

ETSI Telecomunicación

Microondas

máxima ganancia: diseño bilateral

$$\rho_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L}$$

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} \rho_S}{1 - S_{11} \rho_S}$$

máxima ganancia:

$$\rho_S = \rho_{in}^*$$

$$\rho_L = \rho_{out}^*$$

Sistema de ecuaciones con solución analítica

$\rho_{S_{max}}$ y $\rho_{L_{max}}$
 máx ganancia máx ganancia

Cavidad rectangular TE₁₀



campos TE₁₀

$$\begin{aligned}
 E_y &= \sin(\frac{\pi}{a}x) [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}] \\
 H_x &= \frac{1}{Z_0} \sin(\frac{\pi}{a}x) [E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{+j\beta z}] \\
 H_z &= \frac{j}{Z_0} \cos(\frac{\pi}{a}x) [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_y &= f_1(x, y) [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}] \\
 H_x &= f_2(x, y) [E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{+j\beta z}] \\
 H_z &= f_3(x, y) [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}]
 \end{aligned}$$

variación transversal
 variación axial idéntica a TM

1. cortocircuito en $z=0$

$$E_y|_{z=0} = 0$$

$$E_0^+ + E_0^- = 0$$

$$E_0^- = -E_0^+ \quad (\rho = -1 \text{ en } z=0)$$

2. cortocircuito en $z=d$

$$E_y|_{z=d} = 0 \Rightarrow \sin(\beta d) = 0 \rightarrow \beta = \frac{p\pi}{d}$$

$$\begin{aligned}
 E_y &= f_1(x, y) (-2j) E_0^+ \sin(\beta z) \\
 H_x &= f_2(x, y) (2) E_0^+ \cos(\beta z) \\
 H_z &= f_3(x, y) (-2j) E_0^+ \sin(\beta z)
 \end{aligned}$$

$$k = 2\pi/\lambda = \sqrt{k_c^2 + \beta^2}$$

no f.c.!

$$\frac{k}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{k_c^2 + \beta^2}$$

TE_{mnp}

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

Microondas

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 4º curso
Curso 2006/2007

Contenido

- Referencia rápida de la asignatura
- Apuntes extensos de la asignatura
- Problemas de exámenes resueltos

Fecha de última actualización: 19 Junio 2010

Tema 2. Líneas de Transmisión

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

suponemos:

- variación armónica (jωt) (senos)
- ε y μ escalares reales
- sin fuentes ρ=0, J=0

$$\vec{E} = \left[\vec{E}_t(t_1, t_2) + \hat{z} E_z(t_1, t_2) \right] e^{-\gamma z}$$

componente transversal axial

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ [rad/m]}$$

exponente de propag en dirección axial

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_t^2 E_z + (k^2 + \gamma^2) E_z &= 0 \\ \nabla_t^2 H_z + (k^2 + \gamma^2) H_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

k^2

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}_t &= \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \left[-j\omega\mu \nabla_t \times \vec{H}_z - \gamma \nabla_t E_z \right] \\ \vec{H}_t &= \frac{1}{k^2 + \gamma^2} \left[j\omega\epsilon \nabla_t \times \vec{E}_z - \gamma \nabla_t H_z \right] \end{aligned} \right.$$

se da en el examen cambiar signo de γ para la regresiva

Modos TEM

$$k_c^2 = 0 \rightarrow \gamma^2 = -k^2$$

$$\gamma = \pm jk = \pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

no dispersivo
· dos conductores

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_t^2 \phi &= 0 \\ \vec{E}_t &= -\nabla_t \phi \end{aligned} \right.$$

$$\eta = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Modos TM

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

↓ c.c.
autovalores $k_{cn} \rightarrow \gamma_n = \sqrt{k_c^2 - k^2}$
autofunciones E_{zn}

↓ (2)

$$\vec{E}_t \downarrow Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}$$

$$\vec{H}_t$$

$$E_z = () e^{-\gamma z} + () e^{\gamma z}$$

$$\vec{E}_t = () e^{-\gamma z} - () e^{\gamma z}$$

$$\vec{H}_t = () e^{-\gamma z} + () e^{\gamma z}$$

Modos TE

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

↓ c.c.
autovalores $k_{cn} \rightarrow \gamma_n$
autofunciones H_{zn}

↓ (2)

$$\vec{H}_t \downarrow Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

$$\vec{E}_t$$

$H_z: +$
 $H_t: -$
 $E_t: +$

Propiedades de corte y propagación TE y TM

$$e^{-\gamma z}$$

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2}$$

no onda
 $k = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}$
autov. hallado con las c.c. = $\frac{2\pi f}{\lambda}$ no hay

$k^2 < k_c^2 \Rightarrow \gamma = \alpha \Rightarrow e^{-\alpha z}$ corte

$k^2 > k_c^2 \Rightarrow \gamma = j\beta \Rightarrow e^{-j\beta z}$ propag.

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Frec de corte f_c def: $k/f_c = k_c$

permite nueva expresión para k_c además de la obtenida al aplicar las c.c.

$$k = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$k_c = \frac{1}{f} k \rightarrow k^2 - k_c^2 = k^2 \left(1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right)$$

si $f > f_c$ entonces

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = j\sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$\gamma = j\beta = jk \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}$$

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_g} \quad \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}$$

TRUCCO: $\eta = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$ pero en realidad, en TE y TM: $\gamma = j\beta = jk \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}$

Vemos que $\beta, \lambda_g, Z_{TE/TM}$ dependen de la frec y del modo

$$Z = \frac{\vec{E}_t}{\vec{H}_t \times \hat{z}}$$

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}$$

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}$$

Energía:

$$U_e = \frac{\epsilon}{4} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV$$

$$U_m = \frac{\mu}{4} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV$$

Potencia disipada en un volumen

$$P_L = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}^* dV = \frac{\sigma}{2} \iiint_V |\vec{E}|^2 dV$$

$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$

! todas las componentes

a veces P_L es la pot disipada por la longitud y se calcula igual pero con $\int_S \int_{z=0}^1 dz$

hay formulas no inmediatas de obtener que se dan en el examen

TM: $P_T = \frac{Z_{TM}}{2\eta^2} \left(\frac{1}{f_c} \right)^2 \iint |\vec{E}_z|^2 dS$

TE: $P_T = \frac{\eta^2}{2Z_{TE}} \left(\frac{1}{f_c} \right)^2 \iint |\vec{H}_z|^2 dS$

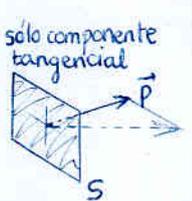
obtenemos P_T directamente de la axial

Potencia transmitida

Flujo de la parte real del vector de Poynting

$$P_T = \frac{1}{2} \text{Re} \iint_S \underbrace{(\vec{E} \times \vec{H}^*)}_{\text{vector Poynting}} \cdot \hat{n} dS$$

$$(\vec{E}_t \times \vec{H}_t) \cdot \hat{n}$$



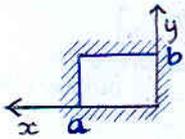
$$TEM: P_T = \frac{1}{2\eta} \iint_S |\vec{E}_t|^2 dS = \frac{\eta}{2} \iint_S |\vec{H}_t|^2 dS$$

TM: lo mismo pero sustituyendo η por Z_{TM}

TE: lo mismo pero sustituyendo η por Z_{TE}

TRUCCO: $P = \frac{1}{2} \frac{V^2}{R} = \frac{1}{2} I^2 R$

Guía Rectangular



$$\nabla_t^2 A_z + k_c^2 A_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + k_c^2 A_z = 0 \rightarrow$$

separación de variables

$$A(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$XY'' + X''Y + k_c^2 XY = 0 \rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_c^2 = 0 \rightarrow$$

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$A_z = (A \cos k_x x + B \sen k_x x) \cdot (C \cos k_y y + D \sen k_y y)$$

Modo TM $A_z = E_z$

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ x=a \\ y=0 \\ y=b \end{matrix} \right\} E_z = 0$$

↓
garantiza $E_x \hat{n} = 0$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$E_z = A \cdot \sen(k_x x) \cdot \sen(k_y y)$$

para $E_z \neq 0 \rightarrow k_x \neq 0 \rightarrow m, n \neq 0$ a diferencia de TE

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z$$

$$\left\{ \begin{matrix} E_x \\ E_y \end{matrix} \right.$$

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_{TM}} \quad \text{tal que } \vec{E} \times \vec{H} = \hat{z}$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{TM}}$$

Modo TE $A_z = H_z$

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ x=a \\ y=0 \\ y=b \end{matrix} \right\} E_y = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$$

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ x=a \\ y=0 \\ y=b \end{matrix} \right\} E_x = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$H_z = A \cos(k_x x) \cos(k_y y)$$

$$\vec{H}_t = -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_t H_z$$

$$\left\{ \begin{matrix} H_x \\ H_y \end{matrix} \right.$$

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

$$E_y = -Z_{TE} \cdot H_x$$

$$E_x = Z_{TE} \cdot H_y$$

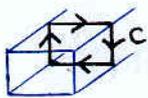
Pérdidas

se modelan con $e^{-\beta z} \Rightarrow e^{-j\beta z} e^{-\alpha z}$ por fricción $P_T \propto |E|^2 \Rightarrow P_T(z) = P_T(0) e^{-2\alpha z}$

Pot perdida por unidad de longitud $P_L = -\frac{dP_T(z)}{dz} = 2\alpha P_T \Rightarrow \alpha = \frac{P_L}{2P_T}$ [Np/m] fórmulas de la cara anterior

nota:
10 log $\frac{P_T(z)}{P_T(0)}$
= - $\alpha \cdot 20 \log e$
1 Np = 20 log e dB

Pérdidas en el conductor



$$P_{Lc} = \frac{R_s}{2} \oint_c |\vec{J}_s|^2 dl$$

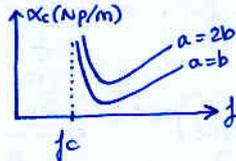
$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \quad \text{corriente superficial}$$

resistencia superficial

$$R_s = \frac{1}{\delta \cdot \sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

profundidad penetración $\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

$$\alpha_c = \frac{P_{Lc}}{2P_T}$$



Pérdidas en el dieléctrico

1. σ_e : conductividad equivalente

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\vec{E} = \omega\epsilon''\vec{E} + j\omega\epsilon'\vec{E}$$

$$\vec{J}_c = \sigma_e \cdot \vec{E}$$

$$\sigma_e = \omega\epsilon'' = \omega\epsilon' \tan \delta$$

\vec{J}_c corriente debida a conductividad equivalente
 \vec{J}_d corriente de desplazam.

$$P_{Ld} = \frac{\sigma_e}{2} \iint_s |\vec{E}|^2 dS \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \alpha_d = \frac{P_{Ld}}{2P_T} = \frac{1}{2} \sigma_e \frac{\omega\mu}{\beta}$$

$$P_T = \frac{1}{2} \text{Re} \iint_s \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S}$$

2. ϵ complejo $\rightarrow k$ complejo $\rightarrow \gamma$ complejo $\delta = j\beta + \alpha_d$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\epsilon} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu(\epsilon' - j\epsilon'')}$$

$$= \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\epsilon' + j\omega^2\mu\epsilon'\tan\delta}$$

$$= \underbrace{\sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\epsilon'}}_{j\beta} + \underbrace{\frac{j\omega^2\mu\epsilon'\tan\delta}{2\sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\epsilon'}}}_{\alpha_d}$$

$$\left. \begin{matrix} \sqrt{a+bx} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}x \\ \sigma_e = \omega\epsilon'\tan\delta \\ \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\epsilon'} = j\beta \end{matrix} \right\} k \text{ con } \epsilon' \epsilon''$$

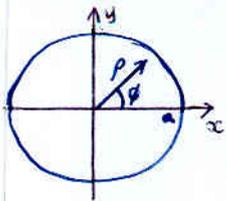
válido siempre

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \sigma_e \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\beta} \tan \delta = \frac{1}{2} \frac{k \tan \delta}{\sqrt{1 - (\beta/k)^2}}$$

$$\sigma_e = \omega\epsilon'\tan\delta \quad \beta = k\sqrt{1 - (\beta/k)^2}$$

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon'$$

Guía circular



$\nabla_t^2 A_z + k_c^2 A_z = 0$
en cilíndricas

$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 A_z = 0$

separación de variables

$A_z(\rho, \phi) = R(\rho) \cdot F(\phi)$

$F A'' + \frac{1}{\rho} F A' + \frac{1}{\rho^2} F'' R + k_c^2 R F = 0 \rightarrow \rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \frac{F''}{F} + \rho^2 k_c^2 = 0$

$\frac{F''}{F} = -\omega^2 \rightarrow$ senos y cosenos no dependen de k_c

$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \rho^2 k_c^2 = \omega^2 \rightarrow$ ecuación diferencial de Bessel

$A_z = (C J_{\omega}(k_c \rho) + D N_{\omega}(k_c \rho)) (A \cos \omega \phi + B \sin \omega \phi)$

N_{ω} es singular en el origen. Inaceptable si el origen se incluye en el problema

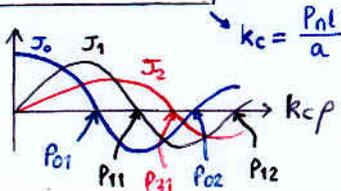
$A_z = J_{\omega}(k_c \rho) [A \cos \omega \phi + B \sin \omega \phi]$

F debe ser periódico ya que $F(\phi=0) \equiv F(\phi=2\pi) \Rightarrow \omega \cdot 2\pi = 2\pi$
 $\omega = n$

$A_z = J_n(k_c \rho) [A \cos n\phi + B \sin n\phi]$

modos TM

$\rho = a \rightarrow E_z = 0$



$k_c = \frac{P_{nl}}{a}$

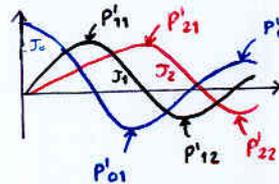
TM_{nl}
 $\omega = n$
 $k_c = \frac{P_{nl}}{a}$
 $E_z = J_n(k_c \rho) [A \cos n\phi + B \sin n\phi]$
 $k_c = \frac{P_{nl}}{a}$

$E_z \rightarrow \vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z = \begin{cases} E_{\rho} \rightarrow H_{\phi} = \frac{E_{\rho}}{Z_{TM}} \\ E_{\phi} \rightarrow H_{\rho} = -\frac{E_{\phi}}{Z_{TM}} \end{cases} \quad Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega \epsilon}$

$f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{P_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}}$

Modos TE

$\rho = a \rightarrow E_{\phi} = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0$



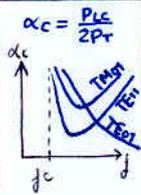
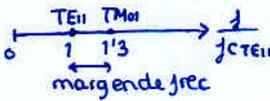
$k_c = \frac{P'_{nl}}{a}$

$f_c = \frac{P'_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}}$

$TE_{nl} \quad H_z = J_n(k_c \rho) [A \cos n\phi + B \sin n\phi]$
 $k_c = \frac{P'_{nl}}{a}$

$H_z \rightarrow \vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z = \begin{cases} H_{\rho} \rightarrow E_{\phi} = -H_{\rho} Z_{TE} \\ H_{\phi} \rightarrow E_{\rho} = H_{\phi} Z_{TE} \end{cases} \quad Z_{TE} = \frac{j\omega \mu}{\gamma}$

Modo fundamental



Guía coaxial



modos TEM

$f_c = 0$
se resuelve como en estática

$\vec{E}_{\rho=r} = \frac{1}{2\pi r \epsilon} \hat{\rho} \quad (Gauss)$

$\vec{H}_{\phi=r} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (Ampere)$

$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Omega$

para altas frec interesa $(b+a) \downarrow$

Para conocer AB hay que calcular modos superiores TE y TM

Modos TM

$\rho = a$
 $\rho = b \rightarrow E_z = 0$

$\frac{J_n(k_c a)}{N_n(k_c a)} = \frac{J_n(k_c b)}{N_n(k_c b)}$

numéricamente k_c

$A_z = [A J_n(k_c \rho) + B N_n(k_c \rho)] [C \cos n\phi + D \sin n\phi]$
esta vez no está el origen

modos TE

$\rho = a$
 $\rho = b \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0$

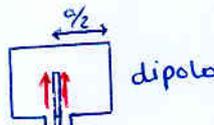
$\frac{J_n'(k_c a)}{N_n'(k_c a)} = \frac{J_n'(k_c b)}{N_n'(k_c b)}$
numéricamente k_c

$f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}}$
 f_c más baja \rightarrow $TM_{01} \rightarrow f_c \approx \frac{1}{2\sqrt{\mu \epsilon}(b-a)}$
 $TE_{01} \rightarrow f_c \approx \frac{1}{\pi \sqrt{\mu \epsilon}(b+a)} = f_{max}^{TEM \text{ mono modo}}$

Excitación de guías

Excitar un modo se consigue forzando alguna de sus condiciones de contorno. se excitarán todos los modos que la cumplan aunque estén en corte (se atenuarán, pero habrán malgastado potencia)

Modo TE01



conexión guía-coaxial (por reciprocidad sirve en ambos sentidos)

para una sola dirección si logramos: desfase total $90^\circ + 180^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ (se suma en fase)
 $\rho = -1 \text{ en TE} \quad \beta l = \pi/2 \Rightarrow l = \lambda/4$

Ley de Faraday

$V = -\frac{d\phi}{dt} = -j\omega \phi$

$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu \iint_S \vec{H} \cdot d\vec{S}$

Unit 1: Introduction

What is the purpose of this course? To provide a solid foundation in the principles of physics, covering mechanics, waves, and modern physics.

Unit 2: Kinematics

Position, velocity, and acceleration. The relationship between these quantities is described by the kinematic equations. A graph of position vs. time shows a parabolic curve for constant acceleration.

Unit 3: Dynamics

Newton's laws of motion. Force is the cause of acceleration. The net force on an object is equal to its mass times its acceleration ($F = ma$).

Unit 4: Energy

Work, energy, and power. The work done on an object is equal to the change in its kinetic energy. Energy is conserved in a closed system.

Unit 5: Momentum

Linear momentum and conservation of momentum. In a collision, the total momentum of the system remains constant.

Unit 6: Rotational Motion

Angular displacement, velocity, and acceleration. The relationship between linear and angular quantities for a rotating rigid body.

Unit 7: Oscillations

Simple harmonic motion. The restoring force is proportional to the displacement. The period and frequency of oscillation.

Unit 8: Waves

Transverse and longitudinal waves. Wave speed, wavelength, and frequency. The principle of superposition.

Unit 9: Modern Physics

Special relativity and quantum mechanics. The speed of light is constant in all reference frames. Matter has wave-like properties.

What is the purpose of this course? To provide a solid foundation in the principles of physics, covering mechanics, waves, and modern physics.

Position, velocity, and acceleration. The relationship between these quantities is described by the kinematic equations. A graph of position vs. time shows a parabolic curve for constant acceleration.

Newton's laws of motion. Force is the cause of acceleration. The net force on an object is equal to its mass times its acceleration ($F = ma$).

Work, energy, and power. The work done on an object is equal to the change in its kinetic energy. Energy is conserved in a closed system.

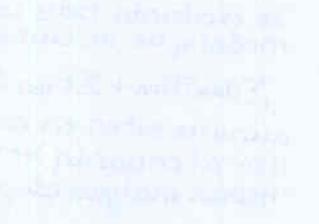
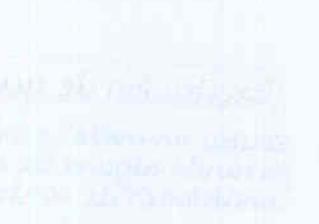
Linear momentum and conservation of momentum. In a collision, the total momentum of the system remains constant.

Angular displacement, velocity, and acceleration. The relationship between linear and angular quantities for a rotating rigid body.

Simple harmonic motion. The restoring force is proportional to the displacement. The period and frequency of oscillation.

Transverse and longitudinal waves. Wave speed, wavelength, and frequency. The principle of superposition.

Special relativity and quantum mechanics. The speed of light is constant in all reference frames. Matter has wave-like properties.



Tema 3. Análisis de redes de Microondas

Relación $Z \leftrightarrow S$

matriz de impedancia

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \quad Z_{ij} = \frac{V_i}{I_j} \Big|_{I_k=0}$$

problemático de medir

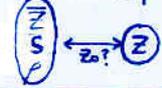
de admitancia

$$I = \bar{Y} \cdot \bar{V} \quad Y_{ij} = \frac{I_i}{V_j} \Big|_{V_k=0}$$

$$S = (\bar{Z} - I) \cdot (\bar{Z} + I)^{-1}$$

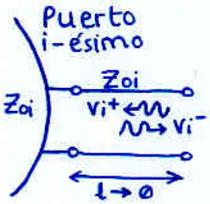
$$\bar{Z} = (I + S) \cdot (I - S)^{-1}$$

siendo $\bar{Z}_{ij} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{Z_{0i} \cdot Z_{0j}}}$



permite usar Z como intermedio para cambiar matriz S teniendo distribución de impedancias de referencia

Parámetros de dispersión



$$\begin{cases} V_i = V_i^+ + V_i^- \\ I_i = \frac{V_i^+ - V_i^-}{Z_{0i}} \end{cases} \iff \begin{cases} V_i^+ = \frac{V_i + Z_{0i} I_i}{2} \\ V_i^- = \frac{V_i - Z_{0i} I_i}{2} \end{cases}$$

$$a_i = \bar{V}_i^+ = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} = \frac{V_i + Z_{0i} I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}}$$

$$b_i = \bar{V}_i^- = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} = \frac{V_i - Z_{0i} I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}}$$

Z_{0i} la elegimos nosotros; la línea con Z_{0i} puede no existir y por tanto no existir V_i^+ e V_i^- , por ello $I \rightarrow 0$. Pero nosotros lo definimos así

matriz:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \dots & S_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

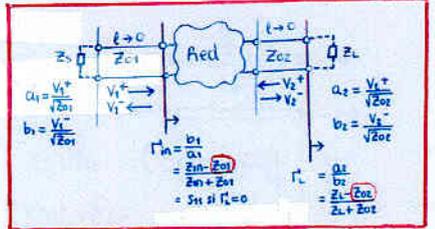
$$\bar{b} = \bar{S} \cdot \bar{a}$$

cada columna indica cómo se reparte la tensión que entra por el puerto correspondiente entre todos los demás

$$S_{ij} = \frac{b_i}{a_j} \Big|_{a_k=0 \quad \forall k \neq j}$$

todos los demás terminados (cada columna se resuelve con circuito) mismo

para ver como se reparte la potencia hay que ver el módulo al cuadrado



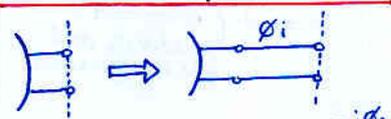
Potencias:

$$P_i^+ = \frac{1}{2} |a_i|^2$$

$$P_i^- = \frac{1}{2} |b_i|^2$$

$$P_i = P_i^+ - P_i^-$$

Cambio en el plano de referencia



Hay que multiplicar por $e^{-j\theta_i}$ allá donde se recorra ese tramo adicional

$$i \begin{pmatrix} e^{-j\theta_1} & e^{-j\theta_2} & e^{-j\theta_3} \\ e^{-j\theta_1} & e^{-j\theta_2} & e^{-j\theta_3} \\ e^{-j\theta_1} & e^{-j\theta_2} & e^{-j\theta_3} \end{pmatrix} \text{ i.e. su columna y su fila}$$

más en general

de forma matricial

$$S' = S_\phi \cdot S \cdot S_\phi \text{ con } S_\phi = \begin{pmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 & \dots \\ 0 & e^{-j\theta_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$S'_{ij} = S_{ij} e^{-j(\theta_i + \theta_j)}$$

CUIDADO: si internamente la red tiene líneas de tx

Cálculo de los parámetros S

$$S_{ii} = \rho_i = \frac{Z_{ini} - Z_{0i}}{Z_{ini} + Z_{0i}}$$

$$S_{ij} = T_{ij}$$

con los demás accesos terminados

$$S_{ij} = \frac{V_i}{V_j} (1 + S_{jj}) \cdot \sqrt{\frac{Z_{0j}}{Z_{0i}}}$$

Propiedades

① Red pasiva $\iff |S_{ij}| \leq 1$

② Red pasiva y sin pérdidas \iff Unitariedad $S^* \cdot S = I$

③ Red recíproca $\iff S_{12} = S_{21}$ matriz simétrica

④ Red simétrica $\iff S_{11} = S_{22}$ elementos diagonal iguales

El producto escalar complejo (no olvidar conjugado) entre cualesquiera 2 filas o columnas es 0, salvo si es consigo mismo (i.e. módulo al cuadrado) entonces es 1

Toda red pasiva, sin pérdidas y recíproca puede comportarse como una red simétrica sin más que un cambio de plano $\phi_2' = \phi_2 - \phi_1 \pm \pi/2$

Aspecto de la matriz S

En general

$$S = \begin{pmatrix} a e^{-j\theta_1} & b e^{-j\theta_2} \\ c e^{-j\theta_3} & d e^{-j\theta_4} \end{pmatrix}$$

↓ Pasiva y sin pérdidas $S^* \cdot S = I$ $\implies \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & d = -\frac{ab}{c} \\ b^2 + d^2 = 1 & \theta_4 = \theta_2 + \theta_3 - \theta_1 \end{cases}$

$$S = \begin{pmatrix} \cos T e^{j\theta_1} & \sin T e^{j\theta_2} \\ \sin T e^{j\theta_3} & -\cos T e^{j(\theta_2 + \theta_3 - \theta_1)} \end{pmatrix}$$

↓ Red Recíproca $S_{12} = S_{21} \implies \theta_2 = \theta_3$

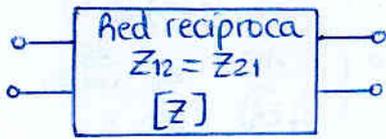
$$S = \begin{pmatrix} \cos T e^{j\theta_1} & \sin T e^{j\theta_2} \\ \sin T e^{j\theta_2} & -\cos T e^{j(2\theta_2 - \theta_1)} \end{pmatrix}$$

↓ Red Simétrica $S_{11} = S_{22} \implies \theta_1 = \theta_2 \pm \pi/2$

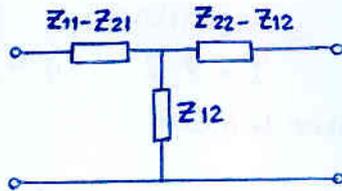
$$S = \begin{pmatrix} \cos T e^{j\theta_1} & \pm j \sin T e^{j\theta_1} \\ \pm j \sin T e^{j\theta_1} & \cos T e^{j\theta_1} \end{pmatrix}$$

podemos anular θ_1 con cambio de plano o $\pi/2$ en ambos puertos

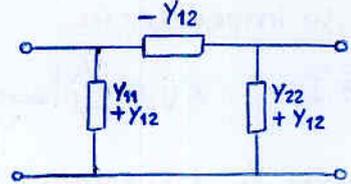
Redes de 2 accesos



equivalente en T



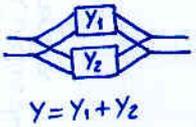
equivalente en PI



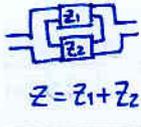
Conexión de redes

Paralelo

Serie



$$Y = Y_1 + Y_2$$



$$Z = Z_1 + Z_2$$

Red imaginaria pura \equiv Red sin pérdidas

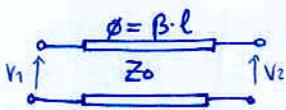
$$P_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [I_1^* I_2^* (V_1/V_2)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [I^+ \cdot V]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{I^+ V + (I^+ V)^*}{2} \right] = \frac{1}{4} [I^+ \cdot V + V^+ \cdot I] = \frac{1}{4} I^+ \cdot (Z + Z^+) \cdot I$$

si $P_T = 0 \iff Z + Z^+ = 0 \iff Z$ e Y son imaginarias puras

Z e Y ,
no S

Ejemplo: línea de transmisión

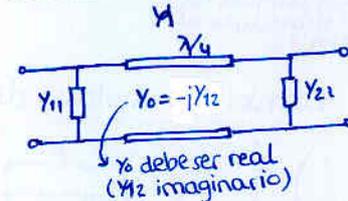
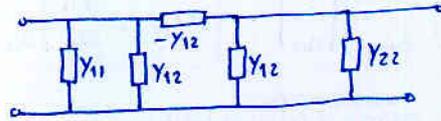


$$l = \frac{\lambda}{4} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & jY_0 \\ jY_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l = \frac{3\lambda}{4} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & -jY_0 \\ -jY_0 & 0 \end{pmatrix}$$

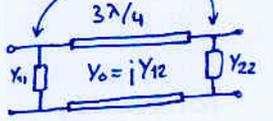
$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} -jY_0 \cot(\phi) & jY_0 \operatorname{sen}(\phi) \\ jY_0 \operatorname{sen}(\phi) & -jY_0 \cot(\phi) \end{pmatrix}$$

Cualquier red reciproca



Y_0 debe ser real
(Y_{12} imaginario)

implementable
con stubs si
 Y_{11} e Y_{22} i mag.



Saber calcular parámetros S

$$\left. \begin{aligned} V_1 = V(z=-l) = V^+(e^{i\phi} + \rho e^{-i\phi}) \\ I_1 = I(z=-l) = \frac{V^+}{Z_0}(e^{i\phi} - \rho e^{-i\phi}) \end{aligned} \right\} Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} \Rightarrow S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_{01}}{Z_{in} + Z_{01}}$$

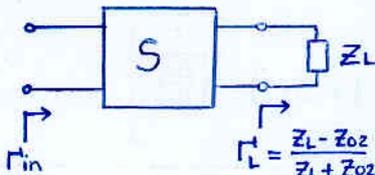
si acceso 2 terminado imp. ref. (0)

$$\left. \begin{aligned} V_2 = V(z=0) = V^+(1 + \rho) \\ V_1 = V(z=-l) = V^+(e^{i\phi} + \rho e^{-i\phi}) \end{aligned} \right\} S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11}) \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}$$

para calcular rho usar la impedancia de la linea interna no la de referencia. aunque no sea la que hay en verdad hay Zo1 con l=0

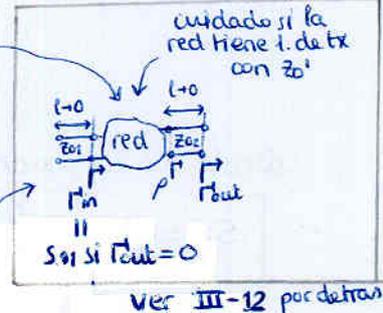
Red sin pérdidas $\iff Z$ e Y (no S) imaginarias puras \iff se puede sintetizar con líneas de tx

Coefficiente de reflexión a la entrada

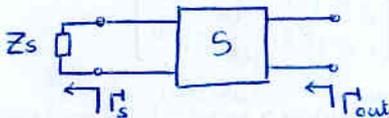


$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

Usar Z_{02} y no la Z_0 de una posible línea de tx que haya en la red S



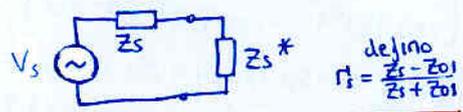
Coefficiente de reflexión a la salida



$$\Gamma_{out} = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_s}{1 - S_{11} \Gamma_s}$$

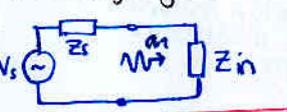
Ganancia de transferencia GT

Potencia disponible en el generador: P_{avs}
Parámetro exclusivo de la fuente; la pot que entrega a una carga adaptada



$$P_{avs} = \frac{|V_s|^2}{8R_s} = \frac{|V_s|^2}{8Z_{01}} \frac{|1 - \Gamma_s|^2}{1 - |\Gamma_s|^2}$$

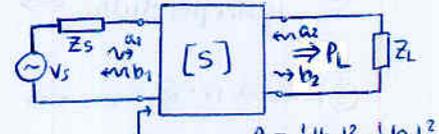
Potencia incidente en una carga genérica



$$\frac{1}{2} |a_1|^2 = P_{avs} \cdot \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{1 - \Gamma_s^* \Gamma_s} = P_{avs} \frac{1}{1 - |\Gamma_s|^2}$$

potencia entregada $P_T = \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2$ si $\Gamma_s = \Gamma_s^*$
 $P_T = \frac{1}{2} |a_1|^2 \cdot (1 - |\Gamma_s|^2) = P_{avs}$

con red



$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |a_2|^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)$$

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}}$$

- b2 en función de a1 (usando la matriz S)
- a1 en función de Pavs y Rho_in, expresión conocida Rho_in

Sustituyendo y "reordenando" se llega a:

$$G_T = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\rho_s|^2) (1 - |\rho_L|^2)}{|(1 - \rho_s S_{11})(1 - \rho_L S_{22}) - S_{12} S_{21} \rho_s \rho_L|^2}$$

resulta que si todo está adaptado, $G_T = |S_{21}|^2$
 $\Gamma_s = \Gamma_L = 0$

Atenuadores

$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma} \\ e^{-\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

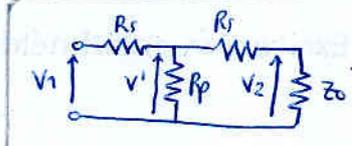
$$\Gamma_i = S_{11} = 0$$

$$r_{i=0}$$

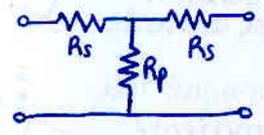
$$G_T = |S_{21}|^2 = e^{-2\gamma}$$

$$r_{i=0}$$

$$r_{e=0}$$



Equivalente en T:



si tratamos de aplicar lo de la pag. anterior sale resistencia negativa

Forzar $S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = 0$

$$Z_{in} = R_s + R_p \parallel (R_s + Z_0)$$

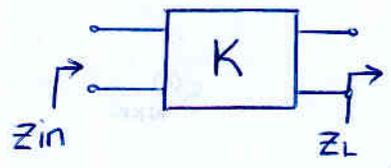
$$\bar{R}_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_s} - R_s \right)$$

Forzar $S_{21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_1'}{V_1'}$

$$= \frac{Z_0}{Z_0 + R_s} \cdot \frac{R_p \parallel (R_s + Z_0)}{R_s + R_p \parallel (R_s + Z_0)} = e^{-\gamma}$$

$$\bar{R}_s = \frac{10^{\frac{\gamma}{20}} - 1}{10^{\frac{\gamma}{20}} + 1}$$

Inversores de inmitancia (impedancia y admitancia)



$$Z_{in} = \frac{k^2}{Z_L} \quad k \text{ real}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & Z_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

inversor con $K^2 = -Z_{12}$

dem MUY sencilla

$$V_1 = Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{12} I_1$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{-Z_{12}^2}{Z_L}$$

$$Y_{in} = \frac{J^2}{Y_L} \quad J = \frac{1}{K}$$

$$S_{11} = \frac{\frac{k^2}{Z_0} - Z_0}{\frac{k^2}{Z_0} + Z_0} = \gamma \text{ valor real (jaseñala)}$$

- pasiva
- sin pérdidas
- simétrica
- recíproca

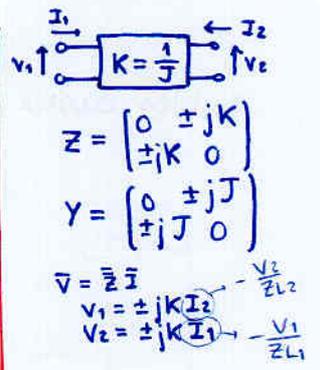
$$S = \begin{pmatrix} \cos T & \pm j \text{sen } T \\ \pm j \text{sen } T & \cos T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \pm j \sqrt{1 - \gamma^2} \\ \pm j \sqrt{1 - \gamma^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

siendo

$$\cos T = \gamma = S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_L}{Z_{in} + Z_L}$$

$$= \frac{K^2 - Z_0^2}{K^2 + Z_0^2}$$



· pasiva y sin pérdidas \equiv unitaria

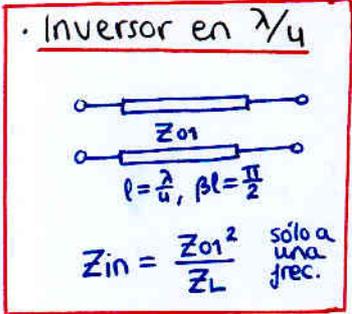
· recíproca y simétrica

+ S_{11} real

Es un inversor $K^2 = Z_0^2 \frac{1+S_{11}}{1-S_{11}}$

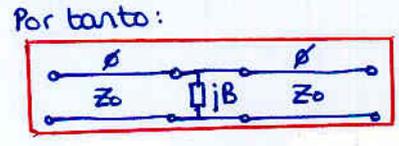
$\bar{K}^2 = \frac{1+S_{11}}{1-S_{11}}$

Inversor con admitancia paralelo:



