omega)|$

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= e^{-j2\Omega} + b e^{-j\Omega} \\ &= e^{-j2\Omega} - 2\cos(\Omega_0)\, e^{-j\Omega} \end{aligned}$$



$$|H(\Omega)| =$$

$$= \sqrt{\left[(-2\cos\Omega_0)\cos\Omega + \cos 2\Omega\right]^2 + \left[\text{sen}\, 2\Omega - (2\cos\Omega_0)\,\text{sen}\,\Omega\right]^2}$$

$$= \sqrt{\left(b^2\cos^2\Omega + 2b\cos\Omega\cos 2\Omega + \cos^2 2\Omega + \text{sen}^2 2\Omega - 2\,\text{sen}(2\Omega)\, b\,\text{sen}\,\Omega + b^2\,\text{sen}^2\Omega\right)}$$

$$= \sqrt{b^2 + 1 + 2b\left(\cos\Omega\cos 2\Omega - \text{sen}\,\Omega\,\text{sen}\, 2\Omega\right)}$$

$$= \sqrt{b^2 + 1 + 2b\cos\Omega}$$ ✓

c) Sistema inverso $\rightarrow$ $H_I(z)$, polos, ceros, $h_I(z)$

$$H(z) = z^{-2} + bz^{-1} = \frac{1}{z^2} + b\frac{1}{z}$$

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{\frac{1}{z^2} + b\frac{1}{z}} = \frac{z^2}{1 + bz}$$ ✓

ceros: $z = 0$ (doble)

polos: $z = -\frac{1}{b}$ ✓

$$\boxed{\frac{Az^{-1}}{1 - pz^{-1}} \xrightarrow{Tz^{-1}} A p^{n-1} u(n-1)}$$

$$H_I(z) = \frac{z^2}{1 + zb} = \frac{z^2/b}{z + \frac{1}{b}} = \frac{1/b}{z + \frac{1}{b}} z^2$$

CUIDADO!

$$\frac{1/b}{z + \frac{1}{b}} = \frac{1/b\, z^{-1}}{1 + \frac{1}{b}z^{-1}} \xrightarrow{Tz^{-1}} \frac{1}{b}\cdot\left(-\frac{1}{b}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$\frac{1/b\, z^{-1}}{1 + \frac{1}{b}z^{-1}} z^2 \xrightarrow{Tz^{-1}} \frac{1}{b}\left(-\frac{1}{b}\right)^{n+1} u(n+1) = h_I(n)$$

$$h_I(n) = \frac{1}{b}\left(-\frac{1}{b}\right)^{n+1} u(n+1) = -\left(\frac{1}{b}\right)^{n+2} u(n+1) = -b^{-n-2} u(n+1)$$ ✓

d) A la entrada del sistema ruido blanco, gaussiano, media nula, varianza unidad.

Calcular media, varianza, d.e.p, R_{yy} a la salida

$$\boxed{m_y = H(0)\cdot m_x} = b\,\underset{0}{\underset{\shortparallel}{m_x}} = 0$$

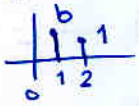
$$\cancel{\sigma_y^2 = E[x^2] - (E[x])^2}$$

$$\boxed{\sigma_y^2 = \left[\sum h^2(n)\right]\sigma_x}$$

$$= \left[1^2 + b^2\right]\cdot 1$$

$$= 1 + b^2$$

$$h(n) = \delta(n-2) + b\,\delta(n-1)$$



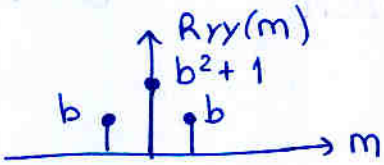
$$\boxed{S_{yy}(\Omega) = \underset{\sigma_\omega^2 = 1}{\underset{\shortparallel}{S_{xx}(\Omega)}}\,|H(\Omega)|^2}$$

$$S_{yy}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 = b^2 + 1 + 2b\cos\Omega$$

$$\boxed{R_{yy}(m) = TF^{-1}\left[S_y(\Omega)\right]} = TF^{-1}\left[b^2 + 1 + 2b\left(\frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2}\right)\right]$$

$$= TF^{-1}\left[b^2 + 1 + 2b\,e^{j\Omega} + b\,e^{-j\Omega}\right]$$

$$R_{yy}(m) = b^2\delta(m) + 1\delta(m) + b\,\delta(m+1) + b\,\delta(m-1)$$



Problema 2

a)

$$z(n) = [\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1}, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -1] \longrightarrow \boxed{H(z) = \frac{z - 0'5}{z^2 + 0'25z}} \longrightarrow y(n)$$

Calcular $y(n)$

$$H(z) = \frac{z - 0'5}{z^2 + 0'25z} = \frac{z^{-1} - 0'5z^{-2}}{1 + 0'25z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1 + 0'25z^{-1}} - \frac{0'5z^{-2}}{1 + 0'25z^{-1}}$$

$$h(n) = (-0'25)^{(n-1)} u(n-1) - 0'5 \cdot (-0'25)^{(n-2)} u(n-2)$$

$$y(n) = z(n) * h(n) = [-\delta(n) + 2\delta(n-4) - \delta(n-8)] * h(n)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= -(-0'25)^{(n-1)} u(n-1) + 0'5 \cdot (-0'25)^{(n-2)} u(n-2) \\ &+ 2(-0'25)^{(n-5)} u(n-5) - (-0'25)^{(n-6)} u(n-6) \\ &- (-0'25)^{(n-9)} u(n-9) + (-0'25)^{(n-10)} u(n-10) \end{aligned}$$

Mal! No puedo x z^2 tan alegremente, z puede ser cero. (¿o no es por eso?)

$$H(z) = \frac{(z - 0'5)}{z^2 + 0'25z} = \frac{z - 0'5}{z(z + 0'25)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z + 0'25}$$

$$\begin{aligned} z - 0'5 &= A(z + 0'25) + Bz \\ 1 &= A + B \\ -0'5 &= 0'25A \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -2 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

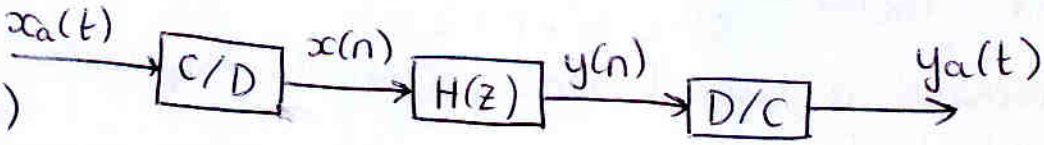
$$\begin{aligned} H(z) &= -\frac{2}{z} + \frac{3}{z + 0'25} \\ &= -2z^{-1} + \frac{3z^{-1}}{1 + 0'25z^{-1}} \end{aligned}$$

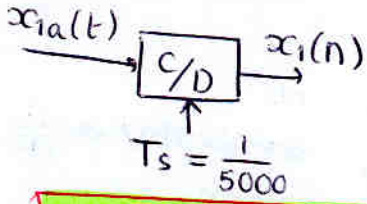
$$\Rightarrow h(n) = -2\delta(n-1) + 3(-0'25)^{n-1} u(n-1)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= [-\delta(n) + 2\delta(n-4) - \delta(n-8)] * h(n) \\ &= 2\delta(n-1) - 3(-0'25)^{n-1} u(n-1) \\ &- 4\delta(n-5) + 6(-0'25)^{n-5} u(n-5) \\ &+ 2\delta(n-9) - 3(-0'25)^{n-9} u(n-9) \end{aligned}$$ ✓

b)

(i)





$x_{1a}(t) = \cos(500t)$

Hallar $x_1(n)$

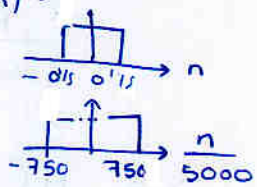
$$\boxed{x_1(n) = x_{1a}(nT_s)} = \cos(500nT_s) = \cos\left(\frac{1}{10}n\right)$$

(ii) $\Omega_0 = \frac{1}{10} \neq \frac{m}{N}2\pi \rightarrow$ no es periódica

$x_{2a}(t) = \text{rect}(t/0'3)$

Hallar $x_2(n)$

aunque no es una división, se cumple



$$x_2(n) = x_{2a}(nT_s) = \text{rect}\left(\frac{nT_s}{0'3}\right) = \text{rect}\left(\frac{n}{1500}\right)$$

(iii) Energía $x_1(n)$ y $x_2(n)$

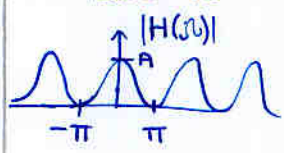
$$E_{x_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)|^2 = +\infty$$

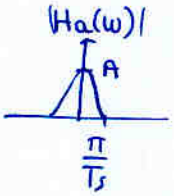
$$\boxed{E_{x_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)|^2} = \sum_{n=-750}^{750} 1^2 = 1500$$

c) Calcular $H_a(\omega)$ y $h_a(t)$ del sistema continuo equivalente con $T_s = 1$

$$H(z) = \frac{z - 0'5}{z^2 + 0'25z}$$

Recuerda





$$\boxed{H_a(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T_s}\right) H(\omega T_s)}$$

como $T_s = 1$

$$H_a(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) H(\omega)$$

$$= \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \frac{\omega - 0'5}{\omega^2 + 0'25\omega} \quad \times$$

hay que sustituir en $H(\Omega)$ no en $H(z)$

particulariz. circ. unidad

$z = e^{j\Omega}$

$$H(z) = \frac{z - 0'5}{z^2 + 0'25z} \rightarrow H(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} - 0'5}{e^{2j\Omega} + 0'25e^{j\Omega}}$$

$$H_a(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \frac{e^{j\omega} - 0'5}{e^{2j\omega} + 0'25e^{j\omega}}$$

$$\boxed{T_s \cdot h_a(nT_s) = h(n)}$$

$T_s = 1 \quad h_a(n) = h(n) = -2\delta(n-1) + 3(-0'25)^{n-1}u(n-1)$

d) considere $H_a(s) = \dfrac{s}{s^2 - 0'3s + 0'02}$

resultado intermedio de filtro digital por método respuesta al impulso invariante

$H_a(s)$ racional $\quad [s^2 - 0'3s + 0'02] = (s-A)(s-B)$

$= s^2 - s(A+B) + AB$

$A + B = 0'3$
$AB = 0'02$

$\frac{0'02}{B} + B = 0'3$

$0'02 + B^2 - 0'3B = 0 \to B = 0'2$, $B = 0'1$

$B = 0'1$, $A = 0'2$

$(s - 0'1)(s - 0'2)$

$$H_a(s) = \frac{s}{(s-0'1)(s-0'2)} = \frac{A}{s-0'1} + \frac{B}{s-0'2}$$

$s = A(s - 0'2) + B(s - 0'1)$

$s = 0'2$

$0'2 = B\,0'1 \to B = 2$

$s = 0'1$

$0'1 = A(-0'1) \to A = -1$

$$H_a(s) = \frac{-1}{s-0'1} + \frac{2}{s-0'2}$$

$$\boxed{H_a(s) = \sum \frac{a_i}{s-p_i} \xrightarrow[\text{invariante}]{\text{resp.}} H(z) = \sum \frac{a_i}{1-e^{+p_i} z^{-1}}}$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{-1}{1-e^{0'1} z^{-1}} + \frac{2}{1-e^{0'2} z^{-1}}$$

Septiembre 2004

Problema 1

$$x_a(t) = e^{j(2\pi 400t + \frac{\pi}{4})} + e^{j(2\pi 2000t + \frac{\pi}{2})}$$

a) muestreamos x_a a la mínima frecuencia sin solapamientos, obtener $x(n)$

$$f_{min_s} = 2 f_{max} = 2 \cdot 2000 = 4000 \text{ Hz}$$

$$T_s = \frac{1}{4000} \text{ s}$$

$$x(n) = x_a(nT_s) = e^{j(2\pi \frac{1}{10} n + \frac{\pi}{4})} + e^{j(2\pi \frac{1}{2} n + \frac{\pi}{2})}$$

b) Periodo y coeficientes

Es una suma de periódicas: periodos $N_1 = 10$ y $N_2 = 2$

El periodo de la suma será 10

Serie de Fourier

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} k n}$$

$$x(n) = \sum a_k e^{j \frac{2\pi}{N} k n} = e^{j(\frac{2\pi}{10} n)} \underbrace{e^{j\frac{\pi}{4}}}_{a_1} + e^{j(\frac{2\pi}{10} 5n)} \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{a_5}$$

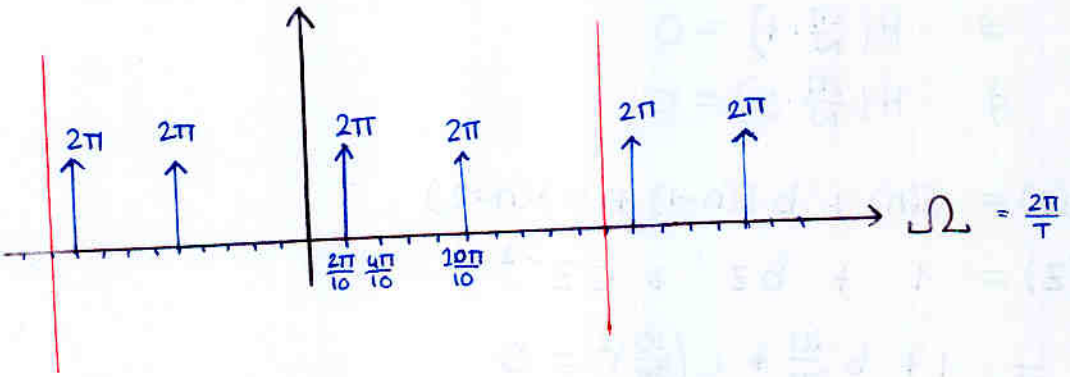
$$a_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$a_5 = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$a_k = 0 \quad k \neq 1, 5$$

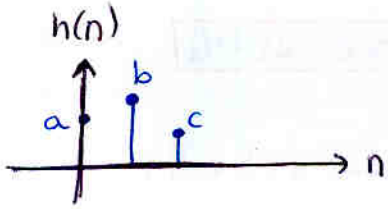
c) Dibuje la TF[$x(n)$]

la TF de una señal periódica son deltas con $2\pi \times a_k$



d) Filtro FIR

$$h(n) = \begin{cases} 0 & n > 2 \\ 0 & n < 0 \\ a & n = 0 \\ b & n = 1 \\ c & n = 2 \end{cases}$$



$H(z) = 1$ para $z \to \infty$

Teorema valor inicial $\quad h(0) = \lim_{z \to \infty} H(z)$

$$h(0) = a = 1$$

entrada

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\left(\frac{2\pi}{10}n\right)} + e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\left(\frac{2\pi}{10}5n\right)}$$

salida

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) \\ &= e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\left(\frac{2\pi}{10}n\right)} + e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\left(\frac{2\pi}{10}5n\right)} \\ &\quad + b e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\left(\frac{2\pi}{10}(n-1)\right)} + b e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\left(\frac{2\pi}{10}5(n-1)\right)} \\ &\quad + c e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\left(\frac{2\pi}{10}(n-2)\right)} + c e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\left(\frac{2\pi}{10}5(n-2)\right)} \\ &= e^{j\left(\frac{2\pi}{10}n\right)} \left[e^{j\frac{\pi}{4}} + b e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{10}} + c e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{10}} \right] \\ &\quad + e^{j\left(\frac{2\pi}{10}5n\right)} \left[e^{j\frac{\pi}{2}} + b e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\pi} + c e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

MAL

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = 0$$

como x tiene comp sólo en $\frac{2\pi}{10} \cdot 1$ y $\frac{2\pi}{10} \cdot 5$

$$\Rightarrow \quad H\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad H\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 5\right) = 0$$

$$h(z) = \delta(n) + b\,\delta(n-1) + c\,\delta(n-2)$$

$$H(z) = 1 + b z^{-1} + c z^{-2}$$

$$\begin{cases} H\left(\frac{2\pi}{N}\right) = 1 + b\frac{10}{2\pi} + c\left(\frac{10}{2\pi}\right)^2 = 0 \\ H(\pi) = 1 + b\frac{1}{\pi} + c\frac{1}{\pi^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5/\pi & 25/\pi^2 \\ 1/\pi & 1/\pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 25/\pi^2 \\ -1 & 1/\pi^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5/\pi & 25/\pi^2 \\ 1/\pi & 1/\pi^2 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{\pi^2} + \frac{25}{\pi^2}}{\frac{5}{\pi^3} - \frac{25}{\pi^3}} = \frac{\frac{24}{\pi^2}}{-\frac{20}{\pi^3}} = -\frac{24}{20}\pi$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 5/\pi & -1 \\ 1/\pi & -1 \end{vmatrix}}{-\frac{20}{\pi^3}} = \frac{-\frac{5}{\pi} + \frac{1}{\pi}}{-\frac{20}{\pi^3}} = \frac{4/\pi}{20/\pi^3} = \frac{4}{20}\pi^2$$

MAL

Debe tener ceros en $e^{j\frac{\pi}{5}}$ y $e^{j\pi} = -1$

$$H(z) = \left[1 - e^{j\frac{\pi}{5}} z^{-1}\right] \cdot \left[1 + z^{-1}\right] \cdot K$$

como $\lim_{z \to \infty} H(z) = 1 \rightarrow K = 1$

$$H(z) = \underbrace{1}_{a} + \underbrace{\left(1 - e^{j\frac{\pi}{5}}\right)}_{b} z^{-1} + \underbrace{\left(-e^{j\frac{\pi}{5}}\right)}_{c} z^{-2}$$

e) Filtro Butterworth que elimine frec mas alta (atenuacion 1000)

nota $P_2(s) = s^2 + \sqrt{2}\, s + 1$ $\quad N = 2$ Calcule frecuencia de corte

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

la frec mas alta de $x_a(t)$ es 2000

$$|H(4000\pi)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{4000\pi}{\omega_c}\right)^4} = \left(\frac{1}{1000}\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{4000\pi}{\omega_c}\right)^4 = 1000^2$$

$$1 + \left(\frac{2000}{f_c}\right)^4 = 1000^2$$

$$f_c = \sqrt[4]{\frac{2000^4}{1000^2 - 1}} = 63'25 \text{ Hz}$$

TEMA 1. SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS

Introducción

· Sólo estará definida para determinados valores de t (t_n)

$\underbrace{x(t)}_{\text{continua}}$ $\underbrace{x(t_n)}_{\text{discreta}}$

Es habitual representarla como secuencias $x(n)$

ejemplos:

* naturaleza discreta:
  - Caudales de los ríos en los meses del año
  - series demográficas

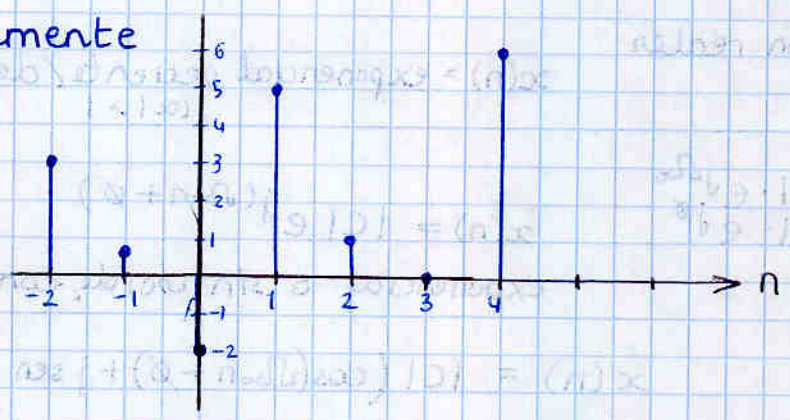
* naturaleza continua muestreadas.
  - Audio muestreo, video, señales de telecomunicaciones.

Representación de señales discretas

* funciones dependientes de n: $x(n) = 5 \operatorname{sen}(3n)$

* secuencia de valores. $x(n)$: [3, ½, -2, 5, 1, 0, 6]
  con origen en el 3er elemento

* gráficamente



- Desplazamiento temporal:

  $x(n-k)$ desplaza $x(n)$ k hacia la derecha

  k debe ser un valor entero

- Secuencias periódicas

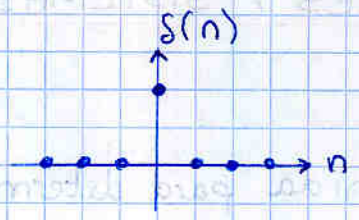
  $x(n+N) = x(n)$ N entero

  ⇒ N se llama periodo fundamental

1.2. Señales discretas

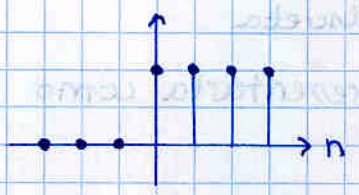
Impulso unidad discreto

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



Escalón unidad

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$ el equivalente discreto a la derivada

$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$ el equivalente discreto a la integral

Por muy compleja que sea una secuencia discreta siempre se podrá escribir como:

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)\,\delta(n-k)}$$

Secuencias exponenciales

$x(n) = C\alpha^n$ $\quad C = |C|e^{j\phi}$, $\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$

$\Rightarrow$ si C y α son reales

$x(n)$ = exponencial creciente / decreciente
$|\alpha| > 1$ $\quad |\alpha| < 1$

$\Rightarrow$ si $\alpha = |1| \cdot e^{j\Omega_0}$
$C = |C| \cdot e^{j\phi}$

$x(n) = |C|\, e^{j(\Omega_0 n + \phi)}$

exponencial o sinusoide compleja

$$x(n) = |C|\left(\cos(\Omega_0 n + \phi) + j\,\text{sen}(\Omega_0 n + \phi)\right)$$

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}(x(n)) = |C|\cos(\Omega_0 n + \phi) \\ \mathrm{Im}(x(n)) = |C|\,\text{sen}(\Omega_0 n + \phi) \end{array}\right\}$ sinusoides <u>discretas</u> reales

$x(n+N) = x(n)$ para que $x(n)$ sea periódica:

$$x(n+N) = |C|e^{j(\Omega_0(n+N)+\phi)}$$

$$= \underbrace{|C|e^{j(\Omega_0(n)+\phi)}}_{x(n)} \cdot e^{j\Omega_0 N} = x(n)$$

$x(n)$ periodica $\Leftrightarrow e^{j\Omega_0 N} = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \Omega_0 N = 2\pi \cdot m \\ \Omega_0 = \frac{m}{N} 2\pi \end{array}}$ una fracción de 2π

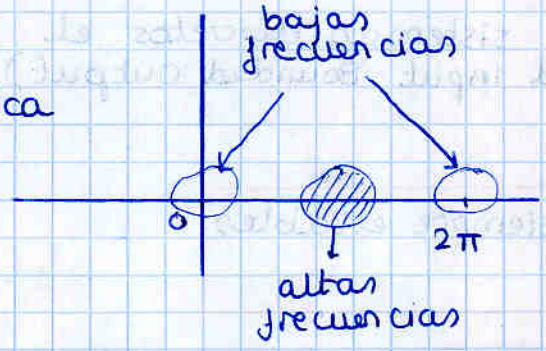
N es el periodo

Conclusión:
$x(n)$ es periódica sólo si su pulsación fundamental Ω_0 es un número racional por 2π

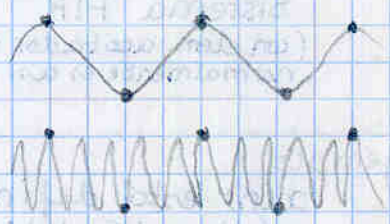
$\Rightarrow \quad e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} \Rightarrow$ la pulsación Ω_0 y $\Omega_0 + 2\pi$ es la misma.