Recuerda

$$S = \frac{1}{Y + 2Y_0} \begin{pmatrix} -Y & 2Y_0 \\ 2Y_0 & -Y \end{pmatrix}$$



ejemplo: bobina

$$\Delta S_{11} \approx 2 \left(\frac{1}{B} - \emptyset \right) = 0$$

$$\emptyset = \beta l = \frac{\omega}{v_p} l$$

$$Y = \frac{1}{j\omega L} = jB \Rightarrow B = -\frac{1}{\omega L}$$

se despeja un l negativo (acortas líneas adyacentes) pero que NO depende de ω . Esto NO ocurre con un condensador paralelo

$$S = \frac{e^{-j2\emptyset}}{jB + 2} \begin{pmatrix} -jB & 2 \\ 2 & -jB \end{pmatrix}$$

$$\angle S_{11} = -2\emptyset - \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left(\frac{B}{2} \right)$$

$$\angle S_{11} = 2 \left(\frac{1}{2} \text{arctg} \left(\frac{B}{2} \right) - \emptyset \right) = \pm n\pi$$

$$\approx 2 \left(\frac{1}{B} - \emptyset \right) = 0 \Rightarrow \emptyset \Rightarrow l$$

exigimos S_{11} real

Bobina paralelo y condensador serie, a diferencia del inversor $\lambda/4$ siguen funcionando como inversores a cualquier frecuencia, aunque varía la ct de inversión

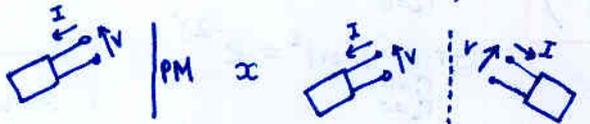
También se obtiene independencia con la frec. usando un condensador serie, y no con una bobina paralelo

Simetrías

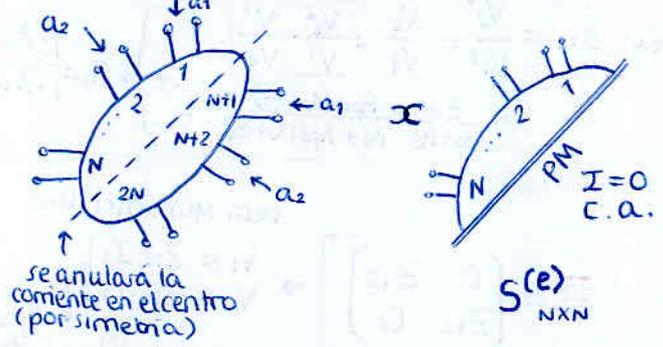
Pared eléctrica
 • anula tensión
 • refuerza corriente



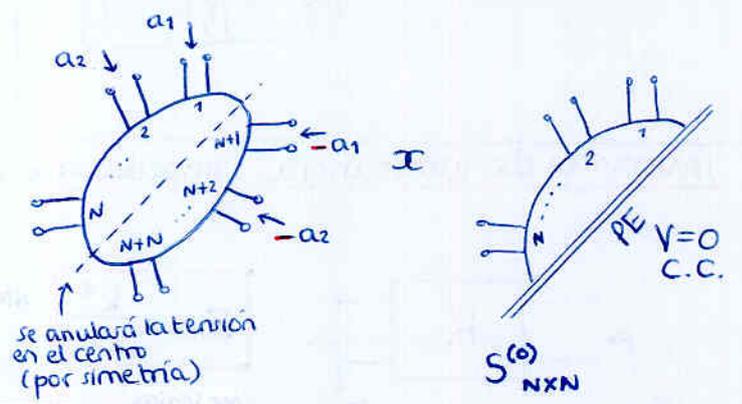
Pared magnética
 • anula corriente
 • refuerza tensión



Excitación simétrica / par / even

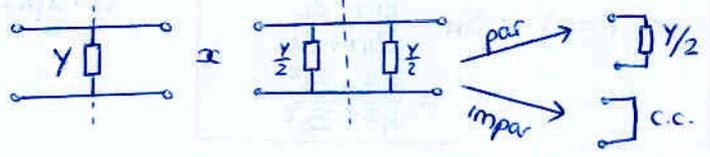
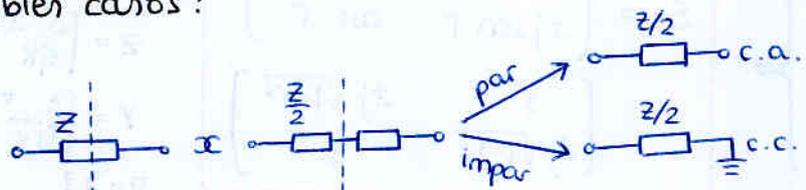


Excitación antisimétrica / impar / odd



$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix}$$

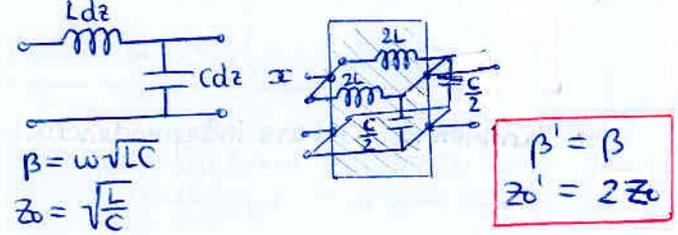
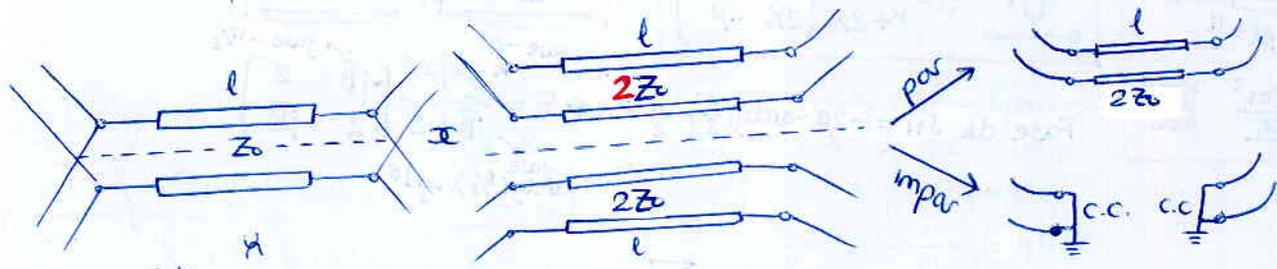
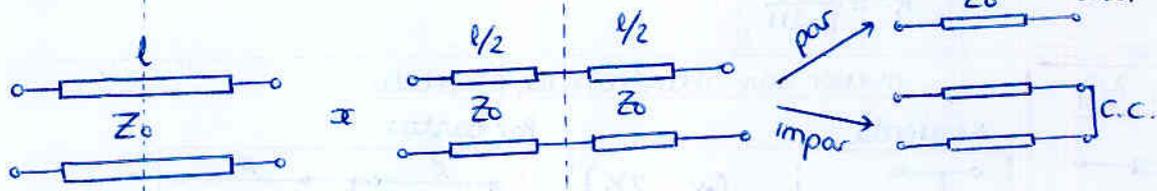
Posibles casos:



¿Y si hay un acceso contenido en el plano de simetría?

$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$
 en esta columna $S_{i0} = \frac{b_i}{a_0} | a_k = 0$
 en esta submatriz acceso 0 en esta terminación → analizar por simetría
 al excitar en un punto contenido en el PS, las corrientes y tensiones serán simétricas (idéntico a pared magnética) analizar el circuito partido (no eliminar una parte; la Z es el paralelo de ambas)

Lineas de tx:



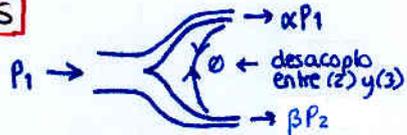
Tema 4. Divisores y acopladores

Propiedad redes de 3 accesos:
 • pasiva
 • sin pérdidas } → unitaria
 • recíproca (i.e. S simetr)

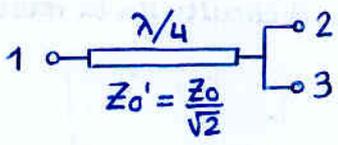
No se puede lograr $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Divisores



• Con línea $\lambda/4$



$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{\frac{Z_0^2}{2Z_0} - Z_0}{\frac{Z_0^2}{2Z_0} + Z_0} = 0$$

$Z_0' = \frac{Z_0}{\sqrt{2}}$

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11}) = -\frac{j}{\sqrt{2}} = S_{21} = S_{31} = S_{12} = S_{13}$$

↑ propagar ondas de tensión a través de la línea ↑ por lógica ↑ por reciprocidad (no hay ningún elemento no recíproco)

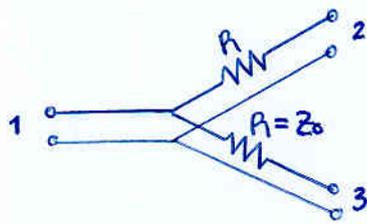
$S_{22}, S_{33}, S_{32}, S_{23}$ se calculan con $a_1 = 0$

utilizar técnica par/impar

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -j\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ✓ La potencia ($|S|^2$) se reparte en mitad y mitad
- ✗ No hay desacoplo entre 2 y 3
- ✗ sólo válido para una única frecuencia

• Divisores Resistivos



$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = 0 \quad \uparrow R = Z_0$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_1} = 0.5 \Rightarrow S_{21} = S_{31} = S_{12} = S_{13} = \frac{V_2(1+S_{11})}{V_1} = \frac{1}{2}$$

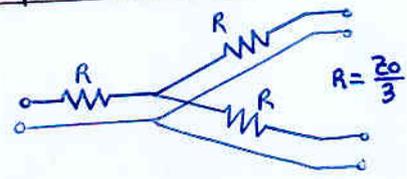
$S_{22}, S_{33}, S_{32}, S_{23}$ se calculan con $a_1 = 0$

aplicar técnicas de simetría par e impar

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- ✓ No depende de la frec
- ✗ Malgasta (Disipa) la mitad de la potencia
- ✗ No hay desacoplo entre 2 y 3
- ✗ 2 y 3 están desadaptados ($S_{22} \neq 0, S_{33} \neq 0$) a pesar de no ser sin pérdidas

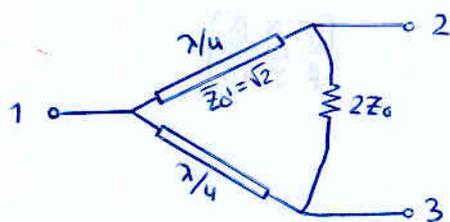
• mejor divisor resistivo



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- ✓ No depende de la frec.
- ✓ Todos los puertos están adaptados
- ✓ sirve de combinator $\frac{2}{3} \rightarrow 1$
- ✗ se disipa la mitad de la potencia
- ✗ No hay desacoplo entre 2 y 3

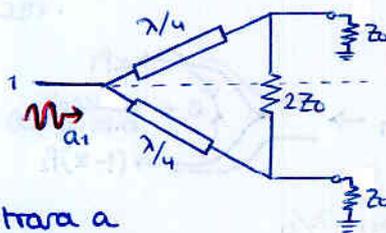
Divisor Wilkinson



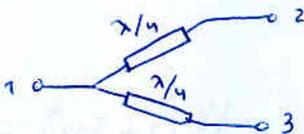
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ✓ la potencia se divide entre los dos accesos (la resistencia no disipa)
- ✓ todos los accesos están adaptados
- ✓ puertos 2 y 3 están desacoplados
- ✗ sólo sirve para una frec.

• Para $S_{11}, S_{21}, S_{31}, S_{12}, S_{13}; a_2 = a_3 = 0$

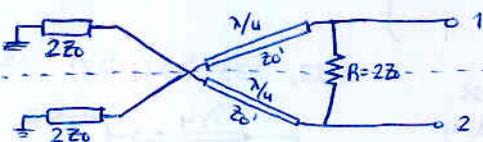


Por simetría, entrara a la resistencia la misma corriente en ambas direcciones, anulándose, pudiendo por tanto analizar el circuito sin la resistencia



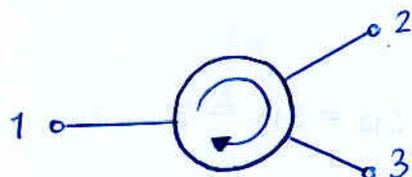
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & & \\ -1/\sqrt{2} & & \end{pmatrix}$$

• Para el resto se tiene $a_1 = 0$



Analizar con técnica par e impar

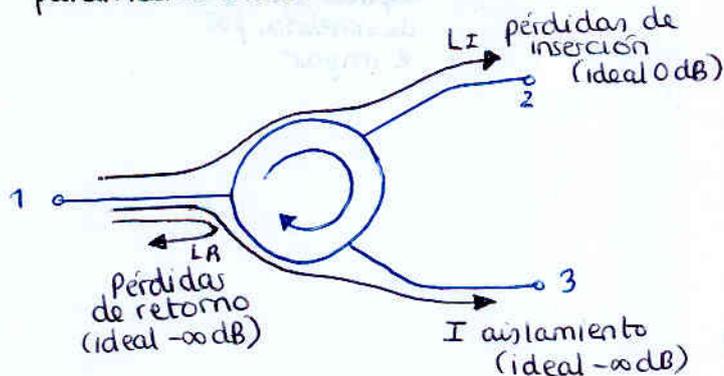
Circulador



Ideal :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

parámetros de circulador real



$$L_R = -20 \log |S_{11}|$$

$$L_I = -20 \log |S_{21}|$$

$$I = \begin{cases} -20 \log |S_{31}| \\ -20 \log |S_{31}| - L_I \end{cases}$$

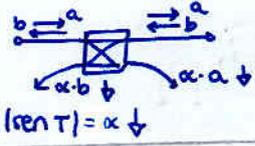
Acopladores direccionales

Formas canónicas de [S]: jugando con planos de ref para eliminar la fase



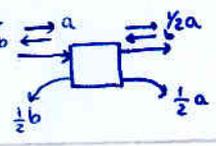
$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos T & \sin T \\ 0 & 0 & \sin T & -\cos T \\ \cos T & \sin T & 0 & 0 \\ \sin T & -\cos T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tipico: $|\cos T|^2 \approx 1$
 se toman pequeñas muestres de onda incidente y reflejado y alterando poco el circuito



$$[S] = \begin{pmatrix} [0] & [B] \\ [B]^t & [0] \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} S \cdot S^t = 1 \\ S \text{ es unitaria} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} B \cdot B^t = 1 \\ B \text{ es unitaria} \end{matrix}$$

híbrido $|\cos T|^2 = \frac{1}{2} = |\sin T|^2$
 $|\cos T| = \frac{1}{\sqrt{2}} = |\sin T|$
 se toma la mitad de la potencia

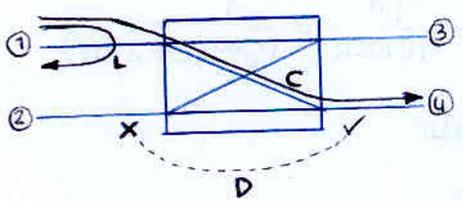


Red de 4 accesos
 pasiva y sin pérdidas } unitaria
 recíproca (sin elementos no recíprocos)
 todos los puertos adaptados (diagonal 4 ceros)

Tendrá dos pares de accesos desacoplados (i.e. aparecen cuatro ceros adicionales)

↓
 Acoplador direccional

Parámetros típicos



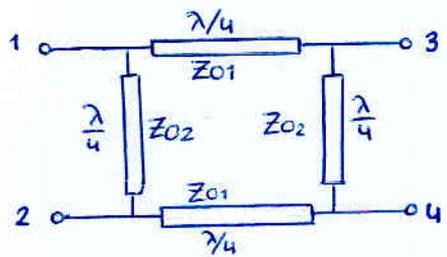
Pérdidas de retorno $L = -20 \log |S_{ii}|$ (ideal $+\infty$ dB)

Acoplamiento $C = -20 \log |S_{14}|$ (ej: 3 dB en híbrido)

Directividad $D = +20 \log \frac{|S_{14}|}{|S_{12}|}$

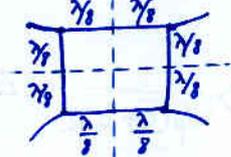
Aislamiento $A = +20 \log |S_{12}|$ (ideal $-\infty$ dB)

Implementación: Branch Line



$$S = -\frac{1}{Y_{01}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & j & Y_{02} \\ 0 & 0 & Y_{02} & j \\ j & Y_{02} & 0 & 0 \\ Y_{02} & j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene una doble simetría



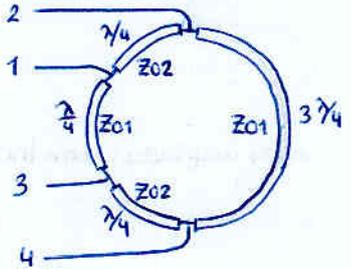
Aplicamos técnica par e impar "recursivamente"

Par $\rightarrow S^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e1)} + S^{(o1)} & S^{(e1)} - S^{(o1)} \\ - & + \end{pmatrix}$

Impar $\rightarrow S^{(o)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e2)} + S^{(o2)} & S^{(e2)} - S^{(o2)} \\ - & + \end{pmatrix}$

Analizando y exigiendo $S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0$
 $\Rightarrow Y_{01}^2 = Y_0^2 + Y_{02}^2$

Implementación: Acoplador en anillo



$$S = -j \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_{01} & Y_{02} \\ 0 & 0 & Y_{02} & -Y_{01} \\ Y_{01} & Y_{02} & 0 & 0 \\ Y_{02} & -Y_{01} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene una simetría



Analizando y exigiendo $S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0$
 se obtiene $Y_{01}^2 + Y_{02}^2 = Y_0^2$

Nota previa:

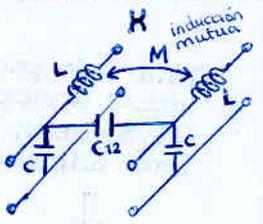
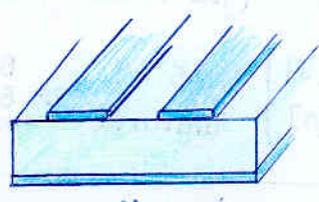
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{C} = \frac{1}{v_p \cdot C}$$

$$Z_0 = \frac{1}{v_p \cdot C} \quad v_p \text{ contiene la información de } L$$



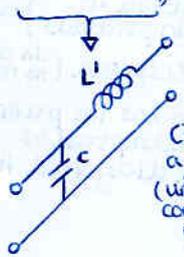
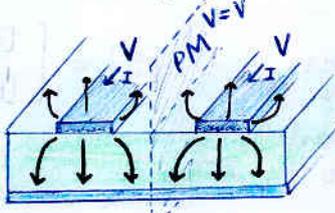
Lineas acopladas simétricas

cualquier excitación se puede descomponer en par e impar



Nota: En realidad el medio no es homogéneo (dieléctrico con única ϵ) ya que hay dieléctrico y aire, por tanto no es modo TEM. Pero es modo cuasi-TEM y suponemos el aire y el otro dieléctrico como único medio con ϵ efectivo

Excitación par:



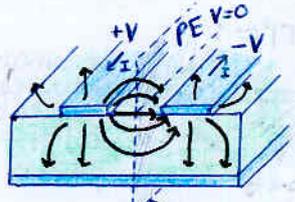
L' y L'' tienen en cuenta la M correspondiente

C_{12} ya no afecta (une dos pto con mismo potencial)

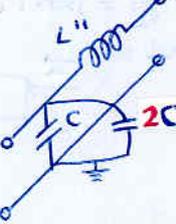
$$\beta^{(e)} = \omega \sqrt{L' C} = \omega \sqrt{\mu \epsilon^{(e)}}$$

$$Z_0^{(e)} = \sqrt{\frac{L'}{C}} = \frac{1}{v_p^{(e)} \cdot C}$$

Excitación impar:



es como un plano de masa



$$C_T = C + 2C_{12}$$

$$\beta^{(o)} = \omega \sqrt{L'' (C + 2C_{12})} = \omega \sqrt{\mu \epsilon^{(o)}}$$

$$Z_0^{(o)} = \sqrt{\frac{L''}{C + 2C_{12}}} = \frac{1}{v_p^{(o)} (C + 2C_{12})}$$

Si estamos en modo TEM y medio homogéneo, por lógica:

$$\epsilon^{(e)} = \epsilon^{(o)} = \epsilon \text{ efectivo}$$

$$\beta^{(e)} = \beta^{(o)} \Leftrightarrow \phi^{(e)} = \phi^{(o)}$$

$$v_p^{(e)} = v_p^{(o)}$$

$$Z_0^{(e)} > Z_0^{(o)} \quad \frac{1}{v_p C} > \frac{1}{v_p (C + 2C_{12})}$$

si $\epsilon^{(e)} = \epsilon^{(o)} = \epsilon_g$

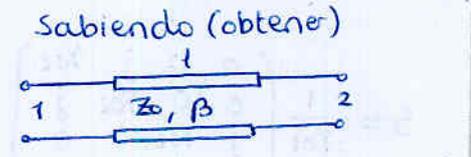
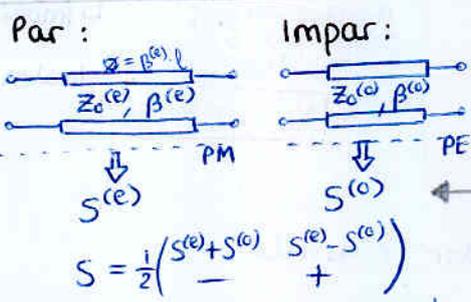
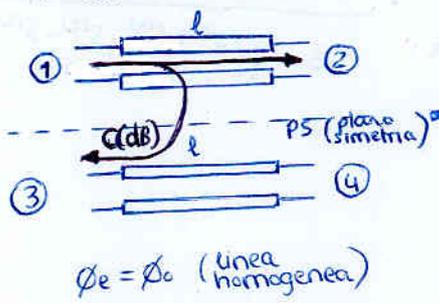
$$\omega \sqrt{\mu \epsilon^{(e)}} = \omega \sqrt{\mu \epsilon^{(o)}}$$

$$\beta^{(e)} = \beta^{(o)}$$

$$\omega \sqrt{L' C} = \omega \sqrt{L'' (C + 2C_{12})}$$

curiosamente pues $L' C = L'' (C + 2C_{12})$

Por tanto tenemos:



$$S = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} j(z_0 - Y_0) \tan \phi & 2/\cos \phi \\ 2/\cos \phi & j(z_0 - Y_0) \tan \phi \end{bmatrix}$$

siendo $\Delta = 2 + j(z_0 + Y_0) \tan \phi$

$$Z_0^{(e)} \cdot Z_0^{(o)} = Z_0^2$$

siempre Acoplador direccional

normalmente $|S_{12}| \approx 1$
 S_{13} es valor muy bajo
 Acoplamiento $C = -20 \log |S_{13}|$

Forzando ceros en la diagonal aparecen 2 condiciones $\phi^{(e)} = \phi^{(o)} \Leftrightarrow$ se cumple para líneas homogéneas

$$Z^{(e)} \cdot Z^{(o)} = Z_0^2$$

$$S_{12} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi}$$

$$S_{13} = \frac{j \cdot \alpha \cdot \sin \phi}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi}$$

$$\alpha = \frac{Z_0^{(e)} - Z_0^{(o)}}{Z_0^{(e)} + Z_0^{(o)}}$$

Caso particular

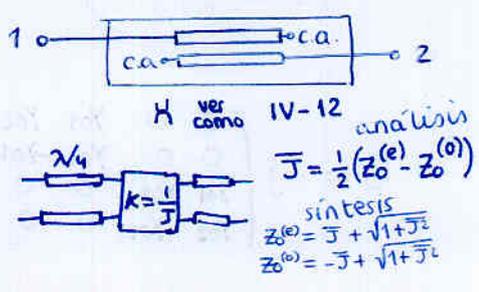
$$l = \lambda/4$$

$$\phi = \pi/2$$

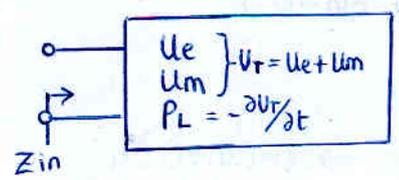
$$|S_{13}| = |\alpha|$$

$$C = -20 \log |\alpha|$$

Lineas acopladas como inversor



Tema 5. Circuitos Resonantes

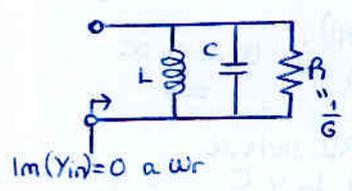


- ω_{nr} freq natural de resonancia: a la que oscila el circuito aislado
- ω_r freq de resonancia:
 - freq a la cual Z_{in} es unicamente real $\text{Im}(Z_{in}) = 0$
 - freq a la cual $U_e = U_m$ $\text{Im}(Y_{in}) = 0$
- factor de calidad

$Q = \omega_r \cdot \frac{U_T}{P_L} \Big|_{\omega = \omega_r}$

 $U_T = U_e + U_m = 2U_e = 2U_m$

Circuitos RLC paralelo



energía instantánea $U_m(t) = \frac{1}{2} L i(t) ^2$ $U_e(t) = \frac{1}{2} C v(t) ^2$	energía media $U_m = \frac{1}{4} L I ^2 = \frac{1}{4} L \frac{V^2}{\omega^2 L^2}$ $U_e = \frac{1}{4} C V ^2$	pot. disipada $P_L = \frac{1}{2} R I ^2 = \frac{1}{2} \frac{ V ^2}{R}$
freq de resonancia: · $U_m = U_e \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ · $\text{Im}(Y_{in}) = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = 0 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$		factor de calidad $Q = \omega_r \frac{U_T}{P_L} \Big _{\omega = \omega_r}$ $= \omega_r \frac{2U_e}{P_L} \Rightarrow Q = \frac{C\omega_r}{G} = C\omega_r R$

impedancia de entrada para $j\omega \approx j\omega_0$

$$Y_{in} = G_p + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$= G_p + j\omega C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$\approx G_p + j\omega_0 C (2\delta)$$

$$\approx \frac{C\omega}{Q} + 2j\omega_0 C \delta$$

recuerda

$$j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\omega C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

con $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx 2\delta$$

con $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$

$$\omega = \omega_0 (1 + \delta)$$


freqüencia natural de resonancia
 suma de corrientes de las 3 ramas igual a cero (circuito aislado)

$$\frac{1}{L} \int v(t) dt + C \frac{\partial v(t)}{\partial t} + \frac{v(t)}{R} = 0$$

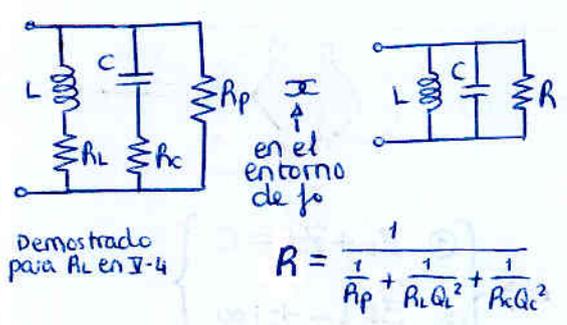
$$\Rightarrow v(t) = (\dots) \cdot \cos(\omega_{nr} t) e^{-\alpha t}$$

$$\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\omega_{nr} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{G}{2\omega_0 C}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$\omega_{nr} \approx \omega_r = \omega_0$ cuando $Q \uparrow$ (siempre)

Equivalente RLC paralelo



Demostrado para RL en I-4

$$R = \frac{1}{\frac{1}{A_p} + \frac{1}{R_L Q_L^2} + \frac{1}{R_C Q_C^2}}$$

$$Q = \frac{C\omega_0}{G} = \frac{1}{\frac{1}{Q_p} + \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_L}}$$

$$= \omega_0 \cdot \frac{U_T}{P_{Lp} + P_{Lc} + P_{Ll}}$$

Podemos ir reparando las fuentes de pérdidas y calculando el Q de cada una para finalmente sumar las Q "en paralelo"

Frecuencia de resonancia compleja

despejando: $P_L = \omega_0 \frac{U_T}{Q} = -\frac{\partial U_T}{\partial t}$

ec. diferencial
 $U_T = U_0 \cdot e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}$

v e I son proporcionales a $\sqrt{U_T}$, y añadiendo el obviado $e^{j\omega_0 t}$

$$v(t) = \text{Re} \left\{ V_0 \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cdot e^{j\omega_0 t} \right\}$$

$$= |V_0| e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cdot \cos(\omega_0 t + \Delta V_0)$$

atenuación oscilación

$$= \text{Re} \left\{ V_0 e^{j\omega_0 \left(1 + \frac{j}{2Q}\right) t} \right\} = \text{Re} \left\{ V_0 e^{j\omega_0 t} \right\}$$

nosotros V_0 como fasor

$$\omega_{\Delta_0} = \omega_0 \left(1 + \frac{j}{2Q}\right)$$

$\text{Re}(\omega_{\Delta_0}) = \omega_0$ oscilac.
 $\text{Im}(\omega_{\Delta_0}) = \frac{\omega_0}{2Q}$ aten.

sin pérdidas: $Y_{in} = j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$

con pérdidas: $Y_{in} = \frac{C\omega_0}{Q} + j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$

usando fasores que obvian $e^{j\omega_0 t}$ podremos analizar sin pérdidas sabiendo que en realidad sí que están

Circuito RLC serie

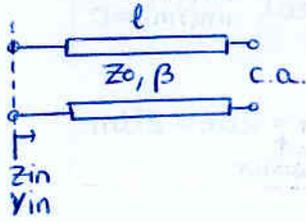
$$Z_{in} = R + 2j\omega_0 L \delta$$

$$Q = \omega_r \frac{2U_m}{P_T} = \frac{\omega_r L}{R}$$

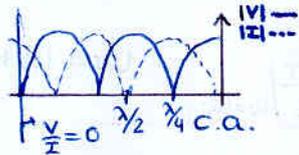
Resonancia en líneas de transmisión

Análisis sin pérdidas ($\text{Re}(Z_{in})=0$ y por tanto si $\text{Im}(Z_{in})=0 \leftrightarrow Z_{in}=0$)

Caso particular: línea acabada en c.a.



Resonancia serie: $Z_{in}=0$



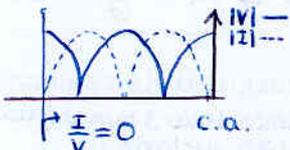
$Z_{in}=0 \Rightarrow l_n$
 $l_n \rightarrow \beta l_n \rightarrow Z_{in_n}$
 equivalente LC serie

 $Z_{in} = 2j\omega L$ igualar Z_{in}

$Z_{in} = -jZ_0 \tan(\beta l) = 0 \Rightarrow l = (2n+1)\lambda/4$
 $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (2n+1)\frac{\lambda_0}{4} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\delta+1)(2n+1)\frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \delta \cdot (2n+1) + (2n+1)\frac{\pi}{2}$
 recuerda $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1+\delta)$!
 $\tan(x + (2n+1)\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan x}$
 $Z_{in}(\dots) = jZ_0 \tan(\frac{\pi}{2} \cdot \delta \cdot (2n+1)) \approx jZ_0 \frac{\pi}{2} \delta \cdot (2n+1)$
 $\tan x \approx x$

Iguando Z_{in} a las del LC serie se obtiene los equivalentes L y C $\Rightarrow L \xrightarrow{+} C$
 $C = \frac{1}{L\omega^2}$

Resonancia paralelo: $Y_{in}=0$



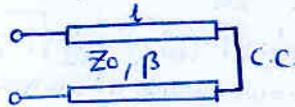
con esta representación se comprueba la l_n

$Y_{in}=0 \Rightarrow l_n$
 $l_n \rightarrow \beta l_n \rightarrow Z_{in_n}$
 equivalente LC paralelo

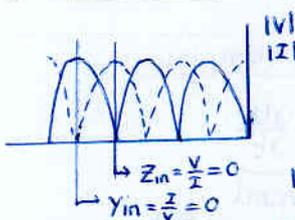
 $Y_{in} = 2j\omega C$ igualar Y_{in}

$Y_{in} = jY_0 \tan(\beta l) = 0 \Rightarrow l = n\lambda/2$
 $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n\frac{\lambda_0}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\delta+1)n\frac{\lambda_0}{2}$
 $\tan(\beta l) = \dots = \tan(\pi n \delta)$
 $Y_{in} = jY_0 \pi n \delta$
 $\tan(x + n\pi) = \tan(x)$
 lo que se calcula es βl a cualquier freq cercana a ω_0 sabiendo $l = n\lambda/2$

Caso particular: línea acabada en c.c.



Resonancia serie: $Z_{in}=0 \Rightarrow l_n = n\lambda/2 \rightarrow \beta l \rightarrow \tan(\beta l) \rightarrow Z_{in}$ igualar a LC serie

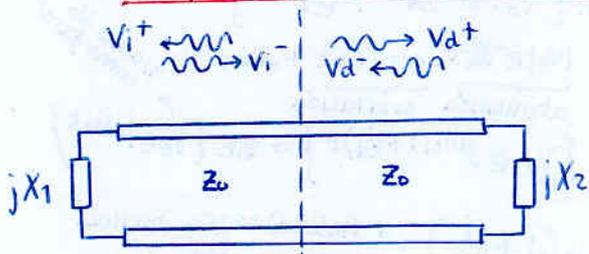


Resonancia paralelo: $Y_{in}=0 \Rightarrow l_n = (2n+1)\lambda/4 \rightarrow \beta l \rightarrow \cot(\beta l) \rightarrow Z_{in}$ igualar a LC paralelo

 en la carta de smith se ve bien la longitud que debe tener la línea

Caso general sin pérdidas

sin pérdidas $\Rightarrow \text{Re}(Z)=0 \Rightarrow |\Gamma|=1$



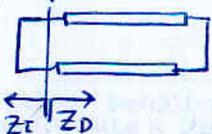
Condición de resonancia
 $\Gamma_i \cdot \Gamma_d = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} Z_0 + Z_I = 0 \\ \textcircled{2} \frac{Z_0}{Z_I} = \pm j\infty \end{array} \right.$

Las frecuencias que cumplan cualquiera de las 2 cosas serán las de resonancia

$\frac{V_i^-}{V_i^+} = \frac{Z_I - Z_0}{Z_I + Z_0} = \Gamma_I$ $\Gamma_D = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = \frac{V_d^-}{V_d^+}$

El plano puede estar donde quieras

ejemplo



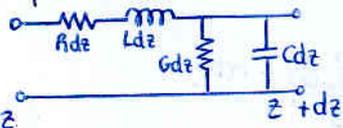
$Z_I = 0$
 $Z_D = jZ_0 \tan(\beta l)$

- ① $Z_0 + Z_I = 0 \Rightarrow \beta l = n\pi \Rightarrow l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$
- ② $\frac{Z_0}{Z_I} = \pm j\infty \Rightarrow$ no se satisface nunca pues $Z_I = 0$

Nota previa:

- La Ue de una línea es la suma de las dle en sus Cdz
- La Um de una línea es la suma de las dllm en sus Ldz
- La Pt de una línea es la suma de las dPr en sus Rdz y Gdz

Línea con pérdidas



$$U_e = \frac{1}{4} C \int_0^l |V(z)|^2 dz$$

$$U_m = \frac{1}{4} L \int_0^l |I(z)|^2 dz$$

$$P_L = \frac{1}{2} R \int_0^l |I(z)|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_0^l |V(z)|^2 dz \quad \frac{V^-}{V^+} = \rho(z=0)$$

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$$

No olvidar sumar además otras contribuciones de otros elementos que puedan haber en el circuito

⚠ No confundir RLC parámetros primarios con el equivalente RLC

Efecto de las pérdidas

ejemplo: línea acabada en cortocircuito

$$Z_L = 0 \Rightarrow Z_i = Z_0 \operatorname{th}(\gamma l)$$

recuerda: th de un número α

$$\operatorname{th}(\alpha + j\beta) = \frac{\operatorname{th}(\alpha) + j \operatorname{tg}(\beta)}{1 + j \operatorname{th}(\alpha) \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$Z_i = Z_0 \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + j \operatorname{tg}(\beta l)}{1 + j \operatorname{th}(\alpha l) \operatorname{tg}(\beta l)}$$

Resonancia serie:

$$\operatorname{Im}(Z_L) = 0 \rightarrow l = n \lambda / 2 \quad \text{misma resultado}$$

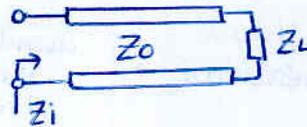
$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi}{\lambda} (1+\delta) n \frac{\lambda}{2} = \pi n (1+\delta)$$

$$\operatorname{th}(\alpha l) \approx \alpha l$$

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \operatorname{tg}(\pi n (1+\delta)) = \operatorname{tg}(\pi n \delta) \approx \pi n \delta$$

$$Z_i = Z_0 \frac{\alpha l + j \pi n \delta}{1 + j \alpha l \pi n \delta} = Z_0 \alpha l + j Z_0 \pi n \delta$$

$\alpha l \ll 1$
 $\delta \ll 1$
 $j \alpha l \pi n \delta \approx 0$
infinitésimo
2º orden



en general

$$Z_i = Z_0 \cdot \frac{Z_L + Z_0 \operatorname{th}(\gamma l)}{Z_0 + Z_L \operatorname{th}(\gamma l)}$$

$\operatorname{Im}(Z_i) = 0 \rightarrow l \rightarrow \gamma l \rightarrow \operatorname{th}(\gamma l) \rightarrow Z_i$ igualar a RLC serie
 $Z_i = R + j\omega L$

$\operatorname{Im}(Y_i) = 0 \rightarrow l \rightarrow \gamma l \rightarrow \operatorname{th}(\gamma l) \rightarrow Y_i$ igualar a RLC paralelo
 $Y_i = G + j\omega C$

Las frecuencias de resonancia salen LAS MISMAS que sin pérdidas, por tanto basta estudiar el caso sin pérdidas

Para obtener Q:
1 - Del equivalente RLC
2 - $Q = \omega r \frac{U_T}{P_L}$ integrando en la línea

Iguando a RLC serie
 $Z_i = R + j\omega L$
 $Z_i = \frac{R}{\omega} + j\omega L$

Cálculo del factor de calidad

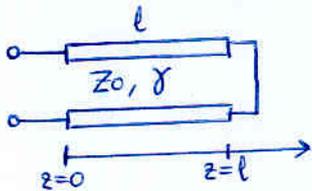
1. A partir del equivalente RLC serie

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$= \frac{Z_0 n \pi}{2 \omega_0 \alpha l} = \frac{n \pi}{2 \alpha l} = \frac{n \pi}{2 \alpha n \lambda} = Q = \frac{\beta}{2 \alpha}$$

En muchos casos no existe RLC equivalente y es importante saber obtenerlo integrando

2. Cálculo del factor de calidad integrando en la línea



$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+\gamma z} \end{cases}$$

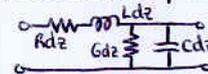
C.C. $V(z=l) = 0$
 $\rho = \frac{V^-}{V^+} = -e^{-2\gamma l}$

$$\begin{cases} V(z) = -2V^+ e^{-\gamma l} \operatorname{sh}(\gamma(z-l)) \\ I(z) = 2V^+ \gamma_0 e^{-\gamma l} \operatorname{ch}(\gamma(z-l)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(z) = -2jV^+ e^{-j\beta l} \operatorname{sen}(\beta(z-l)) \\ I(z) = 2V^+ e^{-j\beta l} \operatorname{cos}(\beta(z-l)) \end{cases}$$

suponemos $\alpha = 0$
 $\gamma = j\beta$
parece un poco raro pero está más que justificado en V-11

Recuerda: Bajas Pérdidas



$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} + \frac{1}{2} G Z_0$$

$$P_L = \frac{1}{2} R \int_0^l |I(z)|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_0^l |V(z)|^2 dz = \dots = 2 |V^+|^2 l \gamma_0 \left[\frac{1}{2} R \gamma_0 + \frac{1}{2} G Z_0 \right]$$

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_0^l |V(z)|^2 dz = \dots = C |V^+|^2 \frac{l}{2}$$

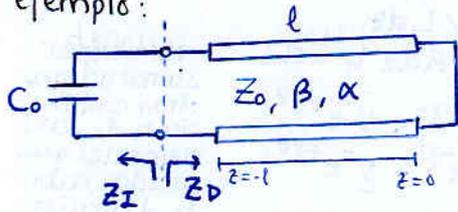
$$U_m = \frac{1}{4} L \int_0^l |I(z)|^2 dz = \dots = L |V^+|^2 \frac{l}{2} \gamma_0^2$$

Finalmente:

$$Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L} = \frac{\beta}{2 \alpha}$$

$Q = \frac{\beta}{2 \alpha}$ es válido siempre que la línea sea la única fuente de pérdidas

ejemplo:



$$Z_I = \frac{1}{j\omega C_0}$$

$$Z_D = Z_0 \tanh(\gamma l)$$

• cálculo del factor de calidad consideramos $V(z)$ e $I(z)$ sin pérdidas

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+j\beta z} \end{cases}$$

↓ c.c. $V(0) = 0 \Rightarrow V^+ = -V^-$

$$\begin{cases} V(z) = -2jV^+ \sin(\beta z) \\ I(z) = 2V^+ \cos(\beta z) \end{cases} \rightarrow$$

$$P_L = \frac{1}{2} R \int_{-l}^0 |I(z)|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_{-l}^0 |V(z)|^2 dz$$

$$U_m = \frac{1}{4} L \int_{-l}^0 |I(z)|^2 dz$$

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_{-l}^0 |V(z)|^2 dz + \frac{1}{4} C_0 V(z=-l)^2$$

!!! No olvidar otros elementos del circuito!!!

$$Q = \omega_b \frac{U_T}{P_L} \Big|_{\omega = \omega_r}$$

$$U_T = U_m + U_e = 2U_e = 2U_m$$

cálculo de las frecuencias de resonancia
los calculo en el caso sin pérdidas

$$Z_I = \frac{1}{j\omega C_0} \quad Z_D = jZ_0 \tanh(\beta l)$$

$$\textcircled{1} Z_I + Z_D = 0 \Rightarrow l = \frac{\arctg(\frac{1}{Z_0 C_0 \omega}) + n\pi}{\beta}$$

$\textcircled{2} \begin{cases} Z_I = \\ Z_D = \end{cases} = \pm \infty$ No se pueden conseguir simultaneamente ambas cosas

Cuidado: como pasamos al caso sin pérdidas cuando hay resistencias?
 • si son valores altísimos la sustituimos por c.a.
 • si son valores bajos la sustituimos por c.c.
 No olvidar incluirla luego en P_L

Cavidades

1. Obtener los campos en la guía tanto progresivos como regresivos

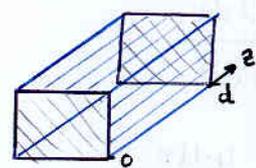
TE Ez=0	TM Hz=0	() e ^{-γz} + () e ^{γz}
H _z (_z)	E _z	+
H _t (_z TE)	E _t	-
E _t	H _t	+

- 2. Pared en z=0 E_t(z=0)=0 → relacion E_o⁻/E_o⁺ → La variación axial para a tener seno/coseno (onda estacionaria)
- 3. Pared en z=l E_t(z=l)=0 → se obtienen frecuencias concretas de la variación axial

$$\beta_p = \frac{\omega}{v_p} \quad f_0 = \frac{k}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{k_c^2 - \beta^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

k_c depende del modo
 $k_c^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2$
 β viene fijado por las c.c.

Cavidad rectangular TE₁₀



1. Campos TE₁₀

$$\left. \begin{aligned} E_y &= \sin(\frac{\pi}{a}x) [E_0^+ e^{-i\beta z} + E_0^- e^{i\beta z}] \\ H_x &= -\frac{1}{Z_{TE}} \sin(\frac{\pi}{a}x) [E_0^+ e^{-i\beta z} - E_0^- e^{i\beta z}] \\ H_z &= \frac{1}{\gamma} (\frac{\pi}{2a}) \cos(\frac{\pi}{a}x) [E_0^+ e^{-i\beta z} + E_0^- e^{i\beta z}] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_y &= f_1(x,y) [E_0^+ e^{-i\beta z} + E_0^- e^{i\beta z}] \\ H_x &= f_2(x,y) [E_0^+ e^{-i\beta z} - E_0^- e^{i\beta z}] \\ H_z &= f_3(x,y) [E_0^+ e^{-i\beta z} + E_0^- e^{i\beta z}] \end{aligned}$$

variación transversal variación axial idéntica a TM

2. Cortocircuito en z=0

$$\begin{aligned} E_y|_{z=0} &= 0 \\ E_0^+ + E_0^- &= 0 \\ E_0^- &= -E_0^+ \quad (\rho_{cc} = -1 \text{ en TM}) \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} E_y = f_1(x,y) (-2j) E_0^+ \sin(\beta z) \\ H_x = f_2(x,y) (2) E_0^+ \cos(\beta z) \\ H_z = f_3(x,y) (-2j) E_0^+ \sin(\beta z) \end{cases}$$

3. Cortocircuito en z=d

$$E_y|_{z=d} = 0 \Rightarrow \sin(\beta d) = 0 \rightarrow \beta = \frac{p\pi}{d}$$

$$k = 2\pi\sqrt{\mu\epsilon} = \sqrt{k_c^2 + \beta^2} = \gamma$$

$$f = \frac{k}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{k_c^2 + \beta^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{p\pi}{d})^2}$$

no k_c! TEM_{np}

Factor de calidad Q

$$\left. \begin{aligned} U_e &= \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_r \iiint |E|^2 dV \\ U_m &= \frac{1}{4} \mu_0 \mu_r \iiint |H|^2 dV \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U_m &= U_e \\ U_T &= U_m + U_e = 2U_m = 2U_e \end{aligned}$$

$$Q = \omega_r \cdot \frac{U_T}{P_L} \Big|_{\omega=\omega_r}$$

salen factores de calidad altísimos (V-15)

$$P_L = P_{lc} + P_{ld}$$

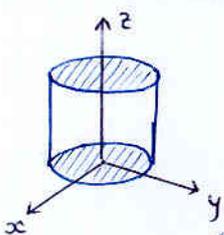
$$P_{ld} = \frac{1}{2} \omega \epsilon \iiint |E|^2 dV \quad \omega \epsilon = \omega \epsilon_r \epsilon_0 \text{ tg } \delta = \omega \epsilon_r \epsilon_0''$$

$$P_{lc} = \frac{1}{2} R_s \iint_S |J_s|^2 dS \quad \text{con } \vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$

⚠ Integral DOBLE en las SEIS paredes de la cavidad (en la práctica son 3 ya que caras opuestas dan el mismo resultado). se calcula la pot disipada TOTAL y no la que hacemos siempre, pot disipada por unidad de longitud

$$P_{lc} = \frac{1}{2} R_s \oint_{\text{contorno}} |J_s|^2 ds$$

Cavidad cilíndrica



1. Campos: (TE)

$$\begin{aligned} E_r &= f_1(r,\varphi) [A^+ e^{-i\beta z} + A^- e^{i\beta z}] \\ E_\varphi &= f_2(r,\varphi) [A^+ e^{-i\beta z} + A^- e^{i\beta z}] \\ H_r &= f_3(r,\varphi) [A^+ e^{-i\beta z} - A^- e^{i\beta z}] \\ H_\varphi &= f_4(r,\varphi) [A^+ e^{-i\beta z} - A^- e^{i\beta z}] \end{aligned}$$

2. Cortocircuito en z=0:

$$E_{r,\varphi}(z=0) = 0 \left\{ \begin{aligned} E_r &= f_1(r,\varphi) \sin \beta z \\ E_\varphi &= f_2(r,\varphi) \sin \beta z \\ H_r &= f_3(r,\varphi) \cos \beta z \\ H_\varphi &= f_4(r,\varphi) \cos \beta z \end{aligned} \right.$$

3. Cortocircuito en z=d

$$\begin{aligned} \sin \beta d &= 0 \\ \beta &= \frac{p\pi}{d} \\ f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{k_c^2 - (\frac{p\pi}{d})^2} \end{aligned}$$

k_c depende del modo
 $\left\{ \begin{aligned} \text{TE}_{np} \quad k_c &= \frac{p_{nl}}{a} \\ \text{TM}_{nl} \quad k_c &= \frac{p_{nl}}{a} \end{aligned} \right.$

Factor de calidad

Se obtiene mucho mejor Q para TE₀₁₁ (TE₀₁ con p=1) que para TE₁₁₁ (TE₁₁ con p=1, q es el fundamental). Las cavidades cilíndricas se hacen para TE₀₁₁ y logramos no excitar otros modos poniendo una cc que no cumplan los modos inferiores

TE₀₁ ← TM₁₁ TE₁₁

NO PASA CORRIENTE DE LAS PAREDES A LAS TAPAS (que no se toquen)

Teoría perturbacional

Inicialmente

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_0 &= -j\omega_0 \mu \vec{H}_0 \\ \nabla \times \vec{H}_0 &= j\omega_0 \epsilon \vec{E}_0 \end{aligned} \right\} \omega_0$$

Tras la perturbación

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega(\mu + \delta\mu)\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega(\epsilon + \delta\epsilon)\vec{E} \end{aligned}$$

Aplicando

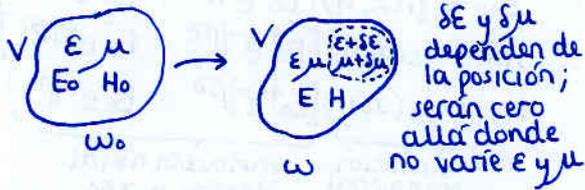
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) &= \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}_0^* - \vec{E}_0^* \cdot \nabla \times \vec{H} + \vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}_0^* \\ &= j[\omega_0 \epsilon - \omega(\epsilon + \delta\epsilon)] \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\omega_0 \mu - \omega(\mu + \delta\mu)) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados $\iiint(\cdot) dV$: La parte de la izquierda

Por tanto la integral de la derecha es también cero, pudiendo despejar $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$

$$\iiint \nabla(\cdot) dV \stackrel{\text{Teorema Gauss}}{=} \iint_{T^*} (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) \cdot d\vec{S} \stackrel{\vec{E} \parallel d\vec{S}}{=} 0$$

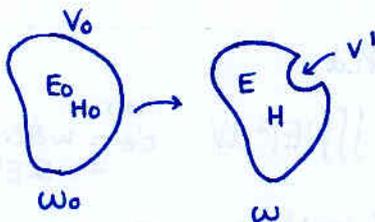
Perturbación de material



$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cong - \frac{\iiint_V (\delta\epsilon |\vec{E}_0|^2 + \delta\mu |\vec{H}_0|^2) dV}{\iiint_V (\epsilon |\vec{E}_0|^2 + \mu |\vec{H}_0|^2) dV}$$

- En el denominador aparece $4 \cdot U_T$ y como $U_e = U_m$, simplifico el cálculo
- El numerador es 4 veces la variación de energía
- Sólo cambia ω si $\delta\epsilon$ y $\delta\mu$ ocurren allí donde $|\vec{E}_0|^2$ y $|\vec{H}_0|^2$ no son ceros (i.e. que halla campo que perturba)

Perturbación de forma



$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cong \frac{\iiint_{V_1} (\mu |\vec{H}_0|^2 - \epsilon |\vec{E}_0|^2) dV}{\iiint_{V_0} (\mu |\vec{H}_0|^2 + \epsilon |\vec{E}_0|^2) dV} = \frac{\delta U_m - \delta U_e}{U_T}$$

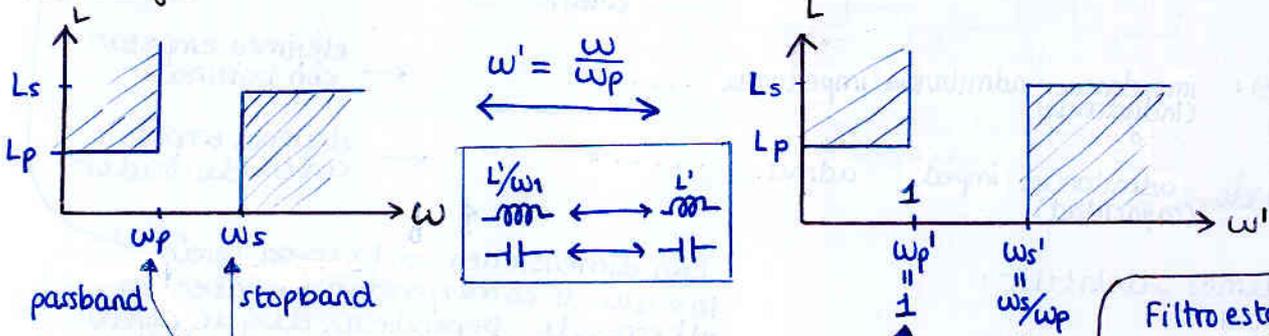
- El denominador es $U_T = 2U_e = 2U_m$
 - El numerador integra únicamente en V' i.e. la energía que antes estaba y ahora ya no
 - δU_m : disminución energía magnética
 - δU_e : disminución energía eléctrica
- $\delta U_m - \delta U_e$
 disminuir la energía eléctrica aumenta ω , mientras que disminuir la magnética disminuye ω

Transformación frecuencia

Dominio ω : Filtro Real

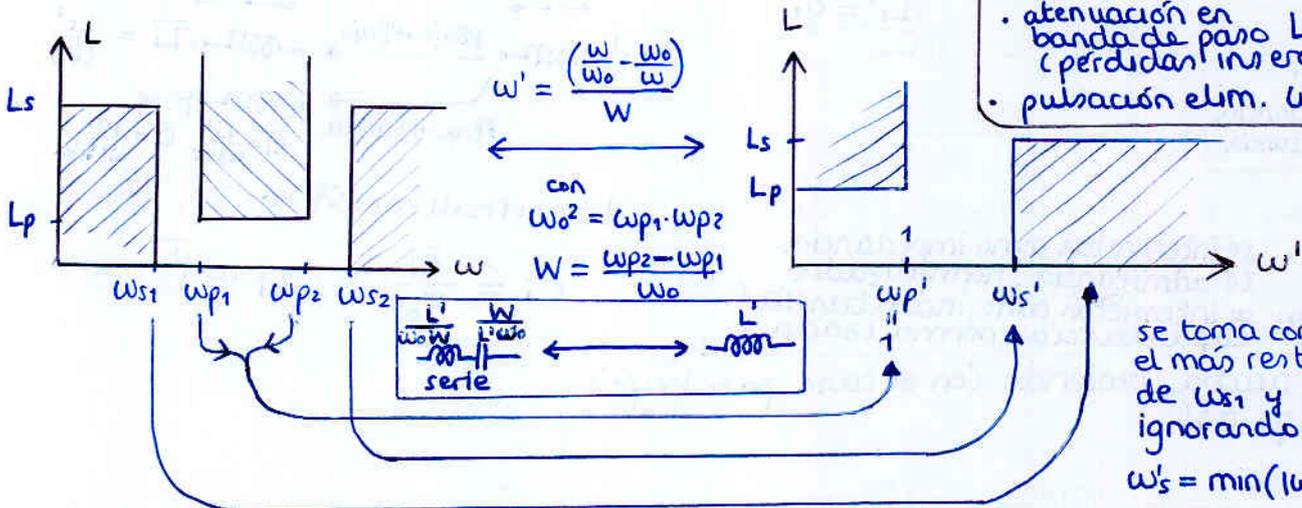
Dominio ω' : Filtro estándar con tablas (prototipo)

Paso bajo:



Filtro estándar $\omega_p' = 1$
 ¿con qué parámetros se juega?
 • Tipo: chebyshev, butterworth
 • atenuación en banda de paso L_p (pérdidas, inserción)
 • publicación elim. ω_s'

Paso banda:



se toma como ω_s' el más restrictivo de ω_{s1} y ω_{s2} ignorando el signo
 $\omega_s' = \min(|\omega_{s1}'|, |\omega_{s2}'|)$

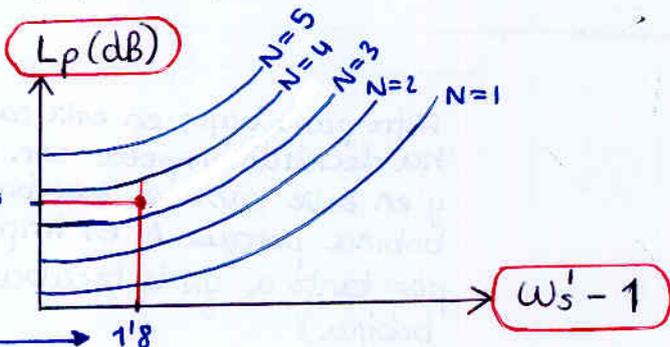
• Calculamos especificaciones prototipo paso bajo

L_p , ω_s' , tipo {butterworth, chebyshev}

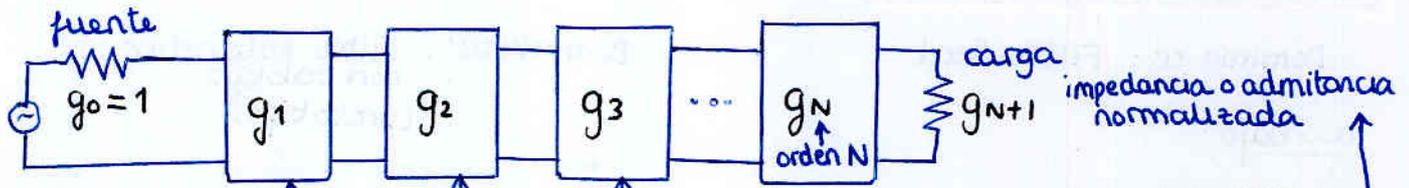
• Hallamos el orden:

una gráfica para cada tipo de respuesta

ej: Butterworth $L_p = 20\text{dB}$
 $\omega_s' = 2.8$
 se obtiene que necesitamos orden $N = 4$



- Miramos tablas con g_0, g_1, \dots, g_{N+1} según tipo de respuesta y orden. g_i representan impedancias/admitancias normalizadas a Z_0 (fuente)



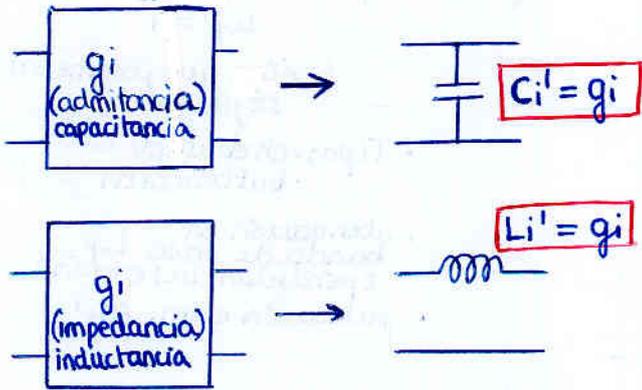
Dimensiones: elegimos la 1ª y se van alternando

inductancia capacitancia inductancia
 capacitancia inductancia capacitancia

← elegimos empezar con bobina

← elegimos empezar con condensador

Podemos sustituir:



Las dimensiones de la carga serán las que le correspondan al haber ido alternando. Dependerá de qué hemos elegido primero y del orden N del filtro

- transformación en frecuencia

$$C_i' \xrightarrow{P_{bajo} \rightarrow P_{bajo}} C_i = \frac{C_i'}{\omega_p}$$

$$L_i' \xrightarrow{P_{bajo} \rightarrow P_{bajo}} L_i = \frac{L_i'}{\omega_p}$$

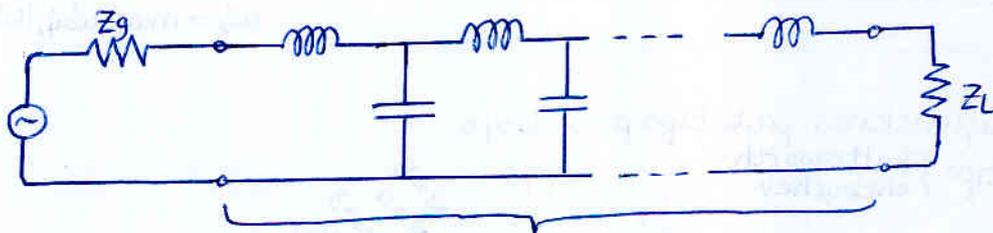
$$\xrightarrow{P_{bajo} \rightarrow P_{banda}} \bar{L}_i = \frac{L_i'}{\omega_0 \omega} \quad \bar{C}_i = \frac{C_i'}{L_i' \omega_0}$$

- desnormalización de impedancia

$$C_i = \frac{\bar{C}_i}{Z_0} \quad L_i = \bar{L}_i \cdot Z_0$$

g_0 y g_{N+1} se interpretan como impedancia (o admitancia) normalizada
 g_1, g_2, \dots, g_N se interpretan como inductancia/capacitancia normalizada

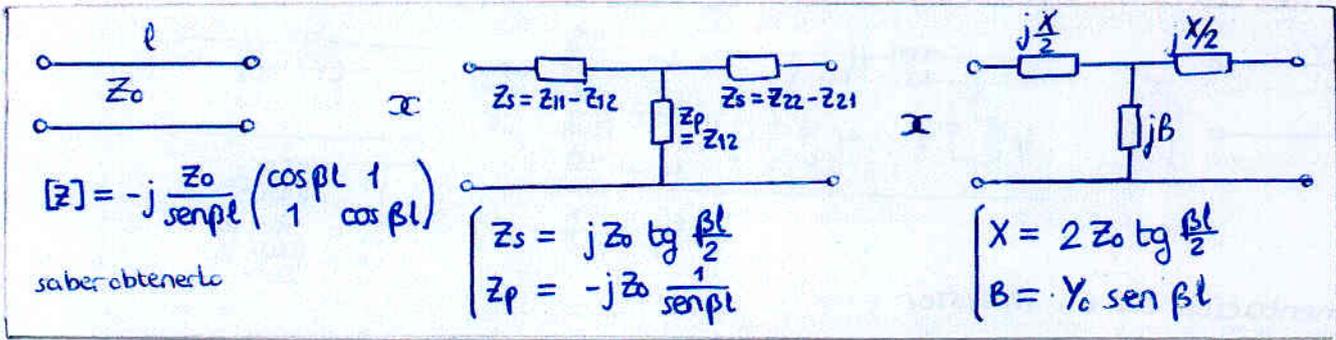
se acaba teniendo (en el caso paso bajo) algo así:



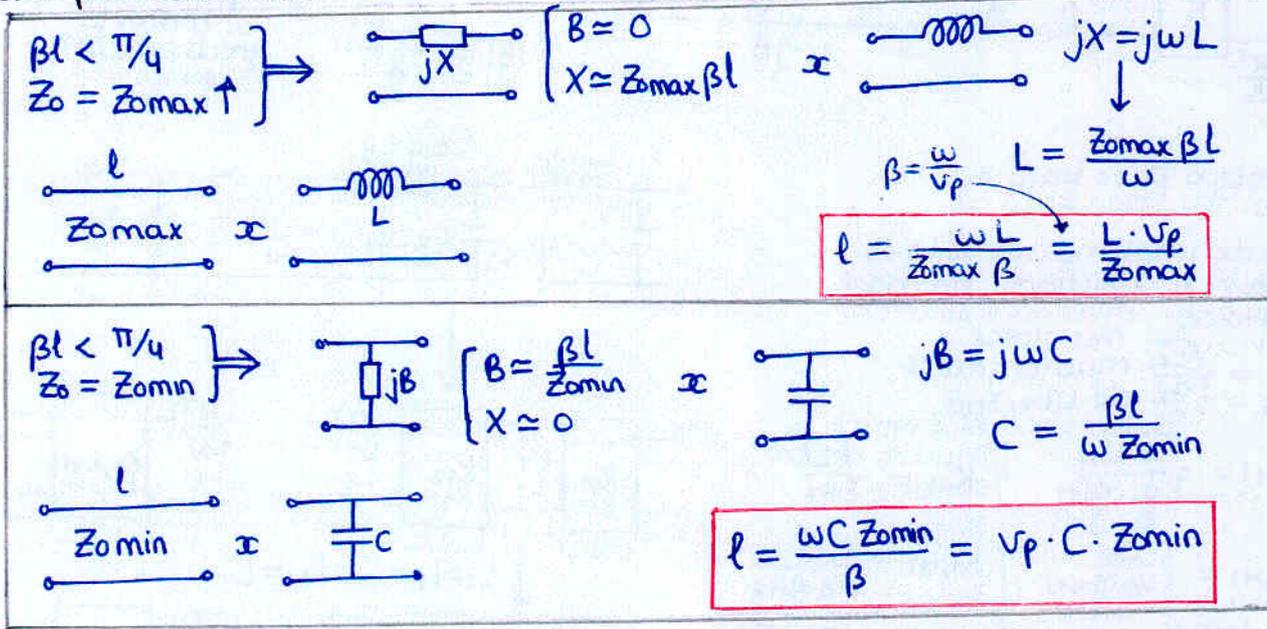
Filtro paso bajo; en este caso se ha decidido empezar con bobina, y en este caso se acaba con bobina porque N es impar (y por tanto a g_N le tocaba ser bobina)

Ahora queda pensar como implementar ese circuito con líneas de transmisión

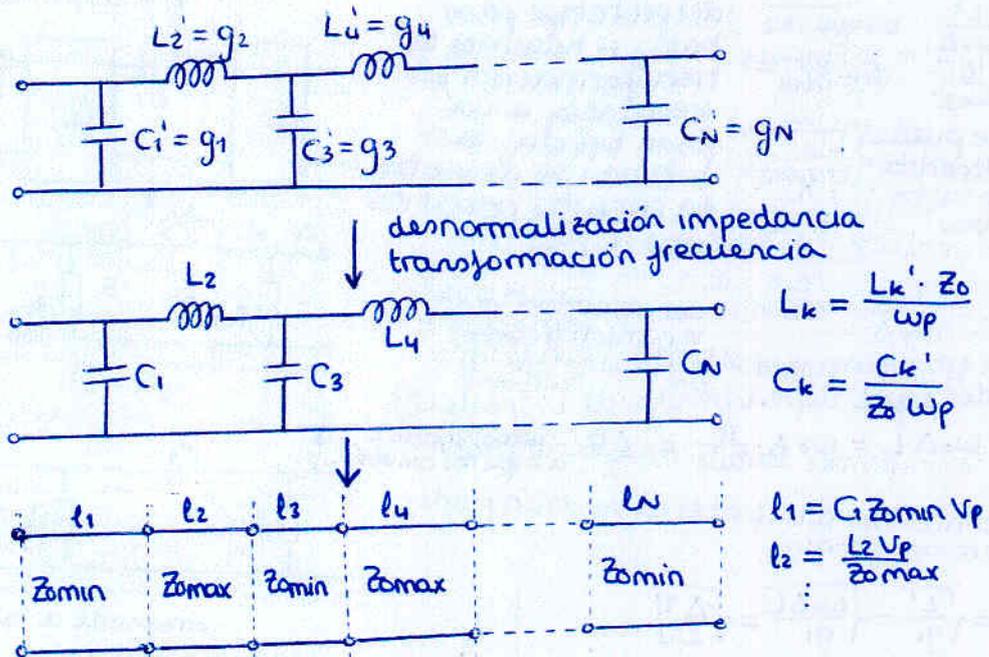
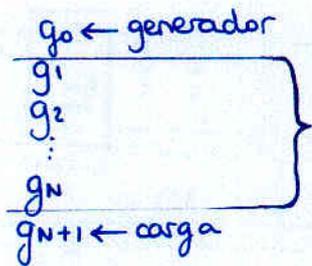
Filtros paso bajo con saltos de impedancia Z_{min}, Z_{max}



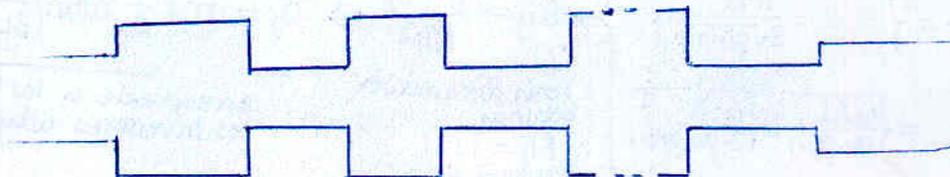
casos particulares:



Por tanto, el filtro paso bajo que era una sucesión de bobinas y condensadores podemos sustituirlo por una secuencia de líneas de transmisión alternándose entre Z_{min} y Z_{max}

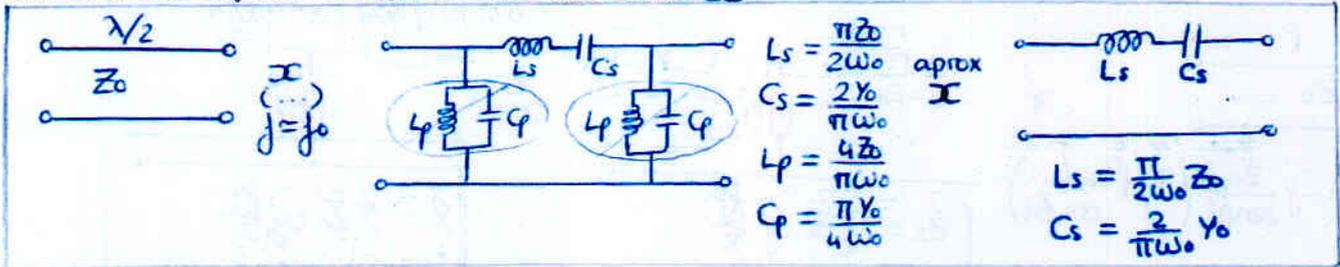


en microstrip:

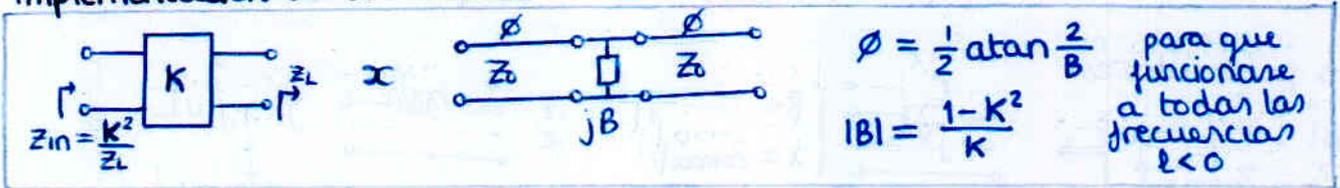


Filtros paso banda con inversores

Previamente: aproximación al circuito serie LC



Implementación de un inversor



El prototipo paso bajo es:

se puede implementar sólo con bobinas e inversores sin más que hacer

Nos ofrece muchos grados de libertad.

$$K_{01} = \sqrt{\frac{L_1}{g_1}}$$

$$\vdots$$

$$K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{L_i L_{i+1}}{g_i \cdot g_{i+1}}}$$

$$\vdots$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{L_N}{g_N \cdot g_{N+1}}}$$

Podemos consumirlos todos haciendo $L_1 = L_2 = \dots = L_N = L'$

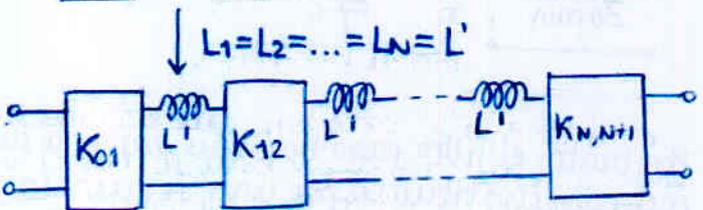
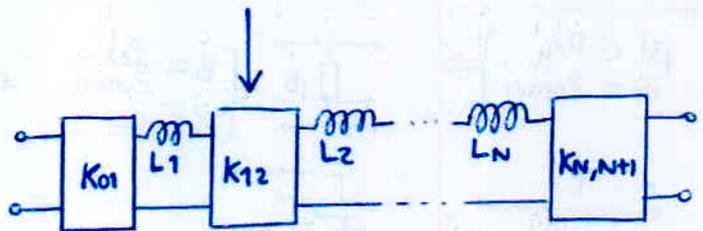
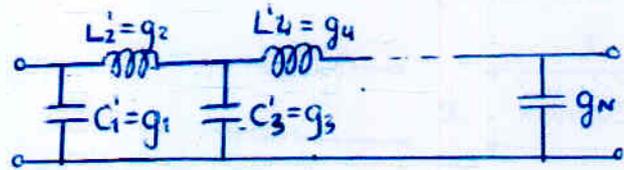
$$K_{01} = \sqrt{\frac{L'}{g_1}}$$

$$\vdots$$

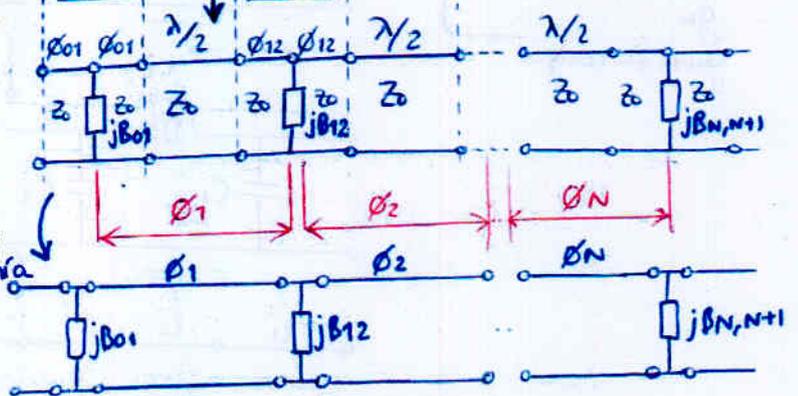
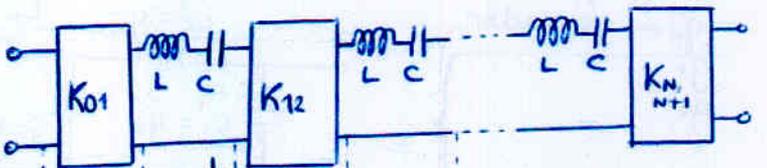
$$K_{i,i+1} = \frac{L'}{\sqrt{g_i \cdot g_{i+1}}}$$

$$\vdots$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{L'}{g_N \cdot g_{N+1}}}$$



transformación a paso banda



corresponde a la línea $\lambda/2$

$$|B_{ij}| = \frac{1 - K_{ij}^2}{K_{ij}^2} \Rightarrow \phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left(\text{atan}\left(\frac{2}{B_{j-1,j}}\right) + \text{atan}\left(\frac{2}{B_{j,j+1}}\right) \right)$$

serán físicamente bobinas $j B_{ij} Y_0 = \frac{1}{j\omega L}$ aún faltaba desnormalizar

corresponde a los tramos de línea de los inversores adyacentes

Pero esto sigue siendo una implementación del prototipo paso bajo; si hacemos la transformación en frecuencia a un paso banda, las bobinas se convierten en circuitos resonantes serie L, C.