Es decir, la pulsación es periódica, no es más rápido cuanto mas grande sea.

por tanto la TF es 2π-periódica

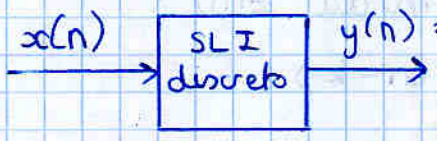


similitud: el estroboscopio que "discretiza" lo que ves y lo rápido se ve lento



Sistemas discretos

- Son sistemas con entrada y salida discreta
- Podemos aplicar la misma clasificación que para sistemas continuos (variantes / invariantes, con/sin memoria, etc...)



operador $L[\cdot]$ nos da la salida

Si escribo $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$

$$y(n) = L\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, L[\delta(n-k)]$$

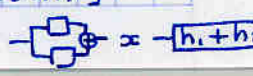
$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)}$$

operador convolución discreta

donde $\boxed{h(n) = L[\delta(n)]}$ respuesta al impulso

Propiedades:

- $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$
- $x(n) * \delta(n) = x(n)$ sistema identidad $h(n) = \delta(n)$
- conmutativa: $h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$
- asociativa: $x(n) * h_1(n) * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$ (permite asociar sistemas)
- distributiva: $x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]$



Clasificación en función del número de elementos de $h(n)$

⇒ $h(n)$: Número de elementos no nulos finito ⇒ FIR (Finite Impulse Response)

⇒ $h(n)$: Número de elementos no nulos infinito ⇒ IIR

Examinando la estabilidad

* $\sum_n |h(n)| < \infty$

* También es válido para sistemas discretos el criterio BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Por tanto

Sistema FIR (con elem. acotados: normalmente es así) ⟹ siempre estables

ejemplo

$x(n)$ está definida entre $n = N_1$ y $n = N_2$, $N_2 > N_1$

$y(n)$ está definida entre $n = M_1$ y $n = M_2$, $M_2 > M_1$

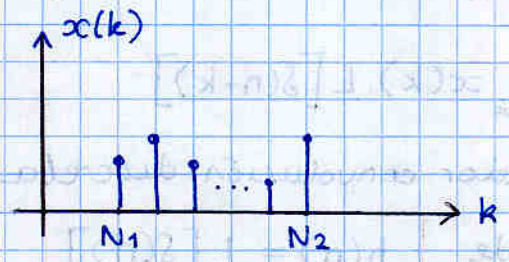
$z(n) = x(n) * y(n)$

¿Entre que valores de n está definida $z(n)$?

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k) = \sum_{k=N_1}^{N_2} x(k)\, y(n-k)$$

$y(n-k)$ está definida entre $n-k = M_1$ y $n-k = M_2$

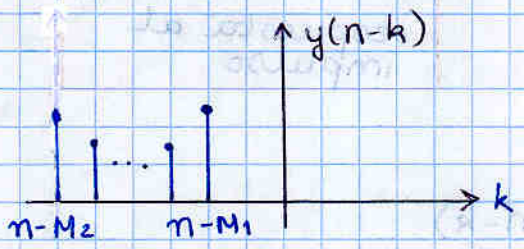
$k = n - M_1$ $\quad$ $k = n - M_2$

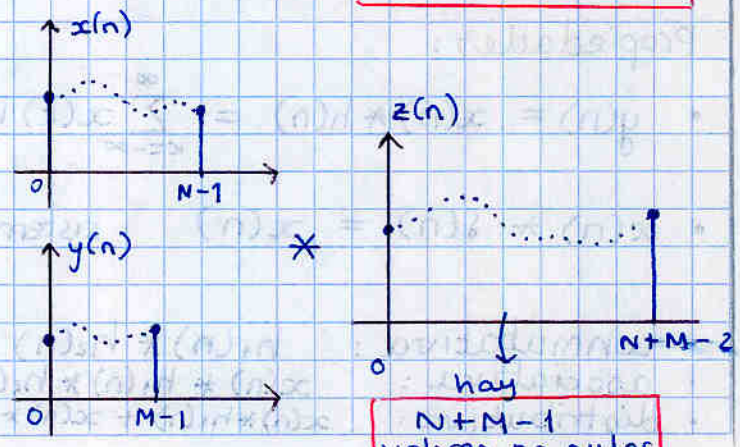


Para que exista algún solapamiento (y por tanto $z(n)$ de valores no nulos)

$n - M_1 \geq N_1 \Rightarrow$ $\boxed{n_{min} = N_1 + M_1}$

$n - M_2 \leq N_2 \Rightarrow$ $\boxed{n_{max} = N_2 + M_2}$





Importante: una convolución entre dos señales con N y M elementos, tiene N+M-1 elementos

ejemplo

Convolucionar construyendo una tabla las siguientes secuencias

$x(n) = [1,2]$, 1er elemento en $n=0$

$y(n) = [-2,1]$, 1er elemento en $n=-1$

	-3	-2	-1	0	1	2	3	n	z(n)
y(k)			-2	1					
x(k)				1	2				
y(-k)				1	-2				
y(-1-k)			1	-2				-1	-2
y(-k)				1	-2			0	-3
y(1-k)					1	-2		1	2

x(n) empieza en 0

y(n) empieza en -1

z(n) debe empezar en $0-1=-1$

ejemplo

calcular $x(n) * h(n)$

$x(n) = \alpha^n u(n)$

$h(n) = \beta^n u(n)$ $\quad \alpha \neq \beta$

Sólo podemos hacerlo sustituyendo en la expresión analítica

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \underbrace{u(k)} \cdot \beta^{n-k} \cdot u(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \beta^{n-k} \underbrace{u(n-k)}$$

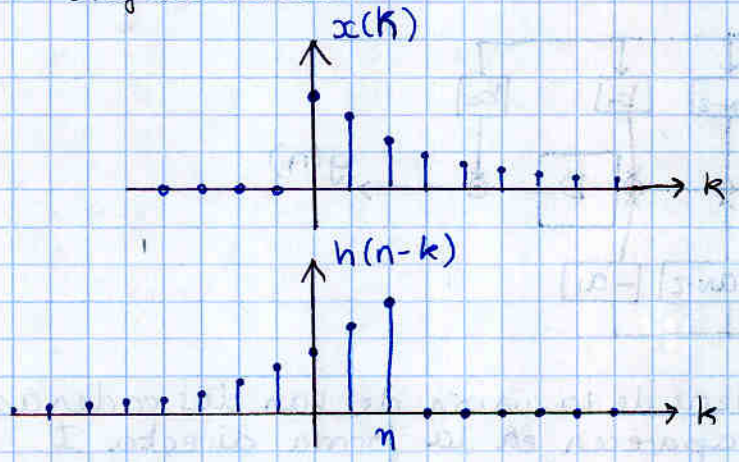
que combinaciones de n y k hacen que esto sea cero?

pero $u(n-k) = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases} \Rightarrow y(n)$

$n<0 \rightarrow 0$ (ya que k siempre es positivo)

$n \geq 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k}$ (sólo vale 1 cuando $k \leq n$)

Graficamente:



$$y(n) = \begin{cases} 0 & n<0 \\ \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k & n \geq 0 \end{cases}$$

$$= \beta^n \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}}$$

suele ser $(a_n)^{n+1}$

a_1 = 1er termino

a_n = termino n-ésimo

r = razon

Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Son la contrapartida en el dominio discreto de las ecuaciones diferenciales.

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{N} a_k \, y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k \, x(n-k)$$

$\{a_k\}, \{b_k\}$ son coeficientes constantes.

Definimos el operador retardo $\boxed{D^k x(n) = x(n-k)}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k D^k y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k D^k x(n)}$$

Si las condiciones iniciales son nulas

$$\left(D^k y(n_0) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \right)$$

i.e. $y(n_0 - k) = 0 \quad \forall k \quad (k > 0)$

i.e. de n_0 a la izquierda todo es nulo

la relación anterior equivale a un SLI discreto

Elementos básicas

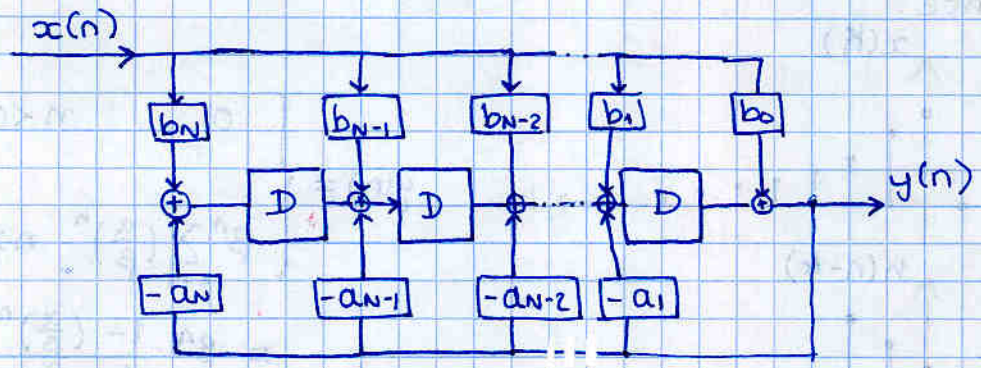
* Sumadores y multiplicadores
* Retardadores

- suponemos $a_0 = 1$ (caso contrario manipulo la expresión (1) dividiendo por a_0)
- suponemos $N = M$

Despejando $y(n)$ de (1)

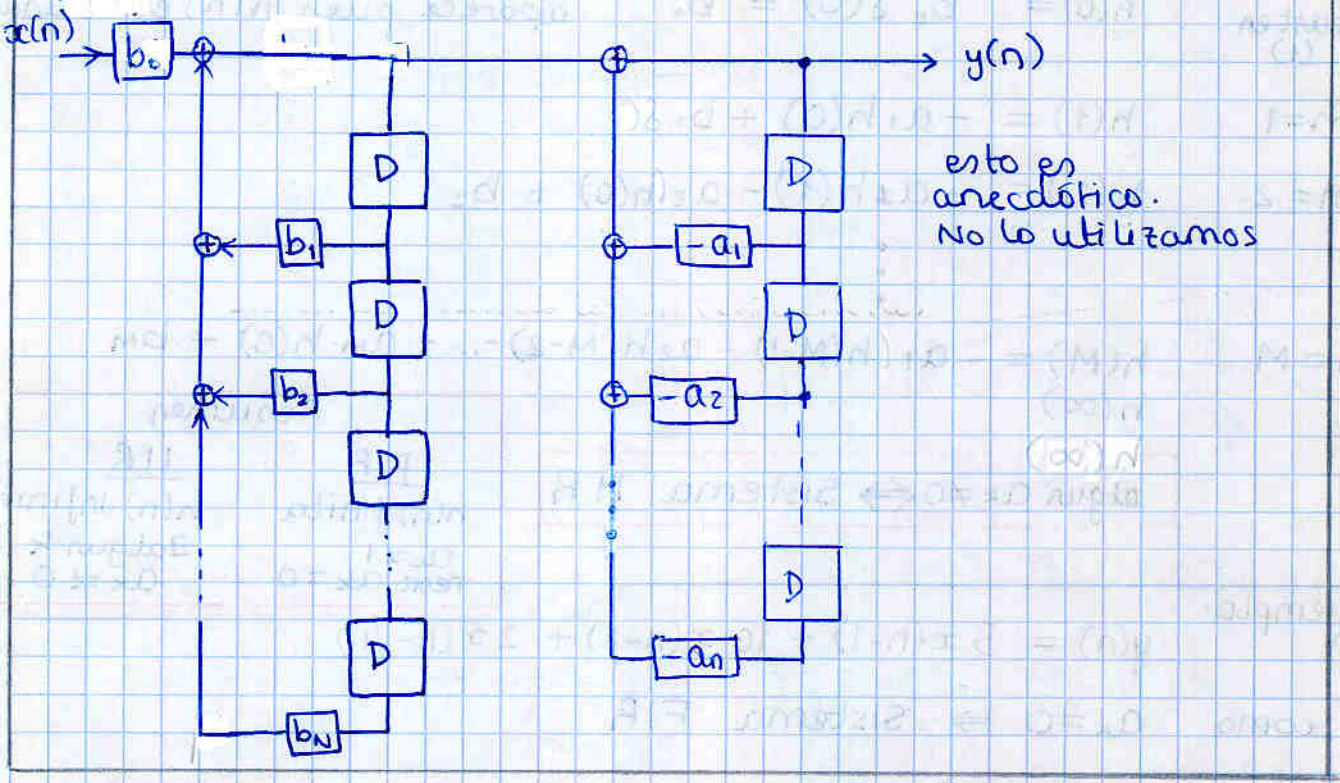
$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 (x(n-1)) + b_2 (x(n-2)) + \dots + b_N x(n-N) - a_1 y(n-1) - a_2 (y(n-2)) - \dots - a_N y(n-N)$$

forma directa II



la forma directa II proviene de la unión de las dos cadenas de retardadores que aparecen en la forma directa I

otra forma de hacerlo es: forma directa 1 (puede ser $N \neq M$)



Determinación de la respuesta al impulso a partir de la ecuación en diferencias.

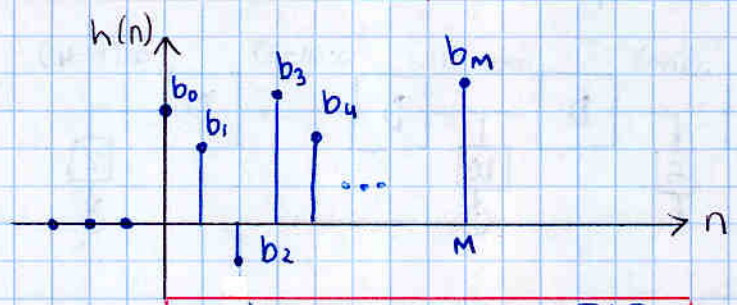
suponemos sistemas causales ($h(n)=0,\ n<0$)

(1) $$\boxed{y(n) = h(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, h(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k\, \delta(n-k)}$$ para cualquier sistema

* Caso particular $a_k = 0$

$$\boxed{h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, \delta(n-k)}$$

siendo:



$\boxed{a_k = 0 \Leftrightarrow \text{sistema FIR}}$

* Caso general $a_k \neq 0$ para algun k al menos
procedemos iterativamente.

$n=0$ sust. en (1) $\quad h(0) = b_0\,\delta(0) = b_0$ — el sumatorio de a_k no aparece pues $h(n)$ es causal

$n=1 \quad h(1) = -a_1 h(0) + b_1$

$n=2 \quad h(2) = -a_1 h(1) - a_2 h(0) + b_2$

$\vdots$

$n=M \quad h(M) = -a_1 h(M-1) - a_2 h(M-2) - \dots - a_M \cdot h(0) + b_M$

$h(\infty)$

$\boxed{\text{algun } a_k \neq 0 \Leftrightarrow \text{Sistema IIR}}$

Resumen

FIR	IIR
$h(n)$ finita	$h(n)$ infinita
$a_0 = 1$ resto $a_k = 0$	$\exists$ algun k $a_k \neq 0$

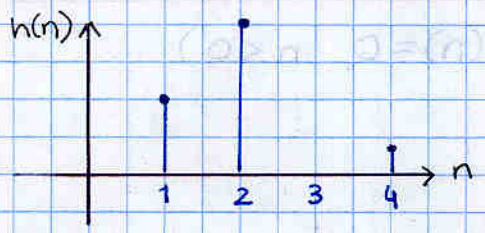
ejemplo:

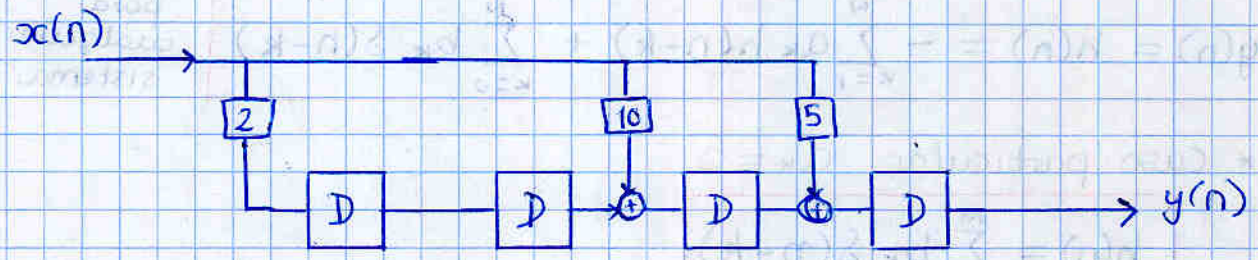
$$y(n) = 5x(n-1) + 10x(n-2) + 2x(n-4)$$

como $a_k = 0 \Rightarrow$ Sistema FIR

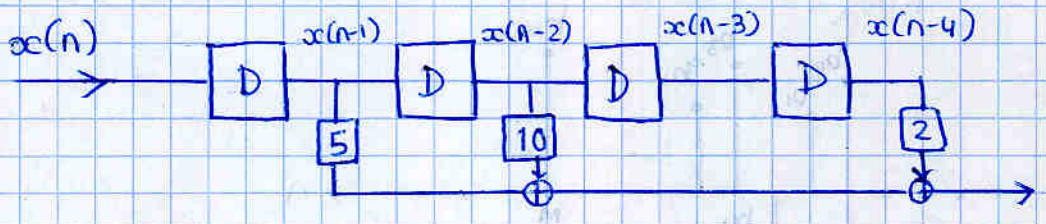
calcular $h(n)$

hacemos $x(n) = \delta(n) \Rightarrow h(n) = 5\delta(n-1) + 10\delta(n-2) + 2\delta(n-4)$





otra forma tipica para implementar FIR



ejemplo: $y(n) = 0'5\, y(n-1) + x(n)$ $\Rightarrow$ Es IIR

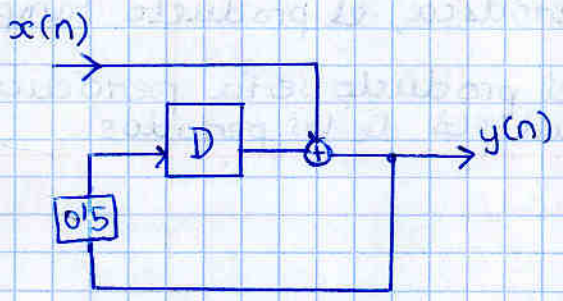
Calcular $h(n)$: asumiendo sistema causal.

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{SLI} \longrightarrow h(n)$$

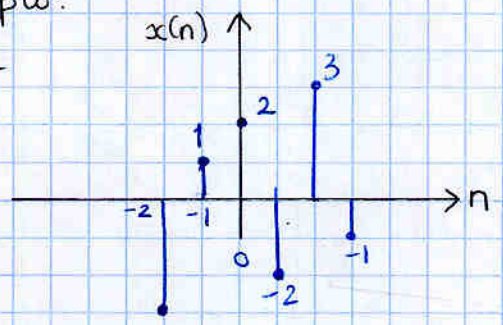
$$h(n) = 0'5\, h(n-1) + \delta(n)$$

$h(0) = 1$
$h(1) = 0'5$
$h(2) = 0'25$
$h(3) = 0'125$

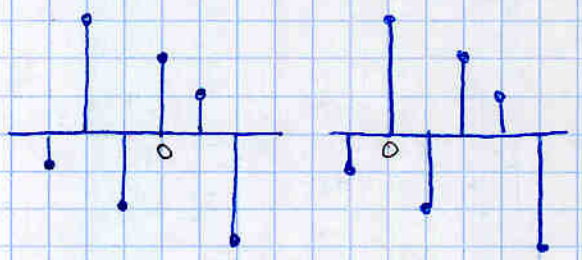
$h(n) = 0'5^n\, u(n)$
↑
causalidad



ejemplo:
sea



a) $x(2-n) = x(-(n-2))$
inversión desplazamiento

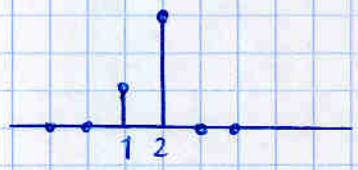


b) $x(3n-4)$

$x(3n-4) = x(3(n-4/3))$ No es válido
4/3 no es un desplazamiento válido (entero)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{En estos casos hay que proceder dando valores}}$

n	$3n-4$	$x(3n-4)$
0	-4	0
1	-1	1
2	2	3
3	5	0



ejemplo Determinar si las siguientes secuencias son periódicas y en su caso calcular el periodo.

a) $x(n) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{7} n + 4\right)$ $\quad \Omega_0 = \frac{3\pi}{7} = 2\pi \cdot \frac{3}{7 \cdot 2}$

Periódica

el Periodo es el denominador $N = 14$

b) $x(n) = e^{j\frac{6\pi}{5}n}$ $\quad \Omega_0 = \frac{6\pi}{5} \rightarrow 2\pi \frac{3}{5}$

Periódica, periodo $N = 5$

c) $x(n) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} n\right) \cdot \cos\left(\frac{3n}{5}\right)$

$\Omega = \frac{\pi}{4} = 2\pi \frac{1}{8}$ periódica periodo 8

$\Omega = \frac{3}{5}$ no es un número racional por 2π

$= 2\pi \frac{3}{10\pi}$ no es periódica la señal

como una de las dos no es periódica, el producto tampoco

si ambas fueran periódicas, el producto sería periódico de periodo mínimo común multiplo de los periodos

TEMA 2. ANALISIS DE FOURIER DE SISTEMAS DISCRETOS

Series de Fourier de señales discretas

sea $x(n)$ de periodo N. Definición:

periódica

$\Omega_0 N = 2\pi m$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\underbrace{\frac{2\pi}{N}}_{\Omega} k n}}$$

coeficientes de Fourier

$\Omega_0 N = 2\pi(1+m)$

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}(1+m)$

pero en discreto, la pulsación $2\pi(1+m)$ no se diferencia de la 2π

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

Desarrollo en serie de Fourier (DSF)

$x(n)$ es la suma de N componentes, $k=0$ componente continua, $k=1$ armónico fundamental

$$a_k \Rightarrow \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}kn\right]$$

$$a_{k+N} \Rightarrow \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(k+N)n\right] = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}kn\right]\cdot \underbrace{\exp\left[j\frac{2\pi}{N}Nn\right]}_{1}$$

$$\boxed{a_{k+N} = a_k \quad \forall k}$$

por eso sólo hay $N-1$ coeficientes, (sería información redundante)
los coef a_k son periódicos de periodo N

> Para una secuencia $x(n)$ periódica de periodo N
> $\Rightarrow$ los coef del DSF (a_k) son a su vez una secuencia periódica de periodo N

* Está garantizada la convergencia

Propiedades

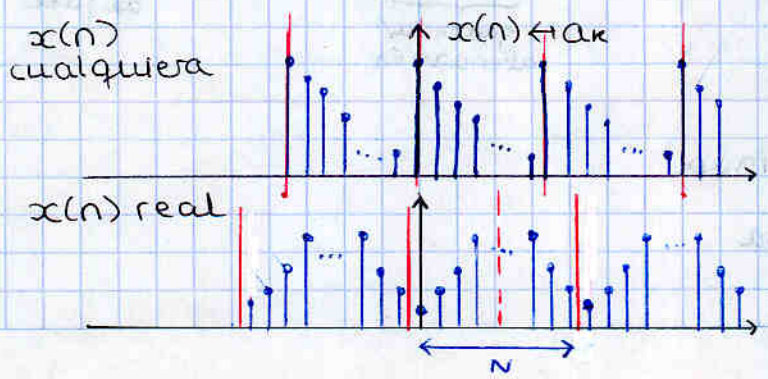
$\Rightarrow$ Linealidad: $x_1(n)$, $x_2(n)$ ambas de periodo N

$$A x_1(n) + B x_2(n) \longleftrightarrow A a_{1k} + B a_{2k}$$

(sería tb válido si x_1 y x_2 tuvieran periodo mínimo común múltiplo)

$\Rightarrow$ Desplaz. temporal: $x(n-m) \longleftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\cdot a_k$

$\Rightarrow$ Simetría: si $x(n)$ es real $\longleftrightarrow a_k = a^*_{-k} \Rightarrow \boxed{a_k = a^*_{N-k}}$



es periódico

es simétrico además de periódico

conv. periódica

⇒ convolución $x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m) \longleftrightarrow N \cdot a_{1k} \cdot a_{2k}$

⇒ Producto $x_1(n) \cdot x_2(n) \longleftrightarrow a_{1k} \circledast a_{2k}$

⇒ Teorema de Parseval

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{1k} a_{2k}^*$$

Si $x_2(n) = x_1(n) = x(n)$

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2}$$

Potencia media

* SLI discretos con entradas periódicas - Respuesta en Frecuencia

$$x(n) = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} SLI \\ h(n) \end{matrix}} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = h(n) * e^{j\Omega_0 n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\Omega_0 (n-m)} = \underbrace{e^{j\Omega_0 n}}_{\text{exp. comp. de misma pulsación}} \underbrace{\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega_0 m} \right]}_{\text{no depende de } n \text{ (es un factor)}}$$

lo llamaremos Respuesta en frecuencia en $\Omega = \Omega_0$ $H(\Omega_0)$

≡ la exponencial compleja es una autofunción

$$\boxed{H(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega m}}$$

respuesta en frecuencia

$$e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{SLI} \longrightarrow e^{j\Omega_0 n} \cdot H(\Omega_0) = \underbrace{|H(\Omega_0)|}_{\text{ganancia/atenuación}} \cdot e^{j(\Omega_0 n + \underbrace{\measuredangle H(\Omega_0)}_{\text{cambio de fase}})}$$

SL I → ω pulsación continua

SL II → Ω pulsación discreta

$$x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \longrightarrow \boxed{SLI} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = \sum_{n=0}^{N-1} a_k \left|H\left(\tfrac{2\pi k}{N}\right)\right| \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}kn + \measuredangle H\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} a_k H\left(\tfrac{2\pi k}{N}\right) \cdot e^{j\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)}$$

$$\boxed{y(n) \text{ secuencia periódica periodo } N \longleftrightarrow a_k H\left(\tfrac{2\pi}{N}k\right)}$$

ejemplo:

$$\longrightarrow \boxed{\begin{matrix} SLI \\ h(n) \end{matrix}} \longrightarrow \quad h(n) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$x(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 2 & n=3 \end{cases}$$

extensión periódica para el resto de los valores de n

- Respuesta en frecuencia:

$$H(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^m u(m) e^{-j\Omega m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^m e^{-j\Omega m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3} e^{-j\Omega}\right)^m \underset{\substack{\text{suma de } \infty \\ \text{términos de} \\ \text{una progresión} \\ \text{geométrica}}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

- Coeficientes de Fourier de $x(n)$

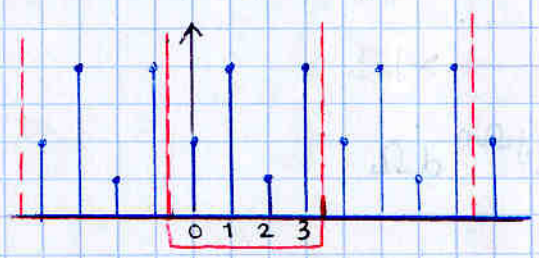
$$a_k = \frac{1}{4}\left(2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 0} - 1 e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 1} + 1 e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot 2} + 2 e^{j\frac{2\pi}{N}k \cdot 3}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left(2 - e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\pi k} + 2 e^{-j\frac{6\pi}{4}k}\right)$$

$$a_0 = \tfrac{1}{4}(2-1+1+2) = 1$$
$$a_1 = \tfrac{1}{4}(2+j-1+2j) = \tfrac{1}{4}(1+3j)$$
$$a_2 = \tfrac{1}{4}(2+1+1-2) = 1/2$$
$$a_3 = \tfrac{1}{4}(2-j-1-2j) = \tfrac{1}{4}(1-3j)$$

hemos hecho trabajo de más, pues como $x(t)$ es real

$$a_{N-k}^* = a_k$$
$$a_3 = a_1^*$$



Transformada de Fourier de una secuencia discreta

Definición:

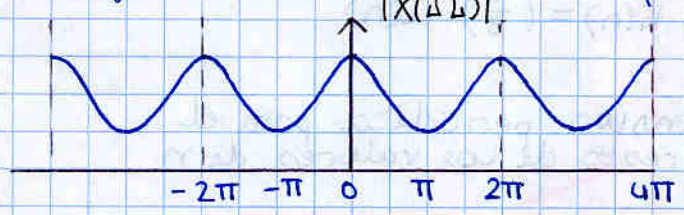
$$\boxed{\begin{aligned} X(\Omega) &= TF\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\Omega n} \\ x(n) &= TF^{-1}[X(\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \end{aligned}}$$

Condiciones de existencia:

* $\boxed{\sum |x(n)| < \infty}$ (absolutamente sumable)

[ó $\sum |x(n)|^2 < \infty$] condiciones SUFICIENTES (pero no necesarias) puede existir TF sin que cumpla ninguna.

· La transformada de Fourier será periódica de periodo 2π



[lógico sustituyendo en la ecuación]

Bajas frecuencias $\Rightarrow$ $2\pi\cdot k$
Altas frecuencias $\Rightarrow$ $(2k+1)\pi$

Definición:

Dado el caracter periódico de la TF se suele trabajar:

$-\pi < \Omega < \pi$ ó con $0 < \Omega < 2\pi$ (pulsaciones)

$-0'5 < F < 0'5$ $\quad 0 < F < 1$ frecuencia normalizada $F = \frac{\Omega}{2\pi}$

En continuo ω [rad/s] $\quad f$ [Hz = $\frac{1}{seg}$] $\quad f = \frac{\omega}{2\pi}$

En discreto Ω [rad] $\quad F = \frac{\Omega}{2\pi}$

---

ejemplo: $\boxed{TF\{\alpha^n \cdot u(n)\}}$ $|\alpha| < 1$

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\cdot e^{-j\Omega})^n = \boxed{\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}}$$

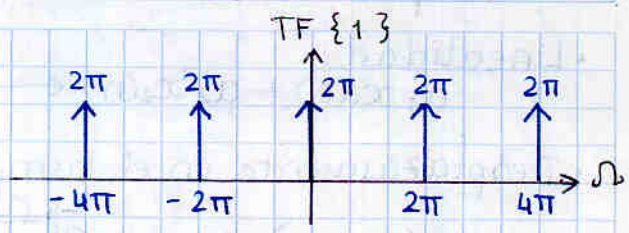
ejemplo: $\boxed{TF\{e^{j\Omega_0 n}\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0 - \underbrace{2\pi m}_{\text{repite la } \delta \text{ periodicamente}})}$

$$TF^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$= e^{j\Omega_0 n}$$

* Caso particular $\Omega_0 = 0$

$$\boxed{TF\{1\} = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\Omega - 2\pi m)}$$



ejemplo:

$$TF\{\delta(n)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(m) e^{-j\Omega m} = 1$$

ejemplo:

$x(n)$ periódica <u>periodo N</u> (admite DSF)

se puede expresar $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \exp\{j\frac{2\pi}{N} k \cdot n\}$

$$TF\{x(n)\} = TF\left\{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\left(j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n\right)\right\}$$

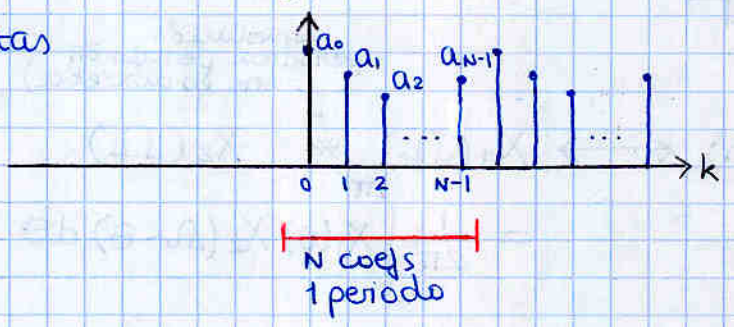
$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, TF\{\exp(j\tfrac{2\pi}{N} kn)\} \qquad \text{siendo } \frac{2\pi}{N} = \Omega_0$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 k - 2\pi m)$$

$$= \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty}}_{\text{indica extensión periódica}} \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi\, a_k\, \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k - \underbrace{2\pi m}\right)$$

Dibujo DSF

deltas discretas en valores enteros

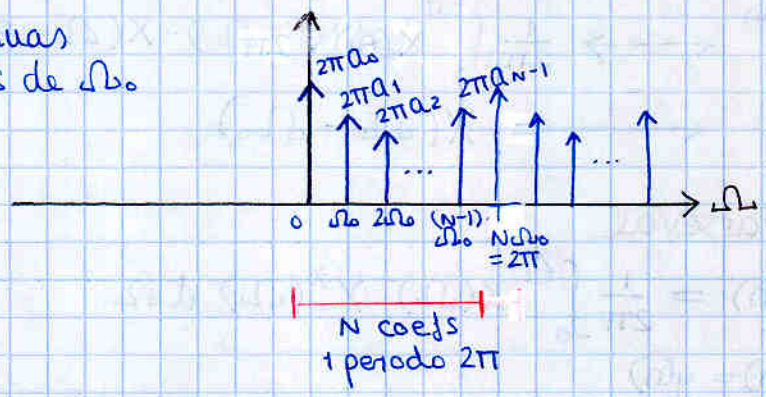


Dibujo $X(\Omega)$

$(N-1)\Omega_0 = (N-1)\frac{2\pi}{N}$

$N\Omega_0 = N \cdot \frac{2\pi}{N} = 2\pi$

deltas continuas en multiplos de Ω_0



la información en DSF y en TF es la misma

* Propiedades de la TF

- Linealidad:

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \longleftrightarrow a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$$

- Desplazamiento en el tiempo

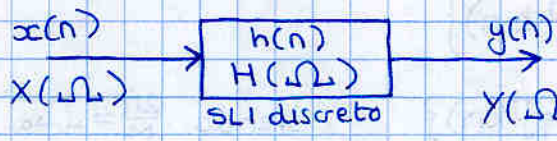
$$x(n-n_0) \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0} \cdot X(\Omega)$$

- Diferenciación

$$n \cdot x(n) \longleftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

- Convolución

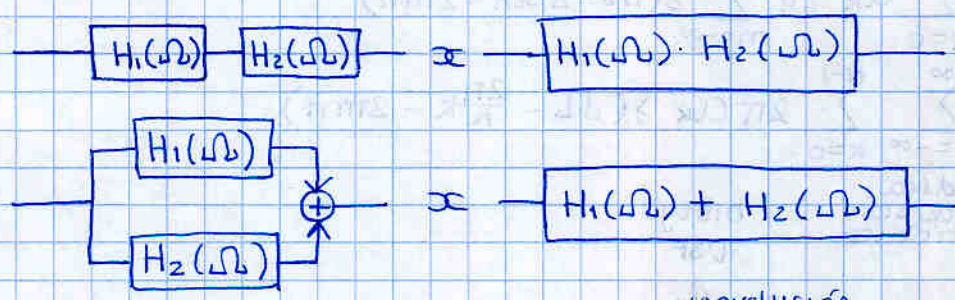
$$x(n) * y(n) \longleftrightarrow X(\Omega)\, Y(\Omega)$$



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

- Asociación de Sistemas.



- Modulación:

convolución periódica periodo 2π (no es discreta)

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \longleftrightarrow X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(\theta)\, X_2(\Omega - \theta)\, d\theta$$

Si $x_2(n) = e^{j\Omega_0 n}$ $\quad x_1(n) = x(n)$

$$x(n) \cdot e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi \cdot \delta(\theta - \Omega_0) \cdot X(\Omega - \theta)\, d\theta$$

$$x(n) \cdot e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

- Teorema de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) \cdot Y^*(\Omega)\, d\Omega$$

si $x(n) = y(n)$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(\Omega)|^2\, d\Omega = \text{Energia}}$$

Pequeñas propiedades:

* $x(n)$ real $\Rightarrow X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
* $x(-n) \longleftrightarrow X(-\Omega)$
* $x^*(n) \longleftrightarrow X^*(-\Omega)$

ejemplo:

$$x(n) = (0'5)^{n-n_0}\, u(n-n_0)\ ; \quad h(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-0'5\,e^{-j\Omega}} \cdot e^{-j\Omega n_0}$$

$$H(\Omega) = 1\cdot e^{-j\Omega 0} - 1\cdot e^{-j\Omega\cdot 1} = 1-e^{-j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)\cdot H(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega n_0}}{1-0'5\,e^{-j\Omega}}\cdot(1-e^{-j\Omega})$$

$$= \frac{1-e^{-j\Omega}}{1-0'5\,e^{-j\Omega}}\cdot e^{-j\Omega n_0}$$

$$z(n) = TF^{-1}\left\{\frac{1}{1-0'5e^{-j\Omega}} + \frac{-e^{j\Omega}}{1-0'5e^{-j\Omega}}\right\}$$

Añadire luego el efecto de $e^{-j\Omega n_0}$ $\quad y(n) = z(n-n_0)$

$$= (0'5)^n u(n) - (0'5)^{n-1} u(n-1)$$

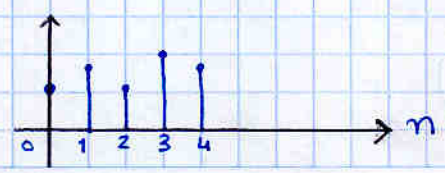
finalmente $y(n) = 0'5^{n-n_0}\, u(n-n_0) - 0'5^{n-n_0-1}\, u(n-n_0-1)$

Muestreo de señales continuas

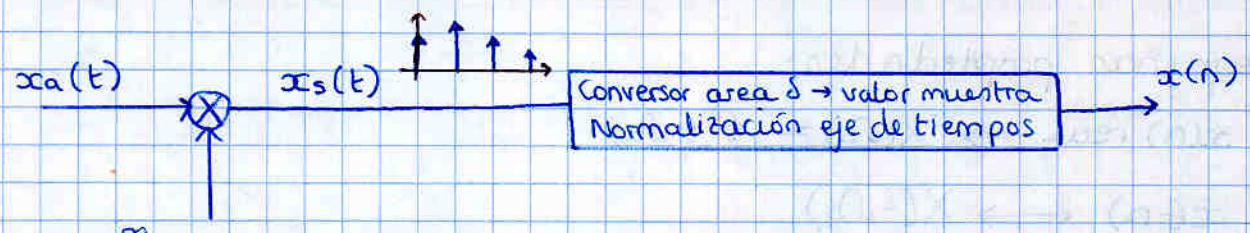
Nos centraremos en el muestreo periodico o uniforme

$$x_a(t) \longrightarrow x(n) = x_a(nT)$$

T: periodo de muestreo (s)
$f_s = \frac{1}{T}$ frecuencia de muestreo (Hz)



* Modelo matematico de conversión continuo discreto



$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Conversor C / D

El esquema anterior se implementa de forma distinta si se trata de un conversor de voz, imagenes, etc...

* Efecto del muestreo en el dominio frecuencial

Este estudio teorico permite conocer las implicaciones del muestreo y por tanto definir las condiciones para muestrear <u>sin perder información</u>

$$X(\Omega) = TF[x(n)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\Omega n} \qquad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$X_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t}\, dt \qquad x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

sustituyendo $x(n) = x_a(nT)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\omega) e^{j\omega nT}\, d\omega$$

$$\boxed{\text{c.v.} \quad \omega \cdot T = \Omega \qquad d\omega = \frac{1}{T} d\Omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\Omega}{T}\right) e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\left\{\sum_k X_a\left(\frac{\Omega}{T}\right) \cdot W(\Omega - 2\pi k)\right\} e^{j\Omega n}\, d\Omega \qquad W(\Omega) = \begin{cases} 1 & -\pi < \Omega < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_k \frac{1}{T}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} X_a\left(\frac{\Omega}{T}\right) e^{j\Omega n}\, d\Omega = \dots$$

$$\boxed{\text{c.v.} \quad \Omega' = \Omega - 2\pi k}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_k \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} X_a\left(\frac{\Omega' + 2\pi k}{T}\right) e^{-j\Omega' n}\, d\Omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_k \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\Omega' + 2\pi k}{T}\right)}_{X(\Omega')} e^{-j\Omega' n}\, d\Omega'$$

comparando con $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_k \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\Omega + 2\pi k}{T}\right)}$$

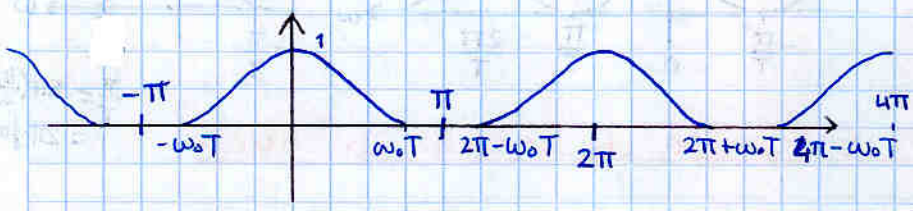
Se producen 3 efectos sobre $X_a(\omega)$ al muestrear que lo transforman en $X(\Omega)$

① $\omega \rightarrow \Omega = \omega T = \omega/(\frac{1}{T})$

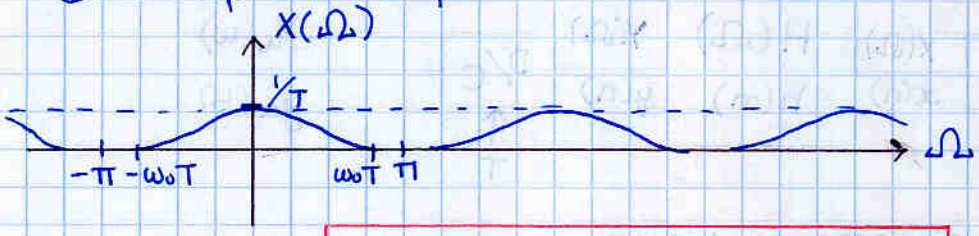
normalizamos en el eje de frecuencias por f_s

$\omega_0 T = \omega_0/(\frac{1}{T}) = \omega_0/f_s$

② Repetimos cada 2π periodicamente



③ Multiplicamos por $1/T$



$$\boxed{X(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_k X_a\left(\frac{\Omega + 2\pi k}{T}\right)}$$

ademas, la señal x_s (antes de interpretar el area de las δ)

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_k X_a\left[\omega + \frac{2\pi k}{T}\right] = X(\omega T)$$

$f_s = \frac{1}{T_s}$

1. Repetir cada $2\pi f_s$
2. mult por $\frac{1}{T}$
3. escalar $\rightarrow X(\omega)$

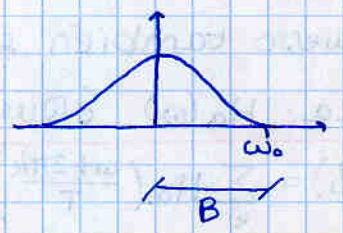
$\Big\}\ X_s(\omega) = X(\omega T)$

* Para poder recuperar la señal continua a partir de la señal discreta el proceso ha de ser reversible $\rightarrow \nexists$ solape

Condición: $\omega_0 T \leq \pi$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0 = 2\pi f_0 \\ T = \frac{1}{f_s} \end{array}\right\}$$

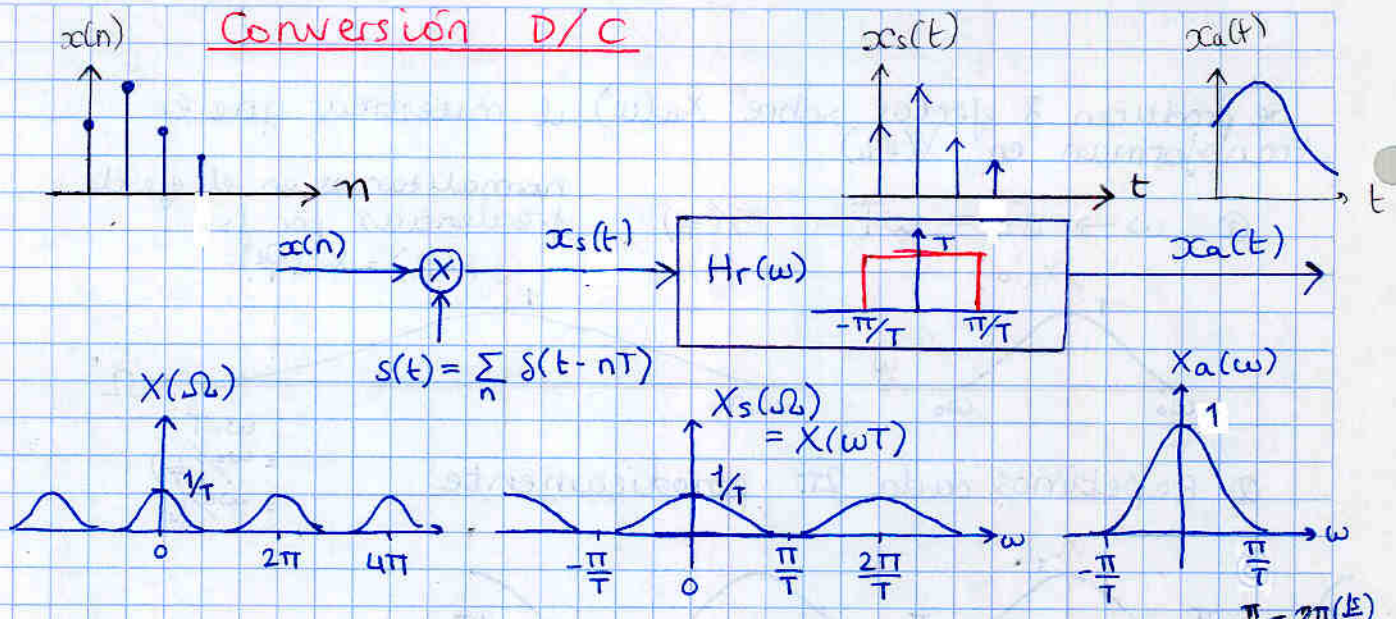
$\Rightarrow f_s \geq 2 f_0$



Teorema de Nyquist	$f_s \geq 2B$

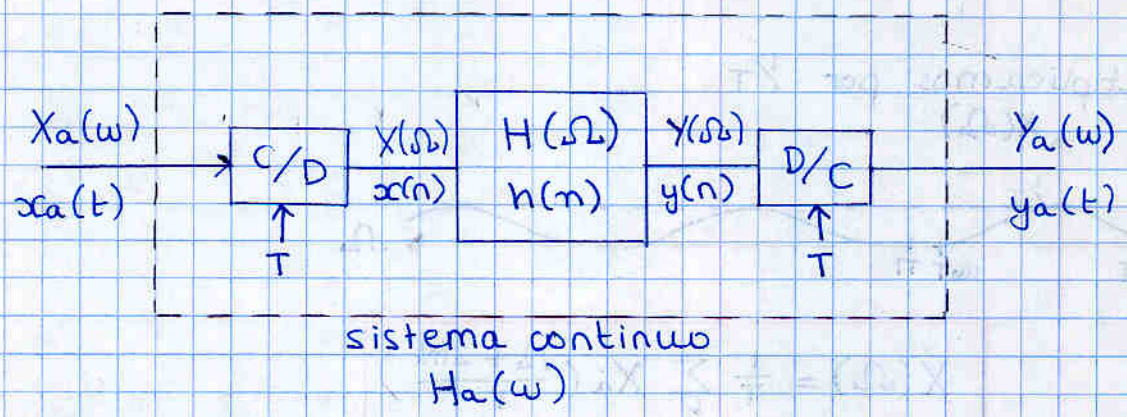
Al solape se lo conoce como "aliasing"

Conversión D/C



$\frac{\pi}{T} = 2\pi\left(\frac{f_s}{2}\right) = 2\pi \cdot f_{max}$

Procesado en el tiempo de señales continuas



sistema continuo
$H_a(\omega)$

$$Y_a(\omega) = T \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right) Y(\omega T) = T \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right) \cdot H(\omega T) \cdot X(\omega T)$$

$\Omega = \omega T$

propiedad convolución

$$= T \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right) H(\omega T) \cdot \frac{1}{T} \sum_k X_a\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right) H(\omega T)\, X_a(\omega)$$

$$\boxed{H_a(\omega) = \frac{Y_a(\omega)}{X_a(\omega)} = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right) \cdot H(\omega T)}$$

es decir, $H(\omega T)$ tomando sólo $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$

el proceso inverso también se puede obtener:

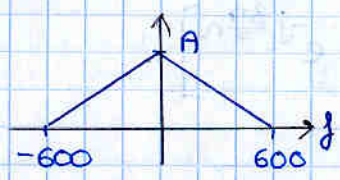
Conocida $H_a(\omega)$ ¿Que $H(\Omega)$ he de emplear?

$$\boxed{H(\Omega) = \sum_k H_a\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T}\right)}$$