Los inversores no se ven modificados por la transformación de frecuencia, y su valor sigue dependiendo de L' (no de L!!)

$$L' = \omega_0 \Delta L = \omega_0 \Delta \cdot \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\Delta \pi}{2}$$

hemos fijado L' a lo que nos convenga

entonces las constantes de inversión pueden expresarse como

$$K_{01} = \sqrt{\frac{L'}{g_1}} = \sqrt{\frac{\omega_0 \Delta L}{g_1}} = \sqrt{\frac{\Delta \pi}{2g_1}}$$

$$\vdots$$

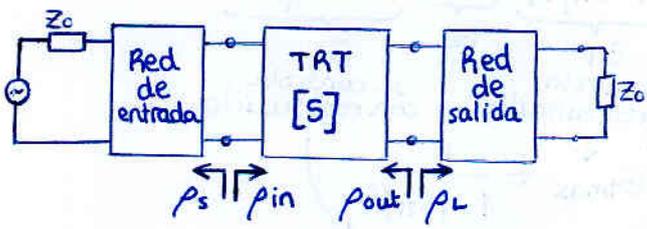
$$K_{i,i+1} = \frac{L'}{\sqrt{g_i \cdot g_{i+1}}} = \frac{\omega_0 \Delta L}{\sqrt{g_i \cdot g_{i+1}}} = \frac{\pi \Delta}{2\sqrt{g_i \cdot g_{i+1}}}$$

$$\vdots$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{L'}{g_N \cdot g_{N+1}}} = \sqrt{\frac{\omega_0 \Delta L}{g_N \cdot g_{N+1}}} = \sqrt{\frac{\Delta \pi}{2 \cdot g_N \cdot g_{N+1}}}$$

Tema 7. Circuitos Activos

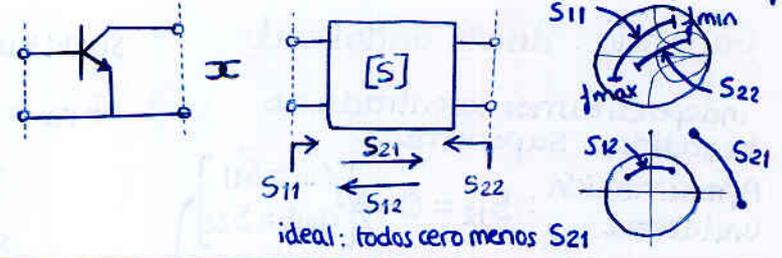
Amplificadores con transistores



$$P_{in} = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} P_L}{1 - S_{22} P_L}$$

$$P_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} P_S}{1 - S_{11} P_S}$$

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = |S_{21}|^2 \cdot \frac{(1 - |A|^2)(1 - |P_L|^2)}{|(1 - S_{11} P_S)(1 - S_{22} P_L) - S_{12} S_{21} P_L P_S|^2}$$



Inestabilidad

Factor de estabilidad $k = \frac{1 + |S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2 |S_{12} S_{21}|}$

$k > 1$ } Incondicionalmente estable $\rightarrow |P_{in}| < 1 \quad \forall P_L, P_S$
 $|A| < 1$ }

Factor $\mu = \frac{1 - |S_{11}|^2}{|S_{22} - S_{11}^* \Delta| + |S_{21} S_{12}|}$

$\mu > 1 \Rightarrow$ Incondicionalmente estable

no ignorar el signo de μ
 no hacer $|\mu| > 1$?
 sino $\mu > 1$?

si no es incondicionalmente estable hay que ver la zona de estabilidad en los planos P_S (círculo estabilidad de entrada, no liarse, ya que P_{out} depende de P_S y por tanto de la red de entrada) y P_L (círculo estabilidad salida)

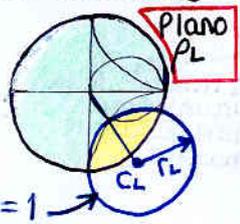
$|P_{in}| = 1$: círculo de estabilidad de salida

centro $C_L = \frac{(S_{22} - \Delta \cdot S_{11}^*)^*}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2}$

radio $r_L = \left| \frac{S_{21} \cdot S_{12}}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right|$

$P_L = 0 \rightarrow P_{in} = S_{11} \leq 1$? $|P_{in}| = 1$

Sabemos qué zona es la inestable

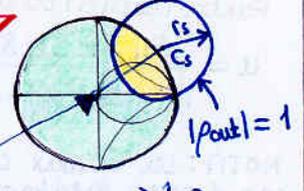


$|P_{out}| = 1$: círculo de estabilidad de entrada

centro $C_S = \frac{(S_{11} - \Delta S_{22}^*)^*}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2}$

radio $r_S = \left| \frac{S_{12} S_{21}}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right|$

$P_S = 0 \rightarrow P_{out} = S_{22} \geq 1$?



Ruido

El ruido del transistor sólo depende de P_S (diseñar red entrada)

Parámetros del catálogo:

- Resist. equiv. de ruido R_n
- Factor de ruido mínimo F_{min} el cual se da cuando:
- Admitancia de fuente óptima $P_{opt} \leftrightarrow Y_{opt} = G_{opt} + jB_{opt}$

$$F = F_{min} + \frac{R_n}{G_s} [Y_s - Y_{opt}]^2$$

$Y_s = Y_0 \frac{1 - P_S}{1 + P_S}$
 $Y_{opt} = Y_0 \frac{1 - P_{opt}}{1 + P_{opt}}$

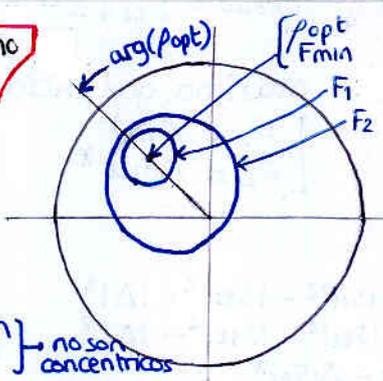
$$F = F_{min} + 4 R_n \frac{|P_{opt} - P_S|^2}{(1 - |P_S|^2) |1 + P_{opt}|^2}$$

Círculos de ruido constante

$C_F = \frac{P_{opt}}{N + 1}$

$r_F = \frac{\sqrt{N(N + 1 - |P_{opt}|^2)}}{N + 1}$

Plano P_S



- Centros situados en la línea $arg(P_{opt})$
- $F \uparrow \rightarrow$ centro se acerca al origen } no son concéntricos
- Radio aumenta
- El círculo para F contiene todos los círculos para mejores F 's

Parámetro: Figura de Ruido $N \geq 0$

$$N = \frac{F - F_{min}}{4 R_n |1 + P_{out}|^2} \quad \text{si } F = F_{min} \rightarrow N = 0$$

$$= \frac{|P_{opt} - P_S|^2}{1 - |P_S|^2}$$

Recuerda:

$$Y = Y_0 \frac{1 - P}{1 + P}$$

$$Z = Z_0 \frac{1 + P}{1 - P}$$

Ganancia: diseño unilateral

Independizamos la entrada de la salida. Suponemos:

Aproximación unilateral: $S_{12} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_{in} = S_{11} \\ P_{out} = S_{22} \end{cases}$

Para maximizar la ganancia hacemos:

$$P_s = P_{in}^* = S_{11}^* \Rightarrow G_{1max} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2}$$

$$P_L = P_{out}^* = S_{22}^* \Rightarrow G_{2max} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2}$$

Substituyendo $S_{12} = 0$ en GT:

$$G_{TU} = \underbrace{\frac{1 - |P_s|^2}{|1 - S_{11}P_s|^2}}_{G_1} \underbrace{|S_{21}|^2}_{G_0} \underbrace{\frac{1 - |P_L|^2}{|1 - S_{22}P_L|^2}}_{G_2}$$

se controla con red entrada se controla con red salida

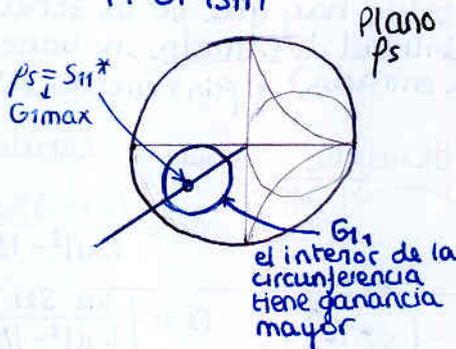
Puede interesar diseñar P_s para mínimo ruido $P_s = P_{opt} \neq S_{11}^* \rightarrow G_1 \neq G_{1max}$ pero diseñar P_L para máxima ganancia $P_L = S_{22}^* \rightarrow G_2 = G_{2max}$

Más en general, interesará un compromiso entre G y F

Círculos $G_1 = cte$

$$C_1 = \frac{G_1 \cdot S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2}$$

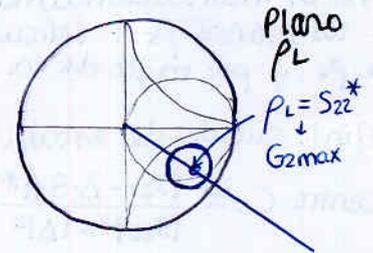
$$r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2}$$



Círculos $G_2 = cte$

$$C_2 = \frac{G_2 \cdot S_{22}^*}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{1 - G_2(1 - |S_{22}|^2)}}{1 + G_2 |S_{22}|^2}$$



¿qué error cometemos con la aprox unilateral?

$$\left(\frac{1}{1+u}\right)^2 < \frac{G_T}{G_{TU}} < \left(\frac{1}{1-u}\right)^2$$

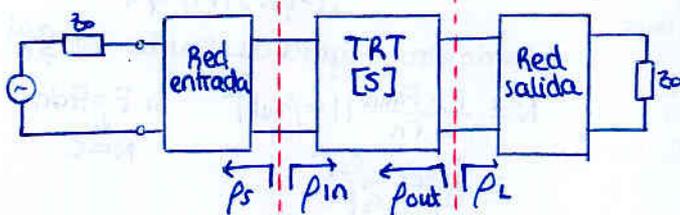
siendo Factor de mérito unilateral

$$u = \frac{|S_{11} S_{12} S_{21} S_{22}|}{|1 - |S_{11}|^2| |1 - |S_{22}|^2|}$$

NOTA: La G_{Tmax} calculada con diseño Bilateral puede no estar en el rango dado para G_{TUmax} . Ello es porque éste rango representa los posibles valores (exactos, sin suponer $S_{12} = 0$) en los que puede caer G_T si se diseña suponiendo $S_{12} = 0$.

Si lo diseñamos sin esa suposición pueden obtenerse mejores valores fuera de ese rango.

Máxima ganancia: diseño bilateral



$$\begin{cases} P_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} P_L}{1 - S_{22} P_L} \\ P_{out} = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} P_s}{1 - S_{11} P_s} \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones con solución analítica

máxima ganancia:

$$\begin{cases} P_s = P_{in}^* \\ P_L = P_{out}^* \end{cases}$$

P_{sm} y P_{Lm}
↑ max ganancia ↑ max ganancia

$$P_{sm} = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4|C_1|^2}}{2C_1}$$

$$P_{Lm} = \frac{B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4|C_2|^2}}{2C_2}$$

siendo

$$B_1 = 1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - |\Delta|^2$$

$$B_2 = 1 + |S_{22}|^2 - |S_{11}|^2 - |\Delta|^2$$

$$C_1 = S_{11} - \Delta \cdot S_{22}^*$$

$$C_2 = S_{22} - \Delta \cdot S_{11}^*$$

Dependen sólo de los parámetros $[S]$ del transistor

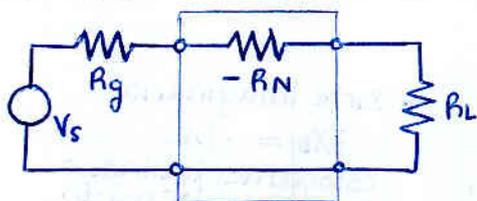
Si es incondicionalmente estable se obtiene

$$G_{Tmax} = \left| \frac{S_{21}}{S_{12}} \right| \cdot |K \pm \sqrt{K^2 - 1}|$$

Amplificadores de resistencia negativa

Configuración básica

Estabilidad \Rightarrow suma resistencias malla positiva



$$P_L = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \left[V_s \frac{R_L}{R_g + R_L - R_N} \right] \left[\frac{V_s^*}{R_g + R_L - R_N} \right] = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_g + R_L - R_N)^2}$$



$$P_{avs} = \frac{1}{2} V \cdot I^* = \frac{1}{2} \cdot \left[V_s \frac{R_g}{2R_g} \right] \cdot \left[\frac{V_s^*}{2R_g} \right] = \frac{1}{8} |V_s|^2 \frac{1}{R_g}$$

Ganancia de transferencia

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{4 R_g R_L}{(R_g + R_L - R_N)^2}$$

con Δ cte maximizamos $\frac{dG_T}{dR_L} = 0 \Rightarrow R_L = R_g$

$$G_T = \frac{4 R_g R_L}{\Delta^2 \cdot R^2}$$

$$G_{Tmax} = \frac{1}{\Delta^2}$$

Definimos:

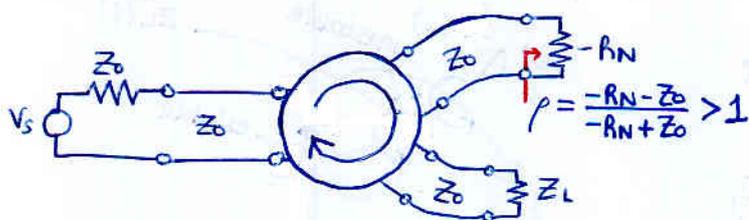
Resistencia positiva Resistencia vista por el dispositivo.

En este caso $R = R_g + R_L$

Delta: $R_N = R(1 + \Delta) \Leftrightarrow \Delta = \frac{R_N - R}{R}$

$$R \cdot \Delta = R_N - R$$

Configuración con circulator



$$G_T = |\rho|^2 = \frac{(Z_0 + R_N)^2}{(Z_0 - R_N)^2}$$

La resistencia positiva que ve el dispositivo

$$R = Z_0$$

Por tanto: $R_N = R(1 + \Delta) = Z_0(1 + \Delta)$

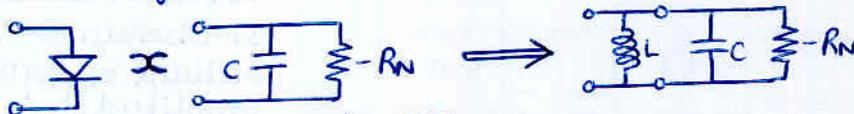
Entonces se obtiene

$$G_T = \frac{(Z_0 + (Z_0 + Z_0 \Delta))^2}{(Z_0 - (Z_0 + Z_0 \Delta))^2} = \frac{(2 + \Delta)^2}{\Delta^2} \approx \frac{4}{\Delta^2} \quad \Delta \ll 2$$

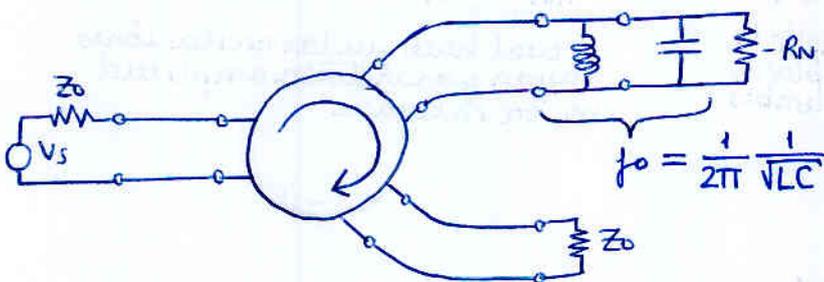
4 veces mejor que el caso anterior

¿Cómo se consigue resistencia negativa?

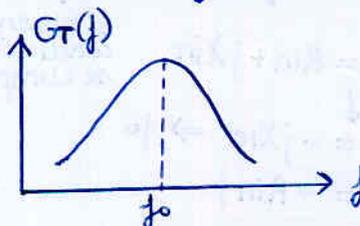
Diodo trabajando en zona con pendiente negativa



suele presentar una parte reactiva cuyo efecto debemos contrarrestar



Por culpa de ello estaremos limitados en frecuencia



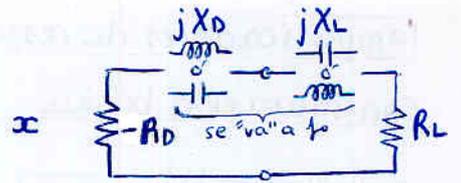
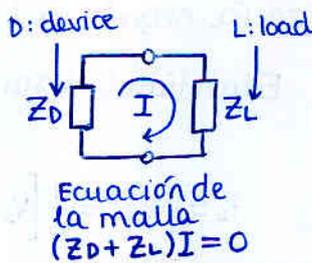
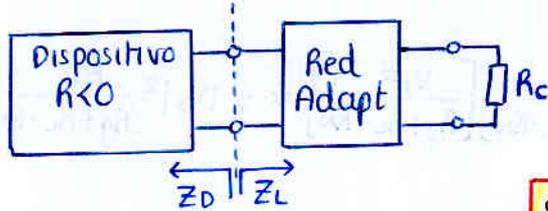
$$G_T(f) = G_{T0} \cdot \frac{1 + \left(\frac{2Q_N Q_E}{Q_N + Q_E} \delta \right)^2}{1 + \left(\frac{2Q_N Q_E}{Q_N - Q_E} \delta \right)^2}$$

$$G_{T0} = \left(\frac{Z_0 + R_N}{Z_0 - R_N} \right)^2 \quad \delta = \frac{f - f_0}{f_0}$$

factor de calidad: $\begin{cases} \text{con } R_N & Q_N = \frac{R_N}{\omega_0 L} \\ \text{con } R & Q_E = \frac{Z_0}{\omega_0 L} \end{cases}$

Osciladores

Osciladores con diodos



$$Z_L = R_L + jX_L(\omega)$$

$$Z_D = -R_D(I) + jX_D(\omega)$$

condición de oscilación

$$Z_D + Z_L = 0$$

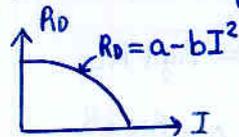
$$\Downarrow$$

$$\rho_D \cdot \rho_L = 1$$

- Parte imaginaria
 $jX_D = -jX_L$
 colocamos bobina o condensador según toque
 se obtiene la freq de oscilación
 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

- Parte real
 $-R_D = -R_L$
 lo logramos típicamente con línea en $\lambda/4$.
 Por tanto tenemos la libertad de escoger la R_D que converja, que siempre la podremos adaptar

Complicación típica: la $-R_D$ del diodo depende de la corriente que por él pase



En ese caso en qué R_D, I elegimos trabajar? Maximizando P_L

$$P_L = \frac{1}{2} R_L I^2 = \frac{1}{2} R_D(I) \cdot I^2$$

cond. oscilac.

$$\frac{dP_L}{dI} = 0 \rightarrow I_{opt} \rightarrow R_{D,opt}$$

$$= \frac{1}{2}(a - bI^2)I^2$$

$$\frac{dP_L}{dI} = 0$$

$$\downarrow$$

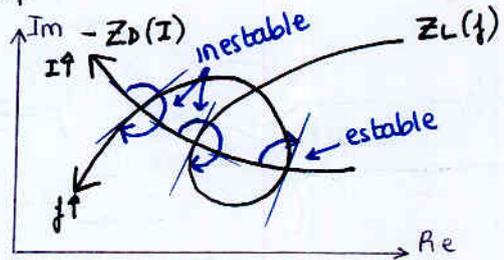
$$I_{opt} = \sqrt{\frac{a}{2b}}$$

Oscilación estable o inestable?

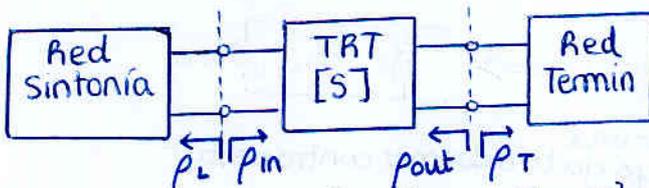
dibujamos sobre el plano complejo las impedancias

- Linea de dispositivo: Z_D en función de I
- Linea de carga: Z_L en función de f
- $\theta \equiv$ ángulo en sentido horario desde la línea de dispositivo (en dirección $I \uparrow$) hasta la línea de carga (en dirección $f \uparrow$)
 $0^\circ < \theta < 180^\circ \leftrightarrow$ oscilación estable

ejemplo:



Oscilador con transistor



condición oscilación $\left[\begin{matrix} Z_{in} + Z_L = 0 \\ \rho_{in} \cdot \rho_L = 1 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} Z_{out} + Z_T = 0 \\ \rho_{out} \cdot \rho_T = 1 \end{matrix} \right]$

$$R_L + jX_L = -R_{in} - jX_{in}$$

$$jX_L = -jX_{in} \Rightarrow f_0$$

$$R_L = -R_{in}$$

si hacemos cumplir la condición en un plano, se cumplirá en ambos

Problema: los parámetros [S] del TRT se suelen dar en pequeña señal; si diseñamos $R_{in} = -R_L$ con ellos, oscilará a pequeña señal (pequeña amplitud).

Así que un criterio práctico es diseñar una R_{in} más negativa

$$R_L = -\frac{R_{in}}{3}$$

lo cual hace que las oscilaciones vayan ganando en amplitud hasta saturarse

$$\frac{1}{\rho_L} = \rho_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\rho_T}{1 - S_{22}\rho_T} = \frac{S_{11} - \Delta\rho_T}{1 - S_{22}\rho_T} = \frac{1}{\rho_L}$$

despejando

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{21}S_{12}\rho_L}{1 - S_{11}\rho_L} = \frac{1}{\rho_T} = \frac{S_{22} - \Delta\rho_L}{1 - S_{11}\rho_L}$$

Microondas

Tema 1. Introducción

Definición oficial: Parte del espectro EM $\left\{ \begin{array}{l} 300 \text{ MHz} \rightarrow 300 \text{ GHz} \\ 1 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ mm} \end{array} \right.$

Definición práctica: Parte del espectro EM, en que λ es comparable a las dimensiones del circuito

↓ j↑	Teoría de circuitos	- elementos concentrados, líneas de long. eléctrica nula - simplificación en las ecuaciones de Maxwell
	Teoría de microondas	- ecuaciones de Maxwell tal cual \vec{E}, \vec{H} $v(t, z) = a(t) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} z\right)$
	Óptica	- dimensiones del circuito MUY grandes eléctricamente - simplificación en las ecuaciones de Maxwell

Propiedades y aplicaciones

- Ganancia de antenas aumenta con altos tamaños eléctricos
- Mayor ancho de banda absoluto (B [Hz]) para un mismo ancho de banda relativo ($\frac{B}{f_0}$)
(la complejidad viene dada por el AB relativo)
- Transparencia de la ionosfera
(poder comunicarse con cohetes y satélites)
- La propagación por la atmósfera es en línea recta sin apenas refracción.
Hay ciertas ventanas de no atenuación en la atmósfera entre frecuencias de resonancia de moléculas
- Interacción con la materia
 - Calentamiento (ej: horno microondas: 2'45 GHz : resonancia de H₂O)
 - Detección de distintas permitividades (ej: minas antipersonales) no metálicas
- Es radiación no ionizante ($E = h \cdot f < \text{energía necesaria para liberar electrones de los átomos, a diferencia de por ej. los rayos X}$)
- Hay ciertos elementos (hidrógeno, cesio, ...) con frecuencias de oscilación dentro de esta banda que se pueden usar como sincronismo.
- La sección recta-radar es grande a estas frecuencias (mayor precisión en los sistemas de radar)

1. Introduction
[Title of the report]

Author's name
Date

Background information about the project, including the purpose and objectives of the study.

Methodology used for data collection and analysis, including a description of the research design and the tools used.

Results of the study, presented in a clear and concise manner, including any statistical analysis performed.

Discussion of the findings, comparing the results to existing literature and providing an interpretation of the data.

Conclusion of the study, summarizing the main findings and their implications for the field of study.

References to the sources used in the study, following a standard citation format.

Appendix containing any additional data, tables, or figures that support the findings of the study.

Summary of the key points of the report, providing a quick overview of the main findings and conclusions.

Final thoughts and reflections on the study, including any limitations and suggestions for future research.

Additional information or notes related to the study, such as acknowledgments or contact information.

Final review and proofreading of the report to ensure accuracy and clarity.

Submission of the final report to the appropriate authority or institution.

Post-report activities, such as presenting the findings at a conference or publishing the results in a journal.

Reflection on the overall experience of conducting the study and the value of the research.

Final closing remarks and a thank you to those who supported the study.

Tema 2. Lineas de Transmisi3n

Ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

↑ en general: reales / complejos / escalares / matrices

2 funciones vectoriales de 3 componentes cada una y 4 coordenadas (t_1, t_2, z, t)
 (x, y) 6 (ρ, ϕ)

I Soluci3n de las ecuaciones de Maxwell en medios guiados

Hip3tesis:

- Medio isotropo: ϵ y μ son escalares
- Regi3n libre de fuentes: $\rho = 0$ $\vec{J} = 0$
- Variaci3n arm3nica: $e^{j\omega t} \rightarrow$ fasores \rightarrow eliminamos coordenada t
 $\rightarrow \partial/\partial t \equiv j\omega$
- Geometria:
 - invariante en el eje z (axial o longitudinal)
 - coordenadas transversales $(t_1, t_2) \equiv \begin{cases} (x, y) \\ (\rho, \phi) \end{cases}$ no confundir transversales con tangenciales (al conductor)

nos permite: $\vec{E}(t_1, t_2, z) = \vec{E}(t_1, t_2) \cdot \underbrace{f(z)}_{\text{veremos que } f(z) = e^{-\gamma z}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \hat{z} E_z$$

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \nabla_z^2$$

Las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$(1) \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} \end{cases}$$

El problema es que estas ecuaciones est3n acopladas.

Podemos desacoplarlas a costa de aumentar el orden de la ecuaci3n diferencial.

Ver: "Soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Felipe Peñaranda Foix" ¹⁾
[1] SPUPV 2005.600 Mariano Baquero Escudero

para demostraci3n de ecuaciones diferenciales desacopladas (pag 3)
(B3asicamente se hace $\nabla \times$ a ecs (1)-c y (1)-d y se aplica $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ y se combina con (1)-a y (1)-b)

Resultan ecuaciones de onda: \rightarrow

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

con $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

si suponemos que $\vec{E} = \vec{E}_t(t_1, t_2) \cdot f(z) + \hat{z} E_z(t_1, t_2) \cdot f(z)$
 $\vec{H} = \vec{H}_t(t_1, t_2) \cdot f(z) + \hat{z} H_z(t_1, t_2) \cdot f(z)$
se deduce (Ref [1] pag 4) que $f(z) = e^{-\gamma z}$

y adem3s $\nabla^2 = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}}_{\nabla_t^2} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\nabla_z^2} = \nabla_t^2 + \nabla_z^2$

nota: γ desconocido

y se deducen las ecuaciones:

resultan las ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + (k^2 + \gamma^2) E_z = 0 & \text{1 componente axial} \\ \nabla_t^2 \vec{E}_t + (k^2 + \gamma^2) \vec{E}_t = 0 & \text{2 componentes transversales} \\ \nabla_t^2 H_z + (k^2 + \gamma^2) H_z = 0 \\ \nabla_t^2 \vec{H}_t + (k^2 + \gamma^2) \vec{H}_t = 0 \end{cases}$$

Y además resulta que nos basta resolver las dos ecuaciones escalares de E_z y H_z , y del resultado obtener \vec{E}_t y \vec{H}_t (2). Ahorrándonos por tanto la resolución de las 2 ecuaciones vectoriales de \vec{E}_t y \vec{H}_t . (ver demostración ref [1] págs 6-7)

Por lo tanto:

Basta solucionar E_z y H_z

$$\begin{cases} \nabla_t^2 E_z + (k^2 + \gamma^2) E_z = 0 \\ \nabla_t^2 H_z + (k^2 + \gamma^2) H_z = 0 \end{cases}$$

recuerda $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$
 γ es desconocido (aparece en $e^{-\gamma z}$)

y luego obtener \vec{E}_t y \vec{H}_t a partir de E_z y H_z aplicando la fórmula:

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \frac{1}{k^2 + \gamma^2} [-j\omega\mu \nabla_t \times H_z \hat{z} - \gamma \nabla_t E_z] \\ \vec{H}_t = \frac{1}{k^2 + \gamma^2} [j\omega\epsilon \nabla_t \times E_z \hat{z} - \gamma \nabla_t H_z] \end{cases}$$

válido para la onda progresiva $e^{-\gamma z}$.
 cambiar signo de γ para la regresiva $e^{\gamma z}$

(2) dem ref [1] se da en el examen

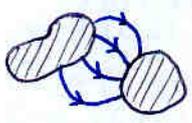
Modo TEM: $E_z = 0$; $H_z = 0$

Podemos aplicar directamente (2) donde \vec{E}_t y \vec{H}_t se anulan a no ser que $k^2 + \gamma^2 = 0 \rightarrow \gamma = \pm jk = \pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \pm j\beta \Rightarrow$ no dispersiva

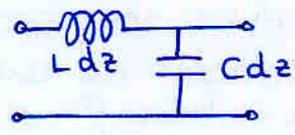
Se puede demostrar que en modo TEM, la solución es la misma que en un problema electrostático

es decir:
$$\begin{cases} \nabla_t^2 \phi = 0 \\ \vec{E}_t = -\nabla_t \phi \end{cases}$$

- dos o más conductores: añadiendo luego $e^{j\omega t}$



Ver ref [1]: IV. modos TEM se demuestra como se acaba llegando a equivalente circuital de parámetros primarios.

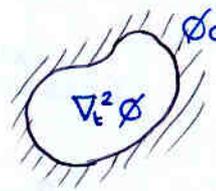


De ahí se deducen las ecuaciones del telegrafista, ondas progresivas/regresivas, etc... (Asignatura: Líneas de Transmisión)

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}$$

ya que $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$; $\gamma = jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$

- único conductor



$\phi = 0 \Rightarrow \vec{E}_t = 0$

No existe propagación TEM con un solo conductor.

es decir

$$\nabla_t \times \vec{E}_t(x, y) = 0 \quad (2.1.25)$$

$$\nabla_t \times \vec{H}_t(x, y) = 0 \quad (2.1.26)$$

$$\hat{z} \times \vec{E}_t \frac{\partial a}{\partial z} = -\mu \frac{\partial b}{\partial t} \vec{H}_t \quad (2.1.27)$$

$$\hat{z} \times \vec{H}_t \frac{\partial b}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial a}{\partial t} \vec{E}_t \quad (2.1.28)$$

De (2.1.25) se observa que los campos obedecen a ecuaciones estáticas en planos transversales y puesto que las condiciones de contorno son las mismas, $\vec{E}_t(x, y)$ y $\vec{H}_t(x, y)$ coinciden con las soluciones estáticas ($\partial/\partial t = 0$) del problema. De aquí la legitimidad de hablar de diferencias de potencial entre puntos del mismo plano transversal, y de capacidad e inductancia.

$$\Phi = \text{Cte.}$$

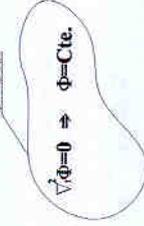


Figura 2.1: Solución estática modos TEM

Una consecuencia inmediata es que en el interior de un tubo conductor hueco no pueden propagarse ondas TEM ya que las paredes imponen la condición de $\phi = \text{Cte.}$ y en estas condiciones la ecuación de Laplace admite la solución única $\phi = \text{Cte.}$ figura 2.1.

$$\vec{E}_t = -\nabla_t \phi = 0 \quad (2.1.29)$$

De (2.1.27) y (2.1.28) resulta que \vec{E}_t y \vec{H}_t son ortogonales. También resulta que el cociente de sus amplitudes es constante ya que de la ecuación (2.1.27):

$$\frac{E_t}{H_t} = -\mu \frac{\partial b / \partial t}{\partial a / \partial z} = R(\text{Constante}) \quad (2.1.30)$$

Modos TEM Estos modos comparten un buen número de propiedades de las ondas planas uniformes, que son un caso particular de los modos TEM.

Se observa en primer lugar que si $E_z = H_z = 0$ se deduce que, de las expresiones (2.1.15) y (2.1.16), para que \vec{E}_t y \vec{H}_t no se anulen, es preciso que:

$$\gamma^2 = -k^2 \quad (2.1.19)$$

$$\gamma = \pm jk = \pm j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (2.1.20)$$

de manera que las ondas se propagan con velocidad independiente de la frecuencia, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ (no hay dispersión). Así pues, una onda TEM de variación temporal no senoidal, desarrollable en serie o integral de Fourier, se propaga sin distorsión puesto que las amplitudes no cambian (no hay atenuación) y las relaciones de fases se preservan (velocidad de fase idéntica para todas las frecuencias). Es preferible por tanto obtener las propiedades de las ondas TEM para señales de variación temporal arbitraria para mayor generalidad.

Considérese campos de la forma:

$$\vec{E}_t(x, y, z, t) = a(z, t) \vec{E}_t(x, y) \quad (2.1.21)$$

$$\vec{H}_t(x, y, z, t) = b(z, t) \vec{H}_t(x, y) \quad (2.1.22)$$

y las ecuaciones de Maxwell se escriben entonces como:

$$\left(\nabla_t + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times a \cdot \vec{E}_t = -\mu \frac{\partial b}{\partial t} \vec{H}_t \quad (2.1.23)$$

$$\left(\nabla_t + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times b \cdot \vec{H}_t = \epsilon \frac{\partial a}{\partial t} \vec{E}_t \quad (2.1.24)$$

(el primer cociente es función solamente de (x, y) y el segundo de (z, t) por lo que si han de ser idénticos ambos han de ser constantes). Se puede escribir ahora (2.1.27) y (2.1.28) como:

$$\frac{\partial a}{\partial z} = -\frac{\mu}{R} \frac{\partial b}{\partial t} \quad (2.1.31)$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} = -\epsilon R \frac{\partial a}{\partial t} \quad (2.1.32)$$

ecuaciones idénticas a las de las líneas de transmisión, con soluciones:

$$a = a^+(t - z/c) + a^-(t + z/c) \quad (2.1.33)$$

$$b = \frac{R}{\eta} [a^+(t - z/c) - a^-(t + z/c)] \quad (2.1.34)$$

Una onda positiva sería entonces de la forma:

$$\vec{E}_t(x, y, z, t) = a^+(t - z/c) \vec{E}_t(x, y) \quad (2.1.35)$$

$$\vec{H}_t(x, y, z, t) = b^+(t - z/c) \vec{H}_t(x, y) = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E}_t(x, y, z, t) \quad (2.1.36)$$

Obsérvese que $E_t/H_t = \eta$ como en una onda plana. Como conclusión se ve que la resolución de un modo TEM se reduce a solucionar la ecuación:

$$\nabla_t^2 \phi(t_1, t_2) = 0 \quad (2.1.37)$$

donde

$$\vec{E}_t(t_1, t_2) = -\nabla_t \phi(t_1, t_2) \quad (2.1.38)$$

Por último se observa que la constante de propagación $\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ es imaginaria para cualquier frecuencia (recordando que μ y ϵ son reales) lo cual significa que la propagación de modos TEM es teóricamente posible a cualquier frecuencia distinta de cero.