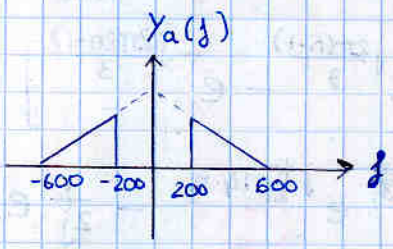
Por analogía con las expresiones de conversión C/D, D/C se ve que

$$\boxed{h(n) = T \cdot h_a(nT)}$$

ejemplo:

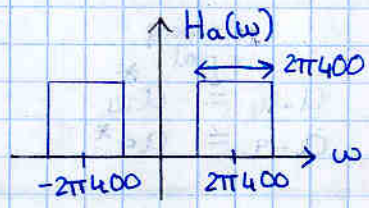


mediante procesado discreto $\xrightarrow{}$ $f_s = \frac{4}{3} f_{nyquist}$



obtener $H(\Omega)$

$$H_a(\omega) = \text{rect}\left[\frac{\omega - 2\pi 400}{2\pi 400}\right] + \text{rect}\left[\frac{\omega + 2\pi 400}{2\pi 400}\right] \Rightarrow$$ respuesta en frecuencia del sistema continuo deseada



¿$f_{nyquist}$? $= 2 \cdot B = 1200$ Hz

$$f_s = \frac{4}{3} \cdot 1200 \text{ Hz} = 1600 \text{ Hz} \qquad T = \frac{1}{1600} \text{ seg}$$

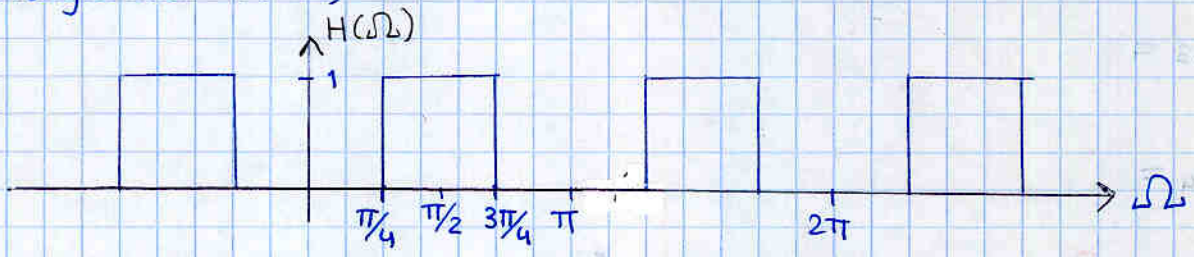
aplicando la ecuación anterior $H(\Omega) = \sum_k H_a\left(\frac{\omega + 2\pi k}{T}\right)$

$\text{rect}\left[\frac{\left(\frac{\Omega + 2\pi k}{T}\right) - 2\pi 400}{2\pi 400}\right]$? es una rect, no una fracción

$$H(\Omega) = \sum_k \left\{ \text{rect}\left(\frac{\Omega + 2\pi k - 2\pi 400 T}{2\pi 400 T}\right) + \text{rect}\left(\frac{\Omega + 2\pi k + 2\pi 400 T}{2\pi 400 T}\right)\right\}$$

$$T = \frac{1}{1600} \quad = H(\Omega) = \sum_k \left\{ \text{rect}\left(\frac{\Omega + 2\pi k - 2\pi \frac{1}{4}}{2\pi \frac{1}{4}}\right) + \text{rect}\left(\frac{\Omega + 2\pi k + 2\pi \frac{1}{4}}{2\pi \cdot \frac{1}{4}}\right)\right\}$$

Dibujando $H(\Omega)$



ejercicio Representar el DSF de $x(n)$

a) $$x(n) = \text{sen}\,\frac{2\pi(n-1)}{3} + \cos\frac{3\pi}{7} n$$

$\Omega_{01} = \frac{2\pi}{3}$ el $-\frac{2\pi}{3}$ es la fase

$\Omega_{02} = \frac{3\pi}{7} = 2\pi \cdot \frac{3}{14}$

el periodo es el denominador $N_{01} = 3$

$N_{02} = 14$

$$N = \text{mcm}(3, 14) = 3 \cdot 14 = 42$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{41} a_k e^{j\frac{2\pi}{42}kn} = \sum_{k=0}^{41} a_k \cdot e^{j\frac{\pi}{21}kn}$$

$$x(n) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi(n-1)}{3}} - e^{-j\frac{2\pi(n-1)}{3}}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{3\pi}{7}n} + e^{-j\frac{3\pi}{7}n}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{3}}}_{a_{14}} \cdot e^{j\frac{\pi}{21}\cdot 14\cdot n} \left(\frac{2\pi}{3}\right) \underbrace{- \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{3}}}_{a_{-14}} \cdot e^{-j\frac{14\pi}{21}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_9} e^{j\frac{9\pi}{21}n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-9}} e^{j\frac{\pi}{21}(-9)n}$$

SIEMPRE valido

$a_{-14} = a_{42-14} = a_{28}$

$a_{-9} = a_{42-9} = a_{33}$

sólo porq x real

$a_{-14} = a_{14}^*$

$a_{-9} = a_9^*$

---

ejercicio.

a) DSF de $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & 6 \leq n < 7 \end{cases}$ periodo 8

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{5} e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = a_k$$

$$a_0 = \frac{1}{8}\left[1+1+1+1+1+1\right] = \frac{5}{8}$$

$$a_1 = \frac{1}{8}\left[1 + e^{-j\frac{2\pi}{8}} + e^{-j\frac{2\pi}{8}2} + e^{-j\frac{2\pi}{8}3} + e^{-j\frac{2\pi}{8}4} + e^{-j\frac{2\pi}{8}5}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[-\sqrt{2} - j(2+\sqrt{2})\right]$$

$a_2 =$

$a_3 =$

$a_4 =$

$a_k = a_{-k}^* = a_{N-k}^*$ $\quad N=8 \quad (a_k = a_{N-k}^*)$

$a_5 = a_3^*$

$a_6 = a_2^*$

$a_7 = a_1^*$

b) TF de $x(n) = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

$$n \cdot x(n) \longleftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

$$TF\left\{\left(\tfrac{1}{3}\right)^{|n|}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n} e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ m=-n}}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3} e^{j\Omega}\right)^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3} e^{-j\Omega}\right)^{n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3} e^{-j\Omega}\right)}{1 - \frac{1}{3} e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} e^{j\Omega}\left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}\right) + 1 - \frac{1}{3} e^{j\Omega}}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{j\Omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{3} e^{j\Omega}} - \frac{1}{9} + 1 - \cancel{\frac{1}{3} e^{j\Omega}}}{\left|1 - \frac{1}{3} e^{j\Omega}\right|^2}$$

$$= \frac{8/9}{1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\cos(\Omega)} = \frac{8}{10 - 6\cos\Omega} = \frac{4}{5 - 3\cos\Omega}$$

$$TF[x(n)] = j \frac{d}{d\Omega}\left[\frac{8}{10 - 6\cos\Omega}\right] = j \frac{-4 \cdot (3 \operatorname{sen}\Omega)}{(5 - 3\cos(\Omega))^2}$$

$$= -j \frac{12 \operatorname{sen}\Omega}{(5 - 3\cos\Omega)^2}$$

Septiembre 2003

Sea $y(n) = a \cdot y(n-1) + b\, x(n-2)$ siendo $a > 0$ causal

a) Respuesta al impulso del sistema $h(n)$

$$x(n) = \delta(n) \longrightarrow \boxed{LTI} \xrightarrow{y(n) = h(n)}$$

$$h(n) = a\, h(n-1) + b\, \delta(n-2) \; ; \quad h(n) = 0 \quad n < 0$$

$n=0 \quad h(0) = a \cdot h(-1) + b\,\delta(-2)^{=0} = 0$

$n=1 \quad h(1) = a \cdot h(0) + b\,\delta(-1)^{=0} = 0$

$n=2 \quad h(2) = a\, h(1) + b\,\delta(0)^{=1} = b$

$n=3 \quad h(3) = a \cdot h(2) + b\,\delta(1)^{=0} = ab$

$n=4 \quad h(4) = a \cdot h(3) + b\,\delta(2)^{=0} = a^2 b$

$$h(n) = a^{n-2} b \cdot u(n-2)$$

b) Margen de valores que puede tomar el parámetro a para que el sistema sea estable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{ESTABLE}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a^{n-2} b| \longrightarrow \text{condición de estabilidad } a < 1$$

c) Calcular $TF\{h(n)\} = H(\Omega)$ y $|H(\Omega)|$

sabemos que ; $h_1(n) = a^n u(n) \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$

$$h_2(n) = a^n b\, u(n) \longleftrightarrow \frac{b}{1-ae^{-j\Omega}}$$

Aplicando la propiedad de retardo

$$h(n) = h_2(n-2) = a^{n-2} b\, u(n-2) \longleftrightarrow \frac{b e^{-2j\Omega}}{1-ae^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h(n) \longleftrightarrow \frac{b e^{-2j\Omega}}{1-ae^{-j\Omega}}}$$

$$|H(\Omega)| = \sqrt{H(\Omega)\cdot H^*(\Omega)} = \frac{|b|}{\sqrt{1+a-2a\cos(\Omega)}}$$

d) Obtener la salida del sistema $y(n)$ cuando la entrada es

$$x(n) = 5 - 20\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi n\right)$$

¿$x(n)$ es periódica? Los dos sumandos deben ser periódicos lo son; el cos tiene periodo $3 \leftarrow \frac{2\pi n}{3}$

$$x(n) = 5 - 20\cdot\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{2}$$

$$= \underbrace{5}_{C_0^x} \underbrace{-10}_{C_1^x} e^{j\frac{2\pi}{3}n} \underbrace{-10}_{C_{-1}^x = C_2^x} e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$$

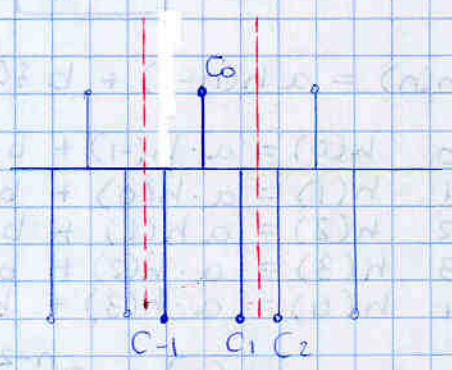
$$= \quad C_{k+N} = C_k$$

$$C_{-1}^x = C_2^x$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_0^x &= 5 \\ C_1^x &= -10 \\ C_{-1}^x &= C_2^x = -10 \end{aligned}}$$

Por tanto:

$$\boxed{C_k^y = C_k^x \cdot H\left(\tfrac{2\pi}{3}k\right)}$$



$$C_0^y = 5\,\frac{b}{1-a}$$

$$C_1^y = -10\,\frac{b}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{3}}}\, e^{-j2\cdot\frac{2\pi}{3}}$$

$$C_2^y = -10\,\frac{b}{1-ae^{-j\frac{4\pi}{3}}}\, e^{-j2\cdot\frac{4\pi}{3}} = C_1^{y\,*}$$

Arturo 696 444 965

$$y(n) = C_0^y + C_1^y e^{j\frac{2\pi}{3}n} + C_2^y e^{j\frac{2\pi}{3}2n}$$

comprobemos que: $C_2^y = C_1^{y\,*} = C_{-1}^y$

$$e^{-j\frac{4\pi}{3}} = e^{+j(-\frac{4\pi}{3}+2\pi)} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$e^{-j\frac{8\pi}{3}} = e^{+(-\frac{8\pi}{3}+4\pi)} = e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

$$C_{2y} = -10\frac{b}{1-ae^{-j\frac{4\pi}{3}}}e^{-j\frac{8\pi}{3}} = -10\frac{b}{1-ae^{j\frac{2\pi}{3}}}\cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

$$= C_0^y + \underbrace{C_1^y e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \underbrace{C_1^{y\,*}}_{\substack{\text{ya que}\\ C_1^* = C_{-1}}} e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}_{2\,\mathrm{Re}\{C_1^y e^{j\frac{2\pi}{3}n}\}}$$

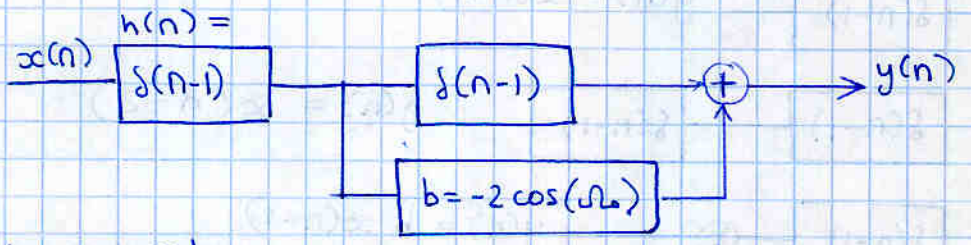
$$= \boxed{C_0^y + 2|C_1^y|\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}n + \measuredangle C_1^y\right)}$$

otra forma de escribirlo sería: $C_1^y = C_1^x \cdot H(\frac{2\pi}{3})$

$$y(n) = 5H(0) + 20\cdot|H(\tfrac{2\pi}{3})|\cdot\cos\Big(\tfrac{2\pi}{3}n + \underbrace{\pi + \measuredangle H(\tfrac{2\pi}{3})}_{\measuredangle(-10\cdot H(\frac{2\pi}{3}))}\Big)$$

Junio 2004

P1



Ω_0 cte conocida

$x(n)$ real y periódica.
Periodo fundamental $N = 5$

$$a_0 = 2$$
$$a_2 = 3\cdot e^{j\pi/6}$$
$$a_4 = 2e^{j\pi/3}$$

a) Calcule el resto de los coef $x(n)$ y exprese $x(n)$ de la siguiente forma

$$x(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k n + \phi_k)$$

por ser $x(n)$ real se que $a_k = a^*_{N-k}$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{4} a_k \exp\left[j\frac{2\pi}{5}nk\right]$$

$$a_1 = a^*_{5-1} = a_4^* = 2e^{-j\pi/3}$$

$$a_3 = a_2^* = 3e^{-j\pi/6}$$

$$x(n) = \underset{k=0}{2} + \underbrace{2e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{5}n}}_{k=1} + \underbrace{2e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{5}4n}}_{k=4} + \underbrace{3e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{2\pi}{5}2n}}_{k=2} + \underbrace{3e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{2\pi}{5}3n}}_{k=3}$$

debemos encontrar los conjugados (sabemos que $x(n)$ será real)

$$e^{\frac{2\pi}{5}4n} = e^{-j\frac{2\pi}{5}} \qquad e^{j\frac{2\pi}{5}3n} = e^{-j\frac{2\pi}{5}2n}$$

$$x(n) = 2 + 2\cdot 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}n - \frac{\pi}{3}\right) + 3\cdot 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{6}\right)$$

$A_0 = 2$; resto $A_n = 0$ $\qquad \omega_1 = 2\pi/5 \qquad \phi_1 = -\pi/3$

$A_1 = 4 \qquad \omega_2 = 4\pi/5 \qquad \phi_2 = \pi/6$

$A_2 = 6 \qquad$ resto $\omega_k = 0 \qquad$ resto $\phi_k = 0$

b) ¿$|H(\Omega)|$?

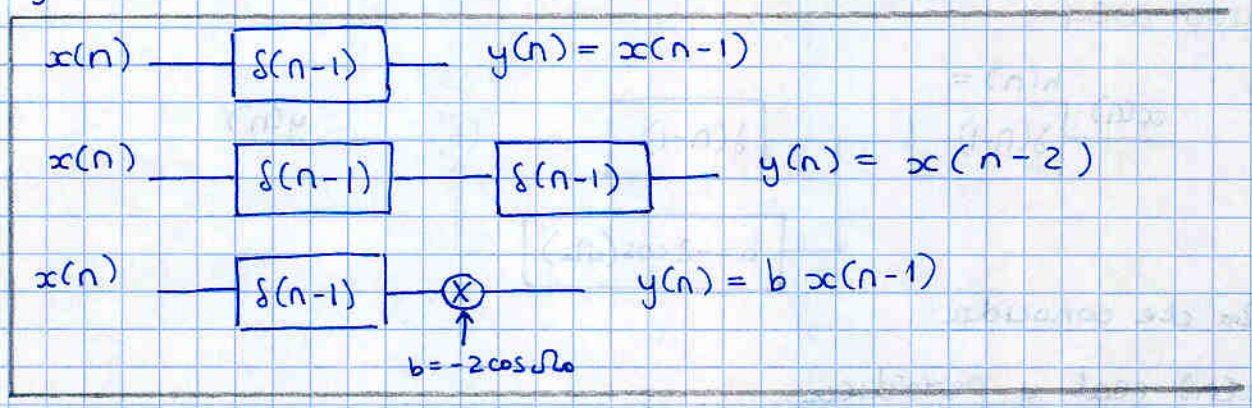
Si $x_1(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n + 30^\circ\right)$ Calcule $y_1(n)$ si $\Omega_0 = \pi/2$.

$\Omega_0 = \pi/2 \rightarrow b = 0 \Rightarrow y(n) = x(n-2)$

$$y_1(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}(n-2) + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_1(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(n) = x(n-2) + b\,x(n-1)$$



$$Y(\Omega) = X(\Omega)e^{-j2\Omega} + bX(\Omega)e^{-j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)\left[e^{-j2\Omega} + be^{-j\Omega}\right]$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = e^{-j2\Omega} + be^{-j\Omega} \Rightarrow |H(\Omega)|$$

TEMA 3. TRANSFORMADA Z

Introducción y definición

La transformada Z (T.Z) viene a jugar un papel similar al que jugaba la T.L. en señales continuas.

→ Amplia el conjunto de secuencias discretas que admiten transformadas

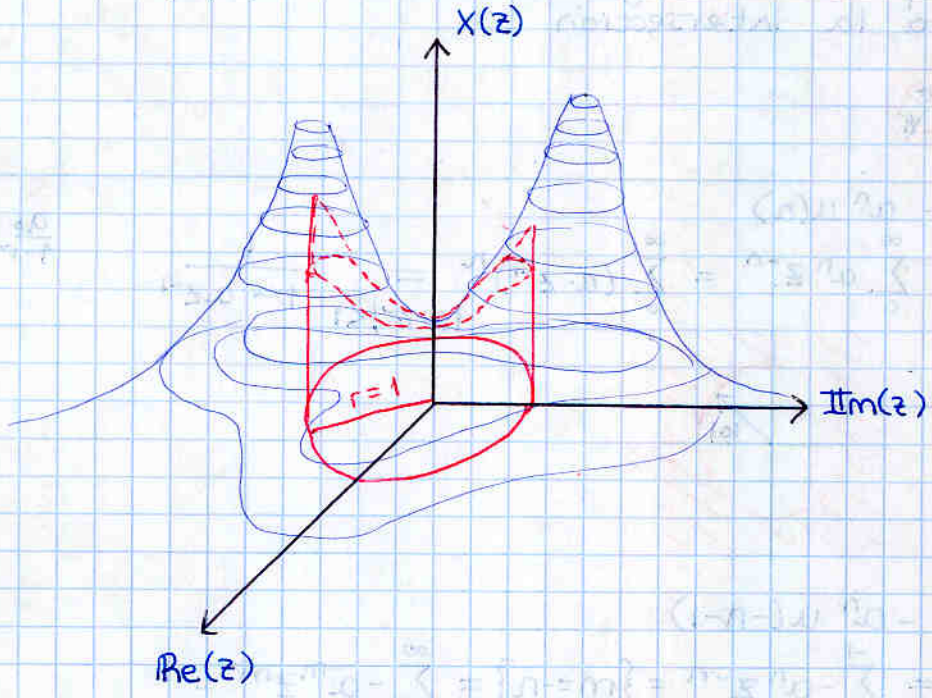
→ Amplia el conjunto de autofunciones → z^n

* Definición

$$\boxed{X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n}} \qquad z = re^{j\Omega} \in \mathbb{C}$$

$$X(z) = TF\left[x(n)\cdot r^{-n}\right]$$

$$X(z)\Big|_{r=1} = X(\Omega)$$



Para señales causales podemos escribir:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n}$$

$$\boxed{x(n) = z^n} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{SLI}\\ \text{discreto}\end{array}} \longrightarrow$$

$h(n)$

$$y(n) = \sum_m h(m)\, z^{n-m}$$

$$= z^n\left(\sum_m h(m)\cdot z^{-n}\right)$$

$$\boxed{y(n) = z^n \cdot H(z)}$$

* Región de convergencia

Definición: La región del plano Z donde la T.Z. converge (donde $TF[x(n)\cdot r^{-n}]$ converge)

- Depende exclusivamente de $|z| = r$
  $\Rightarrow$ si converge para un punto $r\cdot e^{j\Omega_0} \Rightarrow$ convergerá para $r\cdot e^{j\Omega}$ $\forall \Omega$

- Si $x(n)$ es causal si converge en $|z| = r_0 \Rightarrow$ converge para $|z| > r_0$

ROC

(ya que $r_0^{-n} > r^{-n}$ $\forall r > r_0$, $n \geq 0$)

$$\boxed{\text{ROC } |z| > R^+}$$

- Si $x(n)$ es anticausal $\rightarrow$ comportamiento inverso

$$\boxed{\text{ROC } |z| < R^-}$$

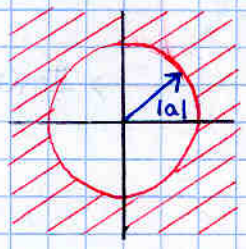
- si $x(n)$ tiene parte causal y anticausal el ROC será la intersección

ejemplo: $x(n) = a^n u(n)$

$$TZ[x(n)] = X(z) = \sum_0^\infty a^n z^{-n} = \sum_0^\infty (a\cdot z^{-1})^n \underset{|a\cdot z^{-1}|<1}{=} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$\frac{a_0}{1-r}$

ROC: $|z| > |a|$



ejemplo: $x(n) = -a^n u(-n-1)$

$$TZ[x(n)] = X(z) = \sum_{-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = \{m=-n\} = \sum_1^\infty -a^{-m} z^m =$$

$$= \sum_1^\infty -(a^{-1}z)^m \underset{|a^{-1}z|<1}{=} \frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{-1}{az^{-1}-1} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

ROC: $|z| < |a|$

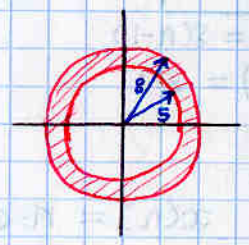
misma expresión de $X(z)$ pero distinta ROC

Esto no ocurre si limitamos las señales a causales

ejemplo:

$$x(n) = 5^n u(n) - 8^n u(-n-1)$$

$$X(z) = \frac{1}{1-5z^{-1}} + \frac{1}{1-8z^{-1}}$$



ejemplo:

$$x(n) = A \cdot u(n)$$

$$X(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z|>1$$

ejemplo: $x(n) = \delta(n)$

$$X(z) = 1 \qquad \text{ROC } \forall z$$

Propiedades de X(Z)

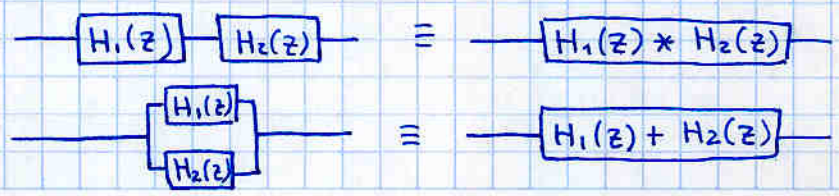
- Linealidad: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \leftrightarrow a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
  ROC: $ROC_1 \cap ROC_2$ (al menos)
- Desplazamiento: $x(n-n_0) \leftrightarrow z^{-n_0} X(z)$
  ROC: la misma salvo por $z=0$, $z=\infty$ donde puede ser modificada por añadir un polo mas
- Escalado en Z: $a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z)$
  ROC: $R_+ < |z| < R_- \rightarrow |a|R_+ < |z| < |a|R_-$
- Diferenciación con respecto a Z:
  $$n^k x(n) \longleftrightarrow \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k X(z)$$
  ROC: la misma
  cuidado, no es totalmente análogo a TF
- Teoremas del valor inicial y final para TZ
  - valor inicial: $\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$ ($x(n)$ causal)
  - valor final: $\lim_{z\to 1} X(z)(1-z^{-1}) = x(\infty)$ (si $\exists\, x(\infty)$)
- Convolución

Función de Transferencia

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n) \longleftrightarrow Y(z) = X(z)\cdot H(z)$$

$$ROC_y = ROC_x \cap ROC_H \text{ (al menos)}$$

Ademas;



- Sistema retardador

$h(n) = \delta(n-1)$

$H(z) = z^{-1}$

notación:

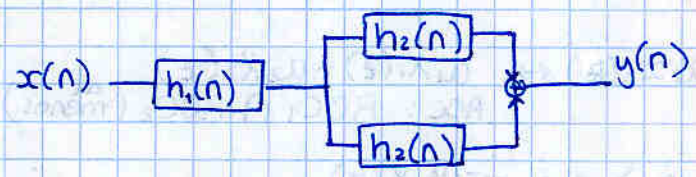
ejemplo:

$$x(n) = n \cdot a^{(n-n_0)} u(n-n_0) \qquad ¿X(z)?$$

$$a^{(n-n_0)} u(n-n_0) \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot z^{-n_0}$$

$$X(z) = -z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z^{-n_0}}{1-az^{-1}}\right)$$

ejemplo:



$h_1(n) = 0'5^n \cdot u(n)$

$h_2(n) = \delta(n) - 3\delta(n-2)$

$h_3(n) = 0'2^{n-3} \cdot u(n-3)$

$$H(z) = H_1(z) \cdot \left[H_2(z) + H_3(z)\right]$$

$$H_1(z) = \frac{1}{1-0'5z^{-1}} \qquad H_2(z) = 1 - 3z^{-2} \qquad H_3(z) = \frac{1}{1-0'2z^{-1}} z^{-3}$$

Transformadas Z racionales

La gran mayoria de los SLI pueden expresarse como funciones racionales en Z

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i \cdot z^{-i}} \quad \text{o tambien} \quad = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i' z^{i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i' \cdot z^{i}}$$

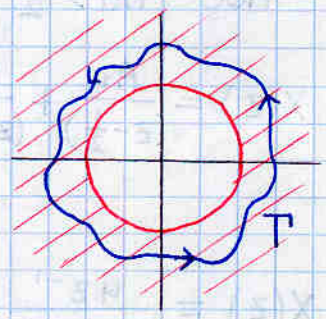
- Ceros: raices de $N(z)$
- Polos: raices de $D(z)$
- Si a_i, b_i, a_i', b_i' reales $\longrightarrow$ polos en pares conjugados
- Los polos deben estar fuera de la ROC

• Transformada Z inversa

• método de integración:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z)\, z^{n-1}\, dz = TZ^{-1}[X(z)]$$

Γ: cualquier contorno cerrado en la ROC



• Método: pares transformados conocidos + propiedades

• Desarrollo en series polinómicas:

$$X(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots \longrightarrow x(n) = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

• Descomposición en fracciones simples: si $X(z)$ es racional

· Asumimos $M \leq N$ (M orden numerador, N orden denominador)

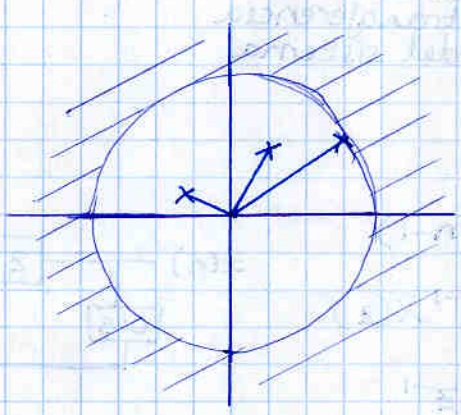
· asumimos causalidad (q no hayan • $X(z)$ con varias $x(n)$)

$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i' z^i}{\sum_{i=0}^{N} a_i' z^i} = \underbrace{\frac{b_M'}{a_M'}}_{\text{si } M=N} + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{z+p_i} \qquad \begin{cases} -p_i & \text{polos} \\ A_i = (z+p_i)X(z)\big|_{z=-p_i} \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{b_M'}{a_M'} + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i z^{-1}}{1+p_i z^{-1}} \Longrightarrow TZ^{-1}$$

$$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\boxed{x(n) = \underbrace{\frac{b_M'}{a_M'}}_{\text{si } M=N} \delta(n) + \sum_{i=1}^{N} A_i (-p_i)^{n-1} u(n-1)}$$



la ROC será la intersección de las ROCi

$$|z| > \max_i |-p_i|$$

ejemplo:

$$X(z) = \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}$$

ROC $|z| > \frac{1}{2}$

$$X(z) = \frac{A_1}{(z-\frac{1}{2})} + \frac{A_2}{(z-\frac{1}{4})} \quad \begin{cases} A_1 = \cancel{(z-\frac{1}{2})} \cdot \left.\dfrac{1}{\cancel{(z-\frac{1}{2})}(z-\frac{1}{4})}\right|_{z=\frac{1}{2}} = 4 \\ A_2 = \cancel{(z-\frac{1}{4})} \left.\dfrac{1}{(z-\frac{1}{2})\cancel{(z-\frac{1}{4})}}\right|_{z=1/4} = -4 \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{4z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-4z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$x(n) = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$= 4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) u(n-1)$$

* SLI's discretos racionales

Recordemos que los SLI con condiciones iniciales nulas admitian expresarlos de la forma.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k D^k y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k D^k x(n)}$$

D^k: operador que retrasa k muestras

suponemos $M = N$

Tomo TZ a ambos lados...

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, TZ\left[\underbrace{D^k y(n)}_{y(n-k)}\right] = \sum_{k=0}^{N} b_k \cdot TZ\left[D^k x(n)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k \, z^{-k} X(z)$$

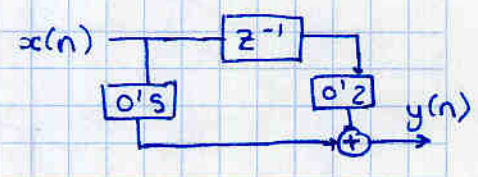
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}} = H(z) =$$ función de transferencia del sistema

ejemplo

$$y(n) = 0'5\, x(n) + 0'2\, x(n-1)$$

Tomo TZ a ambos lados

$$Y(z) = 0'5\, X(z) + 0'2\, z^{-1} X(z)$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 0'5 + 0'2 z^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$h(n) = 0'5\,\delta(n) + 0'2\,\delta(n-1) = [0'5,\ 0'2]$$

ejemplo: $y(n) = x(n) + 0'3\, x(n-1) + 0'1\, y(n-1)$

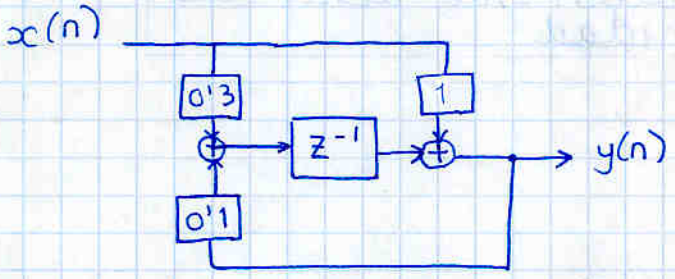
habría que pasar $y(n-1)$ al otro lado

$$H(z) = \frac{1 + 0'3 z^{-1}}{1 - 0'1 z^{-1}} \leftarrow \quad y(n) - 0'1\, y(n-1) = x(n) + 0'3\, x(n-1)$$

$$Y(z) - 0'1 z^{-1} Y(z) = X(z) + 0'3 z^{-1} X(z)$$

$$Y(z)\left[1 - 0'1 z^{-1}\right] = X(z)\left[1 + 0'3 z^{-1}\right]$$

la realización sería:



Nota: a_0 no aparece

(se puede ver muy facil con:)

$$Y(z) = X(z) + 0'3 z^{-1} X(z) + 0'1 z^{-1} Y(z)$$

· Estabilidad de los SLI discretos

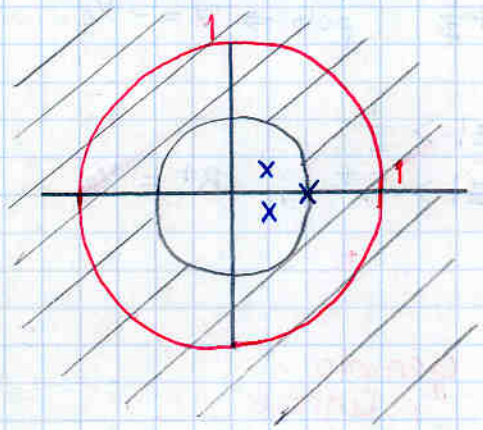
Condición estabilidad: $\sum_n |h(n)| < +\infty$

en el dominio transformado: $\sum_n |h(n) \cdot z^{-n}| < +\infty$ en $|z| = 1$

es equivalente a decir si se puede evaluar la TZ en la circunferencia unidad.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El sistema será estable si la circunferencia unidad está dentro de la ROC}}$

caso sistema causal:



un sistema causal será estable si todos sus polos están dentro de la circunferencia unidad.

Sistema inverso

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \xrightarrow{y(n)} \boxed{H_i(z) = \frac{1}{H(z)}} \longrightarrow x(n) \qquad X(z) = X(z)\,H(z)\cdot\frac{1}{H(z)}$$

en el sistema inverso, se intercambian polos $\longleftrightarrow$ ceros del original.

Para la estabilidad de $H_i(z)$ hay que fijarse en los ceros de $H(z)$

$\Rightarrow$ Para que $H(z)$ sea invertible: los polos y los ceros deben estar dentro de la circunferencia unidad (causales)

Problemas:

8.1. Obtener TZ y ROC

a)
$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 0, 2, 4, 6, \dots \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n, & n = 1, 3, 5, 7, \dots \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Podemos escribir:

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) \qquad \forall n$$

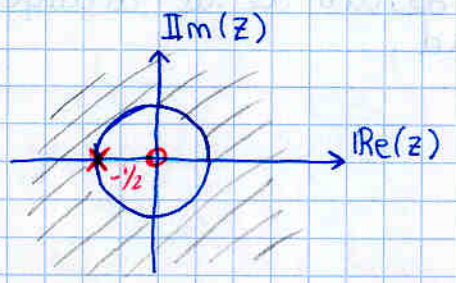
$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

multiplicamos arriba y abajo (ir con cuidado de que no hayan) por z elevado a orden mayor polos ni ceros en el origen

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{z}{z} \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

cero $\Rightarrow z = 0$

polo $\Rightarrow z = -1/2$



ROC: $|z| > \frac{1}{2}$

$|z| > R^+$; $R^+ = 1/2$

b)
$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & -4 \leq n \leq 10 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

ejemplo peligroso

tiene parte causal y anticausal

$$X(z) = \sum_{n=-4}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot z^{-n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} z^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11} z^{-11}}{1 - \frac{1}{3}\cdot z^{-1}}$$

$$\left(\frac{a_{primero} - a_{ultimo}\cdot r}{1 - r}\right)$$

$\exists$ un polo en $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ se cancela con un cero en $z = 1/3$
↳ $\nexists$ polo en $1/3$
(se puede comprobar con el límite (L'H))

¿Cuales son los polos y los ceros de la expresión?

no multiplicamos por $\frac{z^n}{z^n}$ ya que $z=0$ es justamente un polo

→ polo en $z=0$ por potencias de z negativos (si hiciéramos TZ de parte causal $\sum_0^{\infty}$, parte anticausal $\sum_{-\infty}^{-1}$)
→ polo en $z=\infty$ por potencias de z positivas

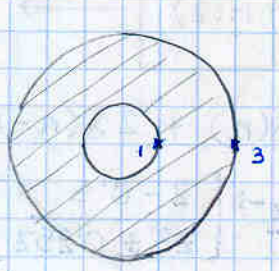
ROC: todo el plano z salvo $|z|=0$ y $|z|=\infty$

8.2 Calcular polos y ceros y decir el tipo de secuencia

a) $X(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-3)}$ ROC: $1 < |z| < 3$
↑ dato

polos $\Rightarrow$ $z=1$
$z=3$

ceros $\Rightarrow$ cero doble en $z=0$



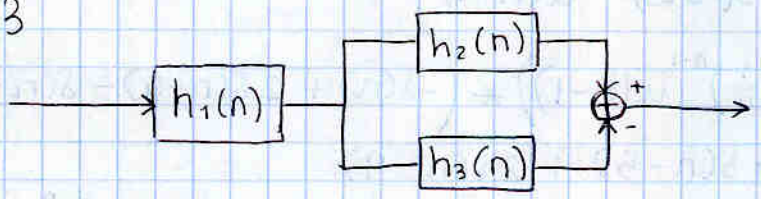
b) $X(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)^2}$ $|z| < 2$

polo doble en $z=2$ cero en $z=-1$ sistema anticausal

c) $X(z) = \dfrac{3z^3 - 2z^2 + 6z + z}{z(z^2+2z+5)(z+3)}$ $|z| > 3$

polos $\Rightarrow$ $z_1 = 0$, $z_2 = -3$
ceros $\Rightarrow$ $z_3, z_4 = -1 \pm 2j$

8.13



$h_1(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$
$h_2(n) = u(n) + \delta(n-3)$
$h_3(n) = u(n-1) + \delta(n)$

calcule $h(n)$ del conjunto
a) Directamente
b) Con la TZ

a) $h(n) = h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n)] = (\frac{1}{2})^n u(n) * [u(n) + \delta(n-3) - u(n-1) - \delta(n)]$
$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

$h(n) = \left[(\frac{1}{2})^n u(n)\right] * \delta(n-3) = (\frac{1}{2})^{n-3} u(n-3)$

b) $H(z) = H_1(z) \cdot [H_2(z) - H_3(z)]$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-3} - \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left[\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}} + z^{-3} - 1\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\, z^{-3}$$

$$h(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-3} u(n-3)$$

P2 - Junio 2004

sistema causal $\quad H(z) = \dfrac{z - 0'5}{z^2 + 0'25z}$

y la secuencia $z(n) = [-1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -1]$ con 1er elem $n=0$

a) $z(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y(n)$?

$$z(n) = -\delta(n) + 2\delta(n-4) - \delta(n-8)$$

$$h(n) = TZ^{-1}\left[\frac{z-0'5}{z^2+0'25z}\right] = TZ^{-1}\left[\frac{z-0'5}{z(z+0'25)}\right]$$

polos: $z_{p_1} = 0$, $z_{p_2} = -0'25$

$$\frac{z-0'5}{z^2+0'25z} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{(z+0'25)}$$

$$A_1 = \left(\frac{z-0'5}{\cancel{z}(z+0'25)}\right)\cancel{z}\Big|_{z=0} = -2$$

$$A_2 = \frac{z-0'5}{z(z+0'25)}(z+0'25)\Big|_{z=-0'25} = 3$$

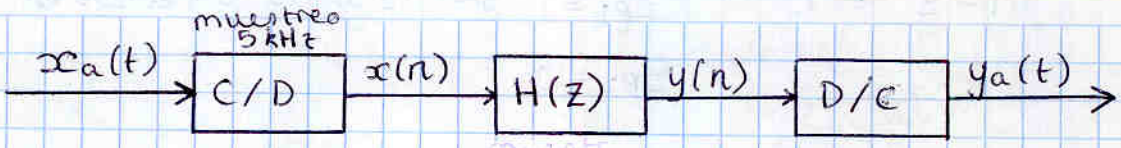
$$h(n) = TZ^{-1}\left[\frac{-2}{z} + \frac{3}{z+0'25}\right] = TZ^{-1}\left[-2z^{-1} + \frac{3z^{-1}}{1+0'25z^{-1}}\right]$$

$$= -2\delta(n-1) + 3(-0'25)^{n-1}u(n-1)$$

$$y(n) = \left(-2\delta(n-1) + 3\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)\right) * \left(-\delta(n) + 2\delta(n-4) - \delta(n-8)\right)$$

$$y(n) = 2\delta(n-1) - 4\delta(n-5) + 2\delta(n-9)$$
$$- 3\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1) + 6\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-5}u(n-5) - 3\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-9}u(n-9)$$

b)



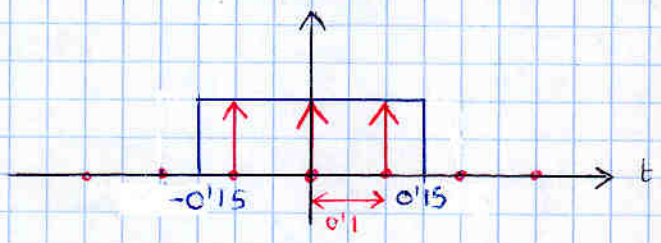
(i) $x_{1a}(t) = \cos(500t)$

$$\boxed{x(n) = x_a(t)\Big|_{t=nT} = x_a(nT)}$$

$$x_1(n) = \cos\left(\frac{500n}{5000}\right) = \cos\left(\frac{n}{10}\right) = \cos\left(2\pi n \frac{1}{20\pi}\right)$$

(ii) $x_{2a}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{0'3}\right)$ con muestreo 10 Hz

$$x_2(n) = \text{rect}\left(\frac{n/10}{0'3}\right)$$



$$x_{2a}(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$$

P2. Septiembre 2003

CIC (cascade integrator comb filter)

$$H(z) = \left(\frac{1 - z^{-RN}}{1 - z^{-1}}\right)^M \quad R, N, M \text{ ctes enteras y positivas}$$

computacionalmente es rapidísimo: sólo sumas y restas

a) Analisis de polos y ceros del sistema

→ Hacemos el análisis sin elevar a M ⇒ El factor ^M sólo me añade una multiplicidad M en polos y ceros.

$\boxed{\text{ceros}}$

$1 - z^{-R\cdot N} = 0 \Rightarrow R\cdot N$ raices

trabajaremos en polares $z = ae^{j\varphi}$

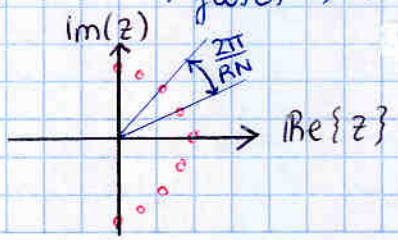
$1 = a^{-RN} e^{-j\varphi RN}$

$1e^{j2\pi k} = a^{-RN} e^{-j\varphi RN}$ → modulo ⇒ $1 = a^{-RN}$ $\boxed{a=1}$

→ fases ⇒ $2\pi k = -\varphi RN$ $\boxed{\varphi = \frac{-2\pi k}{R\cdot N}}$

k = entero

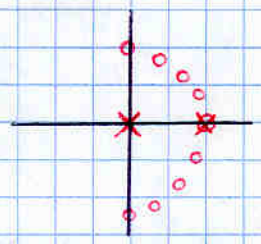
$k = \{0, 1, 2, \ldots, RN-1\}$



$\boxed{\text{POLOS}}$

$1 - z^{-1} = 0$ $\quad z_{p_1} = 1$ se anula con el cero en $z_0 = 1$

$z_{p_2} = 0$



b) Sistema Causal ¿ROC?

ROC: todo el plano z salvo el origen
→ Estable: La circunferencia unidad está dentro de la ROC

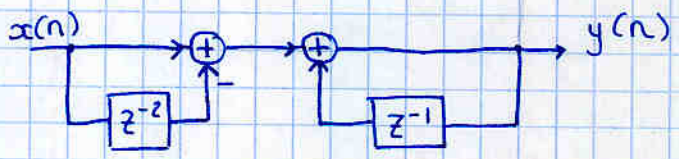
c) obtenga y dibuje una posible realización para el caso $R \cdot N = 2$, $M = 3$

$$H(z) = \left(\frac{1-z^{-2}}{1-z^{-1}}\right)^3$$

El elevar a 3 es equivalente a 3 sistemas iguales en cascada:

$$H(z) = (H_1(z))^3$$

$$H_a(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-z^{-1}}$$



d) Calcule $|H(\Omega)|$. Respuesta en frecuencia del sistema analógico equivalente.

$f_s = 1$Msample/seg.

$$\boxed{H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}} \quad y \quad \boxed{|H(\Omega)| = \sqrt{H(\Omega)\cdot H^*(\Omega)}}$$

$$H(\Omega) = \left(\frac{1-e^{-j\Omega RN}}{1-e^{-j\Omega}}\right)^M$$

$$|H(\Omega)|^2 = \left(\frac{1-e^{-j\Omega RN}}{1-e^{-j\Omega}}\right)^M \cdot \left(\frac{1-e^{-j\Omega RN}}{1-e^{-j\Omega}}\right)^{M\,*}$$

$$= \left[\left(\frac{1-e^{-j\Omega RN}}{1-e^{-j\Omega}}\right)\cdot\left(\frac{1-e^{-j\Omega RN}}{1-e^{-j\Omega}}\right)^*\right]^M$$

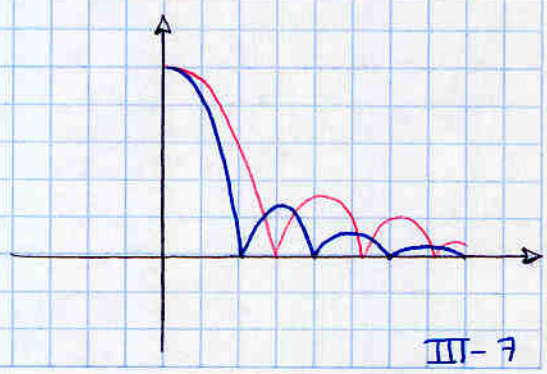
$$= \dots = \left[\frac{1-\cos(\Omega RN)}{1-\cos(\Omega)}\right]^M$$

recuerda $z \cdot z^* = |z|^2$

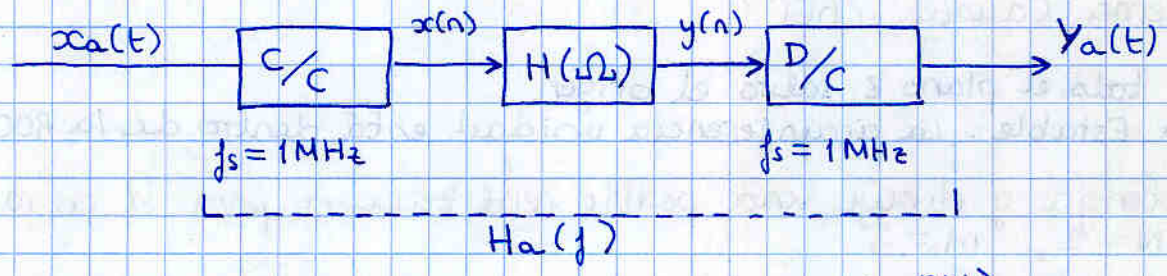
NOTA: $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$

$$|H(\Omega)|^2 = \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\Omega RN}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2(\Omega/2)}\right]^M$$

$$\Rightarrow |H(\Omega)| = \left[\left|\frac{\operatorname{sen}(\Omega RN/2)}{\operatorname{sen}(\Omega/2)}\right|\right]^M$$



Problema II (cont)



aplicando teoría:

$$H_a(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi f_s}\right) \cdot \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega R N}{2 f_s}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2 f_s}\right)} \right|^M$$

$$H_a(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{10^6}\right) \cdot \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{f \cdot \pi \cdot R \cdot N}{10^6}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi \cdot f}{10^6}\right)} \right|$$

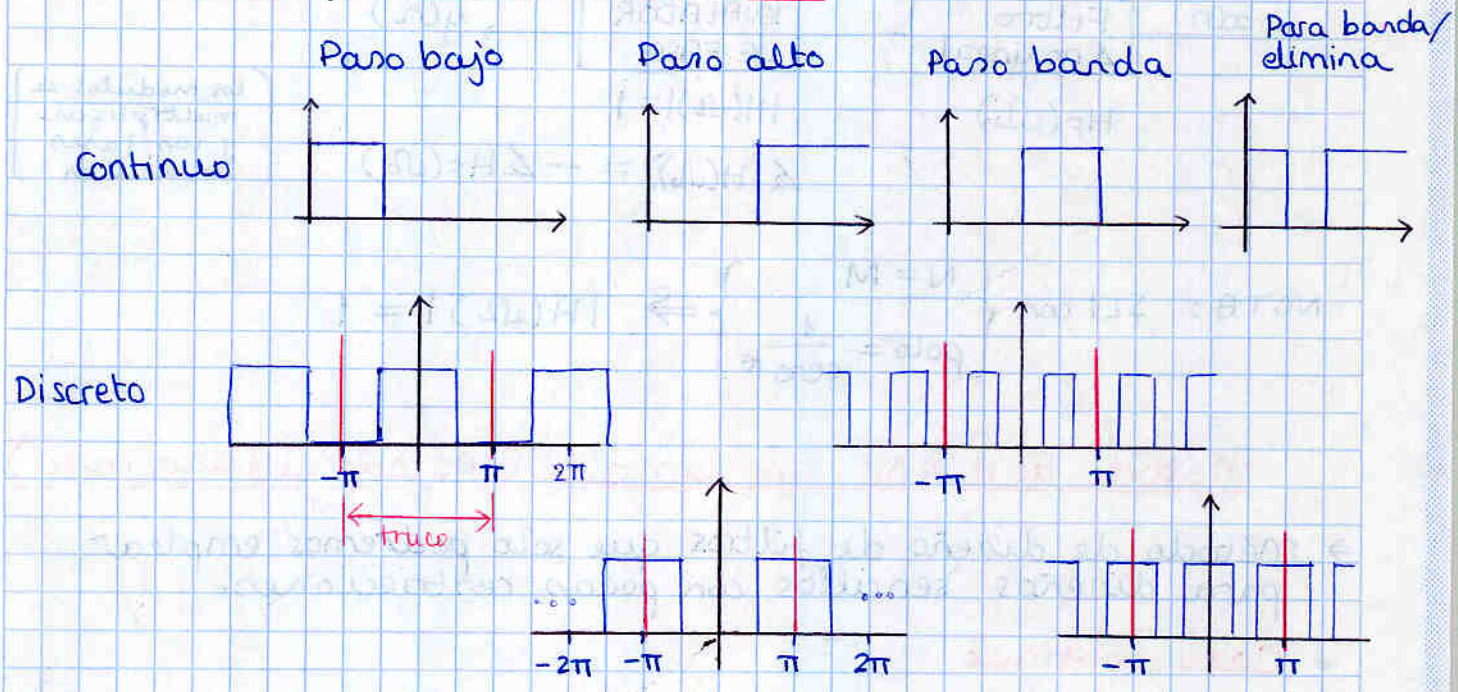
TEMA 4. DISEÑO DE FILTROS ANALÓGICOS Y DIGITALES

Introducción

⇒ Un filtro es un sistema lineal e invariante con selectividad en frecuencia

⇒ La selectividad en frecuencia me permite eliminar cierta energía de una señal que esté entre unos márgenes de frecuencia.