Modos TM $\begin{cases} H_z = 0 \\ E_z \neq 0 \end{cases}$

Por tanto de las dos ecuaciones escalares de onda, tenemos que resolver sólo una:

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 + \gamma^2) E_z = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0}$$

$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$ $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$
 γ desconocido

Es un problema de autovalores (donde $f(\text{algo}) = \text{cte} \cdot \text{algo}$)
Solucionaremos más adelante el problema utilizando separación de variables cuando veamos líneas particulares (ej. guía rectangular) obteniendo autovalores $k_{cn} \Rightarrow \gamma_n = \sqrt{k_{cn}^2 - k^2}$ $n = 0, 1, 2, \dots$
autofunciones E_{zn}

Tras hallar E_{zn} , hay que hallar \vec{E}_{tn} y \vec{H}_{tn} usando la fórmula (2), pero sustituyendo $H_z = 0$ queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{tn} = \frac{1}{k_{cn}^2} [-\gamma_n \nabla_t E_{zn}] \\ \vec{H}_{tn} = \frac{1}{k_{cn}^2} [j\omega \epsilon \nabla_t \times E_{zn} \hat{z}] \end{array} \right\}$$

donde podemos deducir la relación entre E_t y H_t

$$\boxed{Z_{TM_n} = \frac{|\vec{E}_t|}{|\vec{H}_t|} = \frac{\gamma_n}{j\omega \epsilon}}$$

impedancia de modo TM_n

se ve que \vec{E}_t es ortogonal a \vec{H}_t
por tanto: $\vec{H}_t = \frac{1}{Z_{TM_n}} [\hat{z} \times \vec{E}_{tn}]$

Modos TE $\begin{cases} E_z = 0 \\ H_z \neq 0 \end{cases}$

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{autovalores: } k_{cn} \\ \text{autofunciones: } H_{zn} \end{array}$$

Las ecuaciones (2) con $E_z = 0$ quedan

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{tn} = \frac{1}{k_{cn}^2} [-j\omega \mu \nabla_t \times \vec{H}_z] \\ \vec{H}_{tn} = \frac{1}{k_{cn}^2} [-\gamma \nabla_t \cdot H_z] \end{array} \right\}$$

$$\boxed{Z_{TE_n} = \frac{|\vec{E}_{tn}|}{|\vec{H}_{tn}|} = -\frac{j\omega \mu}{\gamma_n}}$$

Propiedades de corte y propagación TE y TM

Recordemos: $\vec{E} = \vec{E}_t e^{-\gamma z} + E_z \hat{z} e^{-\gamma z}$ (*) no olvidar que en realidad luego hay que añadir $e^{i\omega t}$
 $\vec{H} = \vec{H}_t e^{-\gamma z} + H_z \hat{z} e^{-\gamma z}$

La progresión a lo largo del eje axial viene dada por $e^{-\gamma z}$

$e^{-\gamma z}$ $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2}$
no de onda: $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

autovvalor hallado al solucionar la ecuación diferencial

propagación: $k > k_c$
 $\omega \sqrt{\mu \epsilon} > k_c$

$e^{-\gamma z} = e^{-j\sqrt{k^2 - k_c^2} z} = e^{-j\beta z}$ cte de fase

el módulo no varía con z ,
 varía la fase

atenuación: $k < k_c$
 $\omega \sqrt{\mu \epsilon} < k_c$

$e^{-\gamma z} = e^{-\sqrt{k_c^2 - k^2} z} = e^{-\alpha z}$ cte. atenuación

el módulo se va atenuando con z

Por tanto hay una frecuencia de corte f_c a partir de la cual se entra en la zona de propagación

obtenemos una nueva expresión para k_c además de la obtenida con las c.c.

$k_c = k|_{f=f_c}$

$k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu \epsilon}$ siempre

$\gamma = j\beta = j\sqrt{k^2 - k_c^2} = j\sqrt{k^2(1 - \frac{k_c^2}{k^2})}$
 $= jk \sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k^2}} = jk \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi f_c \sqrt{\mu \epsilon}}{2\pi f \sqrt{\mu \epsilon}}\right)^2} = jk \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

$k^2 - k_c^2 = k^2(1 - (f_c/f)^2)$

$k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{f_c}{f} k$

$\gamma = j\beta = jk \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$

Puesto que se tiene $e^{-j\beta z}$, la fase volverá a ser la misma tras lo que definimos como λ_g : longitud de onda en la guía

será cuando $\beta \cdot \lambda_g = 2\pi \Rightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{2\pi}{2\pi f \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$

$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$

Además sabiendo γ en función de f_c , podemos volver a expresar Z_{TE} y Z_{TM}

$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$
 $Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$

$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

NOTA: si $f < f_c$, salen Z_{TE} y Z_{TM} imaginarias puras. La relación que ello implica en \vec{E} y \vec{H} hace que el vector de Poynting sea imaginario. Por tanto no hay potencia transmitida

Energía y Potencias

- Energía eléctrica media (recuerda, variación armónica) en un volumen:

$$U_e = \frac{1}{4} \epsilon \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV$$

es la mitad que en estática ($\frac{1}{2} \epsilon E^2$)
ya que aquí \vec{E} es el fasor sin inducir $e^{i\omega t}$

- Energía magnética media en un volumen

$$U_m = \frac{1}{4} \mu \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV$$

- Potencia disipada en un volumen (a causa de $\sigma \neq \infty$ en conductores)
(a causa de $\delta_c \neq 0$ en dieléctricos)
↑ equivalente

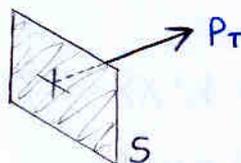
$$P_L = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}^* dV = \frac{\sigma}{2} \iiint_V |\vec{E}|^2 dV$$

↑ **TODAS las componentes**

- Potencia transmitida a través de cierta área S

$$P_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{n} dS$$

¡No importan las componentes axiales E_z, H_z !
($\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot \hat{n}$)



$$\text{TEM: } P_T = \frac{1}{2\eta} \iint_S |\vec{E}_t|^2 dS = \frac{\eta}{2} \iint_S |\vec{H}_t|^2 dS$$

$$\text{TM: } P_T = \frac{1}{2Z_{TM}} \iint_S |\vec{E}_t|^2 dS = \frac{Z_{TM}}{2} \iint_S |\vec{H}_t|^2 dS$$

$$\text{TE: } P_T = \frac{1}{2Z_{TE}} \iint_S |\vec{E}_t|^2 dS = \frac{Z_{TE}}{2} \iint_S |\vec{H}_t|^2 dS$$

Utilizando las relaciones de TEM, TM o TE obtenemos

A veces es útil expresar P_T en función de las componentes axiales E_z, H_z que son las que obtenemos directamente de la ec. de onda y ahorrarnos calcular \vec{E}_t y \vec{H}_t mediante (2).

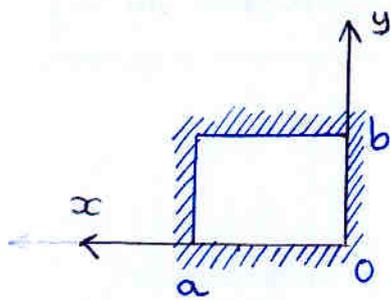
No es inmediato llegar a estas fórmulas, pero se obtiene:

$$\text{TM: } P_T = \frac{Z_{TM}}{2\eta^2} \left(\frac{d}{f_c}\right)^2 \iint_S |E_z|^2 dS$$

$$\text{TE: } P_T = \frac{\eta^2}{2Z_{TE}} \left(\frac{d}{f_c}\right)^2 \iint_S |H_z|^2 dS$$

obtenemos ahora las soluciones (autovalores k_c y autovectores E_z, H_z) para guías de onda particulares:

II.1 Guía rectangular



TEM: No puede existir

TM y TE

Vamos a resolver un caso general con la incógnita A que luego particularizaremos con $\vec{A} = \vec{E}$ ó $\vec{A} = \vec{H}$

$$\nabla_t^2 A_z + k_c^2 A_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + k_c^2 A_z = 0$$

Método de separación de variables: $A_z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$
queda:

$$YX'' + XY'' + k_c^2 XY = 0$$

Dividiendo por XY queda:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_c^2 = 0$$

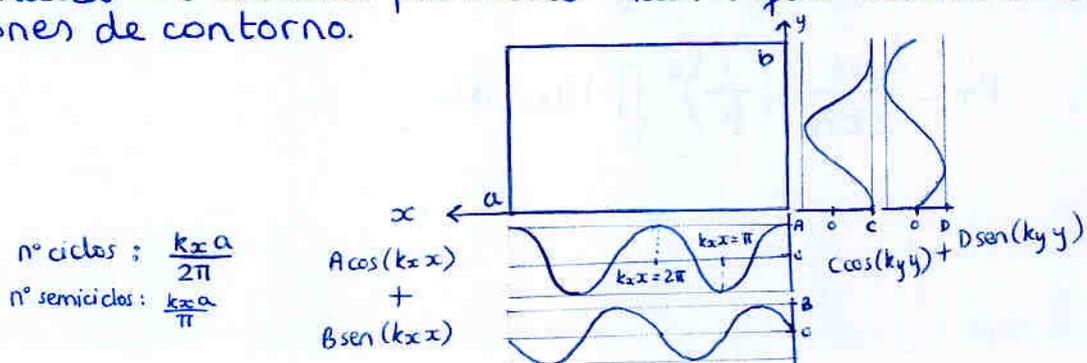
Vemos que la suma de dos términos que dependen cada uno exclusivamente de cada una de las variables es un resultado constante. Ello implica que cada uno de ellos es constante

$$\left. \begin{aligned} \frac{X''}{X} &= \text{cte} = -k_x^2 \\ \frac{Y''}{Y} &= \text{cte} = -k_y^2 \end{aligned} \right\} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k_c^2 = -k_x^2 - k_y^2$$

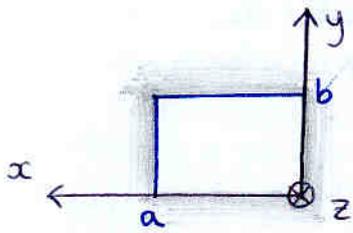
se resuelve fácilmente, obteniendo la solución general:

$$A_z = (A \cos k_x x + B \sin k_x x) \cdot (C \cos k_y y + D \sin k_y y)$$

Y para hallar la solución particular habrá que sustituir las condiciones de contorno.



Modo TM $\begin{cases} H_z = 0 \\ \nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \end{cases} \leftarrow$ la solución anterior con $A = E_z$



Las C.C. se deducen lógicamente

$$\begin{cases} x=0 \\ x=a \\ y=0 \\ y=a \end{cases} \rightarrow E_z = 0$$

nota: se puede demostrar que, haciendo $E_z = 0$ en el contorno, cualquier otra componente tangencial del campo tb será cero (i.e. respetará la CC)

Aplicando las c.c. a la solución general:

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow A=0 \\ y=0 &\Rightarrow C=0 \\ x=a &\Rightarrow \sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m=1,2,3,\dots \\ y=b &\Rightarrow \sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

no incluye 0 ⚠

Ya tenemos por tanto los autovalores

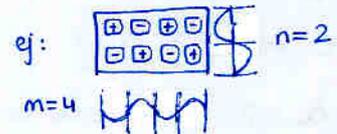
$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$m=1,2,3,\dots$
 $n=1,2,3,\dots$

m semicírculos en x
n semicírculos en y

Y por tanto también tenemos γ

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$



Sabiendo por tanto el comportamiento de $e^{-\gamma z}$
Además, ya que $k_c = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}$, podemos obtener f_c en función de m y n
(lo haremos para TE)

Y ya conocemos la forma del campo eléctrico:

$$E_z = A \cdot \sin k_x x \cdot \sin k_y y$$

nota: la A es una de distinta de la anterior

Y podemos calcular las componentes transversales mediante (2)
(podemos elegir calcular \vec{E}_t o \vec{H}_t)

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z = -\frac{j\beta}{k_c^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{y} \right) \begin{cases} E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2} A k_x \cos k_x x \sin k_y y \\ E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2} A k_y \sin k_x x \cos k_y y \end{cases}$$

Y ahora obtenemos \vec{H}_t sabiendo que Z_{TM} relaciona componentes de \vec{E}_t y \vec{H}_t ortogonales (i.e. $E_x \xrightarrow{Z_{TM}} H_y$, $E_y \xrightarrow{Z_{TM}} H_x$)

Y puesto que Z_{TM} relaciona módulos, hay que poner adecuadamente el signo tal que $\hat{E} \times \hat{H} = \hat{z}$

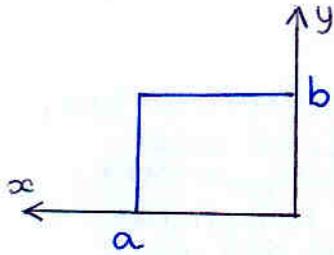
$$H_y = \frac{E_x}{Z_{TM}} \quad H_x = -\frac{E_y}{Z_{TM}}$$

recuerda:

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Modo TE $\begin{cases} E_z = 0 \\ \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \end{cases}$ usamos solución anterior con $A_z = H_z$

C.C.:



Esta vez hay que ver que componentes de \vec{E}_t son tangenciales al conductor y anularlas

$$\vec{E}_t = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \nabla_t \times H_z \hat{z}$$

$$= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\hat{x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \hat{y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

no confundir: tangencial al conductor con transversal a la propag.

Curiosamente, ello nos da C.C. para H_z

$$\left. \begin{matrix} x=0 \\ x=a \end{matrix} \right\} E_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$$

$$\left. \begin{matrix} y=0 \\ y=b \end{matrix} \right\} E_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$$

siendo $H_z = (A \cos k_x x + B \operatorname{sen} k_x x) \cdot (C \cos k_y y + D \operatorname{sen} k_y y)$

sustituyendo las C.C. en las coordenadas correctas:

$$x=0 \Rightarrow B=0$$

$$y=0 \Rightarrow D=0$$

$$x=a \Rightarrow \operatorname{sen} k_x a = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m=0,1,2,\dots$$

$$y=b \Rightarrow \operatorname{sen} k_y b = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n=0,1,2,\dots$$

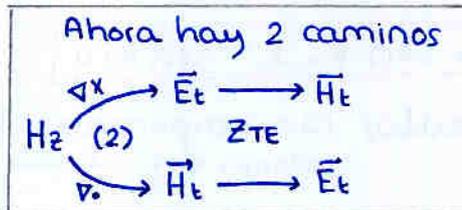
$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

queda:

$$H_z = A \cdot \cos k_x x \cdot \cos k_y y$$

Hallamos las componentes transversales:



$$\vec{H}_t = \frac{-j\beta}{k_c^2} \nabla_t \cdot H_z$$

$$= \frac{-j\beta}{k_c^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \hat{y} \right) \begin{cases} H_x = \frac{j\beta}{k_c^2} A k_x \operatorname{sen} k_x x \cos k_y y \\ H_y = \frac{j\beta}{k_c^2} A k_y \cos k_y y \operatorname{sen} k_x x \end{cases}$$

y sabiendo que Z_{TE} relaciona módulos de componentes ortogonales de \vec{E}_t y \vec{H}_t entre si, y adecuando los signos tal que $\hat{E} \times \hat{H} = \hat{z}$

$$E_x = Z_{TE} H_y$$

$$E_y = -Z_{TE} H_x$$

recuerda:

$$Z_{TE} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(\beta/\gamma)^2}}$$

Analicemos las frecuencias de corte

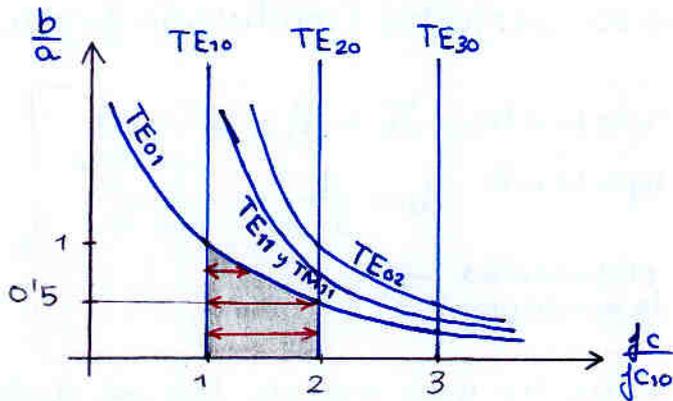
$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$k_c = k \Big|_{f_c} \Rightarrow k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Vemos que la f_c depende de m , n y b/a .



Notas:

La información debemos montarla en un sólo modo (ya que en multimodo hay dispersión debido a que cada modo tiene velocidades distintas)

Nos vemos por tanto obligados a usar el modo de f_c más bajo, que es el modo fundamental TE₁₀ ya que sería muy difícil excitar un modo de f_c superior sin excitar todos los anteriores

Por tanto el ancho de banda será entre f_{c10} y la frec corte del modo inmediatamente superior.

Interesa que b/a sea elevado, de forma que la sección de la guía sea mayor, y se necesite una menor intensidad de campo eléctrico para excitarla.

Por tanto se ve que la relación de aspecto óptima es $b/a = 0.5$

Con $b/a = 0.5$ el ancho de banda es desde f_{c10} hasta $2f_{c10}$ se tiene por tanto una octava de ancho de banda

Nota: modos degenerados: cuando modos diferentes comparten la misma frecuencia de corte.

Potencias y energías (transmitida y disipada)

• Potencia transmitida:

$$P_T = \frac{\eta^2}{2 Z_{TE}} \left(\frac{1}{f_c}\right) \iint_S |H_z|^2 dS$$

o cualquiera de las fórmulas de la página II-3

• Pérdidas en conductores:

En teoría, si $f > f_c$ tenemos $\gamma = j\beta$ y por tanto $e^{-j\beta z}$ no atenua \rightarrow no se disipa potencia

Pero cuando los conductores no son perfectos (conducción finita) se disipa potencia en ellos:

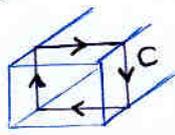
$$P_{Lc} = \frac{R_s}{2} \oint_C |\vec{J}_s|^2 dl$$

↑
pot disipada por unidad de longitud

corrientes superficiales: $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$

resistencia superficial: $R_s = \frac{1}{\delta \cdot \sigma} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2 \sigma}}$

profundidad de penetración \rightarrow



Sabiendo esto, podemos "inventarnos" un α_c que modele las pérdidas en el conductor

$$e^{j\beta z} \Rightarrow e^{j\beta z} \cdot e^{-\alpha_c z}$$

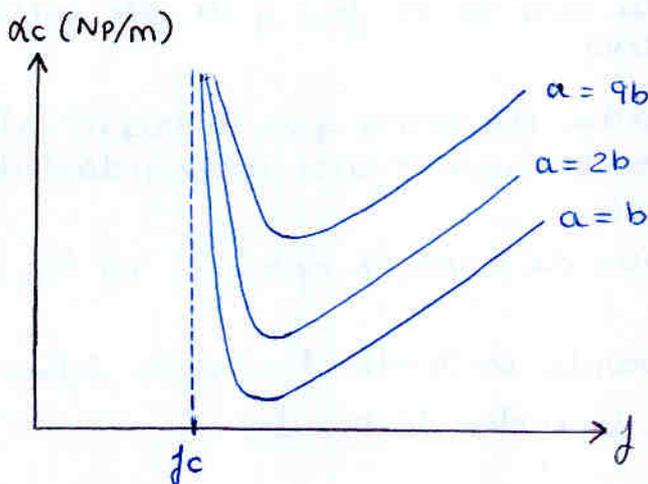
por ser potencia, está al cuadrado

$$P_T \propto |E|^2 \Rightarrow P_T(z) = P_T(0) e^{-2\alpha_c z}$$

Potencia perdida por unidad de longitud: $P_{Lc} = -\frac{dP_T(z)}{dz} = 2\alpha_c P_T \Rightarrow$

$$\alpha_c = \frac{P_{Lc}}{2P_T}$$

$$\alpha_c = \frac{P_{Lc}}{2P_T} = \frac{R_s}{b \cdot \eta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]$$



Nota al margen: origen de δ_s onda plana en buen conductor

$$\begin{aligned} \gamma &= j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \rightarrow \text{E complejo} \\ &= j\omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} \\ &= j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}} \\ &\approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{buen cond.} \\ \epsilon'' \gg \epsilon' \\ \sigma \gg \omega\epsilon \end{array} \right. \\ &= \frac{1+j}{\sqrt{2}} \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon''}{\epsilon'}} \\ &= (1+j) \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \epsilon''}{2}} \\ &= \alpha + j\beta \\ &\quad \downarrow \text{atenuación } e^{-\alpha z} \end{aligned}$$

a una distancia δ_s el campo a caído $e^{-1} \Rightarrow e^{-\alpha \cdot \delta_s} = e^{-1}$

$$\Rightarrow \delta_s = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega^2 \mu \epsilon''}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

\uparrow
 $\sigma = \omega\epsilon''$

Al acercarnos a f_c se dispara la pérdida en conductores.

Nos reduce en la práctica el ancho de banda

• Pérdidas en dieléctrico



Dieléctrico con pérdidas $\Rightarrow \epsilon$ es complejo

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ &= \epsilon' (1 - j \operatorname{tg} \delta) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \end{aligned}$$

Hay dos formas de tener esto en cuenta :

1. Conductividad equivalente :

$$\sigma_e = \omega \epsilon' \operatorname{tg} \delta$$

Indica que al aplicar un campo eléctrico aparece una "corriente equivalente"

$$\vec{J}_e = \sigma_e \vec{E}$$

en un conductor
 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Potencia perdida por unidad de long.

$$P_{ld} = \frac{1}{2} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{J}^* dS = \frac{\sigma_e}{2} \iint_S |\vec{E}|^2 dS$$

sustituyendo valor de $|\vec{E}|$ (todas componentes) se obtiene P_{ld}

$$\alpha_d = \frac{P_{ld}}{2P_T} = \frac{k}{2} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{1 - (j\omega/\beta)^2}} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\beta} \operatorname{tg} \delta$$

$$\beta = k \sqrt{1 - (j\omega/\beta)^2}$$

2. ϵ complejo $\Rightarrow k$ complejo $\Rightarrow \gamma$ complejo $\gamma = j\beta + \alpha$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon = \omega^2 \mu (\epsilon' - j\epsilon'') = \omega^2 \mu \epsilon' (1 - j \operatorname{tg} \delta)$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} \quad \text{desarrollo de Taylor (*)}$$

$$\gamma \approx \frac{1}{2} \frac{k^2}{\beta} \operatorname{tg} \delta + j\beta = \alpha_d + j\beta$$

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\beta} \operatorname{tg} \delta$$

válido para cualquier guía con dieléctrico homogéneo

(*) ver problema en página II-16 (nota: allí hacen $\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$ en lugar de $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$)

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu (\epsilon' - j\epsilon'')} \\ &= \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon' + j\omega^2 \mu \epsilon''} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon' + j\omega^2 \mu \epsilon' \operatorname{tg} \delta} \\ \operatorname{tg} \delta \ll 1 &\quad \left. \begin{aligned} \sqrt{a+bx} &\approx \sqrt{a} + \frac{y'(a)}{2\sqrt{a}} x \\ &\text{para } x \ll \end{aligned} \right\} \\ &= \underbrace{\sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon'}}_{j\beta} + \underbrace{\frac{j\omega^2 \mu \epsilon' \operatorname{tg} \delta}{2\sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon'}}}_{\alpha_d} \end{aligned}$$

$$\alpha_d = \frac{j\omega^2 \mu \epsilon' \operatorname{tg} \delta}{2j\beta} = \frac{1}{2} \sigma_e \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\beta} \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} \frac{k \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{1 - (j\omega/\beta)^2}}$$

$$k_x = \frac{\pi}{a} \quad k_y = 0$$

$$\left. \begin{aligned} H_z &= B \cos(k_x x) e^{-j\beta z} \\ H_x &= \frac{j\beta}{k_c} B \sin(k_x x) e^{-j\beta z} \\ E_y &= -j \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \eta B \sin(k_x x) e^{-j\beta z} \\ H_y &= 0 \\ E_x &= 0 \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{convirtiendo fasores a tiempo}} \left\{ \begin{aligned} H_z &= B \cos(k_x x) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \\ H_x &= -B \frac{\beta}{k_c} \sin(k_x x) \sin(\omega t - \beta z) \\ E_y &= \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \eta B \sin(k_x x) \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned} \right.$$

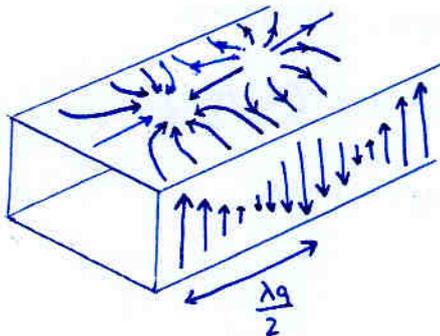
llamando a esto E₀ puedo reescribir

$$\left\{ \begin{aligned} E_y &= E_0 \sin(k_x x) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_x &= -\frac{E_0}{Z_{TE}} \sin(k_x x) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_z &= \left(\frac{\epsilon_0}{j}\right) \frac{E_0}{\eta} \cos(k_x x) \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned} \right.$$

¿qué forma tienen las corrientes inducidas en las paredes?

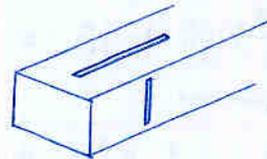
$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$

sólo induce corriente las componentes de \vec{H} tangentes a la pared
 H_z en lado corto
 $\vec{H}_t = H_x \hat{x} + H_y \hat{y}$ en lado largo



¿cómo puedo acceder a la guía perturbándola lo menos posible?

Intentar no cortar las líneas de corriente para no alterar las condiciones de contorno



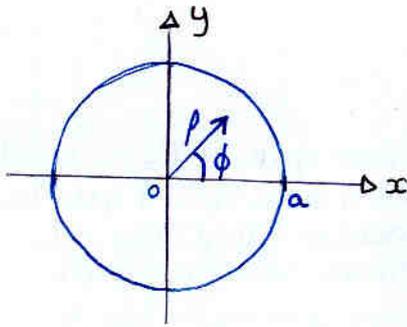
¿qué limita la potencia máxima en la guía?

Está limitada por el campo de ruptura del dieléctrico

sustituyendo E_{0max} en la integral del vector de Poynting

$$P_{Tmax} = \frac{E_{0max}^2}{4 Z_{TE}} ab$$

II.2 Guía circular



Resolvamos la ecuación de onda :

$$\nabla^2 A_z + k_c^2 A_z = 0$$

en cilíndricas :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 A_z = 0$$

Separación de variables :

suponemos : $A_z(\rho, \phi) = R(\rho) \cdot F(\phi)$

queda : $\frac{\rho^2}{R} \left(F \cdot R'' + \frac{1}{\rho} F \cdot R' + \frac{1}{\rho^2} R \cdot F'' + k_c^2 R F \right)$
 $\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \frac{F''}{F} + \rho^2 k_c^2 = 0$

Como siempre, si la suma de dos funciones que dependen de ρ y de ϕ respectivamente es constante, cada una de ellas lo es.

$$\begin{cases} \frac{F''}{F} = -\omega^2 & \rightarrow \text{típica ecuación con solución de} \\ & \text{exponenciales (senos, cosenos)} \\ \rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \rho^2 k_c^2 = \omega^2 & \rightarrow \text{ecuación diferencial de Bessel} \\ & \text{solución conocida:} \end{cases}$$

$$R = C \cdot J_\omega(k_c \rho) + D \cdot N_\omega(k_c \rho)$$

\downarrow 1ª especie ω° orden
 \downarrow 2ª especie (Neumann) ω° orden

$$A_z = (C \cdot J_\omega(k_c \rho) + D \cdot N_\omega(k_c \rho)) (A \cos \omega \phi + B \sin \omega \phi)$$

- De las posibles soluciones a la ecuación de Bessel sólo las funciones de Bessel de 1ª especie no son singulares en el origen, y por tanto son las únicas posibles. (A no ser que el origen no forme parte del problema)

sol:

$$\begin{cases} F = A \cos \omega \phi + B \sin \omega \phi \\ A = C \cdot J_\omega(k_c \rho) \end{cases}$$

$$A_z = J_\omega(k_c \rho) (A \cos \omega \phi + B \sin \omega \phi)$$

- Nueva condición : $F(\phi)$ debe ser periódica, ya que $\phi \in [0, 2\pi]$ ($\phi=0$) ($\phi=2\pi$) son el mismo punto

i.e. $\cos 0 = \cos \omega \cdot 2\pi = 1$

por tanto : $\omega \cdot 2\pi = n \cdot 2\pi$

ω debe ser entero

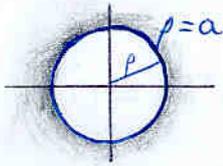
Así que, finalmente :

$$A_z = J_n(k_c \rho) (A \cos n\phi + B \sin n\phi)$$

modos TM: ($H_z = 0, E_z \neq 0$)

$$E_z = J_n(k_c \rho) [A \cos n\phi + B \sin n\phi]$$

Hay que aplicar las condiciones de contorno



$$E_z|_{\rho=a} = 0$$

⇒ se puede demostrar que, si $E_z = 0$ en el contorno, también se cumplirá que el resto de componentes tangentes al conductor también lo cumplirán

Aplicando la C.C. se obtiene

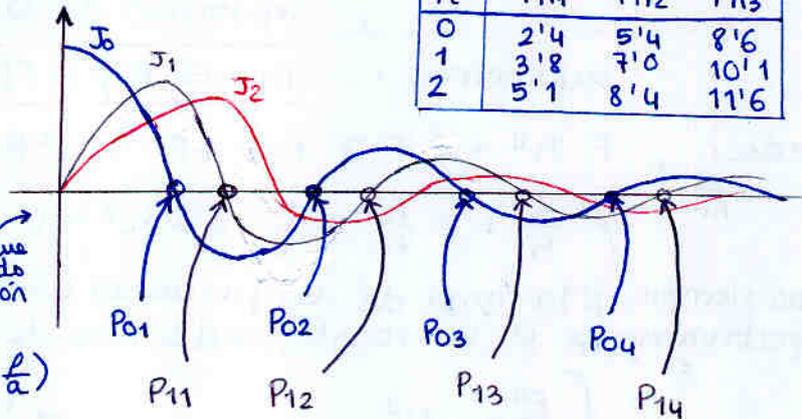
$$J_n(k_c \cdot a) = 0$$

es decir:

$$k_c \cdot a = P_{nl}$$

$$k_c = \frac{P_{nl}}{a} \rightarrow E_z \propto J_n(P_{nl} \frac{\rho}{a})$$

razona lo que está diciendo esta expresión



Por tanto:

Modos

TM_{nl}

$$n \in \mathbb{N} \quad k_c = \frac{P_{nl}}{a}$$

$$E_z = J_n(k_c \rho) [A \cos n\phi + B \sin n\phi]$$

$$k_c = \frac{P_{nl}}{a}$$

Hallamos el resto de componentes mediante (2)

$$\vec{E}_t = -j \frac{\beta}{k_c^2} \nabla_t E_z$$

$$= -j \frac{\beta}{k_c^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \hat{\phi} \right)$$

⚠ El gradiente, en coordenadas cilíndricas.

$$\rightarrow E_\rho = -j \frac{\beta}{k_c} J_n'(k_c \rho) [A \cos n\phi + B \sin n\phi]$$

$$\rightarrow E_\phi = -j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{n}{\rho} J_n(k_c \rho) [-A \sin n\phi + B \cos n\phi]$$

Y en cuanto a H:

$$H_\rho = -\frac{E_\phi}{Z_{TM}}$$

$$H_\phi = \frac{E_\rho}{Z_{TM}}$$

$$Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega \epsilon} = \frac{\gamma}{j \omega \epsilon}$$

$$\gamma = j\beta = jk \sqrt{1 - (k/k_c)^2}$$

Frecuencia de corte:

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{P_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$k_c = \frac{P_{nl}}{a}$$

El modo de menor frec corte será el correspondiente al primer cero de las funciones de Bessel: P₀₁

TM₀₁

¿será el modo de frec corte menor en la guía circular? Falta estudiar modos TE

Modos TE $E_z = 0, H_z \neq 0$

$$H_z = J_n(k_c \rho) (A \cos n\phi + D \sin n\phi)$$

Condiciones de contorno:

Recuerda: $E_{\text{tangencial}} = 0 \iff \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$

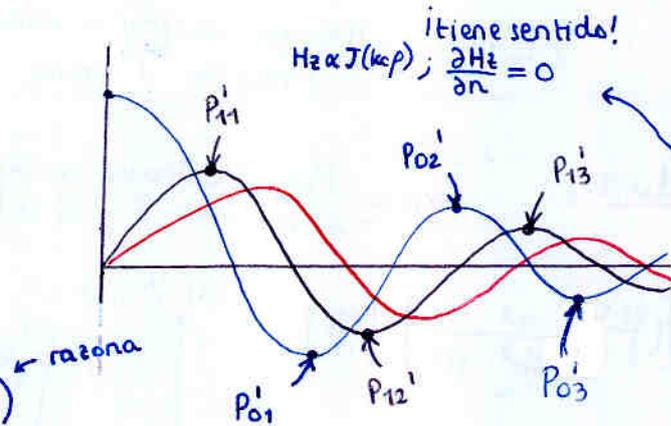
$$\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0$$

↓

$$J'_n(k_c a) = 0$$

$$k_c = \frac{P'_{nl}}{a}$$

$$H_z \propto J_n(P'_{nl} \frac{\rho}{a})$$



Los nulos de la derivada de Bessel J'_n son los máximos y mínimos de J_n

n	P'_{n1}	P'_{n2}	P'_{n3}
0	3'8	7'0	10'1
1	1'8	5'3	8'5
2	3'0	6'7	9'9

Por tanto:

Modos **TE_{nl}**: $H_z = J_n(k_c \rho) (A \cos n\phi + D \sin n\phi)$
 \uparrow
 $k_c = P'_{nl}/a$

Resto de componentes (i.e. transversales) mediante (2)

$$\vec{H}_t = -j \frac{\beta}{k_c^2} \nabla_t H_z$$

$$= -j \frac{\beta}{k_c^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \hat{\phi} \right)$$

$$\rightarrow H_\rho = -j \frac{\beta}{k_c} J'_n(k_c \rho) (A \cos n\phi + B \sin n\phi)$$

$$\rightarrow H_\phi = -j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{n}{\rho} J_n(k_c \rho) (-A \sin n\phi + B \cos n\phi)$$

Y el campo eléctrico:

$$E_\rho = Z_{TE} H_\phi$$

$$E_\phi = -Z_{TE} H_\rho$$

$$Z_{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{j \omega \mu}{\gamma}$$

Frecuencia de corte

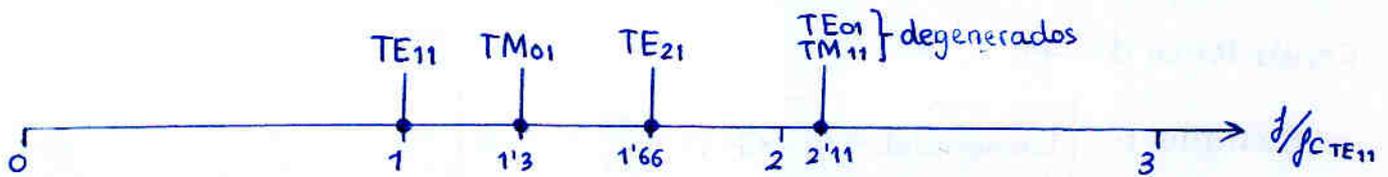
$$f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{P'_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

La frecuencia de corte más baja corresponderá al P'_{nl} menor, que es P'_{11}

TE₁₁

Modos de guía circular

$$f_{cTMnl} = \frac{P_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}} \quad f_{cTEnl} = \frac{P'_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu\epsilon}}$$



modo fundamental en guía circular : TE_{11} margen de frecuencia $f_{max} = 1.3 f_{min}$

Pérdidas en el conductor

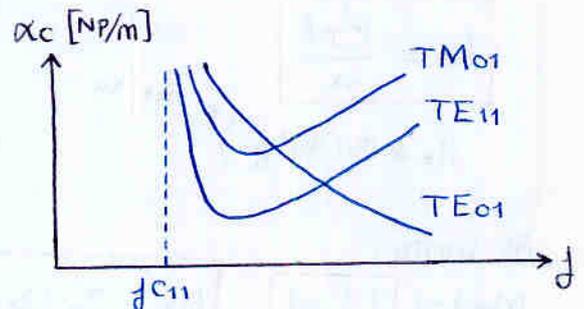
$$\alpha_c = \frac{P_{lc}}{2P_T} \quad \text{calcular en función de los } \vec{E} \text{ y } \vec{H} \text{ calculados}$$

TE:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a\eta\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \left[\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{n^2}{P'_{nl}{}^2 - n^2} \right] \left[\frac{N_p}{m} \right]$$

TM:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a\eta\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \left[\frac{N_p}{m} \right]$$



Curiosamente TE_{01} converge hacia cero atenuación, pero no es el modo fundamental

A igual periferia ($2\pi a = 2a' + 2b'$) la guía circular presenta en el modo fundamental menos atenuación por conductor.

Pérdidas en el dieléctrico

$$\alpha_d = \frac{k}{2} \frac{\tan\delta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} \quad \text{como en todas las guías y modos}$$

Resumen de componentes modo fundamental TE_{11}

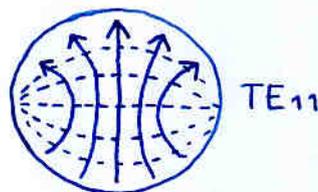
$$H_z = J_1(k_c \rho) (A \cos \phi + B \sin \phi) e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = -\frac{j\beta}{k_c} J_1'(k_c \rho) (A \cos \phi + B \sin \phi) e^{-j\beta z}$$

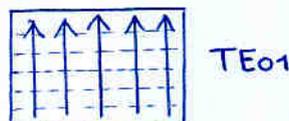
$$H_\phi = \frac{j\beta}{k_c^2 \rho} J_1(k_c \rho) (A \sin \phi - B \cos \phi) e^{-j\beta z}$$

$$E_\rho = Z_{TE} H_\phi$$

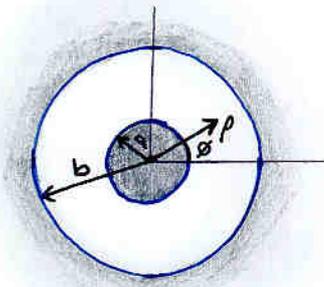
$$E_\phi = -Z_{TE} H_\rho$$



conceptualmente es el mismo modo que el TE_{01} en guía rectangular



II.3 Guía coaxial



Se propagan los modos TEM

- frecuencia de corte $f_c = 0 \text{ Hz}$
- se resuelve como un problema de estática

Para conocer el ancho de banda necesitamos la frecuencia de corte de los modos superiores TE y TM

Resolver ecuación de onda:

$$\nabla_t^2 A_z + k_c^2 A_z = 0$$

en cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 A_z = 0$$

Resolver por separación de variables (ver guía circular)

$$A_z = (C \cdot J_n(k_c \rho) + D \cdot N_n(k_c \rho)) \cdot (A \cos n\phi + B \sin n\phi)$$

- $\phi = 0$ es el mismo punto que $\phi = 2\pi$
 $\cos 0 = \cos n \cdot 2\pi = 1 \Rightarrow n$ debe ser entero
- Esta vez el origen está fuera del problema, por tanto no podemos descartar la ecuación de Neumann como hacíamos en la guía circular por ser singular en el origen

$$A_z = (A \cdot J_n(k_c \rho) + B \cdot N_n(k_c \rho)) \cdot (C \cos n\phi + D \sin n\phi)$$

modos TM

$$E_z = A_z$$

$$H_z = 0$$

Condiciones de contorno:
$$\begin{cases} E_z|_{\rho=a} = 0 \\ E_z|_{\rho=b} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A J_n(k_c a) + B N_n(k_c a) = 0 \\ A J_n(k_c b) + B N_n(k_c b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A [J_n(k_c a) + \frac{B}{A} N_n(k_c a)] = 0 \\ A [J_n(k_c b) + \frac{B}{A} N_n(k_c b)] = 0 \end{cases}$$

despejando $\frac{B}{A}$ en una y sustituyendo en la otra se obtiene

$$\frac{J_n(k_c a)}{N_n(k_c a)} = \frac{J_n(k_c b)}{N_n(k_c b)} \rightarrow \text{Podremos obtener los autovalores } k_c \text{ que cumplen la ecuación}$$

Ésta es una ecuación trascendental (sin solución analítica) que se resuelve numéricamente (después veremos las soluciones más bajas)

Modos TE

$$H_z = A z$$

$$E_z = 0$$

condiciones de contorno:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = 0$$

Haciendo el desarrollo finalmente se llega a:

$$\frac{J_n'(kca)}{N_n'(kca)} = \frac{J_n'(kcb)}{J_n'(kcb)} \rightarrow \text{obtenemos } k_c$$

Frecuencias de corte

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Basta sustituir las k_c halladas numéricamente

Para TM \rightarrow f_c más baja $TM_{01} \rightarrow f_c \approx \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}(b-a)}$

Para TE \rightarrow f_c más baja $TE_{11} \rightarrow f_c \approx \frac{1}{\pi\sqrt{\mu\epsilon}(a+b)} = f_{\text{max}}$
para trabajar en TEM

Por tanto para trabajar con un coaxial en monomodo:

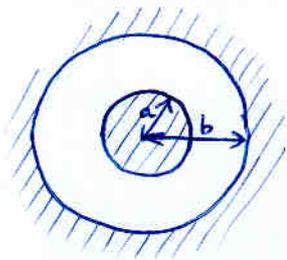
$$0 < f < \frac{1}{\pi\sqrt{\mu\epsilon}(a+b)}$$

Para trabajar a altas frecuencias interesa coaxial pequeño $(a+b) \downarrow$

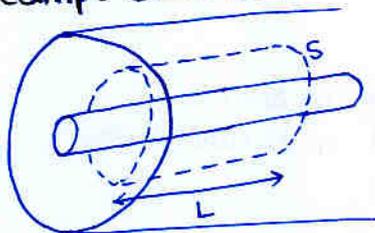
Guia coaxial

Modos TEM

se analiza como en estática:



Campo eléctrico:



Teorema de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon} dV$$

$E \perp dS$
 E constante en S
 $E \parallel$ a las tapas

↓

$$E_{\rho=r} \cdot S = \frac{1}{\epsilon} q \cdot L \quad [9m]$$

$$E_{\rho=r} \cdot 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon} q L$$

$$E_{\rho=r} \cdot 2\pi r = \frac{q}{\epsilon}$$

$$\vec{E}_{\rho=r} = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{q}{\epsilon} \hat{\rho}$$

Diferencia de potencial entre conductores

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E}(\rho=r) \cdot d\vec{\rho} = - \frac{q}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho = - \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

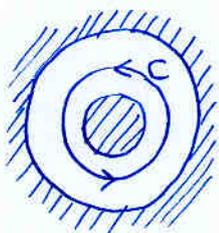
lo ponemos en función del campo en $\rho=r$

$$E(\rho=r) = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow \frac{q}{2\pi\epsilon} = r \cdot E_{\rho=r}$$

$$V = + r \cdot E_{\rho=r} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

en un coaxial se define $V = V_a - V_b$

Campo magnético



Teorema de Ampere

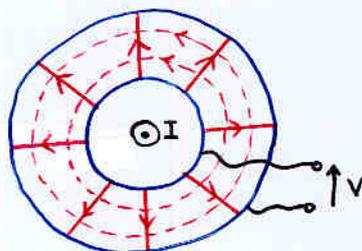
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I = \begin{matrix} \text{corriente que 'vuelve' por el} \\ \text{conductor exterior} \\ \text{''} \\ \text{corriente que 'va' por el} \\ \text{conductor central} \end{matrix}$$

$$H_{\rho=r} \cdot 2\pi r = I$$

$$\vec{H}_{\rho=r} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

Corriente:

$$I = 2\pi r \cdot H_{\rho=r}$$



Impedancia característica

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = \frac{r \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot E_{\rho=r}}{2\pi r \cdot H_{\rho=r}}$$
$$= \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} \cdot ?$$

en modos TEM

$$\frac{E_{\rho=r}}{H_{\rho=r}} = Z_{\text{TEM}} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$? = \begin{cases} 120\pi & \text{en } \epsilon_r = 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} & \text{en } \epsilon_r \text{ cualquiera} \end{cases}$$

$$Z_0 = 60 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ para } \epsilon_r = 1$$

$$= \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ para } \epsilon_r \text{ cualquiera}$$

curiosidad: ¿cómo obtengo ρ [C/m]?

Densidad de carga en el conductor interior por unidad de longitud

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{\rho}{r} \hat{r} \\ \vec{H} = \frac{1}{2\pi r} \cdot I \cdot \hat{\phi} \end{cases} \quad \frac{E}{H} = \eta$$

$$\hookrightarrow \frac{E}{H} = \frac{\rho}{\epsilon I} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

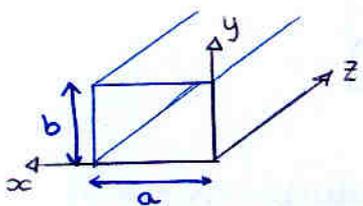
$$\hookrightarrow \frac{\rho}{I} = \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{1}{v_p}$$

$$\rho \text{ [C/m]} = \frac{I \text{ [A]}}{v_p \text{ [m/s]}}$$

\downarrow
 $v_p = c \text{ si } \epsilon_r = 1$
 $= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

III. Excitación de guías

ejemplo: guía rectangular TE₁₀



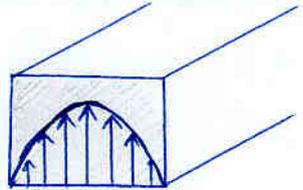
$$\begin{cases} H_z = \left(\frac{j}{f_c}\right) \frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{\pm j\beta z} \\ H_x = j \frac{E_0}{Z_{TE}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{\pm j\beta z} \\ H_y = 0 \\ E_z = 0 \\ E_y = -j E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{\pm j\beta z} \\ E_x = 0 \end{cases}$$

El primer modo que aparecerá a partir de $f > f_c$

$$\begin{cases} Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \\ k_c = \frac{\pi}{a} \end{cases}$$

Sabemos que TE₁₀ cumple la ecuación de onda y satisface las condiciones de contorno.

Ahora supongamos una lámina conductora imaginaria ¿qué corrientes generaría TE₁₀ sobre dicha lámina?

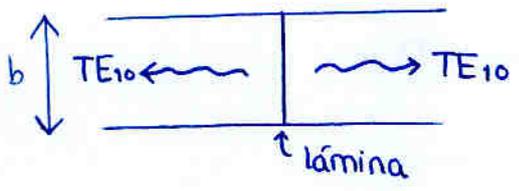


$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= \hat{z} \times \vec{H} \\ &= \hat{y} \cdot \frac{jE_0}{Z_{TE}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{aligned}$$

Corriente vertical con distribución senoidal

Si yo añado una lámina con esa distribución de corriente, estoy añadiendo una quinta condición de contorno.

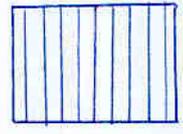
Sólo los modos que satisfagan esta nueva c.c. (que satisfagan todas las c.c.) podrán existir. En este caso sólo el TE₁₀



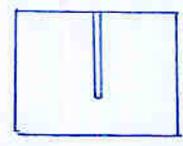
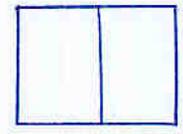
Así, en teoría, podemos propagar a cualquier frecuencia $f > f_{cTE10}$ sin que puedan propagarse otros modos.

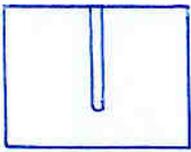
¿cómo hacemos esa lámina?

- Hilos verticales, cada uno con corriente ponderada → muy difícil
- En la práctica se coloca un único hilo en el centro



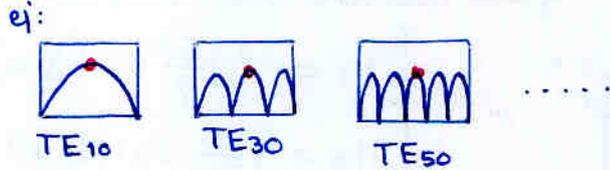
De hecho, en realidad se coloca un dipolo



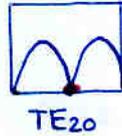


Esta vez la condición de contorno es más relajada y habrán muchos más modos que la cumplan.

Modos que la cumplen (corriente en $x = \frac{a}{2}$) :



Modos que no la cumplen



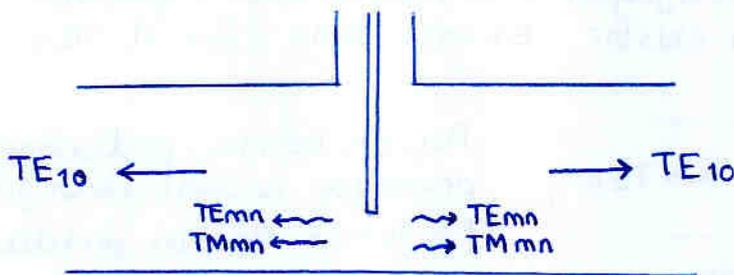
en la práctica el conductor en $x = \frac{a}{2}$ tendrá cierta anchura, y estará también corriente en x cercanas a $\frac{a}{2}$, pudiendo ya cumplirse el TE₂₀

Lo que resultará será un sumatorio ponderado de todos los modos :

$$\sum_{m,n} a_{mn} \cdot TE_{mn} + \sum_{m,n} b_{mn} \cdot TM_{mn}$$

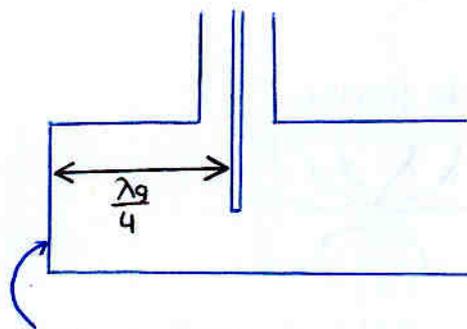
Habiendo puesto la corriente máxima allá donde el modo que yo quiero es máximo, estamos maximizando la ponderación del modo.

Recuerda: aunque estemos por debajo de la frec. de corte de muchos modos; SI QUE SE GENERARÁN. sin embargo su constante de propagación será real $e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z}$ y se atenuarán rápidamente.



↑
Éstos modos no deseados malgastarán un poco de energía e implicarán desadaptación (serán como condensadores y bobinas)

¿cómo propagamos en una sola dirección?



siendo: $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$

i.e.

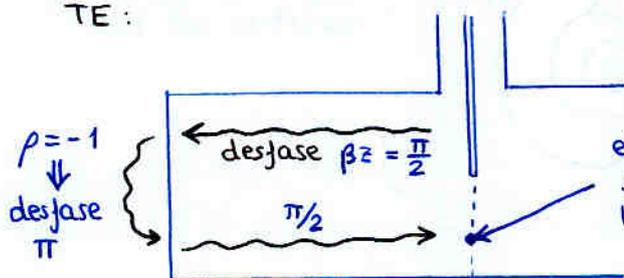
$$e^{-i\beta z} \Big|_{z=\lambda_g} = e^{-i2\pi}$$
 un periodo completo

Pared conductora

CUIDADO: Es típico decir que $\rho = -1$, pero sólo es cierto para modos TE y TEM
 Para modos TM, $\rho = +1$

¿Porqué se pone a $d = \lambda_g/4$?

TE:



el desfase total es 2π , por tanto se suma en fase y refuerza la onda en la dirección correcta

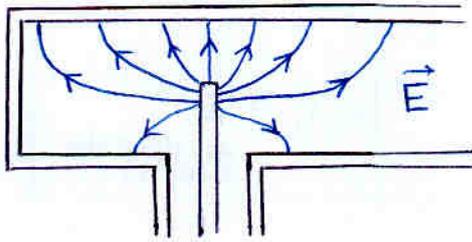
Ademas la distancia no será $\lambda_g/4$ para todos los modos

ya que $\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$ y $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$ y $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$
 ↑ depende del modo

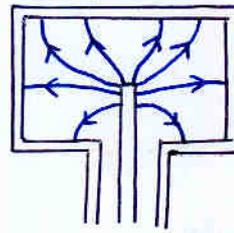
Puede darse la suerte de que otros modos tengan desfase π y se cancelen

Ejemplos de excitación

- Excitación eléctrica (con un dipolo)

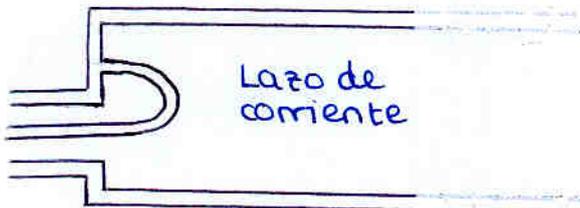


de frente:

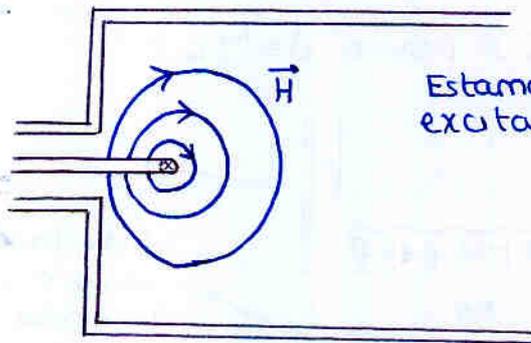


- Excitación magnética (con una espira)

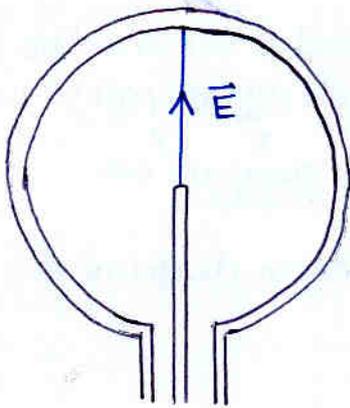
de lado



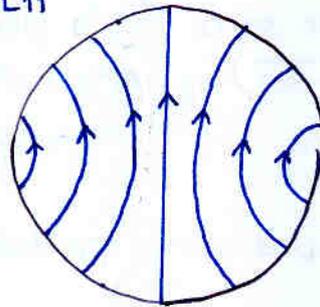
dende arriba:



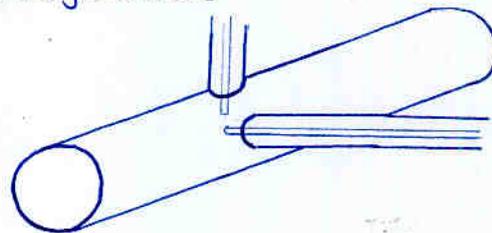
- Excitación eléctrica en guía circular



TE₁₁



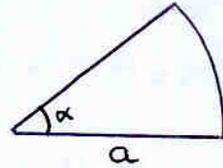
Nota: podemos excitar dos modos TE₁₁ ortogonales, sin interferencia



Problemas Tema 2

Septiembre 98

se trata de analizar una guía sectorial



Hay que resolver la ecuación de onda

$$\nabla_t^2 A_z + k^2 A_z = 0$$

La solución general es:

$$A_z = [A \cdot J_\mu(k_c \cdot r) + B N_\mu(k_c \cdot r)] \cdot [C \text{sen}(\mu\varphi) + D \text{cos}(\mu\varphi)]$$

con A, B, C, D y μ cualquier cosa: real o compleja. Ésta A_z es solución ya que sustituyendo A_z en la ec. de onda resulta = 0

Como sabemos que A_z es un campo, debe ser finito, pero $N_\mu(k_c r)$ tiene singularidad en $r=0$

Por tanto nos queda:

$$A_z = J_\mu(k_c \cdot r) [C \text{sen}(\mu\varphi) + D \cdot \text{cos}(\mu\varphi)]$$

Nota: no podemos decir que μ es entero ya que no hay periodicidad

Modos TM: $E_z = A_z = J_\mu(k_c r) [C \text{sen}(\mu\varphi) + D \cdot \text{cos}(\mu\varphi)]$

Ahora ya se que A_z es un campo eléctrico, por tanto podemos introducir nuevas condiciones de contorno

$$E_z|_{\varphi=0} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi=0 \rightarrow D=0 \rightarrow E_z = C \cdot J_\mu(k_c r) \cdot \text{sen}(\mu\varphi) \\ \varphi=\alpha \rightarrow \text{sen}(\mu\alpha)=0 \rightarrow \mu = \frac{p \cdot \pi}{\alpha} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} p=0, 1, 2, \dots \\ p=0 \rightarrow \text{solución trivial} \end{array}$$

$$E_z|_{r=a} = 0 \rightarrow J_\mu(k_c \cdot a) = 0 \rightarrow k_c \cdot a = P_{\mu l}$$

$k_c \cdot a$ deberá ser los ceros de la función de Bessel de primera especie de orden μ , llamados $P_{\mu l}$

Finalmente:

$$E_z = A \cdot J_\mu(k_c \cdot r) \text{sen}(\mu\varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{p \cdot \pi}{\alpha} \\ k_c = \frac{P_{\mu l}}{a} \end{array} \right.$$

de donde
(2) $\xrightarrow{H_z=0}$

$$E_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z$$

$$H_t = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_t}{Z_{TM}}$$

a los modos podré llamarlos como quiera

TM μl

TM $p l \rightarrow$ me gusta porque p y l son los enteros

La numeración mejor es en realidad

TM m ¿de donde sale la m ? $p l$

como $k_c = \frac{P_{\mu l}}{a} \rightarrow f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}}$

la m simplemente numera según las f_c

$$\begin{array}{l} p l = 1 2 \rightarrow 1^a \\ p l = 3 5 \rightarrow 2^a \\ \vdots \end{array}$$

este criterio sirve para CUALQUIER guía



Modos TE $E_z = 0$
 $H_z = A_z = J_\omega(k_c r) [C \cos(\omega \varphi) + D \sin(\omega \varphi)]$

c.c. $\begin{cases} E_r|_{\varphi=0} = 0 = E_r \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = 0 \\ E_r|_{\varphi=\alpha} = 0 = E_r \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}|_{\varphi=\alpha} = 0 \\ E_r|_{r=a} = 0 = E_\varphi \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial n} = \frac{\partial H_z}{\partial r}|_{r=a} = 0 \end{cases}$

cuidado, esto es $\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$ y no H_z (*)

$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = 0 = J_\omega(k_c r) \cdot \omega \cdot [C \cos(\omega \varphi) - D \sin(\omega \varphi)]|_{\varphi=0}$
 $\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}|_{\varphi=\alpha} = 0 = J_\omega(k_c r) \cdot \omega \cdot [-C \sin(\omega \varphi) + D \cos(\omega \varphi)]|_{\varphi=\alpha}$

$\begin{cases} \varphi=0 \rightarrow C=0 \\ \varphi=\alpha \rightarrow \sin(\omega \alpha) = 0 \rightarrow \omega \alpha = p \cdot \pi \rightarrow \omega = \frac{p \pi}{\alpha} \end{cases}$

$p=0, 1, 2, \dots$
 esta vez $p=0$ no es sol. trivial

por tanto tenemos: $H_z = A \cdot J_\omega(k_c r) \cos(\omega \varphi)$

$\frac{\partial H_z}{\partial r}|_{r=a} = A \cdot k_c \cdot J'_\omega(k_c r) \cos(\omega \varphi)|_{r=a} = 0 \rightarrow J'_\omega(k_c a) = 0$

$k_c a = P'_{\omega l}$ siendo $J'_\omega(P'_{\omega l}) = 0$

Por tanto:

$H_z = A \cdot J_\omega(k_c \cdot r) \cos(\omega \varphi)$ $k_c = \frac{P'_{\omega l}}{a}$

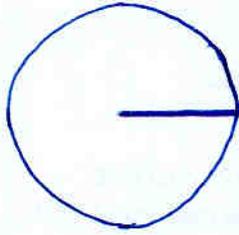
$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z$

$\vec{E}_t = Z_{TE} \cdot (\vec{H}_t \times \hat{z})$

$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$
 $k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu \epsilon} = k|_{f_c}$
 $f_c = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}}$

Para el caso $\alpha = 2\pi$

TM_{pl} $\begin{cases} \omega = \frac{p \pi}{\alpha} = \frac{p}{2} \\ k_c = \frac{P_{\omega l}}{a} \\ f_c = \frac{P_{\omega l}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}} \end{cases}$ TE $\begin{cases} \omega = \frac{p \pi}{\alpha} = \frac{p}{2} \\ k_c = \frac{P'_{\omega l}}{a} \\ f_c = \frac{P'_{\omega l}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}} \end{cases}$



$a = 7 \text{ cm}$
 $f = 3 \text{ GHz}$

ordenar los modos según frecuencia de corte
 Dada una tabla con $P_{\omega l}$ y $P'_{\omega l}$,

Hallar primer modo degenerado

Buscamos en $P_{\omega l}$ y $P'_{\omega l}$ el primer caso que tengan mismo valor

$$P_{11} = P'_{01} = 3'8317$$

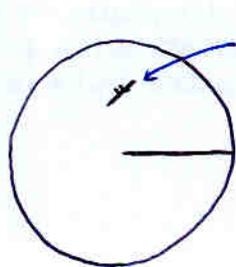
$$TM_{11} = TE_{01} \quad (\text{usando nomenclatura } TM_{\omega l})$$

$$TM_{21} = TE_{01} \quad (\text{usando nomenclatura } TM_{pl})$$

Por tanto:

$$f_c = \frac{3'8317}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}} = 2'614 \text{ GHz}$$

¿Cual de estos dos modos podremos excitar si colocamos un dipolo (no nos dicen en que dirección) en



$$\begin{cases} r = 3'3635 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

No existirá el modo que no tenga campo eléctrico en ese punto

Los campos eran:

$$\vec{E}_t|_{TM_{11}} = -\frac{\delta A}{k_c^2} \left[k_c J_1'(k_c r) \sin(\varphi) \hat{r} + \frac{1}{r} J_1(k_c r) \cos(\varphi) \hat{\varphi} \right]$$

$$\vec{E}_t|_{TE_{01}} = \frac{\delta A}{k_c} Z_{TE} J_0'(k_c r) \hat{\varphi}$$

este modo TE no tenía solución trivial en $p=0, \mu=0$
Al hacer $\mu=0$ eliminamos la dependencia con φ

Hay que particularizar para el punto dado:

$$\cos(\varphi)|_{\varphi=\pi/2} = 0$$

$$J_1'(k_c r)|_{r=3'3635} = J_1'(1'8411) = 0$$

$$P'_{11}$$

} no existe $\vec{E}_t|_{TM_{11}}$ en ese punto.

$$J_0'(k_c r)|_{r=3'3635} \neq 0$$

El modo TM_{11} no cumple la condición de contorno del dipolo. Por lo tanto si el dipolo es el único elemento que está excitando la guía, no se excitará el TM_{11}

Para excitar el TE_{01} , queremos que el campo que cree sea en la dirección $\hat{\varphi}$, por tanto hay que orientar el dipolo en $\hat{\varphi}$

Potencia transmitida y pérdidas en conductor α_c

$$P_T|_{TE_{01}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint_S \vec{E} \times \vec{H}^* ds \right]$$

$$\alpha_c = \frac{P_{LC}}{2 P_T} \quad \text{con} \quad P_{LC} = \frac{R_s}{2} \oint |\vec{J}_s|^2 dl \quad [W/m]$$

esto es como $\frac{I^2 \cdot R}{2}$
pero con la corriente distribuida

$$P_{LC} = \frac{1}{2} R_s \int_{r=0}^a |\vec{J}_s|^2 \Big|_{\varphi=0} dr$$

$$+ \frac{1}{2} R_s \int_{r=0}^a |\vec{J}_s|^2 \Big|_{\varphi=2\pi} dr$$

$$+ \frac{1}{2} R_s \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\vec{J}_s|^2 \Big|_{r=a} \cdot a d\varphi$$

en el enunciado nos dicen que no hay corriente en la pared circular exterior

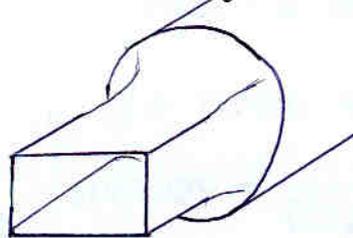
siendo $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$ $\vec{H} = H_r \hat{r} + H_\varphi \hat{\varphi} + H_z \hat{z}$

$\hat{\varphi}$ en el caso de las dos primeras integrales

Problema 15

Muy complejo de forma exacta. sencillo de forma aproximada

Transición de guía rectangular a circular



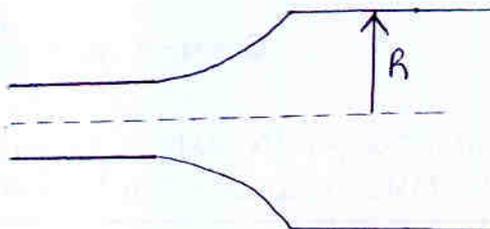
$$a = 2.3 \text{ cm}$$

$$b = 0.93 \text{ cm}$$

TE₁₀

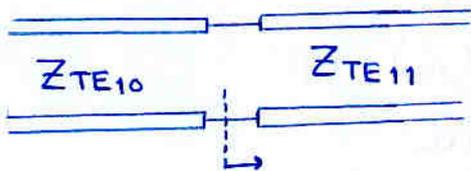
R?
TE₁₁

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\beta}$$



Vamos a suponer transmisión monomodo (en realidad se generan otros modos y habría que hacer análisis de c.c., análisis modal, ...)

En monomodo podemos modelar la guía como línea de tx



La gran sencillez de la teoría monomodo

$$\rho = \frac{Z_{TE11} - Z_{TE10}}{Z_{TE11} + Z_{TE10}}$$

se pide $\rho = 0 \rightarrow Z_{TE11} = Z_{TE10} \rightarrow \frac{\omega\mu}{\beta|_{TE11}} = \frac{\omega\mu}{\beta|_{TE10}}$

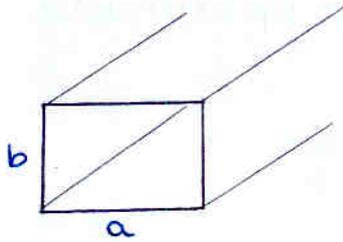
$$\beta|_{TE11} = \beta|_{TE10}$$

$$\sqrt{k^2 - k_c^2|_{TE11}} = \sqrt{k^2 - k_c^2|_{TE10}}$$

$$k_c|_{TE11} = k_c|_{TE10}$$

$$\frac{P_{01}}{R} = \frac{\pi}{a} \Rightarrow R = \frac{P_{01} a}{\pi} = 1.347 \text{ cm}$$

Problema



$$f_c|_{\epsilon_r=1} = 1500 \text{ MHz} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

se obtiene $a = 10 \text{ cm}$

a) Si metemos un dieléctrico, obtener $f_c|_{\epsilon_r=4}$

$$\epsilon_r = 4 \rightarrow f_c = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = 750 \text{ MHz}$$

b) Si transmitimos por la guía ($\epsilon_r = 4$) una señal de banda estrecha a $f_0 = 760 \text{ MHz}$. ¿Cuanto tardará en recorrer 200 m?

Velocidad de grupo: $v_g = \frac{1}{\partial\beta/\partial\omega} \Big|_{f=f_0} = \frac{d}{t}$

como:

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \omega^2\mu\epsilon + \gamma^2$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon = -\beta^2$$

$$\beta^2 = \omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$v_g = \frac{1}{\partial\beta/\partial\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - (\pi/a)^2}}{\omega\mu\epsilon} \Big|_{f_0=760 \text{ MHz}} = 2.42 \cdot 10^7 \text{ m/s} \rightarrow t = d/v_g$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - (\pi/a)^2} \quad \frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{1}{2} \cdot 2\omega\mu\epsilon \cdot (\omega^2\mu\epsilon - (\pi/a)^2)^{-1/2}$$

$$t = \frac{d}{v_g} = \frac{200 \text{ m}}{2.42 \cdot 10^7 \text{ m/s}} = 8.26 \mu\text{s}$$

nota: $\beta^2 = k^2 - k_c^2$
 $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$
 $k_c^2 = (\pi/a)^2$ pero además $k_c^2 = \omega_c^2\mu\epsilon$
 por tanto

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \rightarrow$$

es más difícil de derivar pero:

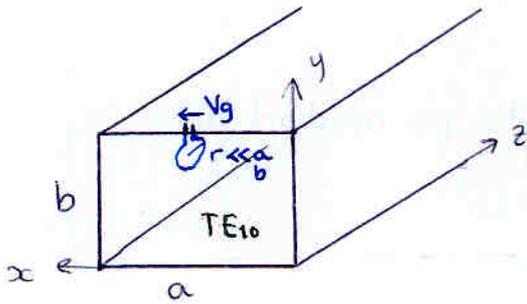
$$k^2 - k_c^2 = k^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)$$

i.e. $\beta^2 = \omega^2\mu\epsilon - (\pi/a)^2 = \omega^2\mu\epsilon \left(1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)$
 $k^2 - k_c^2 = k^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)$

$$v_g = \frac{1}{\partial\beta/\partial\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - (\pi/a)^2}}{\omega\mu\epsilon} = \frac{k \sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}}{\omega\mu\epsilon} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

Problema

Espira circular contenida en el plano YZ en $x = \frac{a}{2}$ y $y = b$



medimos tensión en la espira V_g

Calcular la amplitud de \bar{E} en función de V_g , y hallar la potencia transmitida

$$TE_{10} \begin{cases} H_z = A \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\ H_x = \frac{\gamma A}{k_c} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\ E_y = \left[-j \frac{\omega\mu}{k_c} A\right] \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{cases}$$

Flujo del vector de Poynting $\hat{z} dz dy$

$$P_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint (\bar{E} \times \bar{H}^*) \cdot d\bar{S} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\omega\mu}{k_c^2} \beta \cdot a \cdot b \cdot |A|^2$$

Sabemos que la espira se excita con flujo de campo magnético

Ley de Faraday: $V = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

$$V_0 = -j\omega \cdot \Phi$$

Necesitamos el flujo de campo magnético que atraviesa la espira

$$\Phi = \iint_{S_e} \bar{B} \cdot d\bar{S} = \mu \iint_{S_e} \bar{H} \cdot d\bar{S} = \mu \iint_{S_e} (H_x \hat{x} + H_z \hat{z}) \cdot \hat{x} ds$$

se va

$$= \mu \iint_{S_e} H_x ds = \mu \cdot \frac{\gamma A}{k_c} \cdot S_e = \frac{\mu \gamma A}{k_c} \pi r^2$$

suponemos $r \ll a$
en la posición $x = a/2$ suponemos H_x que es constante

$$V_0 = -j\omega \frac{\mu \gamma A}{k_c} \pi r^2$$

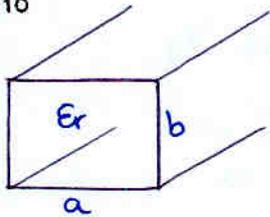
No hay más que despejar A y sustituir

Recuerda:

- Con el dipolo interesa el campo eléctrico paralelo al dipolo
- Con la espira interesa el campo magnético que atraviesa la espira

Problema

TE₁₀



Supongamos que el dieléctrico (con pérdidas) tiene una conductividad equivalente σ_e

a) Hallar pot. disipada por unidad de longitud (P_{ld})

Recordatorio: σ_e

$$\begin{aligned} \text{si tenemos } \epsilon_r &= \epsilon' - j\epsilon'' \\ &= \epsilon' (1 - j \tan \delta) \\ \tan \delta &= \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j\omega \vec{D} = j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E} = j\omega \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon'') \cdot \vec{E} \\ &= \underbrace{\omega \epsilon_0 \epsilon'' \vec{E}}_{\vec{J}_c} + \underbrace{j\omega \epsilon_0 \epsilon' \vec{E}}_{\vec{J}_D \text{ corriente de desplazamiento debida a } \vec{D}} \end{aligned}$$

\vec{J}_c corriente de conducción debida a la conductividad del dieléctrico
 $\vec{J}_D = \sigma_e \vec{E}$ siendo $\sigma_e = \omega \epsilon_0 \epsilon''$

$$P_d = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}^* dV = \frac{1}{2} \sigma_e \iiint_V |\vec{E}|^2 dV$$

misma expresión que un conductor pero con σ_e

Si tomamos una unidad de longitud $\int_0^1 dz$ nos queda

$$P_{ld} = \frac{1}{2} \sigma_e \iint_S |\vec{E}|^2 dS \quad [W/m]$$

siendo: TE₁₀
 $\vec{E} = E_y \hat{y}$

$$\text{siendo } \begin{cases} E_y = -\frac{j\omega\mu}{kc} A \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\ H_x = \frac{YA}{kc} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{cases}$$

Elevando al cuadrado e integrando

$$P_{ld} = \frac{1}{2} \sigma_e \frac{\omega^2 \mu^2 a^2}{\pi^2} |A|^2 \cdot \frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \sigma_e \frac{ab}{2} |E_0|^2$$

b) Hallar α_d

- método 1: α_d a partir de P_{LD} suponiendo de equivalente

$$\alpha_d = \frac{P_{LD}}{2P_T} = \frac{1}{2} \sigma_e \frac{\omega \mu}{\beta}$$

necesitamos

$$P_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \right] = \frac{1}{2} \omega \mu \frac{a^2}{\pi^2} \beta \frac{ab}{2} |A|^2$$

$\hat{z} \, dx \, dy$

- método 2: α_d a partir de sustituir ϵ complejo en el exponente γ
i.e. α_d obtenida en γ sabiendo $\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$

$$k_c^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon + (\alpha + j\beta)^2$$

$$\alpha + j\beta = \gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon'')}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon' + j \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon' \operatorname{tg} \delta}$$

Hallamos la parte real e imaginaria

Suponiendo bajas pérdidas podemos hacer el desarrollo en serie de Taylor

$$y = \sqrt{a + bx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{para } x \downarrow}}{\approx} \underbrace{y(0)}_{\sqrt{a}} + \frac{\underbrace{y'(0)}_b}{2\sqrt{a}} x$$

con $x = \operatorname{tg} \delta \downarrow$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon'} + \frac{j \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon' \operatorname{tg} \delta}{2 \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon'}} \cdot \operatorname{tg} \delta$$

$$\beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon' - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$\gamma = j\beta + \frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon' \operatorname{tg} \delta}{2\beta}$$

↑
Vemos que la β no se ve influida cuando hay pérdidas

$$\text{y como } \sigma_e = \omega \epsilon_0 \epsilon'' = \omega \epsilon_0 \epsilon' \operatorname{tg} \delta$$

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \sigma_e \frac{\omega \mu}{\beta}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Answer

$$f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Compare the value of the function f(x) with the value of the function g(x) at x = 1/2.

$$f(1/2) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$g(1/2) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f(1/2) = g(1/2) = 0.5$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Therefore, the value of the function f(x) is equal to the value of the function g(x) at x = 1/2.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Answer

100 (6)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

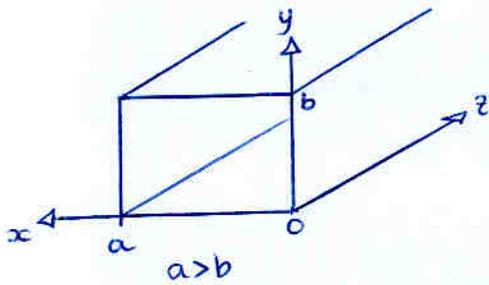
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Therefore, the value of the function f(x) is equal to the value of the function g(x) at x = 1/2.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Problema. Modo fundamental TE₁₀ guía rectangular



$$TE \begin{cases} E_z = 0 \\ H_z \neq 0 \end{cases}$$

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0$$

↓ separación de variables (...)

$$H_z = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y)$$

Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array} \right\} \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 & \begin{cases} B=0 \\ k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m=0,1,2,\dots \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=b \end{array} \right\} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 & \begin{cases} D=0 \\ k_y b = n\pi \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n=0,1,2,\dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$$

la condición de contorno REAL es ésta, la otra se deduce a partir de ésta en éste caso particular (onda progresiva modo TE). no es válida siempre

$$H_z = A \cos k_x x \cdot \cos k_y y$$

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z = -\frac{\gamma}{k_c^2} \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \hat{y} \right]$$

$$\begin{cases} H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\gamma}{k_c^2} A \cdot \cos k_y y \cdot (-k_x \sin k_x x) \\ H_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{\gamma}{k_c^2} A \cos k_x x \cdot (-k_y \sin k_y y) \end{cases}$$

$$H_x = \frac{\gamma k_x}{k_c^2} A \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y$$

$$H_y = \frac{\gamma k_y}{k_c^2} A \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ E_x &= Z_{TE} \cdot H_y \\ E_y &= -Z_{TE} \cdot H_x \end{aligned}$$

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(\beta/c)^2}}$$

Por tanto: TE_{mn}

$$\begin{cases} H_z = A \cdot \cos k_x x \cdot \cos k_y y \\ H_x = \frac{\gamma k_x}{k_c^2} A \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y \\ H_y = \frac{\gamma k_y}{k_c^2} A \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \\ E_x = \frac{j\omega\mu k_y}{k_c^2} A \cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \\ E_y = -\frac{j\omega\mu k_x}{k_c^2} A \cdot \sin k_x x \cdot \cos k_y y \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = 2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$f_c = \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{2\pi \sqrt{\mu\epsilon}} \quad \begin{array}{l} \text{la menor} \\ \text{fc se obtiene} \\ \text{para } m=1 \\ n=0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{k_c^2 - k^2} = j\sqrt{k^2 - k_c^2} \\ &= j\sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \\ &= j\beta = jk \sqrt{1 - (\beta/c)^2} \end{aligned}$$

Partícula rizando

TE₁₀ $m=1 \rightarrow k_x = \frac{\pi}{a}$ $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = (\frac{\pi}{a})^2$
 $n=0 \rightarrow k_y = 0$

$$\begin{cases} H_z = A \cdot \cos(\frac{\pi}{a}x) \\ H_x = \frac{j\beta}{\pi/a} \cdot A \cdot \sin(\frac{\pi}{a}x) \\ H_y = 0 \\ E_x = 0 \\ E_y = -\frac{j\omega\mu}{\pi/a} \cdot A \cdot \sin(\frac{\pi}{a}x) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

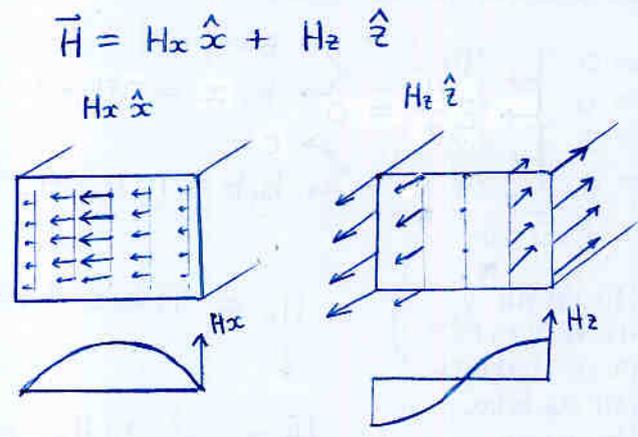
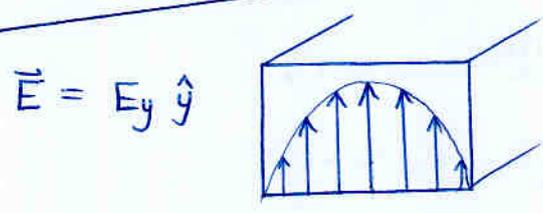
$$k_c^2 = (\frac{\pi}{a})^2 = 2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon} \Rightarrow f_{cTE_{10}} = \frac{(\frac{\pi}{a})^2}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = j\sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$= j\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - (\frac{\pi}{a})^2}$$

$$= j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}$$

¿qué pinta tienen los campos y corrientes?