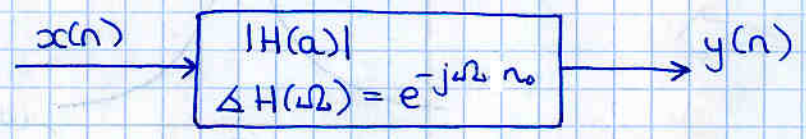
Veamos los filtros más habituales



Respuesta en fase:

Interesa que los filtros tengan respuesta en fase lineal (salvo algunas aplicaciones específicas)
(en el vídeo se nota mucho; en el audio casi no se nota)

¿Qué consigo cuando un filtro tiene fase lineal?



$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot |H(\Omega)| \cdot e^{-j\Omega \cdot n_0}$$

Si llamamos $x_F(n)$ a la señal filtrada en frecuencia que deseamos.

$$X_F(\Omega) = X(\Omega)\,|H(\Omega)|$$

$$\Rightarrow Y(\Omega) = X_F(\Omega) \cdot e^{-j\Omega \cdot n_0}$$

haciendo TF^{-1}

$$\boxed{y(n) = x_f(n-n_0)}$$

Tener una fase lineal sólo me retarda la señal.
No hay distorsión

Puede suceder que sea imposible (al diseñar) satisfacer los dos requisitos a la vez:
respuesta en amplitud deseada + fase lineal

⇒ En ese caso se diseña el filtro para satisfacer la respuesta en amplitud y se compensa la distorsión de fase con un segundo sistema en cascada

$H_F(\Omega)$ $\qquad$ $|H(\Omega)| = 1$

$\measuredangle(H(\Omega)) = -\measuredangle H_F(\Omega)$

[los modulos se multiplican y las fases se anulan]

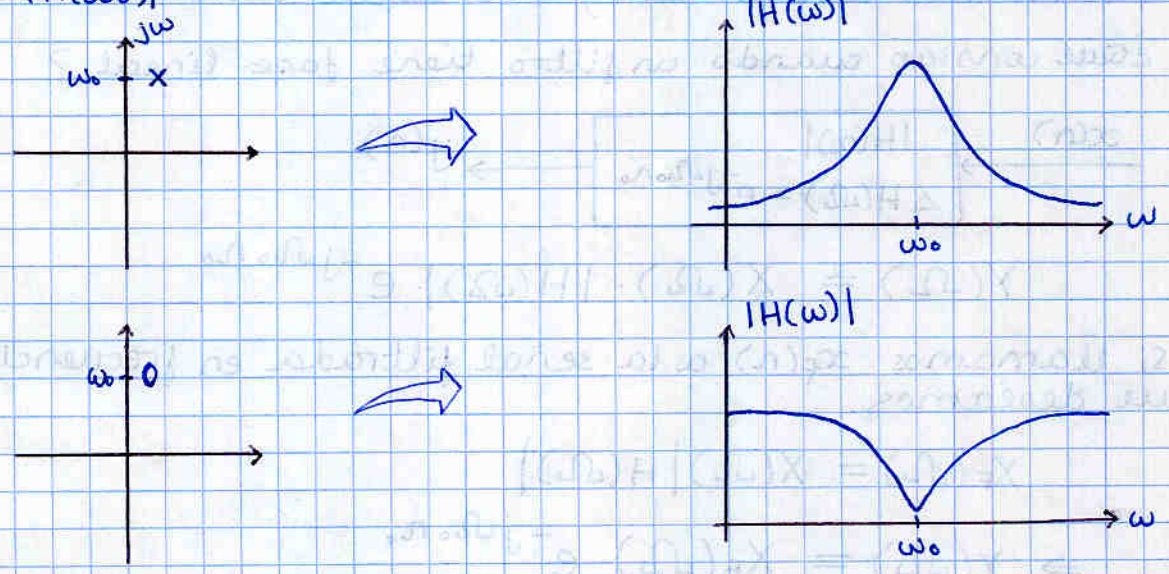
NOTA: SLI con $\left\{ \begin{array}{l} N = M \\ \text{polo} = \dfrac{1}{\text{cero}^*} \end{array} \right\} \Rightarrow |H(\Omega)| = 1$

Método de diseño aproximado (Método de fuerza bruta)

⇒ método de diseño de filtros que sólo podremos emplear para diseños sencillos con pocas restricciones.

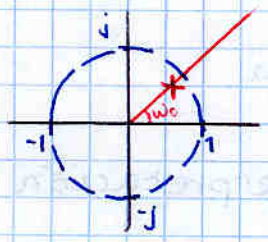
- Caso continuo

- Un polo de $H(s)$ cercano a $j\omega_0$, introduce un pico en la respuesta en frecuencia en ω_0 ($|H(\omega_0)|$)
- Un cero de $H(s)$ cercano al eje $j\omega_0$ introduce un valle en $|H(\omega_0)|$



- Caso discreto

· Polo de $H(z)$ cercano a $e^{j\Omega}$ → pico en $|H(\Omega_0)|$
· Cero de $H(z)$ cercano a $e^{j\Omega_0}$ → valle en $|H(\Omega_0)|$



(el efecto será mayor cuanto más cerca de la circunferencia unidad)

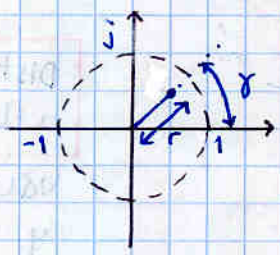
Veamoslo para el caso discreto

$$|H(\Omega)| = \frac{\left|\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\Omega k}\right|}{\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k}\right|} = C \cdot \frac{\prod_{k=1}^{M} \left|\left(1 - c_k e^{-j\Omega}\right)\right|}{\prod_{k=1}^{N} \left|\left[1 - d_k e^{-j\Omega}\right]\right|}$$

c_k = ceros
d_k = polos

Vamos a analizar un factor de la forma

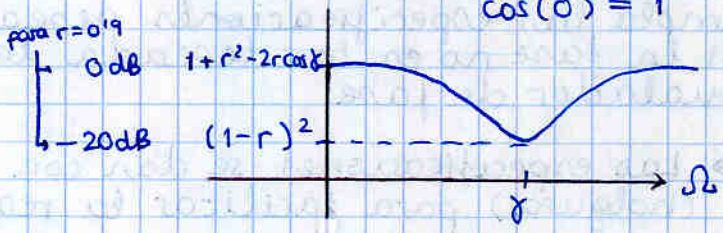
$$F(\Omega) = \left|1 - \underbrace{r \cdot e^{j\gamma}}_{c_k,\, d_k} \cdot e^{-j\Omega}\right|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\Omega - \gamma)$$



Caso 1:

El factor $F(\Omega)$ se encuentra en el numerador

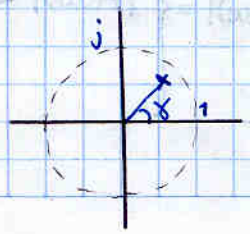
$\min F(\Omega) = 1 + r^2 - 2r = (1-r)^2$ ← cuando $\Omega = \gamma$
$\cos(0) = 1$

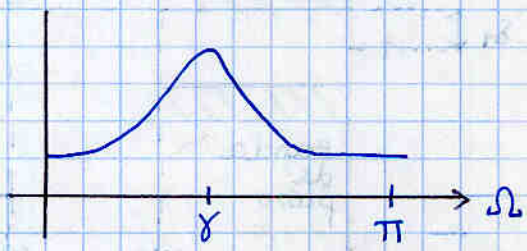


Caso 2:

El factor $F(\Omega)$ se encuentra en el denominador

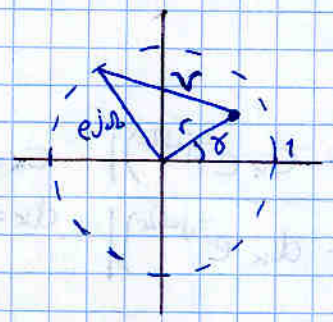
$\min F(\Omega) = (1-r)^2$



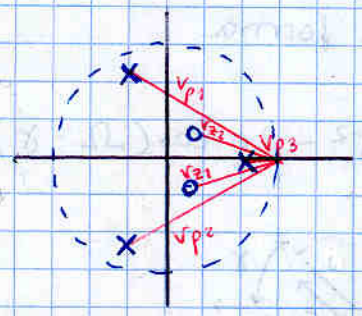


ejemplo: Decir de que filtro se trata

El factor $F(\Omega)$ admite la siguiente interpretación



$$|v| = |e^{j\Omega} - re^{j\gamma}|$$
$$= |e^{j\Omega}(1 - r\cdot e^{j\gamma}e^{-j\Omega})|$$
$$= |1 - re^{j\gamma}e^{-j\Omega}|$$



$$|H(0)| = \frac{|v_{z_1}|\cdot|v_{z_2}|}{|v_{p_1}||v_{p_2}||v_{p_3}|}$$

Distancia a los ceros partido por distancia a los polos

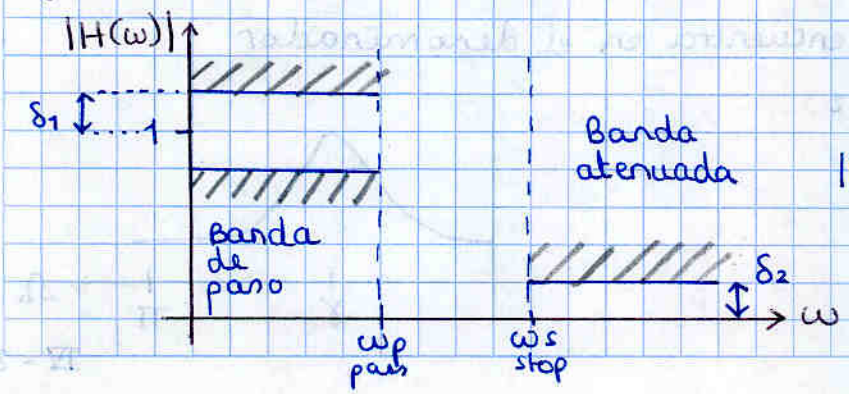
Válido cuando hay pocos ceros y polos y no están muy juntos

Especificaciones

Obtener una $H(s)$ o $H(z)$ de forma que $|H(\omega)|$ o $|H(\Omega)|$ cumpla las especificaciones deseadas.
Si la fase no es la deseada la corregiremos con un igualador de fase.

⇒ Las especificaciones se dan con una serie de márgenes (holgura) para facilitar la realización.

ejemplo de plantilla de especificaciones de un filtro analógico



$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1-\delta_1 < |H(\omega)| < 1+\delta_1 & 0<|\omega|\leq\omega_p \\ |H(\omega)| \leq \delta_2 & |\omega| \geq \omega_s \end{cases}$$

- Transformaciones de frecuencias

Haciendo un simple cambio de variable puedo transformar un filtro paso bajo en un paso alto, paso banda, etc...

Paso bajo		Paso alto
$H(s)$	$s \longrightarrow s^{\#}$	$\Rightarrow H(s^{\#})$
$H(z)$	$z \longrightarrow z^{\#}$	$\Rightarrow H(z^{\#})$

Transformación paso bajo - paso alto continuo

Partimos de: $H(s)$ implementa un filtro paso bajo con frecuencia de corte unidad.

$$\boxed{s = \frac{\omega_c}{s\#}}$$

convierte el F.P.Bj en F.P. Alto de frecuencia de corte ω_c

$$j\omega = \frac{\omega_c}{j\omega^{\#}}$$

$$\omega = -\frac{\omega_c}{\omega^{\#}}$$

$$\boxed{\omega\# = -\frac{\omega_c}{\omega}}$$

ω's cercanos a cero se van a $\omega^{\#}$'s cercanos a $+\infty$ y viceversa

• Filtro de Butterworth

Módulo de la respuesta en frecuencia

$$\boxed{|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

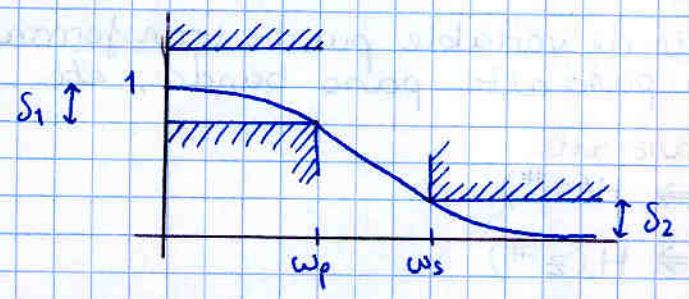
ω_c: pulsación de corte a $-3dB$

N: entero positivo

$\Rightarrow$ Las variables de diseño del filtro serán N y ω_c se ajustarán para que el filtro $|H(\omega)|^2$ cumpla las especificaciones.

$dB \rightarrow (10 \log |H(\omega)|^2)$

para diseñar el filtro mas simple que podamos, hagamos que toque las esquinas



queremos:

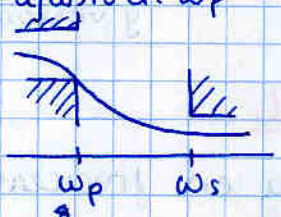
$$\left.\begin{array}{l} |H(\omega_p)| = 1-\delta_1 \xrightarrow[\text{y}]{\text{sust}} \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{1-\delta_1}\right)^2 - 1 \\ |H(\omega_s)| = \delta_2 \xrightarrow[\text{despejando}]{} \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{\delta_2}\right)^2 - 1 \end{array}\right\} \text{sistema para obtener } \omega_c \text{ y } N$$

Dividiendo ambas expresiones y tomando logaritmos despejo N

$$\boxed{N = \frac{1}{2}\,\frac{\log \dfrac{\delta_1(2-\delta_1)\,\delta_2^2}{(1-\delta_1)^2(1-\delta_2^2)}}{\log\left(\dfrac{\omega_p}{\omega_s}\right)}}$$

N ha de ser entero! → redondear hacia arriba

si ajusto en ω_p



si ajusto en ω_s

Lo habitual es optar por: ajustar en ω_p

$|H(\omega_p)| = 1-\delta_1$

$$\boxed{\omega_c = \frac{\omega_s}{\left[\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right]^{1/2N}}}$$

Determinación de $H(s)$

· Puede comprobarse que $\boxed{H(s) = \dfrac{1}{P_N\left(\frac{s}{\omega_c}\right)}}$ P_N: polinomio de Butterworth de orden N (estan tabulados)

⇒ Si el filtro tiene ganancia distinta de la unidad se puede añadir multiplicando por una constante

⇒ Curiosidad: Los polos del filtro de Butterworth estan situados en la circunferencia de radio ω_c (en el semiplano izquierdo como corresponde a un sistema estable)

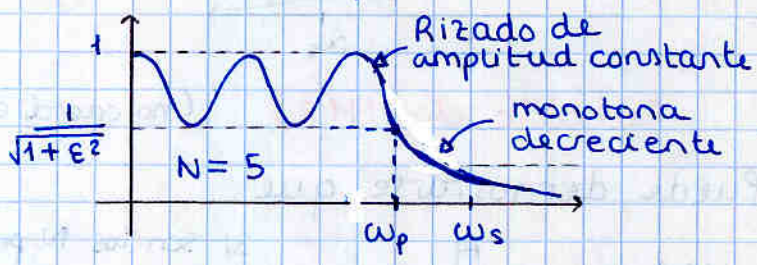
Chebyshev

· Módulo de la respuesta en frecuencia

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

donde ε y N son las variables a calcular

N. impar



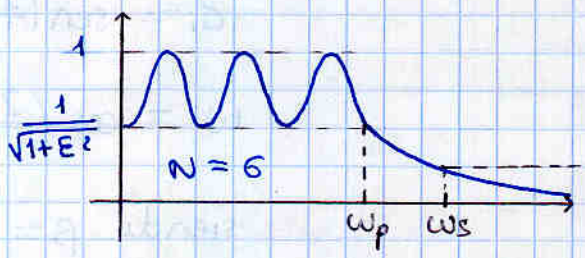
$C_N(x)$ son los polinomios de Chebyshev de orden N

→ Están tabulados

→ $C_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}x) & |x|\leq 1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}x) & |x|>1 \end{cases}$

$C_N(1) = 1$

N par



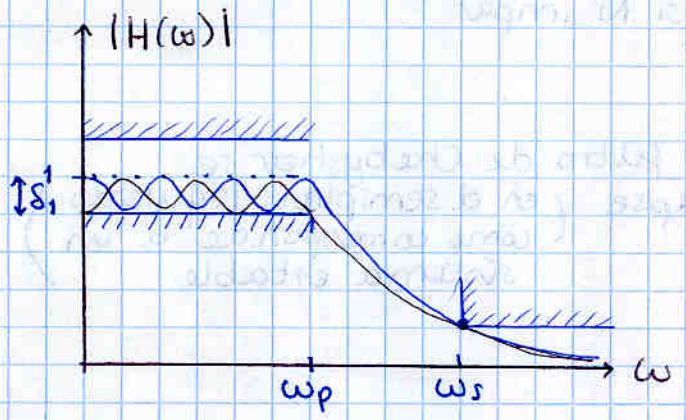
→ Fórmula recursiva:

$C_0(x) = 1$

$C_1(x) = x$

$C_N(x) = 2x \cdot C_{N-1}(x) - C_{N-2}(x)$

Cálculo de ε y N



$$1-\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \longrightarrow \boxed{\varepsilon = \left[\frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1\right]^{1/2}}$$

Cálculo de N

$$|H(\omega_s)| = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}}$$

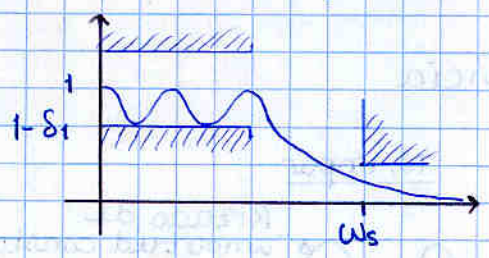
$C_N(x)$ puede ser simplificado para valores altos de x y ordenes (N) grandes por.

$$C_N(x) = 2^{N-1} \cdot x^N \quad \gg 1$$

$$20\log\delta_2 = -20\log\varepsilon - (N-1)\cdot \overset{20\log 2}{6} - N\cdot 20\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)$$

$$\delta_2 \simeq \frac{1}{\varepsilon\, 2^{N-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^N} \longrightarrow \boxed{N = \frac{6 - 20\log\delta_2\varepsilon}{6 + 20\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}}$$

redondeamos N al entero superior.
Esta vez la holgura siempre se dará en ω_s



Calculo de H(s) (no caerá en examen)

Puede demostarse que

$$H(s) = \frac{A}{\prod_{i=0}^{N-1}(s-s_i)}$$

si son los N polos del filtro

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\sigma_i = \operatorname{sen}\left(\frac{2i-1}{N}\right)\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{senh}(\beta)$$

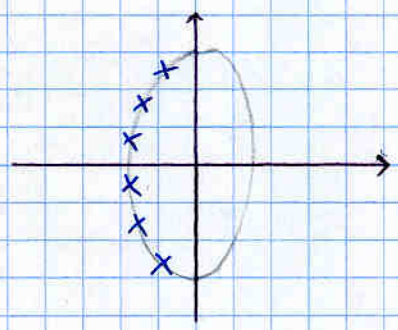
$$\omega_i = \cos\left(\frac{2i-1}{N}\right)\frac{\pi}{2} \cos h(\beta)$$

siendo $\beta = \frac{1}{N}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

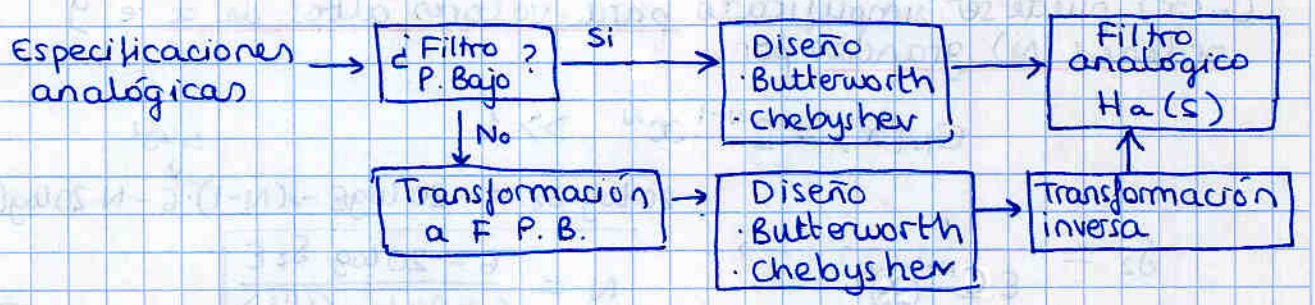
Calculo de A

$$|H(0)| = \frac{A}{\prod_{i=0}^{N-1}|(-s_i)|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & \text{si N par} \\ 1 & \text{si N impar} \end{cases}$$

Curiosidad: Los polos del filtro de Chebyshev se encuentran sobre una elipse (en el semiplano izquierdo como corresponde a un sistema estable)



Diseño filtro analógico



Diseño filtro digital

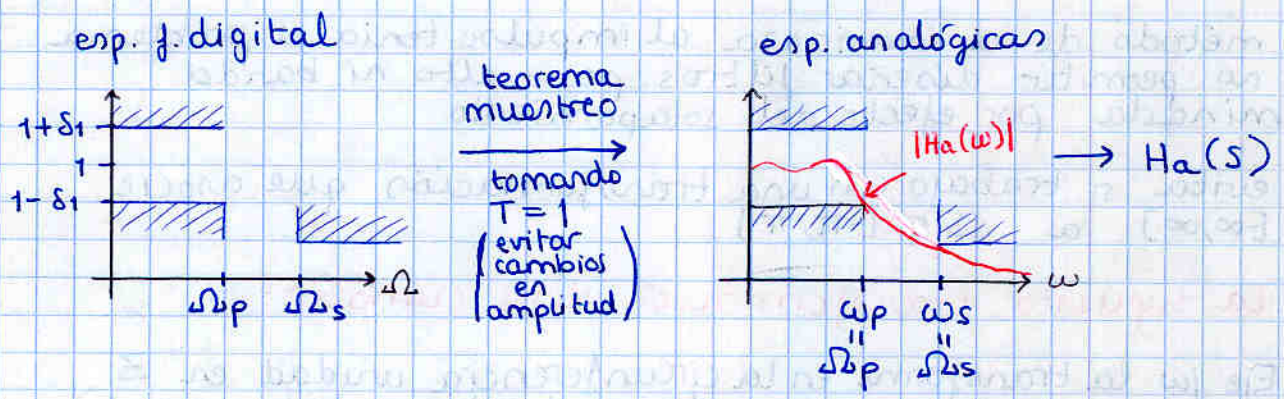
Especificaciones filtro digital

transformación a especificaciones analógicas → Diseño Filtro Analógico $H_a(s)$ → transformación inversa → $H(z)$

- → método de la respuesta invariante
- → Transformación bilineal.