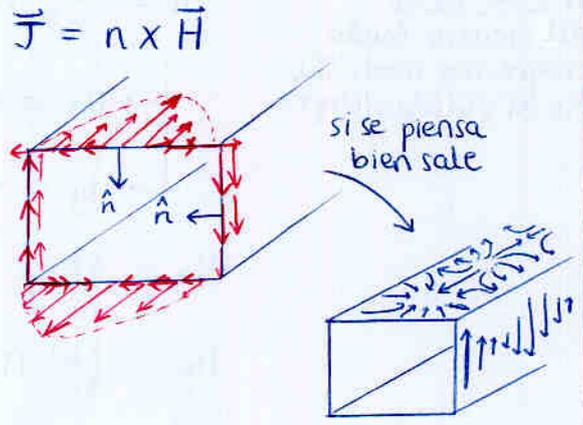
Además no olvidar que lo que hemos calculado son los fasores; para obtener los campos reales hacemos:

$\vec{E} = \text{Re}[\vec{E} \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t}]$ *viene de la j*

$= -\frac{j\omega\mu}{\pi/a} A \sin(\frac{\pi}{a}x) \cdot \cos(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}) \hat{y}$

$\vec{H} = \text{Re}[\vec{H} \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t}]$ *viene de la j*

$= A \frac{\beta}{\pi/a} \sin(\frac{\pi}{a}x) \cos(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}) \hat{x}$
 $+ A \cos(\frac{\pi}{a}x) \cos(\omega t - \beta z) \hat{z}$ *es decir, hemos añadido variación armónica en tiempo y en z*



una forma más común de expresar los fasores es dejarlos en función de k_c y $\frac{1}{f_c}$ y E_0

$H_z = A \cos(\frac{\pi}{a}x)$

$H_x = \frac{j\beta}{k_c} \cdot A \cdot \sin(\frac{\pi}{a}x)$

$E_y = -Z_{TE} H_x$

$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}}$

$j\beta = jk\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}$

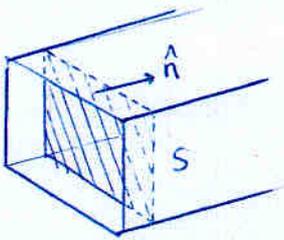
$E_y = -\frac{\eta}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} \frac{j k \sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}}{k_c} \cdot A \cdot \sin(\frac{\pi}{a}x) = -j\eta (\frac{1}{f_c}) A \sin(\frac{\pi}{a}x)$

$(\frac{k}{k_c}) = (\frac{1}{f_c})$

TE₁₀

$$\begin{cases} E_y = E_0 \cdot \sin(\frac{\pi}{a}x) \\ H_x = -\frac{E_0}{Z_{TE}} \sin(\frac{\pi}{a}x) \\ H_z = \frac{jE_0 (\frac{1}{f_c})}{\eta} \cos(\frac{\pi}{a}x) \end{cases}$$

Potencia transmitida



$$P_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

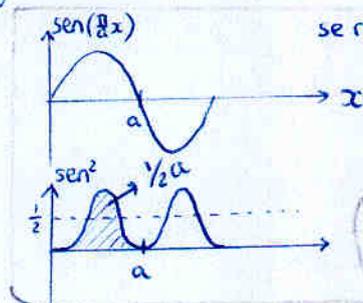
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(\bar{\mathbf{E}}_t \times \bar{\mathbf{H}}_t^*) \cdot \hat{\mathbf{n}}}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\bar{\mathbf{E}}_y \times \bar{\mathbf{H}}_x^*) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_y \times \bar{\mathbf{H}}_x^* &= E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{\mathbf{y}} \times \left(-\frac{E_0}{Z_{TE}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{\mathbf{x}}^* \\ &\quad \downarrow \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{n}} \\ &= -E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) E_0 \left(\frac{1}{Z_{TE}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) (-\hat{\mathbf{n}}) \\ &= +E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \left(\frac{1}{Z_{TE}}\right) \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

$$P_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^b \int_0^a \frac{E_0^2}{Z_{TE}} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{E_0^2}{Z_{TE}} \cdot b \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \, dx$$



se resuelve o bien gráficamente o con fórmulas

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \, dx &= \int_0^a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right] \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{a}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]_0^a \\ &= \frac{1}{2}a \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ab \frac{E_0^2}{Z_{TE}} = \frac{1}{4} ab \frac{E_0^2}{Z_{TE}}$$

Otras fórmulas para la potencia

$$\text{TE: } P_T = \frac{1}{2Z_{TE}} \iint_S |\mathbf{E}_t|^2 \, dS = \frac{Z_{TE}}{2} \iint_S |\mathbf{H}_t|^2 \, dS$$

$$P_T = \frac{1}{2Z_{TE}} \int_0^b \int_0^a E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \, dx \, dy = \frac{1}{2Z_{TE}} \cdot \frac{1}{2} ab E_0^2 = \frac{1}{4} ab \frac{E_0^2}{Z_{TE}}$$

$$P_T = \frac{Z_{TE}}{2} \int_0^b \int_0^a \frac{E_0^2}{Z_{TE}^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \, dx \, dy = \frac{1}{4} ab \frac{E_0^2}{Z_{TE}}$$

$$\text{TE: } P_T = \frac{\eta^2}{2Z_{TE}} \left(\frac{1}{j\epsilon}\right) \iint_S |\mathbf{H}_z|^2 \, dS$$

↑
 $\mathbf{H}_z = \frac{jE_0}{\eta} \left(\frac{1}{j}\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$

(ésta no hay que sabérsela, la dan en el examen)

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{\eta^2}{2Z_{TE}} \left(\frac{1}{j\epsilon}\right) \frac{E_0^2}{\eta^2} \left(\frac{1}{j}\right)^2 \frac{1}{2} ab \\ &= \frac{1}{4} ab \frac{E_0^2}{Z_{TE}} \end{aligned}$$

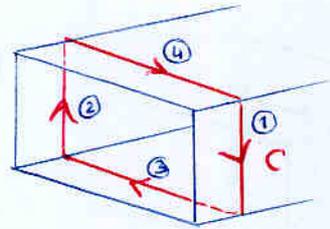
Como podemos comprobar, todas las fórmulas que tenemos dan el mismo resultado

Pérdidas en el conductor

$$P_{Lc} = \frac{R_s}{2} \oint |\vec{J}_s|^2 dl \quad R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}}$$

lee bien
1 → \vec{J}_s
2 → módulo!!
3 → al cuadrado

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$



Son 4 integrales que hacemos a continuación:

Lados cortos: ①

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \vec{J}_s &= \hat{n} \times \vec{H} \\ &= (\hat{x}) \times (H_z|_{x=0} \hat{z} + H_x|_{x=0} \hat{x}) \\ &= (\hat{x}) \times (H_z|_{x=0} \hat{z}) = (-\hat{y}) \cdot H_z|_{x=0} \\ &= (-\hat{y}) \cdot j \frac{E_0}{\eta} \left(\frac{1}{j}\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \Big|_{x=0} \\ &= (-\hat{y}) \cdot j \frac{E_0}{\eta} \left(\frac{1}{j}\right) \end{aligned}$$

$$2 \rightarrow |\vec{J}_s| = \frac{E_0}{\eta} \left(\frac{1}{j}\right)$$

$$3 \rightarrow |\vec{J}_s|^2 = \frac{E_0^2}{\eta^2} \left(\frac{1}{j}\right)^2$$

$$\begin{aligned} P_{Lc1} &= \frac{R_s}{2} \oint |\vec{J}_s|^2 dl = \frac{R_s}{2} \int_0^b |\vec{J}_s|^2 (-dy) = \frac{R_s}{2} \int_0^b |\vec{J}_s|^2 dy \\ &= \frac{R_s}{2} \frac{E_0^2}{\eta^2} \left(\frac{1}{j}\right)^2 \int_0^b dy = \frac{R_s E_0^2 b}{2 \eta^2} \left(\frac{1}{j}\right)^2 \end{aligned}$$

② será el mismo resultado $P_{Lc2} = P_{Lc1}$

Lados largos ③

$$\begin{aligned} \vec{J}_s &= \hat{n} \times \vec{H} = (\hat{y}) \times (H_z|_{y=0} \hat{z} + H_x|_{y=0} \hat{x}) \\ &= H_z|_{y=0} \hat{x} + H_x|_{y=0} (-\hat{z}) \\ &= j \frac{E_0}{\eta} \left(\frac{1}{j}\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \Big|_{y=0} \hat{x} + \frac{E_0}{2\eta \epsilon} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \Big|_{y=0} \hat{z} \\ &= j \frac{E_0}{\eta} \left(\frac{1}{j}\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \hat{x} + \frac{E_0}{2\eta \epsilon} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{J}_s|^2 &= \left[\frac{E_0}{\eta} \left(\frac{1}{j}\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \right]^2 + \left[\frac{E_0}{2\eta \epsilon} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \right]^2 \\ &= \frac{E_0^2}{\eta^2} \left(\frac{1}{j}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) + \frac{E_0^2}{2\eta \epsilon^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \end{aligned}$$

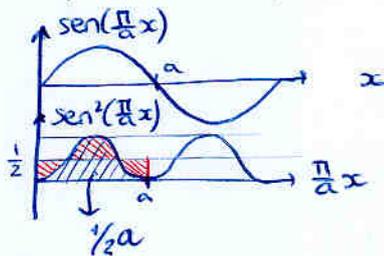
$$P_{lc3} = \frac{R_s}{2} \oint |J|^2 dl$$

$$= \frac{R_s}{2} \int_0^a \left[\frac{E_0^2}{\eta^2} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{E_0^2}{Z_{TE}^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] dx$$

$$\int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = \int_0^a \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \right] dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \right]_0^a = \frac{1}{2}a$$

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = \int_0^a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \right] dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \right]_0^a = \frac{1}{2}a$$

Yo prefiero verlo gráficamente:



$$= \frac{R_s}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}a \frac{E_0^2}{\eta^2} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 + \frac{1}{2}a \frac{E_0^2}{Z_{TE}^2} \right]$$

$$P_{lc3} = \frac{1}{4} a R_s E_0^2 \left[\frac{1}{\eta^2} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 + \frac{1}{Z_{TE}^2} \right]$$

(4)

$P_{lc1} = P_{lc3}$ será igual

Finalmente se obtiene:

$$P_{lc} = 2P_{lc1} + 2P_{lc3}$$

$$= \frac{R_s E_0^2 b}{\eta^2} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 + \frac{1}{2} a R_s E_0^2 \left[\frac{1}{\eta^2} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 + \frac{1}{Z_{TE}^2} \right]$$

$$P_{lc} = \frac{1}{2} R_s E_0^2 \left[\frac{2b}{\eta^2} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 + \frac{a}{\eta^2} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 + \frac{a}{Z_{TE}^2} \right]$$

$$\text{y como } Z_{TE}^2 = \left(\frac{\eta}{\sqrt{1 - (jc/j)^2}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R_s}{\eta^2} E_0^2 \left[2b \left(\frac{jc}{j} \right)^2 + a \left(\frac{jc}{j} \right)^2 + a \left(1 - \left(\frac{jc}{j} \right)^2 \right) \right]$$

$$P_{lc} = \frac{1}{2} \frac{R_s}{\eta^2} E_0^2 \left[a + 2b \left(\frac{jc}{j} \right)^2 \right]$$

Para modelar las pérdidas en los conductores:

$$\gamma = j\beta + \alpha_c$$

$$\alpha_c = \frac{P_{lc}}{2P_T}$$

$$\alpha_c = \frac{\frac{1}{2} \frac{R_s}{\eta^2} E_0^2 \left[\alpha + \frac{2b}{a} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 \right]}{\frac{1}{2} ab \frac{E_0^2}{Z_{TE}}}$$

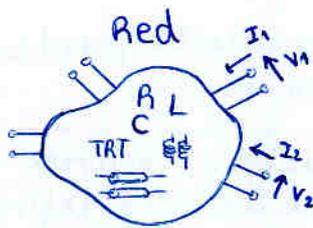
$$= \frac{\frac{R_s}{\eta^2} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 \right]}{\frac{b}{\eta \sqrt{1 - (jc/j)^2}}}$$

$$\alpha_c = \frac{R_s}{b\eta} \sqrt{1 - (jc/j)^2} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{jc}{j} \right)^2 \right]$$

Tema 3. Análisis de Redes de Microondas

1. Introducción

Matriz de impedancia:



Hasta ahora utilizamos la relación entre tensiones y corrientes en cada acceso:

$$\vec{V} = \vec{Z} \vec{I}$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

Son vectores de escalares

\vec{Z} : matriz de impedancia

\vec{Y} : matriz de admitancia

$$\vec{I} = \vec{Y} \cdot \vec{V}$$

nota: todo lo que se diga para tensión y corriente: V, I es exactamente lo mismo para los campos E, H (considerando V, I, E, H para un único modo)

$$\vec{E} = \vec{Z} \cdot \vec{H}$$

nota: si fuera multimodo, cada V_i es un vector i.e. \vec{V} es vector de vectores

En altas frecuencias:

No es útil utilizar \vec{Z} e \vec{Y} .
¿Por qué? Por la forma de medir...

$$Z_{ij} = \frac{V_i}{I_j} \Big|_{I_k=0}$$

↑ todos los puertos en abierto (menos el nuestro)

$$Y_{ij} = \frac{I_i}{V_j} \Big|_{V_k=0}$$

↑ todos los puertos cortocircuitados (menos el nuestro)

- En alta frecuencia no es obvio hacer circuitos abiertos si dejamos una guía o un coaxial al aire será una antena!
- Hacer cortocircuito es más sencillo, pero se puede dañar el circuito

⇒ Es problemático medir Z_{ij} y Y_{ij}

Otro problema es que los puertos de acceso deben estar muy bien definidos, ya que las líneas de tx tienen desfases. Cambiar de plano en Z e Y es incómodo numéricamente

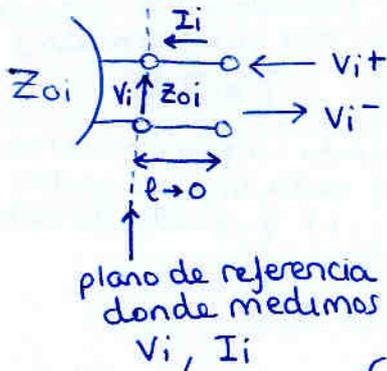
Solución: parámetros de dispersión / scattering / S



En cada puerto definimos una impedancia característica del puerto.

La impedancia de cada puerto puede ser la que nos de la gana; por tanto

Si nos dan una matriz S, deben decirnos como dato la impedancia que se decidió definir en cada puerto.
Sin esa información la matriz S no sirve para nada



recuerda:
En una línea de tx:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}}{Z_0}$$

La impedancia que se elija en cada puerto no tiene nada que ver con lo que haya dentro

En el plano de referencia, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} V_i &= V_i^+ + V_i^- \\ I_i &= \frac{V_i^+ - V_i^-}{Z_{oi}} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{z=0} I_i = I_i^+ + I_i^- = \frac{V_i^+}{Z_0} + \frac{-V_i^-}{Z_0}$$



- V_i^+ e I_i^+ no tienen porque existir físicamente.
- No son las ondas de tensión y corriente que haya DENTRO de la red, ni las que hay en la l. de tx que conecta a la red.
- Son las que HABRÍA/hay en una l. de tx (con $z = Z_{oi}$ y $l \rightarrow 0$) en el plano de ref

$$\begin{aligned} V_i^+ &= \frac{V_i + Z_{oi} I_i}{2} \\ I_i^+ &= \frac{V_i - Z_{oi} I_i}{2} \end{aligned}$$

Vemos que la tensión y corriente no cambian con Z_{oi} .
Lo que si que cambia es la función del usuario en las ondas de tensión y corriente progresivas y regresivas, según la Z_{oi} que haya elegido.

Ahora nos definimos las ondas de tensión progresiva y regresiva normalizadas:

$$a_i = \bar{V}_i^+ = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{oi}}} = \frac{V_i + Z_{oi} I_i}{2\sqrt{Z_{oi}}}$$

onda de potencia incidente

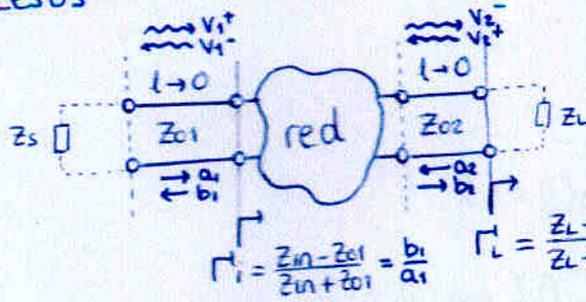
$$b_i = \bar{V}_i^- = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{oi}}} = \frac{V_i - Z_{oi} I_i}{2\sqrt{Z_{oi}}}$$

onda de potencia reflejada

Cuidado: no son unidades de potencia (i.e. se hace $20 \log(\cdot)$)



Nota: Cuidado con las impedancias de referencia de los accesos



$$a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_{01}}}$$

$$b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_{01}}}$$

$$a_2 = \frac{V_2^+}{\sqrt{Z_{02}}}$$

$$b_2 = \frac{V_2^-}{\sqrt{Z_{02}}}$$

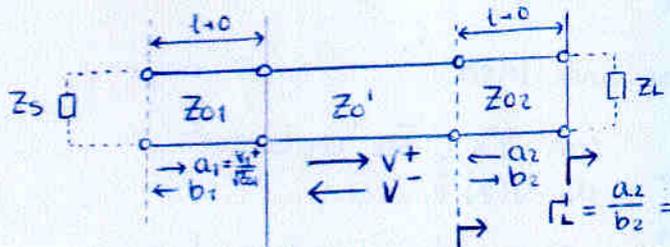
$$\Gamma_i = \frac{Z_{in} - Z_{01}}{Z_{in} + Z_{01}} = \frac{b_1}{a_1}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}} = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\Gamma_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

Cuidado si la red tiene líneas de tx con imp. caracter. Z_0'

En este ejemplo la red es una l. de tx con Z_0'



$V_1^+ = a_1 \sqrt{Z_{01}} \neq V^+$
 onda progresiva en el puerto Z_{01}
 onda progresiva en la red

$$\Gamma_L = \frac{a_2}{b_2} = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}}$$

$$\rho = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_{vista} - Z_0'}{Z_{vista} + Z_0'}$$

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$$

$\Gamma_{in} = S_{11}$ si $a_2 = 0$
 i.e. $\Gamma_L = 0$
 i.e. $Z_L = Z_{02}$

Nota: truco para recordar relaciones entre ρ , Z e Y

Sabemos de sobra que en una línea de transmisión:

$$\begin{cases} V(z) = V^+(e^{-j\beta z} + \rho e^{+j\beta z}) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \rho e^{+j\beta z}) \end{cases}$$

en $z=0$:

$$V = V^+(1 + \rho)$$

$$I = \frac{V^+}{Z_0}(1 - \rho)$$

$$Z_L = \frac{V}{I} = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

$$Y_L = \frac{I}{V} = Y_0 \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

despejando ρ :

$$Z_L(1 - \rho) = Z_0(1 + \rho) \rightarrow \rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$Y_L(1 + \rho) = Y_0(1 - \rho) \rightarrow \rho = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L}$$

mnemotécnicamente lo usamos para conocer la relación entre las matrices Z y S

$$S = (\bar{Z} - I) \cdot (\bar{Z} + I)^{-1}$$

$$\bar{Z} = (I + S) \cdot (I - S)^{-1}$$

siendo $\bar{Z} = Z$ normalizada

$$\bar{Z}_{ij} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{Z_{0i} Z_{0j}}}$$

Trabajar con modelo circuital en modos TE o TM

$$TE_{10} \rightarrow E_z = 0$$

$$H_z = A \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad k_c = \frac{\pi}{a}$$

$$\vec{H}_t = \frac{-\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z = \frac{A\gamma}{k_c} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{x}$$

$$\vec{E}_t = Z_{TE} (\vec{H}_t \times \hat{z}) = -Z_{TE} \frac{A\gamma}{k_c} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{y}$$

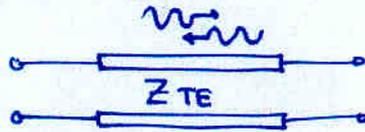
Finalmente:

$$\vec{H}_t = \frac{\gamma}{k_c} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \hat{x} \cdot [H^+ e^{-\gamma z} - H^- e^{+\gamma z}]$$

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma Z_{TE}}{k_c} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \hat{y} \cdot [H^+ e^{-\gamma z} + H^- e^{+\gamma z}]$$

este signo solo para los modos TE

Ahora podemos trabajar con una línea:



con \vec{E}_t y \vec{H}_t en lugar de $V(z)$ e $I(z)$

Al ser modo TE los signos han quedado igual que en TEM

$$V = V^+ + V^-$$

$$I = \frac{V^+ - V^-}{Z_0}$$

Si hubiera sido TM habría salido distinto (lo que daría lugar a cosas raras como $\rho = 1$ en un c.c.)

A la relación entre ondas de potencia incidentes y reflejadas se llama matriz de dispersión:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & \dots & \\ S_{31} & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \bar{S} \cdot \bar{a}$$

$$S_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_j} \right|_{\substack{a_k=0 \\ k \neq j}}$$

¿Cómo anulo a_k ?

En la definición:

$$a_k = \frac{V_k + Z_{0k} I_k}{2\sqrt{Z_{0k}}} = 0 \Rightarrow \frac{V_k}{-I_k} = Z_{0k}$$

Esto se consigue fácilmente terminando el puerto k con su impedancia de referencia

No sólo no tenemos que poner un cortocircuito o un circuito abierto, sino que basta con poner la impedancia que yo quiera (por ejemplo, con Z_{in} de lo que vayamos a conectar en circunstancias de trabajo)

Interpretación de los parámetros S

Los de la diagonal:

$$S_{ii} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{a_k=0} = \rho_i$$

coeficiente de reflexión

El resto

$$S_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{a_k=0} = \tau_{ij}$$

coeficiente de transmisión

sólo cuando el resto de accesos están terminados con Z_{0i}

Potencias:

Potencia que transporta la onda progresiva:

$$P_i^+ = \frac{1}{2} \frac{|V_i^+|^2}{Z_{0i}} = \frac{1}{2} |a_i|^2$$

Potencia que transporta la onda reflejada:

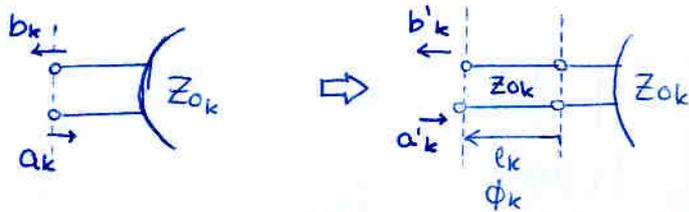
$$P_i^- = \frac{1}{2} \frac{|V_i^-|^2}{Z_{0i}} = \frac{1}{2} |b_i|^2$$

Intuitivamente:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & \dots & \\ S_{31} & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

La columna i -ésima de la matriz S nos indica cómo se reparte la onda de tensión que entra por i (a_i) entre cada puerto de salida (para ver cómo se reparte la potencia hay que mirar el módulo al cuadrado)

cambio en el plano de referencia



$$\begin{cases} a_k = a'_k \cdot e^{-j\phi_k} \\ b'_k = b_k \cdot e^{-j\phi_k} \end{cases}$$

la onda viaja un poco mas

Por tanto el nuevo parámetro S' :

$$S'_{kk} = \frac{b'_k}{a'_k} = \frac{b_k e^{-j\phi_k}}{a_k e^{+j\phi_k}} = S_{kk} e^{-2j\phi_k}$$

$$S'_{ij} = \frac{b'_i}{a'_j} = \frac{b_i e^{-j\phi_i}}{a_j e^{+j\phi_j}} = S_{ij} e^{-j(\phi_i + \phi_j)}$$

en general:

$$S'_{ij} = S_{ij} e^{-j(\phi_i + \phi_j)}$$

sólo cambian en fase,
no en módulo

Expresándolo en notación matricial

$$S' = S_\phi \cdot S \cdot S_\phi$$

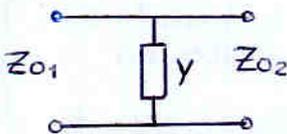
siendo $S_\phi = \begin{pmatrix} e^{-j\phi_1} & 0 & \dots \\ 0 & e^{-j\phi_2} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

i.e.

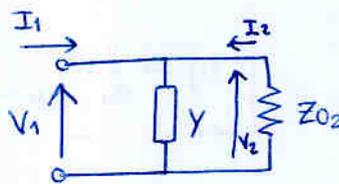
→ Los elementos de la fila i -ésima $\times e^{-j\phi_i}$
→ Los elementos de la columna i -ésima $\times e^{-j\phi_i}$

i.e. cada elemento multiplicado por $e^{-j\phi_m}$ de su fila y por $e^{-j\phi_n}$ de su columna

ejemplo: obtener matriz S



$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0}$$



$$\frac{V_2}{-I_2} = Z_{02}$$

$$a_2 = \frac{V_2 + Z_{02} I_2}{2\sqrt{Z_{02}}} = 0 \quad \checkmark$$

$$b_2 = \frac{V_2 - Z_{02} I_2}{2\sqrt{Z_{02}}}$$

$$a_1 = \frac{V_1 + Z_{01} I_1}{2\sqrt{Z_{01}}}$$

$$b_1 = \frac{V_1 - Z_{01} I_1}{2\sqrt{Z_{01}}}$$

siendo $\frac{I_1}{V_1} = Y + Y_{02}$

$$a_1 = \frac{V_1 [1 + Z_{01} Y_{in}]}{2\sqrt{Z_{01}}}$$

$$b_1 = \frac{V_1 [1 - Z_{01} Y_{in}]}{2\sqrt{Z_{01}}}$$

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{1 - Z_{01} Y_{in}}{1 + Z_{01} Y_{in}}$$

$$= \frac{Y_{01} - (Y_{02} + Y)}{Y_{01} + (Y_{02} + Y)}$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0}$$

⇒ con el mismo circuito !

Las columnas de la matriz S se resuelven todos sus elementos con el mismo circuito $a_k=0 \forall k \neq j$

(i)

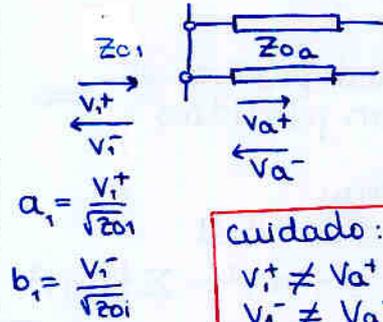
$$S_{21} = \frac{2}{1 + Z_{01} Y_{in}} + \frac{\sqrt{Z_{01}}}{\sqrt{Z_{02}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{Y_{01} Y_{02}}}{Y_{01} + Y_{02} + Y}$$

se cumple que, en efecto

$$S_{11} = \rho_1 = \frac{Z_{in} - Z_{01}}{Z_{in} + Z_{01}} = \frac{Y_{01} - Y_{in}}{Y_{01} + Y_{in}}$$

Cuidado

si en el interior del puerto hay una línea de transmisión



Cuidado:

$$v_1^+ \neq v_A^+ \\ v_1^- \neq v_A^-$$

Existe una expresión para calcular los parámetros S fuera de la diagonal a partir de los de la diagonal y cocientes de tensión.

$$S_{ij} = \frac{b_i}{a_j} \Big|_{a_k=0} = \frac{\frac{V_i - Z_{0i} I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}}}{\frac{V_j + Z_{0j} I_j}{2\sqrt{Z_{0j}}}} = \frac{\frac{V_i - Z_{0i} I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}}}{\frac{V_j + Z_{0j} I_j}{2\sqrt{Z_{0j}}}} \cdot \frac{1 + S_{jj}}{1 + S_{jj}}$$

multiplicar y dividir por

$$1 + S_{jj} = 1 + \frac{b_j}{a_j} = \frac{a_j + b_j}{a_j} = \frac{2V_j}{2\sqrt{Z_{0j}}} \cdot \frac{1}{a_j}$$

$$S_{ij} = \frac{\frac{V_i - Z_{0i} I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}}}{\frac{V_j + Z_{0j} I_j}{2\sqrt{Z_{0j}}} \cdot \frac{1}{a_j}} = \frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} \cdot \frac{\sqrt{Z_{0j}}}{V_j} (1 + S_{jj})$$

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{Z_{0j}}{Z_{0i}}} \cdot \frac{V_i}{V_j} (1 + S_{jj})$$

Es útil usarlo junto a

$$S_{jj} = \rho_j$$

siguiendo con el ejemplo normalmente lo práctico es

$$S_{22} = \rho_2 = \frac{Y_{02} - (Y + Y_{01})}{Y_{02} + (Y + Y_{01})}$$

$$S_{12} = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot (1 + S_{22})$$

Propiedades

① Red pasiva $\iff |S_{ij}| \leq 1$

Dem:

$$P_{out|i} = \frac{1}{2} |b_i|^2 = \frac{1}{2} |S_{ij}|^2 |a_j|^2 = |S_{ij}|^2 \cdot P_{in|j}$$

\uparrow
 $b_i = S_{ij} \cdot a_j$

② Red pasiva y sin pérdidas \iff unitariedad $S^+ \cdot S = 1$

El producto escalar complejo (i.e. no olvidar conjugar) entre cualesquiera dos filas o columnas es igual a 1 incluyendo consigo mismo (i.e. módulo al cuadrado)

Dem:

$$P_{in} = P_{out}$$

$$\sum_i \frac{1}{2} |a_i|^2 = \sum_j \frac{1}{2} |b_j|^2$$

$$a^+ \cdot a = b^+ \cdot b$$

y ya que

$$b = S \cdot a$$

$$b^+ = a^+ \cdot S^+$$

$$a^+ \cdot a = (a^+ \cdot S^+) \cdot (S \cdot a)$$

se debe cumplir $S^+ \cdot S = 1$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$a^* = a^+ = (a_1^* \ a_2^* \ \dots \ a_n^*)$$

$$a^+ \cdot a = \sum |a_i|^2$$

Relación con matrices Z y S

$$S = (\bar{Z} - 1)(\bar{Z} + 1)^{-1}$$

$$= (\bar{Z} + 1)^{-1}(\bar{Z} - 1)$$

$$\bar{Z} = (1 + S)(1 - S)^{-1}$$

siendo $\bar{Z}_{ij} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{Z_{0i} \cdot Z_{0j}}}$

\bar{Z} adimensional igual que S

Truco para recordar:

$$\bar{S} = (\bar{Z} - 1) \cdot (\bar{Z} + 1)^{-1}$$

si la red en 1 puerto

$$S = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} = \rho \quad \left[\begin{matrix} z_{01} \\ \bar{Z} \\ z_{01} \end{matrix} \right]$$

Nota:

$$\bar{Z} \leftrightarrow S \leftrightarrow \rho$$

$\uparrow z_0?$

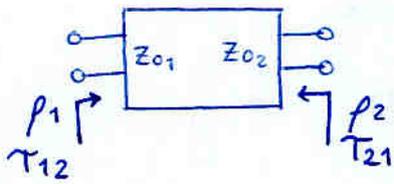
$$\bar{Z}$$

③ Red recíproca $\iff S_{12} = S_{21} \rightarrow$ matriz simétrica

④ Red simétrica $\iff S_{11} = S_{22} \rightarrow$ elementos de la diagonal iguales

Aspecto de la matriz S

ej:



$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & T_{21} \\ T_{12} & \rho_2 \end{pmatrix}$$

La columna i-ésima de una matriz S nos indica como se reparten las ondas de tensión por cada puerto de salida (módulo al cuadrado para ver como se reparte la potencia)

→ En general son números complejos

$$S = \begin{pmatrix} ae^{i\phi_1} & be^{i\phi_2} \\ ce^{i\phi_3} & de^{i\phi_4} \end{pmatrix} \quad 8 \text{ parámetros}$$

→ si la red es pasiva y sin pérdidas $\Rightarrow \begin{cases} |S_{ij}| \leq 1 \\ S^T \cdot S = I \end{cases}$