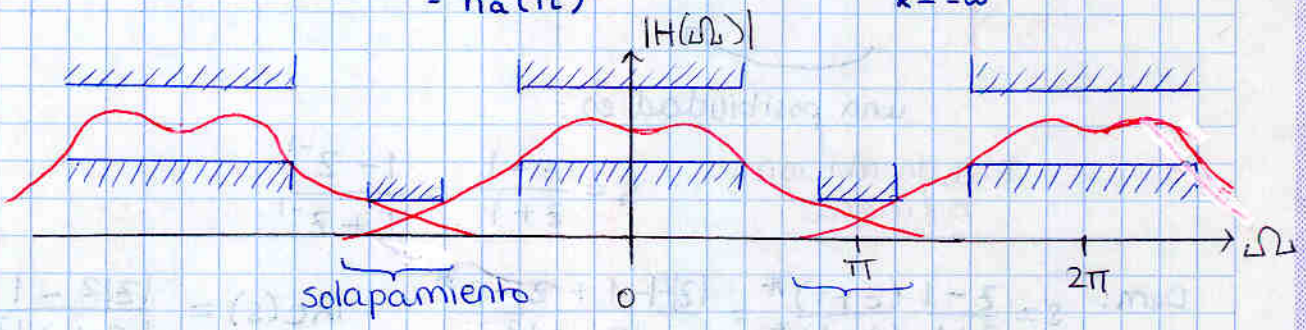
Diseño de filtros digitales IIR

* método de la respuesta al impulso invariante



$$H_a(s) \downarrow \qquad H(z) \uparrow$$

$$h_a(t) \xrightarrow{T=1} h(n) = h_a(nT) = h_a(n) \Rightarrow H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(\Omega + 2\pi k)$$



El solapamiento no suele estropear las especificaciones si es un filtro Paso Bajo.

La tecnica sólo se puede utilizar en el diseño de filtros PASO BAJO

como pasar de $H_a(s)$ a $H(z)$ de una forma mas directa.

Se puede hacer para sistemas con $H_a(s)$ racional

$$H_a(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s+p_i} \iff h_a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cdot e^{-p_i t} u(t)$$

$$h(n) = h_a(nT) \quad \text{con } T=1$$

$$h(n) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cdot e^{-p_i \cdot n} u(n) \xrightarrow{TZ} \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{1-e^{-p_i} z^{-1}}$$

Por lo tanto podemos usar directamente la fórmula

$$\boxed{H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{1-e^{-p_i} z^{-1}}}$$

* La transformación bilineal

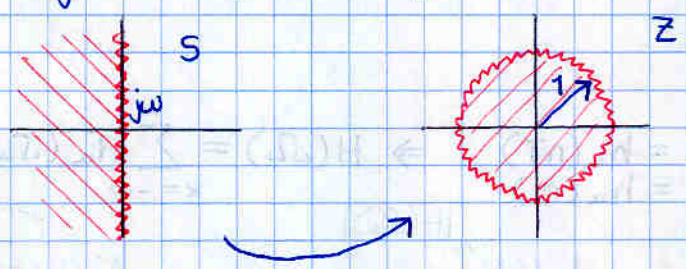
El método de la invarianza al impulso tenia el problema de no permitir diseñar filtros paso alto ni banda eliminada por efecto del solapamiento

Se evita si trabajo con una transformación que asocie $\omega \in [-\infty, \infty]$ a $\Omega \in [-\pi, \pi]$

· La supuesta transformación debe cumplir:

① Eje $j\omega$ la transforme en la circunferencia unidad en z

② y el semiplano izquierdo en el interior de la circunf



Aseguramos que si $H_a(s)$ es estable $\Rightarrow H(z)$ es estable

una posibilidad es:

Transformación bilineal: $s = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Dem: $s = \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{(z+1)^*}{(z+1)^*} = \frac{|z|^2 - 1 + \underbrace{z - z^*}_{Im}}{|z+1|^2}$ $\quad Re(s) = \frac{|z|^2-1}{|z+1|^2}$

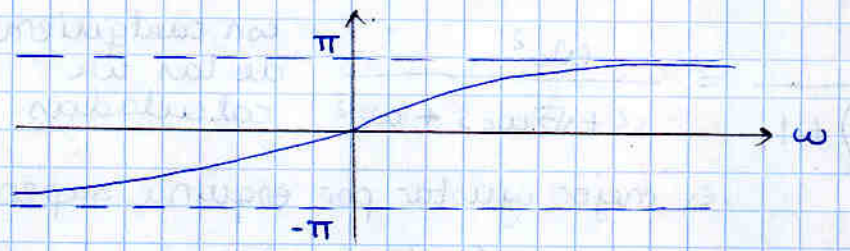
$\omega = \tan(\frac{\Omega}{2})$

$\Omega = 2\,\text{arctg}(\omega)$

② $Re(s) < 0 \iff |z| < 1$

① $z = e^{j\Omega} \Rightarrow s = \frac{1-e^{-j\Omega}}{1+e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\frac{\Omega}{2}}(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}})}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}(e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}})} = j\underbrace{\tan(\frac{\Omega}{2})}_{\omega} = j\omega$

$$\Omega = 2 \cdot \mathrm{arctg}(\omega)$$



En la práctica:

Esp f digital $\delta_1, \delta_2, \Omega_p, \Omega_s$ $\xrightarrow{\text{T. Bilineal}}$ Esp. f. analógico δ_1, δ_2 $\longrightarrow H_a(s) \xrightarrow[\text{bilineal inversa}]{T} H(z)$

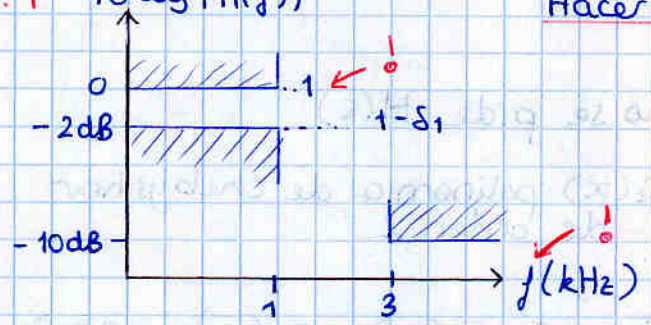
$$\omega_p = \mathrm{tg}\left(\frac{\Omega_p}{2}\right)$$

$$\omega_s = \mathrm{tg}\left(\frac{\Omega_s}{2}\right)$$

$$H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

ejercicios:

10.1 $10 \log |H(f)|^2$ Hacer filtro de Butterworth



$$10 \log |1-\delta_1|^2 = -2\,dB \Rightarrow \delta_1 = 1 - 10^{-2/20} = 0'2057$$

$$10 \log |\delta_2|^2 = -10\,dB \Rightarrow \delta_2 = 10^{-\frac{10}{20}} = 0'3162$$

$$\omega_p = 2\pi\, 1000$$

$$\omega_s = 2\pi \cdot 3000$$

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log\left(\delta_1(2-\delta_1)\delta_2^2 / (1-\delta_1)^2(1-\delta_2^2)\right)}{\log\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right)} = 1'34 \qquad N = 2$$

$$\omega_c = \begin{cases} \dfrac{\omega_s}{\left[\frac{1}{\delta_2^2}-1\right]^{1/2N}} = \dfrac{2\pi\, 3000}{\left[\frac{1}{0'3162^2}-1\right]^{1/4}} = 10\,883 \text{ rad/s} \Rightarrow 1'7321 \text{ kHz} & \text{esquina inferior} \\ \dfrac{\omega_p}{\left[\left(\frac{1}{1-\delta_1}\right)^2-1\right]^{1/2N}} = \dfrac{2\pi\, 1000}{\left[\left(\frac{1}{1-0'2057}\right)^2-1\right]^{1/4}} = 7181 \text{ rad/s} \Rightarrow 1'143 \text{ kHz} & \text{esquina superior} \end{cases}$$

caida mas rapida

$$H(s) = \frac{1}{P_2\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} \qquad P_2(s) = s^2 + \sqrt{2}\,s + 1$$

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}$$

con cualquiera de las ω_c calculadas

Es mejor ajustar por esquina superior

$$|H(\omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\rightarrow 20 \log\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{3}{1'7321}\right)^4}\right) = -10 \text{ dB}$$

$$\rightarrow 20 \log\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{3}{1'14}\right)^4}\right) = -17 \text{ dB}$$

Filtro de Chebyshev

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1\right]^{1/2} = 0'7649$$

$$N = \frac{6 - 20 \log(\delta_2 \varepsilon)}{6 + 20 \log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = 1'229 \qquad N = 2$$

En Chebyshev normalmente no se pide $H(s)$ si que suelen pedir $|H(\omega)|^2$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_2^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

$C_2(x)$ polinomio de Chebyshev de orden 2.

$$C_2(x) = 2x\,C_1(x) - C_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$20 \log |H(\omega_s)| = 20 \log\left(\frac{1}{1 + (0'7649)^2 (2 \cdot 9 - 1)^2}\right) = -22'3 \text{ dB}$$

[P.28] Diseño de un filtro IIR digital

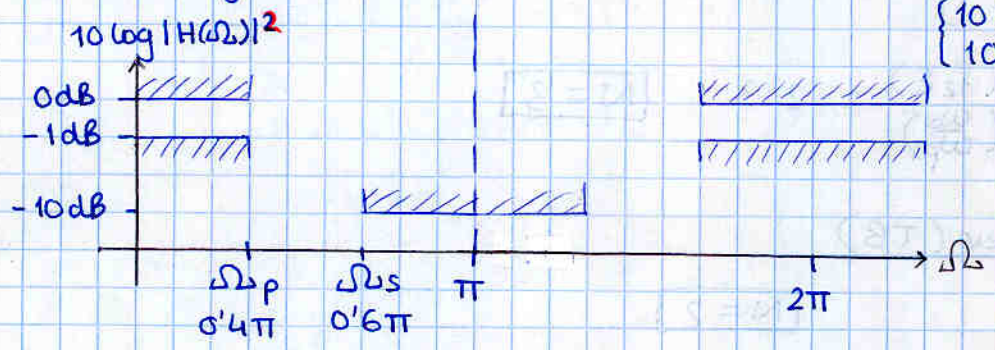
⇒ Especificaciones de atenuación

* No debe superar 1dB de atenuación en el margen de hasta $0'4\pi$ rad.
* 10 dB de $[0'6\pi \rightarrow \pi]$ rad

a) Dibujar plantilla especificaciones de:

* Filtro digital
* Filtro analógico: respuesta al impulso invariante
* Filtro analógico: transformación bilineal

a) F. digital

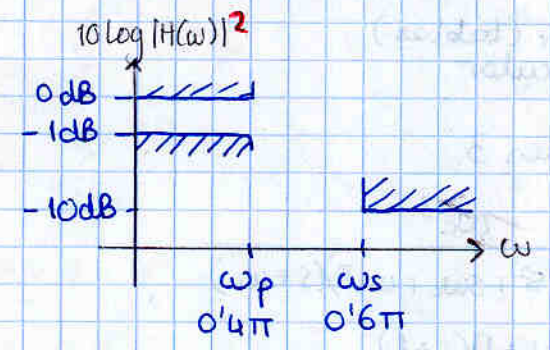


$$\begin{cases} 10\log(1-\delta_1)^2 = -1\,dB \\ 10\log\delta_2^2 = -10\,dB \end{cases}$$

$$\delta_1 = 1-10^{-1/20} = 0'1087$$

$$\delta_2 = 10^{-10/20} = 0'3162$$

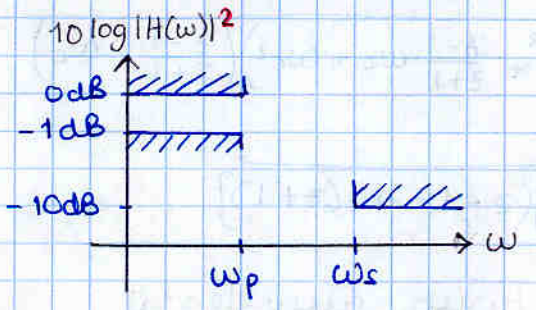
F. analógico (resp. invariante)



recuerda,
muestreamos con T = 1
(las pulsaciones se quedan igual)

$$\omega = \frac{\Omega}{T} \; ; \; T = 1\,seg$$

F. analógico (transformación bilineal)



$$\omega = tg\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$\omega_s = tg\left(\frac{0'6\pi}{2}\right) = 1'3764$$

$$\omega_p = tg\left(\frac{0'4\pi}{2}\right) = 0'7265$$

b) Calcular el orden con Butterworth y Chebyshev
⇒ Método de resp. invariante
⇒ método transformación bilineal

Butterworth (RI)

$$N = \frac{1}{2}\,\frac{\log\dfrac{\delta_1(2-\delta_1)\delta_2^2}{(1-\delta_1)^2(1-\delta_2^2)}}{\log\left(\dfrac{\omega_p}{\omega_s}\right)} = 4'38 \qquad \boxed{N=5}$$

Butterworth (TB)

$$N = 2'78 \qquad \boxed{N=3}$$

Chebyshev (RI)

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1\right]^{1/2} = 0'5088$$

$$N = \frac{6 - 20\log(\delta_2 \varepsilon)}{6 + 20\log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = 2'3 \qquad \boxed{N=3}$$

Chebyshev (TB)

$N = 1'89$ $\qquad \boxed{N=2}$

c) Obtener $H(z)$ del filtro Butterworth T.B.

necesitamos $P_N\left(\frac{s}{\omega_c}\right)$ orden N, función P_N (tablas), ω_c: calcular

Filtro Butterworth aprox. bilineal. orden 3.

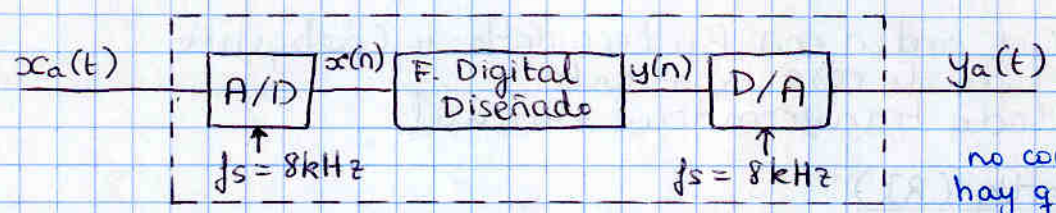
$$\omega_c = \frac{\omega_p}{\left[\left(\frac{1}{1-\delta_1}\right)^2 - 1\right]^{1/2N}} \qquad H(s) = \frac{1}{P_3\left(\frac{s}{\omega_c}\right)} = \frac{\omega_c^3}{(s^2 + s\omega_c + \omega_c^2)(s+\omega_c)}$$

$$P_3(s) = (s^2+s+1)(s+1)$$

$$H(z) = \left.\frac{\omega_c^3}{(s^2+s\omega_c+\omega_c^2)(s+\omega_c)}\right|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{\omega_c^3}{\left(\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{z-1}{z+1}\cdot\omega_c + \omega_c^2\right)\left(\frac{z-1}{z+1} + \omega_c\right)}$$

$$= \frac{\omega_c^3 (z+1)^3}{\left[(z-1)^2 + (z-1)(z+1)\omega_c + \omega_c^2(z+1)^2\right]\left(z - 1 + \omega_c(z+1)\right)}$$

d) Dibujar resp en frec del filtro continuo equivalente



no confundirse, no hay q aplicar teoría de diseño de filtros

$$\boxed{H_a(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)\cdot H(\omega T)}$$

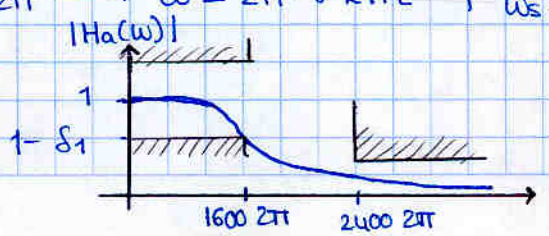
⇒ La plantilla de especificaciones del filtro analógico equivalente es igual (en amplitud) a la del filtro discreto.

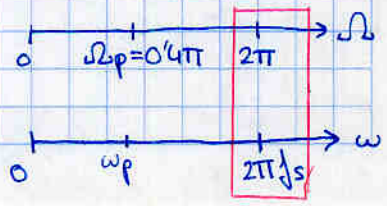
$f_s = 8\,kHz \qquad T = \frac{1}{8kHz}$

$\Omega = 2\pi \longrightarrow \omega = 2\pi \cdot 8\,kHz$

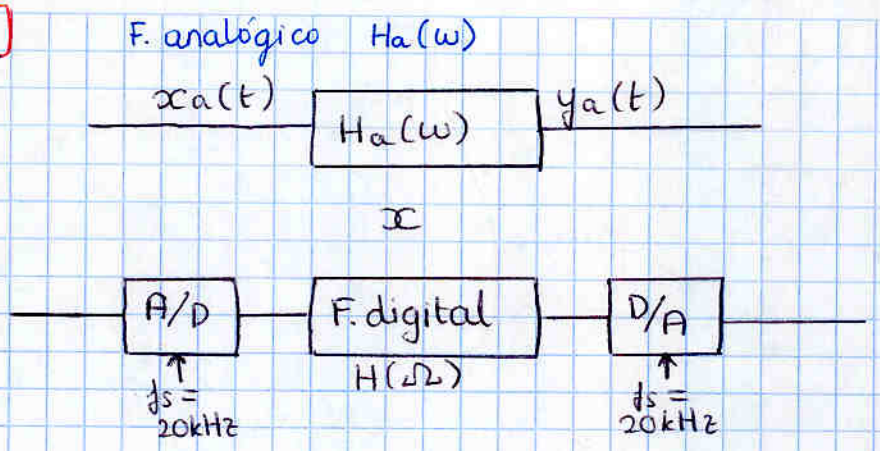
$\omega_p = \Omega_p \cdot f_s = 0'4\pi \cdot 8kHz = 1600\,2\pi\ (rad/s)$

$\omega_s = \Omega_s \cdot f_s = 0'6\pi \cdot 8kHz = 2400\,2\pi$





P. 33



¿Plantilla de especificaciones del filtro digital?
- Respuesta al impulso invariante
- Transformación bilineal

La plantilla de especificaciones será la misma independientemente de la tecnica que utilicemos, la tecnica usada sólo afectará al diseño del filtro digital.

La plantilla del digital sólo dependerá de $H_a(\omega)$ y f_s

$$\Omega_p = \omega_p / f_s$$
$$\Omega_s = \omega_s / f_s$$

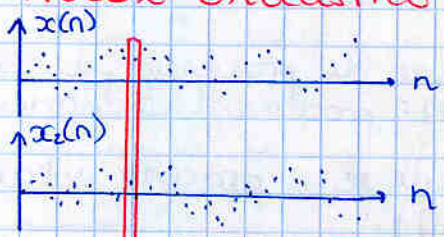
i.e. No confundir Tema 3 (este problema) con Tema 4

TEMA 5- PROCESOS ESTOCÁSTICOS DISCRETOS

* Introducción

· El conjunto de señales parecidas procedentes de una misma fuente puede caracterizarse por un modelo estadístico que las aglutina.
Dicho modelo se conoce como Proceso estocástico

Experiencia discreta → Realización 1
→ Realización 2
⋮



→ Variable aleatoria $\tilde{x}(n)$

$\tilde{x}(n)$

Un proceso estocástico no es más que una sucesión (conjunto) de variables aleatorias

Notación: $\boxed{\{\tilde{x}(n)\}_n \equiv \text{Proceso estocástico}}$

* Definiciones de interés

· Función densidad de probabilidad conjunta:

Contiene toda la información del proceso estocástico

$P[\tilde{x}(n_1), \tilde{x}(n_2), \tilde{x}(n_3), \dots, \tilde{x}(n_k)] \quad \forall n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ es una función de k variables

$P[\cdot]$: densidad de probabilidad conjunta de k v.v.a.a.

En la practica es información excesiva.
Se suele trabajar con valores representativos del nivel instantaneo (información de 1º orden) o memoria o redundancia (información 2º orden)

Nivel instantaneo:

- $\mu(n)$ Valor medio : $E[\tilde{x}(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n) \cdot p[\tilde{x}(n)] \cdot d\tilde{x}(n)$
- $P(n)$ Potencia media : $E[|\tilde{x}(n)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)|^2 \cdot P[\tilde{x}(n)] \cdot d\tilde{x}(n)$
- $\sigma^2(n)$ Varianza : $E\left[\left|\tilde{x}(n) - E[\tilde{x}(n)]\right|^2\right]$

Potencia = Varianza + Media^2

Memoria o redundancia:

- $R(n,k)$ auto-correlación $E[\tilde{x}(n)\,\tilde{x}^*(k)] = \iint \tilde{x}(n)\,\tilde{x}^*(k)\,P[\tilde{x}(n), \tilde{x}(k)]\,d\tilde{x}(n)\,d\tilde{x}(k)$
- $C(n,k)$ auto-covarianza $= E\left[(\tilde{x}(n) - E[\tilde{x}(n)])(\tilde{x}^*(k) - E[\tilde{x}^*(k)])\right]$

* Proceso estocástico estacionario

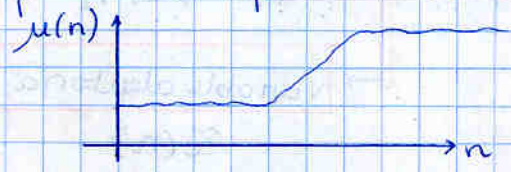
Es aquel en el que la información de nivel instantáneo no depende de "n", y la memoria o redundancia sólo depende de $(n-k)$

$$R(n-k) = R(m) = E[\tilde{x}(n+m) \cdot \tilde{x}^*(n)]$$

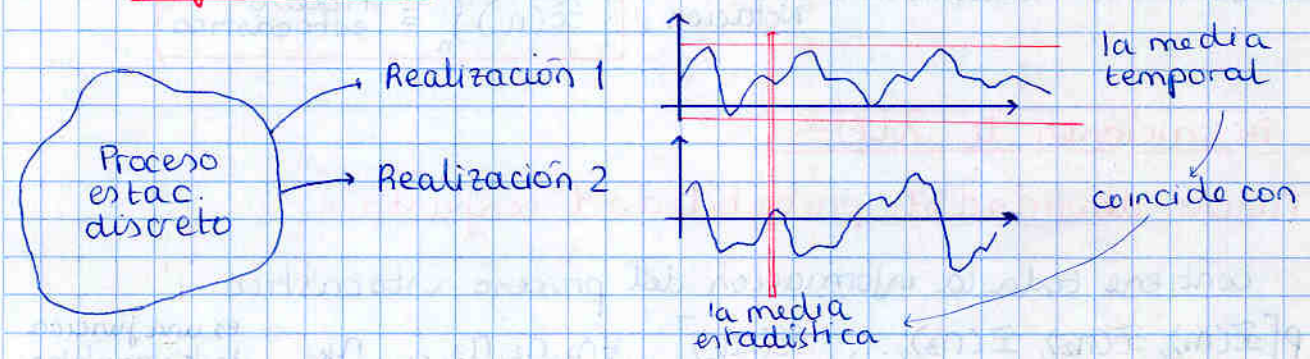
$$C(n-k) = C(m) =$$

Podemos hablar de procesos que no cumplen todas las condiciones, sólo algunas: proceso estacionario en media, en autocorrelación, ...

Tambien puede ser: proceso estacionario a trozos



* Ergodicidad



* Densidad espectral de potencia

Las realizaciones de procesos estocásticos son de potencia media finita y no admiten TF. La autocorrelación si que admite T.F.

Densidad Espectral de Potencia $= S(\Omega) = TF[R(m)]$ asumiendo estacionariedad

$$S(\Omega) = TF[R(m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) e^{-j\Omega m}$$

$$R(m) = TF^{-1}[S(\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\Omega) e^{j\Omega m} \, d\Omega$$

Propiedades del par $R(m) \longleftrightarrow S(\Omega)$

* $R(0) =$ Potencia Media $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\Omega)\, d\Omega$
* $R(m) = R^*(-m) \Rightarrow$ $S(\Omega)$ real
* $S(\Omega) \geq 0 \quad \forall \Omega$ (no tendria sentido potencias negativas)

* Relaciones de Filtrado

* El significado de este esquema es que las realizaciones de $\{\tilde{y}(n)\}$ se obtienen filtrando las realización de $\{\tilde{x}(n)\}$

Se cumple:

- $E[\tilde{y}(n)] = E\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(n-m)\cdot h(m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, E[\tilde{x}(n-m)] \overset{\text{estacionariedad}}{=}$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\cdot E[\tilde{x}(n)] = H(0)\cdot E[\tilde{x}(n)]$$

- $R_{yy}(m) = \underbrace{R_{xx}(m) * h^*(-m)}_{R_{xy}(m) = E[\tilde{x}(n+m)\cdot \tilde{y}^*(m)]} * h(m)$ $\qquad \boxed{S_{xy}(\Omega) = TF[R_{xy}(m)]}$

$$\Rightarrow S_{yy}(\Omega) = TF[R_{yy}(m)]$$
$$= TF[R_{xx}(m) * h^*(-m) * h(m)]$$
$$= S_{xx}(\Omega)\cdot H^*(\Omega) * H(\Omega)$$

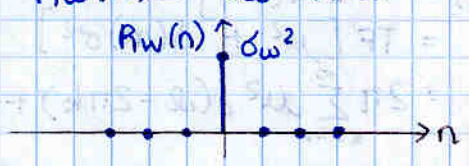
$$\boxed{S_{yy}(\Omega) = S_{xx}(\Omega)\cdot |H(\Omega)|^2}$$

Ruido blanco de media nula

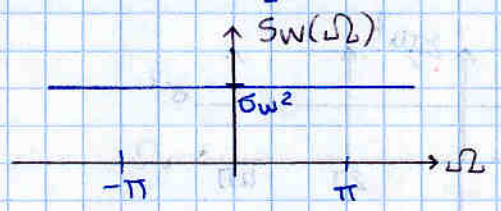
$\{\tilde{w}(n)\}$ proceso estocástico discreto que modela el ruido blanco de media nula

notación
$R_w(n) \equiv R_{ww}(n)$

$$R_w(n) = \sigma_w^2\, \delta(n)$$



$$S_w(\Omega) = TF[R_w(n)] = TF[\sigma_w^2\cdot \delta(n)] = \sigma_w^2$$



$$\boxed{Pot = R_w(0) = \sigma_w^2}$$

Filtramos el ruido:

$$\{\tilde{w}(n)\} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(n) \\ H(\Omega) \end{matrix}} \longrightarrow \{\tilde{y}(n)\}$$

$$E[\tilde{y}(n)] = \underbrace{E[\tilde{w}(n)]}_{0} \cdot H(0) = 0$$

$$S_{YY}(\Omega) = S_{XX}(\Omega) \cdot |H(\Omega)|^2 = \sigma_w^2 \cdot |H(\Omega)|^2$$

ya no es blanco

Teorema de Parseval

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{YY}(\Omega)\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_w^2 \cdot |H(\Omega)|^2\, d\Omega =$$

$$= \sigma_w^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2$$

Problema 34

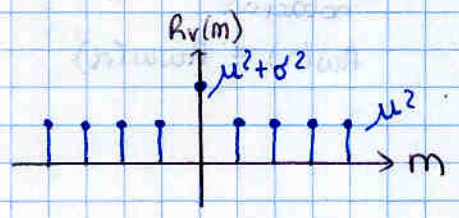
$\{\tilde{v}(n)\}$ proceso estocástico real, estacionario de media μ
El proceso está incorrelado y presenta una varianza que es σ^2

a) Calcular $R_v(m)$ y $S_v(m)$ y dibujar

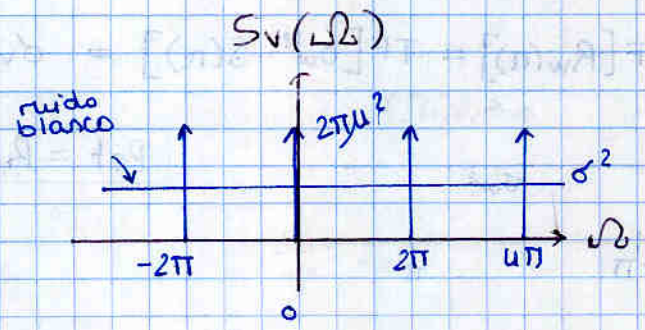
- $R_v(m) = E[\tilde{v}(n+m)\,\tilde{v}(n)] \overset{\text{incorrelado } (m\neq 0)}{=} E[\tilde{v}(n+m)] \cdot E[\tilde{v}(n)]$
  $= \mu \cdot \mu = \mu^2 \quad \forall m \neq 0$
  si fuera $m=0$ sería $E[\tilde{v}^2(n)]$
- $E[\tilde{v}(n)] = \mu$
- $E[(\tilde{v}(n)-\mu)^2] = \sigma^2$

a)

$$R_v(m) = E[\tilde{v}(n+m)\,\tilde{v}(n)] = \begin{cases} E[\tilde{v}(n+m)\,E[\tilde{v}(n)] = \mu^2 & m \neq 0 \\ E[\tilde{v}^2(n)] = P_d = \sigma^2 + \mu^2 & m = 0 \end{cases}$$



$$S_v(\Omega) = TF[R_v(m)]$$
$$= TF[\mu^2 + \delta(m)\sigma^2]$$
$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu^2 \delta(\Omega - 2\pi k) + \sigma^2$$



b) $\{\tilde{v}(n)\} \longrightarrow \boxed{SLI} \longrightarrow \{\tilde{x}(n)\}$

$x(n) = v(n) + 3v(n-1)$

¿ $E[\tilde{x}(n)]$, $R_x(n)$, $S_x(\Omega)$?

$h(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1)$

$H(\Omega) = 1 + 3e^{-j\Omega}$

$H(0) = 1 + 3e^{-j0}$

- $E[\tilde{x}(n)] = E[\tilde{v}(n)] \cdot H(0) = E[\tilde{v}(n)] \cdot \sum_n h(n) = \mu \cdot 4$

- $R_x(n) \longrightarrow$ Dos formas de calcular

① $R_x(m) = R_v(m) * h^*(-m) * h(m)$

② $S_x(\Omega) = S_v(\Omega) \cdot |H(\Omega)|^2$

$\hookrightarrow R_x(m) = TF^{-1}\{S_x(\Omega)\}$

veamos por ②

$$|H(\Omega)|^2 = H(\Omega) \cdot H^*(\Omega) = (1+3e^{-j\Omega})(1+3e^{j\Omega})$$
$$= 10 + 3e^{j\Omega} + 3e^{-j\Omega}$$
$$= 10 + 3 \cdot 2\,\frac{e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}}{2} = 10 + 6\cos(\Omega)$$

$$S_x(\Omega) = \left[\sigma^2 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu^2 \delta(\Omega - 2\pi k)\right] \cdot (10 + 6\cos(\Omega))$$

$$= \sigma^2(10+6\cos(\Omega)) + 10 \cdot 2\pi \cdot \sum \mu^2 \delta(\Omega - 2\pi k)$$
$$+ 6 \cdot 2\pi \sum \mu^2 \underbrace{\cos(\Omega)\,\delta(\Omega - 2\pi k)}_{\underbrace{\cos(2\pi k)}_{1}\,\delta(\Omega - 2\pi k)}$$

$$= \underbrace{\sigma^2(10 + 6\cos(\Omega))}_{A} + \underbrace{16 \cdot 2\pi \sum \mu^2 \delta(\Omega - 2\pi k)}_{B}$$

$$A \Rightarrow TF^{-1}\left\{\sigma^2\left(10 + 3\left(\frac{e^{j\Omega} + 3e^{-j\Omega}}{1}\right)\right)\right\} = 10\sigma^2\delta(n) + 3\sigma^2\delta(n+1) + 3\sigma^2\delta(n-1)$$

$$B \Rightarrow TF^{-1}\left\{16\mu^2 \underbrace{2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)}_{TF\{1\}}\right\} = 16\mu^2$$

Por tanto: $R_x(m) = \sigma^2(10\delta(m) + 3\delta(m+1) + 3\delta(m-1)) + 16\mu^2$

$$R_x(m) = R_v(m) * h^*(-m) * h(m)$$

$$\left.\begin{aligned} h(n) &= \delta(n) + 3\delta(n-1) \\ R_v(m) &= \sigma^2\,\delta(m) + \mu^2 \end{aligned}\right\} \text{ Por el camino ①}$$

$$R_x(m) = (\sigma^2\,\delta(m) + \mu^2) * (\underset{\delta(m)}{\underset{\shortparallel}{\delta(-m)}} + 3\underset{\delta(-(m+1))}{\underset{\shortparallel}{\delta(-m-1)}}) * (\delta(m) + 3\delta(m-1))$$

$$\delta(-(m+1)) = \delta(m+1)$$

$$= (\sigma^2\,\delta(m) + \mu^2) * \underbrace{(\delta(m) + 3\delta(m+1)) * (\delta(m) + 3\delta(m-1))}_{A}$$

$$\left[\begin{aligned} \text{Convolución } A: \quad & \delta(m) + 3\delta(m-1) + 3\delta(m+1) + 9\delta(m) \\ &= 10\,\delta(m) + 3\,\delta(m-1) + 3\,\delta(m+1) \end{aligned}\right]$$

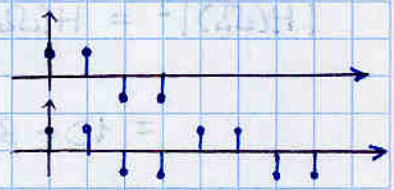
$$= 10\sigma^2\delta(m) + 10\mu^2 + 3\sigma^2\delta(m-1) + 3\mu^2 + 3\sigma^2\delta(m+1) + 3\mu^2$$

$$R_x(m) = 16\mu^2 + 10\sigma^2\delta(m) + 3\sigma^2\delta(m-1) + 3\sigma^2\delta(m+1)$$

Problema 2. (Septiembre 2002)

$$x_b(n) = \delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-2) - \delta(n-3)$$

$$x_c(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_b(n-4m)$$



a) $TF\{x_b(n)\}$ y $TF\{x_c(n)\}$

$$X_b(\Omega) = TF\{x_b(n)\} = TF\{\delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-2) - \delta(n-3)\}$$
$$= 1 + e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega} - e^{-j3\Omega}$$

$x_c(n)$ será periodica de periodo 4, $C_0^{x_c}, C_1^{x_c}, C_2^{x_c}, C_3^{x_c}$

$x_c(n)$ secuencia real $\Rightarrow C_1 = C_{4-1}^* = C_3^*$

$$C_k^{x_c} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_b(n)\, e^{-j\underbrace{\frac{2\pi}{4}k}_{\Omega}n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_b(n)\, e^{-j\Omega n}$$

$$= \frac{1}{4}\, X_b\left(\frac{2\pi}{4}\cdot k\right)$$

$$C_0^{x_c} = \frac{1}{4}\cdot X_b(0) = \frac{1}{4}(1+1-1-1) = 0$$

$$C_1^{x_c} = \frac{1}{4}\cdot X_b\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{4}} - e^{-j\pi} - e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1}{4}(1-j+1-j) = \frac{1-j}{2}$$

$$C_3^{x_c} = (C_1^{x_c})^* = \frac{1+j}{2}$$

$$C_2^{x_c} = \frac{1}{4}\cdot X_b(\pi) = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi} - e^{-j2\pi} - e^{-j3\pi}) = \frac{1}{4}(1-1-1+1) = 0$$

Pero nos piden TF y no el DSF

$$X_c(\Omega) = TF\left\{\sum_{k=0}^{3} C_k^{x_c} e^{j\frac{2\pi}{4}nk}\right\} = TF\left\{C_1^{x_c} e^{j\frac{2\pi}{4}n} + C_3^{x_c} e^{j\frac{2\pi}{4}3n}\right\}$$

$$TF\left[e^{-j\Omega_0 n}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi m)$$

$$= C_1^{x_c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi m\right) + C_3^{x_c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega + \frac{3\pi}{2} - 2\pi m\right)$$

b) Sea un SLI con ecuaciones en diferencias

$$y(n) = 2\cdot x(n) + x(n-1) + 0'5\, y(n-1) \Rightarrow H(z),\ h(n)$$

TZ a ambos lados de la igualdad

$$Y(z) = 2X(z) + X(z)\cdot z^{-1} + 0'5\, Y(z)\, z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1 - 0'5 z^{-1}\right] = X(z)\left[2 + z^{-1}\right]$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{1 - 0'5 z^{-1}}}$$

Para sacar $h(z)$ (descomp. fracciones simples)

$$H(z) = \frac{2z + 1}{z - 0'5} = 2 + \frac{2}{z - 0'5} = 2 + \frac{2z^{-1}}{1 - 0'5 z^{-1}}$$

polo en 0'5
cero en -0'5
la ROC sería el exterior del círculo $|z| > 0'5$
incluye $|z| = 1$

$$\begin{array}{l|l} 2z + 1 & z - 0'5 \\ \hline 2z - 1 & 2 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$h(n) = TZ^{-1}\left[2 + \frac{2z^{-1}}{1 - 0'5 z^{-1}}\right] = 2\delta(n) + 2\cdot 0'5^{(n-1)}\, u(n-1)$$

c) $x_b(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y_b(3)$?

$$y_b(n) = h(n) * \left(\delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-2) - \delta(n-3)\right)$$

$$= h(n) + h(n-1) - h(n-2) - h(n-3)$$

$$y_b(3) = h(3) + h(2) - h(1) - h(0) = 2\cdot 0'5^2 + 2\cdot 0'5 - 2 - 2 = -2'5$$

d) $x_a(t)$ tiempo continuo $X_a(\omega) = \omega \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{16\pi}\right)$

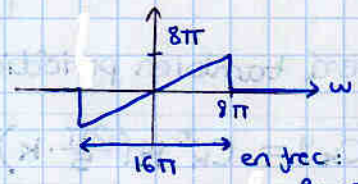
$f_s = 2 f_{min}$ (f_{min} para que ∄ solapamiento)

Calcular TF $y_d(n) = x_d(n)\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

Va de -4Hz a 4Hz → ancho banda $B_W = 4$ Hz

$f_{min} = 2\cdot B_W = 8$ Hz

$f_s = 2\cdot f_{min} = 16$ Hz $\rightarrow T = \frac{1}{16}$



en frec: 8 Hz
$B_W = 4$ Hz
$f_{min} = 2\cdot 4$ Hz

$$TF\{y_d(n)\} = \underbrace{TF\{x_d(n)\}}_{X_d(\Omega)} * \underbrace{TF\{\cos(\tfrac{\pi}{2}n)\}}_{\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2}} = X_d(\Omega) * \tfrac{1}{2}\left(\delta(\Omega+\tfrac{\pi}{2})+\delta(\Omega-\tfrac{\pi}{2})\right)$$

siendo $\boxed{X_d(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega-2\pi k}{T}\right)} = 16\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Omega-2\pi k}{1/16}\right)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega-2\pi k}{1/16\cdot 16\pi}\right)$

en este caso ha funcionado hacer el C.V. y 'parando' T como si fuera una fracción

$$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{16\pi}\right) \xrightarrow{C.V.\ \omega=\frac{\Omega-2\pi k}{T}} \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega-2\pi k}{T\cdot 16\pi}\right)$$

En el caso que rect no estuviera centrado, no habria funcionado

$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega-\omega_0}{T}\right)$

$\mathrm{rect}\left(\frac{\Omega-\omega_0 T}{BW\cdot T}\right)$

$$X_d(\Omega) = (16)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Omega-2\pi k}{1/16}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\Omega-2\pi k}{1/16\cdot 16\pi}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\Omega-2\pi k}{\pi}\right)$$

$$Y_d(\Omega) = \frac{1}{2}16^2\left[\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\Omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\Omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k}{\pi}\right) + \sum\left(\Omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{\Omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k}{\pi}\right)\right]$$

Problema 1 Junio 2002

Sea la secuencia $x(n) = 1 + \mathrm{sen}(\frac{2\pi}{5}n) + \cos(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{2})$

a) ¿Periódica? ¿N?

- señal cte. 1 periódica periodo $N=1$
- $\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{5}n)$ periódica periodo $N=5$
- $\cos(\frac{4\pi}{5}n)$ periódica periodo $N=5$

} m.c.m. $N=5$

¿como desplazas n a un nº no entero?

Puede ser confuso $\cos(\frac{4\pi}{5}n+\frac{\pi}{2}) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\left(n+\frac{5}{4\pi}\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\left(n+\frac{5}{8}\right)\right)$

b) C_k^x del DSF

$$x(n) = 1 + \frac{e^{j\frac{2\pi}{5}n} - e^{-j\frac{\pi 2}{5}}}{2j} + \frac{e^{j(\frac{4\pi}{5}n+\frac{\pi}{2})} + e^{-j(\frac{4\pi}{5}n+\frac{\pi}{2})}}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{5}n} + \frac{e^{j\frac{4\pi}{5}n}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{e^{-j\frac{4\pi}{5}n}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$x(n) = \underbrace{1}_{C_0^x} + \underbrace{\frac{1}{2j}}_{C_1^x}e^{j\frac{2\pi}{5}n} - \underbrace{\frac{1}{2j}}_{C_{-1}^x = C_{5-1}^x = C_4^x}e^{-j\frac{2\pi}{5}n} + \underbrace{\frac{j}{2}}_{C_2^x}e^{j\frac{4\pi}{5}n} - \underbrace{\frac{j}{2}}_{C_{-2}^x = C_{5-2}^x = C_3^x}e^{-j\frac{4\pi}{5}n}$$

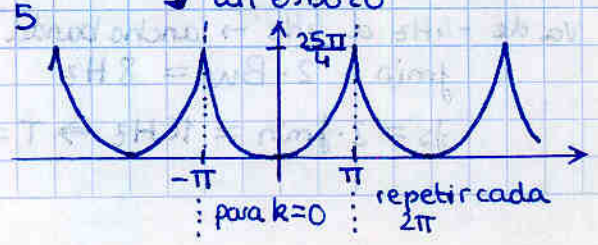
$N=5$ ⇒ Habrán 5 coefts

c) C_k^y siendo $x(n) \longrightarrow \boxed{H(\Omega) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{25}{4\pi}(\Omega-2\pi k)^2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\Omega-2\pi k}{2\pi}\right)} \longrightarrow y(n)$

un esbozo

$y(n)$ será tambien periódica de $N=5$

$$\boxed{C_k^y = C_k^x H\left(\frac{2\pi}{5}\cdot k\right)}$$



$C_0^y = 1 \cdot H(0) = 0$

$C_1^y = \frac{1}{2j} \cdot H(\frac{2\pi}{5}) = \pi/2j$

$C_2^y = j/2 \cdot H(\frac{4\pi}{5}) = \frac{4\pi j}{2} = 2\pi j$

$C_3^y = C_2^{y*} = -2\pi j$

$C_4^y = C_1^{y*} = -\frac{\pi}{2} j$

Problema 1
Junio 2002

d) $x(n)$ de muestrear $X_a(t)$ con $f_s = 2kHz$ calcular de nuevo $x_a(t)$ suponiendo que no se ha producido solapamiento

$x_a(t) \xrightarrow[t = n_0 T]{} x(n)$

$x(n) \xrightarrow[n = \frac{t}{T}]{} X_a(t)$

se puede hacer así ya que no hay solapamiento

$$X_a(t) = 1 + \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 2000}{5} t\right) + \cos\left(\frac{4\pi\, 2000}{5} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

e) $x(n) \rightarrow \boxed{\text{F.P. Bnd}} \xrightarrow{y(n)}$

termino $\text{sen}(\frac{2\pi}{5} n)$ variación maxima $\pm 1dB$

terminos 1 y $\cos(\frac{4\pi}{5} n + \frac{\pi}{2})$ con atenuación $> 10dB$

- Dibujar plantilla especificaciones del <u>filtro digital</u>

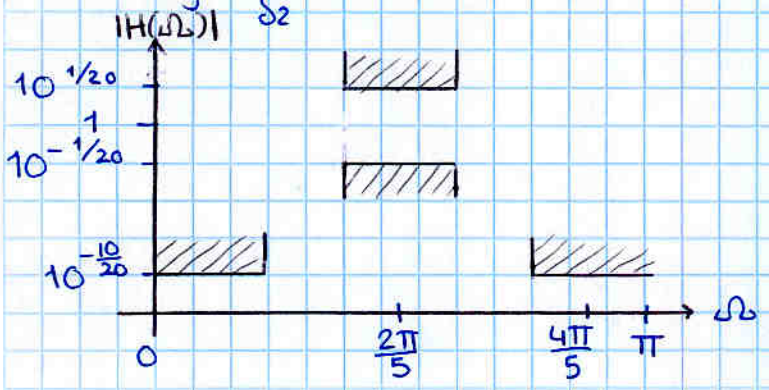
Plantillas se dan en lineales

$20 \log \underbrace{|H(\Omega)|}_{1+\delta_1} = 1dB \rightarrow 1 + \delta_1 = 10^{1/20}$

(δ_1 no será igual por arriba y por abajo)

$20 \log \underbrace{|H(\Omega)|}_{1-\delta_1} = -1dB \rightarrow 1 - \delta_1' = 10^{-1/20}$

$20 \log \underbrace{|H(\Omega)|}_{\delta_2} = -10dB \rightarrow \delta_2 = 10^{-\frac{10}{20}}$



Problema 2
Junio 02

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad ; \text{ causal}$$

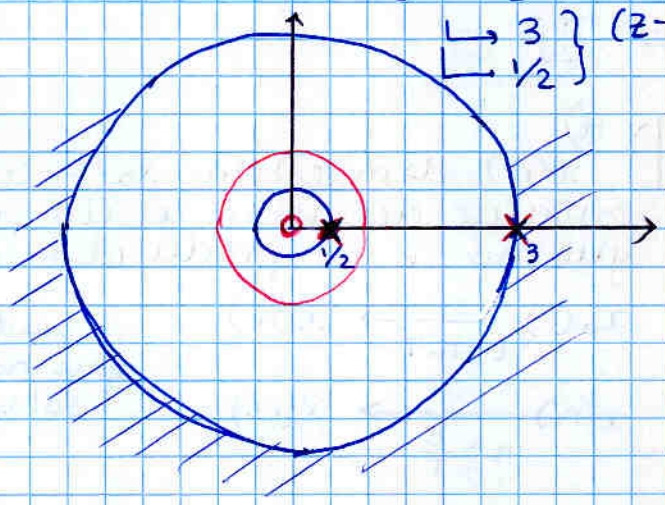
a) Diagrama polos y ceros. Demuestre que sistema inestable

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2}}$$

cero doble en el origen

polos $\Rightarrow z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \to 3 \\ \to 1/2 \end{array}\right\} (z-3)(z-1/2)$



b) $h(n)$

$$\begin{array}{l|l} z^2 & z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$H(z) = 1 + \frac{7/2\,z - 3/2}{(z-3)(z-1/2)} = 1 + \frac{18/5}{(z-3)} + \frac{-1/10}{(z-1/2)}$$

$$A = \left.\frac{7/2\,z - 3/2}{\cancel{(z-3)}(z-1/2)}\cancel{(z-3)}\right|_{z=3} = \frac{18}{5}$$

$$B = \left.\frac{(7/2\,z - 3/2)\cancel{(z-1/2)}}{(z-3)\cancel{(z-1/2)}}\right|_{z=1/2} = -1/10$$