Dem:

$$S^T \cdot S = I \Rightarrow \begin{pmatrix} ae^{-i\phi_1} & be^{-i\phi_2} \\ ce^{-i\phi_3} & de^{-i\phi_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ae^{i\phi_1} & be^{i\phi_2} \\ ce^{i\phi_3} & de^{i\phi_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ De los 1's se obtiene: $\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$ se deduce que la suma de elementos al cuadrado vale 1.
 i.e. toda la potencia que entra en un puerto sale dividida entre todos los puertos

→ De los 0's se obtiene: $ab(\phi_2 - \phi_1) + cd(\phi_3 - \phi_4) = 0 \rightarrow$ se puede además demostrar que la suma de cada fila (al cuadrado cada elemento) también da 1
 $\Rightarrow \begin{cases} d = -\frac{ab}{c} \\ \phi_4 = \phi_2 + \phi_3 - \phi_1 \end{cases}$

- todos los elementos ≤ 1
- suma de filas y columnas de elementos al cuadrado valen 1
- $d = -\frac{ab}{c}, \phi_4 = \phi_2 + \phi_3 - \phi_1$

$$S = \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} & \text{sen } T e^{i\phi_2} \\ \text{sen } T e^{i\phi_3} & -\cos T e^{i(\phi_2 + \phi_3 - \phi_1)} \end{pmatrix}$$

4 parámetros

→ Si además la red es recíproca $S_{12} = S_{21} \Rightarrow \phi_2 = \phi_3$

$$S = \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} & \text{sen } T e^{i\phi_2} \\ \text{sen } T e^{i\phi_2} & -\cos T e^{i(2\phi_2 - \phi_1)} \end{pmatrix} \quad 3 \text{ parámetros}$$

→ si además la red es simétrica: $S_{11} = S_{22} \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 \pm \pi/2$

$$S = \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} & \pm j \text{sen } T e^{i\phi_1} \\ \pm j \text{sen } T e^{i\phi_1} & \cos T e^{i\phi_1} \end{pmatrix}$$

Propiedad:

Toda red pasiva, sin pérdidas y recíproca,

$$\underbrace{|S_{ij}| \leq 1}_{S^T \cdot S = I}$$

$$S_{12} = S_{21}$$

puede comportarse como una red simétrica ($S_{11} = S_{22}$) (aunque no sea simétrica físicamente) sin más que desplazar los planos de referencia:

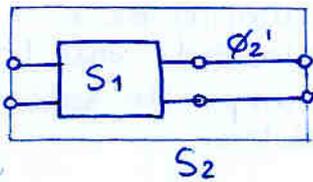
Dem

Red pasiva, sin pérdidas y recíproca



$$S_1 = \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} & \text{sen } T e^{i\phi_2} \\ \text{sen } T e^{i\phi_2} & -\cos T e^{i\phi_1} \end{pmatrix}$$

si cambiamos el plano de referencia de 2 añadiendo un trozo con desfase ϕ_2' siendo $\phi_2' = \phi_2 - \phi_1 \pm \frac{\pi}{2}$



Recuerda: hay que multiplicar por $e^{-i\phi_2'}$ allá donde se recorra ese tramo adicional

$$S_2 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \cdot e^{-i\phi_2'} \\ S_{21} \cdot e^{-i\phi_2'} & S_{22} \cdot e^{-i2\phi_2'} \end{pmatrix}$$

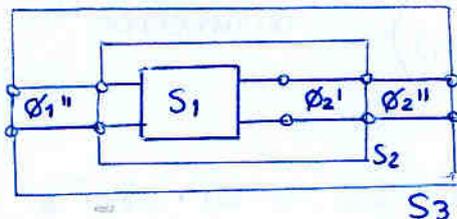
- en S_{11} no se recorre ϕ_2' .
- en S_{12} se recorre al entrar a 2
- en S_{21} se recorre al salir b2
- en S_{22} se recorre dos veces, al salir y al entrar

en general $S_{ij}' = S_{ij} \cdot e^{-i(\phi_i + \phi_j)}$

queda

$$S_2 = \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} & \pm \text{sen } T e^{i\phi_1} \\ \pm \text{sen } T e^{i\phi_1} & -\cos T e^{i(2\phi_2 - \phi_1)} \end{pmatrix} \text{ corresponde a una red simétrica}$$

Además podemos arreglar aun más el aspecto de S , consiguiendo que todas las fases sean nulas sin más que otro movimiento de planos



hacemos: $\phi_1'' = \phi_2'' = \frac{\phi_1}{2}$

queda:

$$S_3 = S_\phi \cdot S_2 \cdot S_\phi = \begin{pmatrix} \cos T & \pm \text{sen } T \\ \pm \text{sen } T & \cos T \end{pmatrix}$$

Significado de la unitariedad

$$\begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} & \text{sen} T e^{i\phi_2} \\ \text{sen} T e^{i\phi_3} & -\cos T e^{i\phi_3 + \phi_2 - \phi_1} \end{pmatrix}$$

El producto escalar (no olvidar conjugar) entre cualesquiera dos columnas o filas es cero (y si es consigo misma: i.e. módulo al cuadrado, es igual a uno)

ejemplo:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} \\ \text{sen} T e^{i\phi_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{sen} T e^{i\phi_2} \\ -\cos T e^{i\phi_3 + \phi_2 - \phi_1} \end{pmatrix}^* \\ &= \cos T \cdot \text{sen} T \cdot e^{i(\phi_1 - \phi_2)} - \text{sen} T \cos T e^{i\phi_1 - \phi_2} \\ &= \text{sen} T \cos T (e^{i(\phi_1 - \phi_2)} - e^{i(\phi_1 - \phi_2)}) = 0 \end{aligned}$$

ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} \\ \text{sen} T e^{i\phi_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} \\ \text{sen} T e^{i\phi_3} \end{pmatrix}^* = \cos^2 T + \text{sen}^2 T = 1$$

ejemplo:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{sen} T e^{i\phi_2} \\ -\cos T e^{i\phi_3 + \phi_2 - \phi_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{sen} T e^{i\phi_2} \\ -\cos T e^{i\phi_3 + \phi_2 - \phi_1} \end{pmatrix}^* \\ &= \text{sen}^2 T e^{i0} + \cos^2 T e^{i0} = 1 \end{aligned}$$

ejemplo:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} \\ \text{sen} T e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{sen} T e^{i\phi_3} \\ -\cos T e^{i\phi_3 + \phi_2 - \phi_1} \end{pmatrix}^* \\ &= \cos T \cdot \text{sen} T e^{i\phi_1 - \phi_3} - \cos T \text{sen} T e^{i\phi_1 - \phi_3} = 0 \end{aligned}$$

ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} \\ \text{sen} T e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos T e^{i\phi_1} \\ \text{sen} T e^{i\phi_2} \end{pmatrix}^* = 1$$

ejemplo:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{sen} T e^{i\phi_3} \\ -\cos T e^{i\phi_3 + \phi_2 - \phi_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{sen} T e^{i\phi_3} \\ -\cos T e^{i\phi_3 + \phi_2 - \phi_1} \end{pmatrix}^* \\ &= \text{sen}^2 T e^{i0} + \cos^2 T e^{i0} = 1 \end{aligned}$$

Die Determinante der 2x2-Matrix

Die Determinante einer 2x2-Matrix ist die Differenz aus dem Produkt der Diagonalelemente. Sie ist ein Maß für die "Größe" einer Matrix und ist wichtig für die Lösung von Gleichungssystemen.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

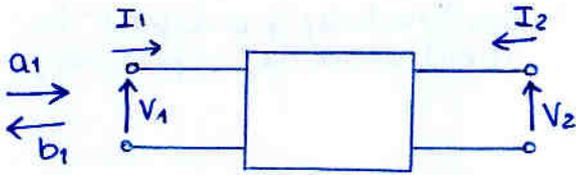
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

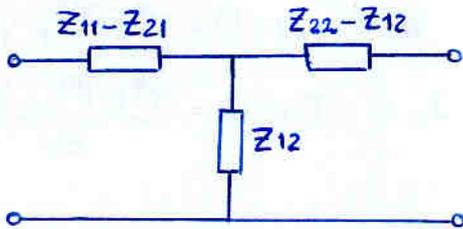
Redes de 2 accesos



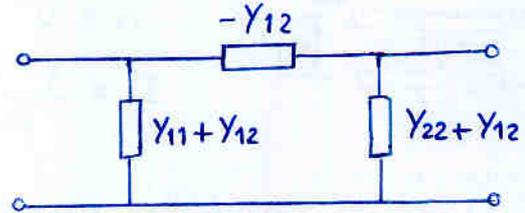
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Y si hay reciprocidad ($Z_{12} = Z_{21}$)

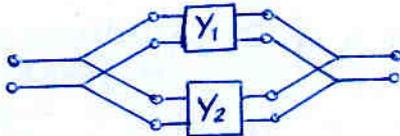


o



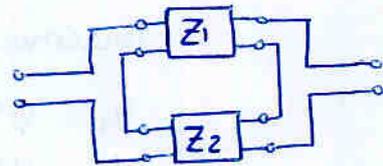
Conexión de redes

Paralelo:



$$Y = Y_1 + Y_2$$

Serie:



$$Z = Z_1 + Z_2$$

Cuidado:

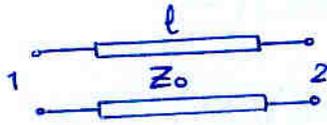
 no es conexión serie, es en cascada

truco: imaginar red de 1 puerto



ejemplos redes de 2 accesos

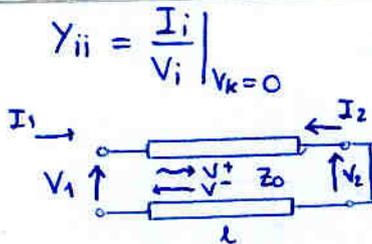
· línea de transmisión:



Calculamos Y (para Y no hay que definir la impedancia de los puertos)

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

$$\vec{I} = \vec{Y} \cdot \vec{V}$$



$$Y_{ii} = \frac{I_i}{V_i} \Big|_{V_k=0}$$

$$V_1 = V^+ + V^- \rightarrow V_2 = V(z=l) = V^+ e^{-j\beta l} + V^- e^{+j\beta l}$$

$$I_1 = \frac{V^+ - V^-}{Z_0} \rightarrow I_2 = -I(z=l) = -\frac{V^+ e^{-j\beta l} - V^- e^{+j\beta l}}{Z_0}$$

Sabiendo que $V_2 = 0$

$$V^+ e^{-j\beta l} + V^- e^{+j\beta l} = 0 \rightarrow \boxed{V^- = -V^+ e^{-2j\beta l}}$$

Sustituir:

Podemos sustituir en I_2

$$I_2 = -\frac{V^+ e^{-j\beta l} + V^+ e^{-j\beta l}}{Z_0}$$

$$\frac{I_2}{V_1} = \frac{-2V^+ e^{-j\beta l}}{Z_0 e^{-j\beta l} V^+ (e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}$$

Podemos sustituir en V_1 y en I_1 (quedaran ambos en función de V^+)

$$V_1 = V^+ - V^+ e^{-2j\beta l}$$

$$I_1 = \frac{V^+ + V^+ e^{-2j\beta l}}{Z_0}$$

$$\frac{I_1}{V_1} = \frac{(1 + e^{-2j\beta l})}{(1 - e^{-2j\beta l}) Z_0} = \frac{e^{-j\beta l}}{e^{-j\beta l} Z_0} \frac{(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l})}{(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}$$

Podemos obtener:

$$\phi = \beta l$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = -j Y_0 \cot(\phi) \stackrel{\text{simetria}}{=} Y_{22}$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{j Y_0}{\sin \phi} \stackrel{\text{reciprocidad}}{=} Y_{12}$$

coincide con lo esperado:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l)}{Z_0 + j Z_L \operatorname{tg}(\beta l)}$$

$$\vec{Z} = \vec{Y}^{-1} = \frac{-j Z_0}{\sin \phi} \begin{pmatrix} \cos \phi & 1 \\ 1 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

casos particulares:

$$l = \lambda/4 \rightarrow \phi = \beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

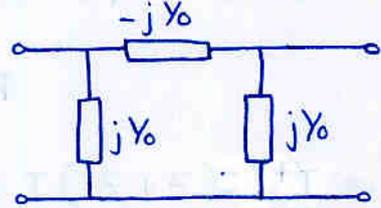
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & j Y_0 \\ j Y_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l = \frac{3\lambda}{4} \rightarrow \phi = \beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

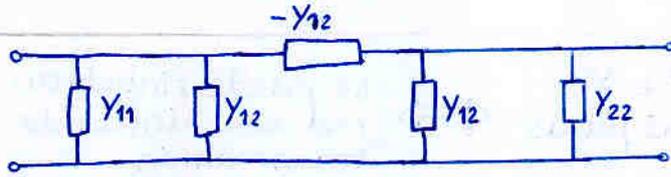
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -j Y_0 \\ -j Y_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos sustituir por el cuadripolo equivalente:

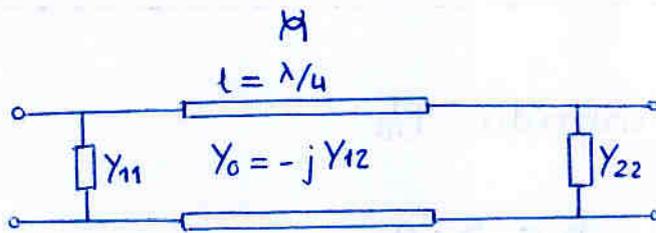
$$l = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & jY_0 \\ jY_0 & 0 \end{pmatrix} \infty$$



Podemos hacer cosas como

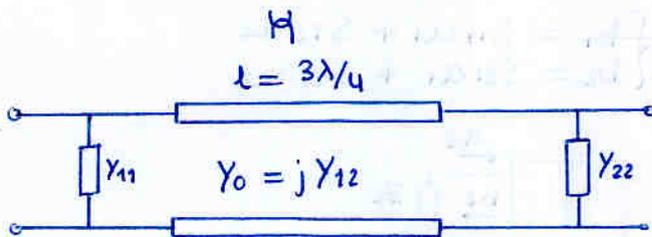


← Representa a cualquier red reciproca

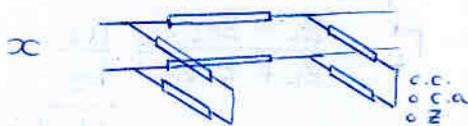


En la práctica puedo hacer esta línea sólo si Y_0 es real (Y_{12} imaginario puro)

si Y_{12} es positivo uso $l = 3\lambda/4$
si Y_{12} es negativo uso $l = \lambda/4$

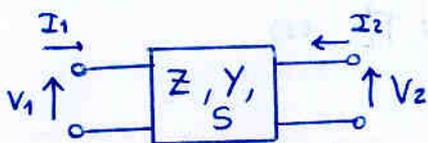


A su vez Y_{11} y Y_{22} puedo sustituirlas por un stub acabando en cortocircuito o circuito abierto siempre que Y_{11} y Y_{22} sean imaginario puro



Cualquier red con matriz Y imaginaria pura \Rightarrow Puede construirse con líneas de transmisión

¿Cuándo tiene una red matriz de admitancia imaginaria pura?



Potencia total que entra en la red P_T

$$P_T = \text{Re} \left[\frac{1}{2} V_1 I_1^* + \frac{1}{2} V_2 I_2^* \right]$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[(I_1^* \ I_2^*) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} [I^+ \cdot V]$$

para obtener la parte real hacemos

$$P_T = \frac{1}{2} \left[\frac{I^+ V + (I^+ V)^*}{2} \right] = \frac{1}{4} [I^+ V + V^+ I] \underset{V=ZI}{=} \frac{1}{4} \cdot I^+ (Z + Z^+) \cdot I$$

En una red sin pérdidas:



$$P_{in1} = P_{out2} = -P_{in2}$$

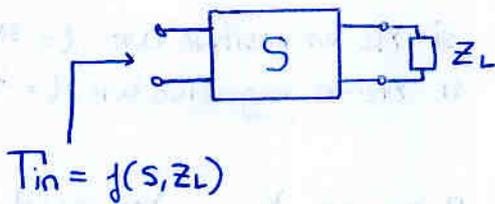
$$P_T = P_{in1} + P_{in2} = 0$$

$$P_T = \frac{1}{4} I^+ (Z + Z^+) I = 0 \iff Z + Z^+ = 0 \iff Z \text{ imaginaria pura}$$

Conclusiones:

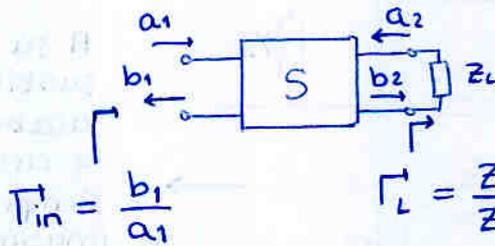
Red sin pérdidas (no disipa pot) \iff Matrices Z e Y imaginarias puras \iff se puede sintetizar la red con líneas de transmisión

Coefficiente de reflexión a la entrada Γ_{in}



$$b = S \cdot a$$

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \end{cases}$$



$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}} = \frac{a_2}{b_2}$$

divido entre a_1 porque necesito \downarrow

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \end{cases} \rightarrow \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1} = \Gamma_{in} \quad (1)$$

divido entre a_2 para sacar a_1/a_2 \swarrow necesito \downarrow

$$\frac{b_2}{a_2} = S_{21} \frac{a_1}{a_2} + S_{22} = \Gamma_L \quad (2)$$

cuidado; aquí lo que se refleja es a_2 (ya que miramos en la otra dirección)

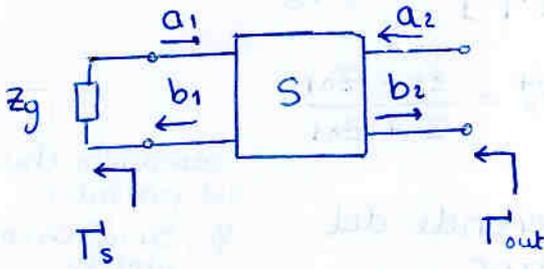
Despejo $\frac{a_2}{a_1}$ de (2) y sustituyo en (1)

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

es el caso general sin estar el puerto 2 necesariamente terminado con su impedancia de referencia
 i.e. una carga cualquiera, que presenta un coef de reflexión
 $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}}$

en el caso particular $Z_L = Z_{02}$, lógicamente se obtiene $\Gamma_{in} = S_{11}$ (por definición)

Coefficiente de reflexión a la salida



$$\Gamma_{out} = \frac{Z_{out} - Z_{o2}}{Z_{out} + Z_{o2}} = \frac{b_2}{a_2}$$

$$\Gamma_s = \frac{Z_g - Z_{o1}}{Z_g + Z_{o1}} = \frac{b_1}{a_1}$$

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \rightarrow \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{12} \frac{a_2}{a_1} = \Gamma_s \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \rightarrow \frac{b_2}{a_2} = S_{21} \frac{a_1}{a_2} + S_{22} = \Gamma_{out} \end{cases}$$

despejo $\frac{a_1}{a_2}$ y sustituyo

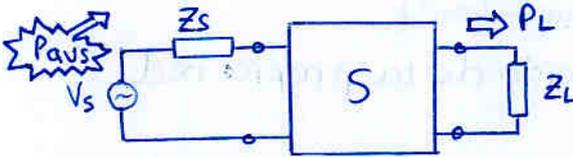
$$\Gamma_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_s}{1 - S_{11} \Gamma_s}$$

Caso general, puerto 1 cargado con una carga cualquiera Z_s

$$\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_{o1}}{Z_s + Z_{o1}}$$

Caso particular: $Z_s = Z_{o1}$
se obtiene $\Gamma_{out} = S_{22}$ (por def)

Ganancia de transferencia G_T



$$G_T = \frac{\text{Potencia entregada a la carga (load)}}{\text{Potencia disponible en la fuente (available source)}} = \frac{P_L}{P_{avs}}$$

pot disponible: es la máxima que podría entregar, es un parámetro exclusivo de la fuente

• en cuanto a P_L

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |a_2|^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)$$

$a_2 = b_2 \cdot \Gamma_L$
(hay que hallar b_2 en función de P_{avs})

es la máxima que podría entregar, no es la que está entregando i.e. es la que entregaría a una impedancia adaptada

• en cuanto a P_{avs}

máxima potencia entregada; por definición es la que entrega a su impedancia conjugada.



$$V_a = V_s \cdot \frac{Z_s^*}{Z_s + Z_s^*}; I_a^* = \frac{V_s}{Z_s + Z_s^*}$$

$$P_{avs} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_a I_a^*] \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[Z_s^* \frac{|V_s|^2}{|Z_s + Z_s^*|^2} \right] = \frac{|V_s|^2}{8 R_s}$$

me defino

$$\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_{o1}}{Z_s + Z_{o1}}$$

$$P_{avs} = \frac{|V_s|^2}{8 Z_{o1}} \cdot \frac{|1 - \Gamma_s|^2}{1 - |\Gamma_s|^2}$$

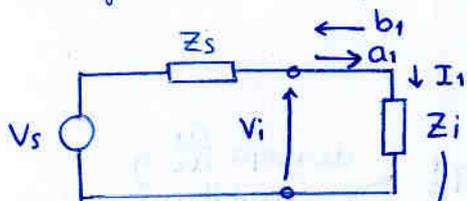
Sólo depende del generador

equivalente thevenin del generador

V_s : tensión en circuito abierto

Z_s : impedancia

• ¿qué fracción de esa pot. disponible se entrega a una carga arbitraria Z_i ?



dependera de S y Z_L

$$a_1 = \frac{V_1 + Z_{o1} I_1}{2 \sqrt{Z_{o1}}} \Rightarrow \frac{V_s}{2 \sqrt{Z_{o1}}} \cdot \frac{1 - \Gamma_s}{1 - \Gamma_i \Gamma_s} = |a_1|^2$$

lo quiero en función de V_s y de Γ_s

$$\frac{V_i}{Z_i} = I_1 \rightarrow \Gamma_i = \frac{Z_i - Z_{o1}}{Z_i + Z_{o1}}$$

Ahora puedo despejar Γ_s en función de P_{avs} y sustituir en $|a_1|^2$

$$\frac{1}{2} |a_1|^2 = P_{avs} \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - \Gamma_i \Gamma_s|^2}$$

cuidado

ésta es la potencia que "entra" y no la que se "entrega" (que sería $\frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2$)

La onda de potencia entrante es función de la propia red y de la potencia disponible,

y NO la potencia disponible función de la onda de potencia entrante, aunque por supuesto se puede despejar

Nota: si hay adaptación conjugada

$$\Gamma_i = \Gamma_s^* \\ Z_{in} = Z_s^*$$

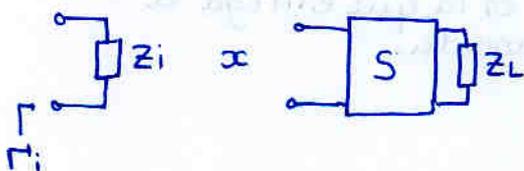
si además $\Gamma_s = 0$
 $Z_s = Z_{o1}$

$$\frac{1}{2} |a_1|^2 = P_{avs}$$

aunque esa no será la potencia entregada ya que habría que restarle $\frac{1}{2} |b_1|^2$ (pot. reflejada)

Falta por determinar $Z_i \leftrightarrow \Gamma_i$

$$P_{in} = \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2 = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_i|^2) = P_{avs}$$



$$\Gamma_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

entregamos la máxima potencia disponible (lógico, ya que está adaptado) a pesar de haber onda reflejada (ya que definimos la impedancia de referencia como queramos)

Ya puedo escribir G_T

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{\frac{1}{2}|b_2|^2(1-|\Gamma_L|^2)}{\frac{1}{2}|a_1|^2 \frac{|1-\Gamma_1^*\Gamma_S|^2}{1-|\Gamma_S|^2}}$$

$$\begin{cases} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{cases} \rightarrow 1 = S_{21} \frac{a_1}{b_2} + S_{22} \frac{a_2}{b_2} \Gamma_L$$

si despejo $\frac{b_2}{a_1}$ y sustituyo en G_T
traz jugar con la ecuación llego a :

$$G_T = |S_{21}|^2 \frac{(1-|\Gamma_S|^2)(1-|\Gamma_L|^2)}{|(1-S_{11}\Gamma_S^*)(1-S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_L\Gamma_S|^2}$$

se da en el examen

$$\text{si la carga y la fuente están adaptadas } \Gamma_S = \Gamma_L = 0 \Rightarrow G_T = |S_{21}|^2$$

Atenuador

Su matriz S debe tener la forma : $S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma} \\ e^{-\gamma} & 0 \end{pmatrix}$ diagonal nula : cuando esté adaptado no habrán reflexiones
 $e^{-\gamma}$ (con γ valor real) representa la atenuación

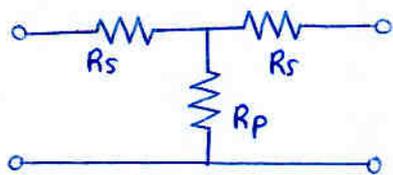
coeficiente de reflexión : $\Gamma_i = \frac{S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1-S_{22}\Gamma_L}}{1 - \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1-S_{22}\Gamma_L}} = \left\{ \begin{matrix} \Gamma_L = 0 \\ \text{adaptación} \end{matrix} \right\} = 0$

Ganancia de transferencia : $G_T = e^{-2\gamma} \frac{(1-|\Gamma_S|^2)(1-|\Gamma_L|^2)}{|1 - e^{-2\gamma} \Gamma_S^* \Gamma_L|^2} = |S_{21}|^2 = e^{-2\gamma}$
 \uparrow
 $\left\{ \begin{matrix} \Gamma_L = 0 \\ \Gamma_S = 0 \end{matrix} \right\}$

Ganancia en dB : $G_T(\text{dB}) = 10 \log G_T = -8.7 \gamma$
 $L(\text{dB}) = -G_T = 8.7 \gamma$

Ganancia en Nepers : $G_T(\text{Np}) = \ln G_T = -2\gamma$

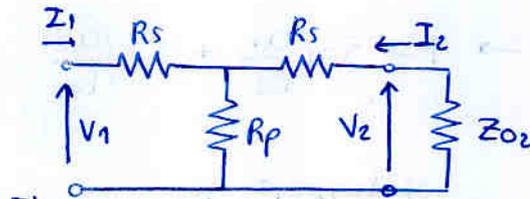
Equivalente en T :



Deberá ser resistivo puro
(en la práctica, resistencias muy pequeñas para que no desfase a altas frecuencias)

Analizaré esta red y forzaré a que se comporte como atenuador

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0}$$



$$Z_{in} = R_s + R_p \parallel (R_s + Z_{o2})$$

$$S_{11} = \frac{R_s^2 + 2R_p R_s - Z_o^2}{(R_s + Z_o)(R_s + 2R_p + Z_o)} = S_{22} = 0 \Rightarrow \bar{R}_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{R}_s} - \bar{R}_s \right)$$

para que sea atenuador diagonal debe ser cero

normalizado a Z_o

sustituyendo la condición

$$S_{21} = S_{12} = \frac{2Z_o R_p}{(R_s + Z_o)(R_s + 2R_p + Z_o)} = \frac{1 - \bar{R}_s}{1 + \bar{R}_s} = \frac{Z_o - R_s}{Z_o + R_s} = S_{21}$$

$$L = -10 \log |S_{21}|^2$$

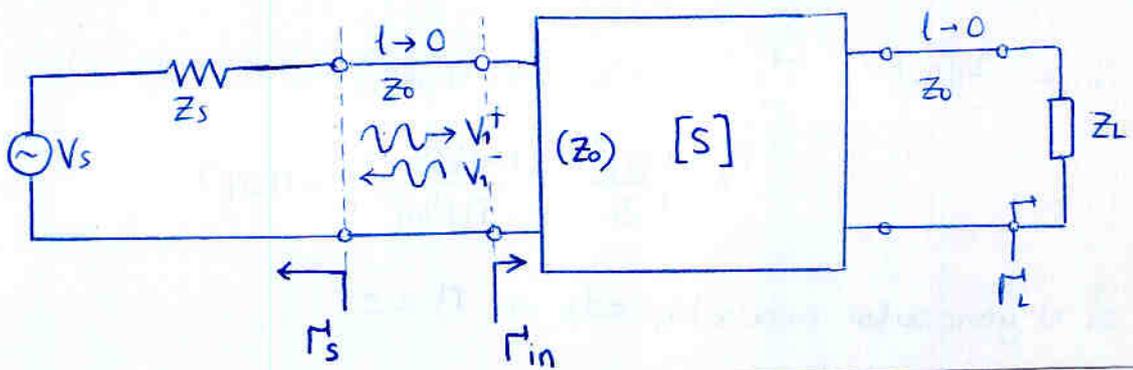
$$L = -10 \log \left| \frac{Z_o - R_s}{Z_o + R_s} \right|^2 \rightarrow$$

a partir de esto podemos obtener la ecuación de diseño/síntesis

$$\bar{R}_s = \frac{10^{L/20} - 1}{10^{L/20} + 1}$$

Potencia entregada a una red

ver pag 538
David M. Pozar : Microwave Engineering
3ª edición



$$\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$$

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} = \frac{V_1^+}{V_1^-}$$

3 formas de ver Γ_{in}

La tensión a la entrada de la red, (divisor resistivo)

$$V_1 = V_s \cdot \frac{Z_{in}}{Z_s + Z_{in}}$$

y además sabemos que

$$V_1 = V_1^+ + V_1^- = V_1^+ (1 + \Gamma_{in})$$

$$Z_{in} = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}}$$

$$V_1 = V_s \cdot \frac{Z_0 \frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}}}{Z_s + Z_0 \frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}}}$$

$$V_1 = V_s \cdot \frac{Z_0 (1 + \Gamma_{in})}{Z_s (1 - \Gamma_{in}) + Z_0 (1 + \Gamma_{in})} = V_1^+ (1 + \Gamma_{in})$$

se despeja

$$V_1^+ = V_s \cdot \frac{Z_0}{Z_s (1 - \Gamma_{in}) + Z_0 (1 + \Gamma_{in})}$$

$$Z_s = Z_0 \frac{1 + \Gamma_s}{1 - \Gamma_s}$$

$$V_1^+ = V_s \cdot \frac{1}{\frac{1 + \Gamma_s}{1 - \Gamma_s} (1 - \Gamma_{in}) + (1 + \Gamma_{in})}$$

$$= V_s \frac{(1 - \Gamma_s)}{(1 + \Gamma_s)(1 - \Gamma_{in}) + (1 + \Gamma_{in})(1 - \Gamma_s)} = V_s \frac{(1 - \Gamma_s)}{(1 - \Gamma_{in} + \Gamma_s - \Gamma_s \Gamma_{in}) + (1 - \Gamma_s + \Gamma_{in} - \Gamma_s \Gamma_{in})} = \frac{V_s}{2} \frac{(1 - \Gamma_s)}{(1 - \Gamma_s \Gamma_{in})}$$

entonces

$$a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}}$$

$$\begin{aligned} P_{in} &= \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |b_1|^2) = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2) \\ &= \frac{|V_s|^2}{8 Z_0} \cdot \frac{|1 - \Gamma_s|^2}{|1 - \Gamma_s \Gamma_{in}|^2} (1 - |\Gamma_{in}|^2) \end{aligned}$$

si el generador está adaptado $\rightarrow \Gamma_s = 0$

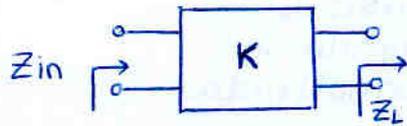
$$V_1^+ = \frac{V_s}{2}$$

$$a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}}$$

$$P_{in} = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2)$$

$$= \frac{|V_s|^2}{8 Z_0} (1 - |\Gamma_{in}|^2)$$

Inversores de inmitancia



$$Z_{in} = \frac{K^2}{Z_L}$$

k: cte de inversión de impedancia $[\Omega]$
(siempre valor real)

$$Y_{in} = \frac{J^2}{Y_L}$$

$J = \frac{1}{K}$: cte de inversión de admitancia $[\Omega^{-1}]$



$$Z_{in} = \frac{K^2}{Z_{L1} + Z_{L2}}$$

$$\frac{1}{Y_{11}} = \frac{K^2}{Z_{L1}}$$

$$Y_{in} = \frac{1}{Z_{in}} = \frac{Z_{L1}}{K^2} + \frac{Z_{L2}}{K^2}$$



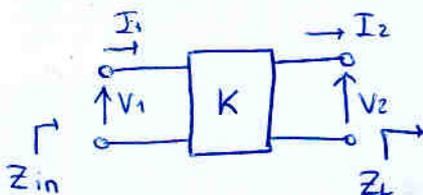
$$Y_{in} = \frac{J^2}{Y_{L1} + Y_{L2}}$$

$$\frac{1}{Z_{i1}} = \frac{J^2}{Y_{L1}}$$

$$\frac{1}{Z_{i2}} = \frac{J^2}{Y_{L2}}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{Y_{in}} = \frac{Y_{L1}}{J^2} + \frac{Y_{L2}}{J^2}$$

Aspecto de la matriz S



Imaginemos una red con

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & Z_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{12} I_1 \end{cases}$$

$$\vec{V} = \vec{Z} \cdot \vec{I}$$

pasiva y sin pérdidas

entonces

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_{12} I_2}{V_2 / Z_{12}} = \frac{-Z_{12}^2}{Z_L}$$

$$Z_L = \frac{-V_2}{I_2}$$

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Corresponde a un inversor con } K^2 = -Z_{12}^2$$

A partir de la matriz Z obtenemos la matriz S

$$S = (Z_n - 1)(Z_n + 1)^{-1}$$

siendo $Z_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Z_{12}}{Z_{01}} \\ \frac{Z_{12}}{Z_{01}} & 0 \end{pmatrix}$ matriz de impedancia normalizada

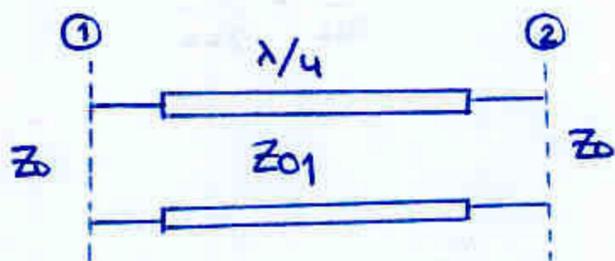
Se obtiene la matriz S de un inversor:

$$S = \begin{pmatrix} \gamma & \pm j\sqrt{1-\gamma^2} \\ \pm j\sqrt{1-\gamma^2} & \gamma \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{k^2 - Z_0^2}{k^2 + Z_0^2} = \frac{\bar{k}^2 - 1}{\bar{k}^2 + 1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos T & \pm j\sin T \\ \pm j\sin T & \cos T \end{pmatrix} \quad k^2 = -Z_{12}^2 \quad \bar{k} = \frac{k}{Z_0}$$

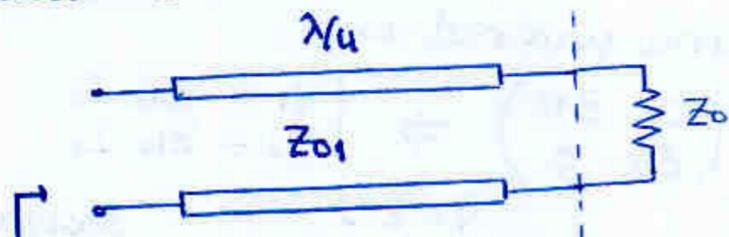
- unitaria \equiv pasiva y sin pérdidas
 - parámetro S_{11} es real
 - recíproca y simétrica
- siempre \rightarrow Es un inversor
- $$\bar{k}^2 = \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}}$$

ejemplo: línea de transmisión en $\lambda/4$



- es pasiva y sin pérdidas \equiv unitariedad
 - es recíproca y simétrica
- si comprobamos que S_{11} es real, será un inversor.

calculo S_{11}



$$Z_{in} = Z_{01} \frac{Z_L + j Z_{01} \operatorname{tg}(\beta l)}{Z_{01} + j Z_L \operatorname{tg}(\beta l)} = \frac{Z_{01}^2}{Z_0} \rightarrow k = Z_{01}$$

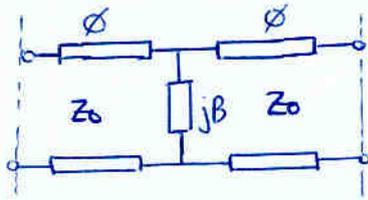
$$l = \lambda/4 \rightarrow \beta l = \pi/2$$

$$\Gamma_{in} = S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{Z_{01}^2 - Z_0^2}{Z_{01}^2 + Z_0^2} \rightarrow k = Z_{01}$$

se llama: **inversor en $\lambda/4 \Rightarrow Z_{in} = \frac{Z_{01}^2}{Z_L}$**

sólo a la frecuencia donde $l = \lambda/4$

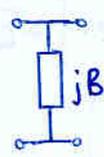
ejemplo 2: inversor admitancia paralelo



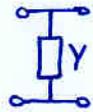
- pasiva y sin pérdidas
- recíproca
- simétrica

calculemos la matriz S

· Primera opción: a pelo $S_{ij} = \frac{b_i}{a_j} |_{a_k=0}$

· Segunda opción: es  con un cambio en los planos de referencia

recuerda:



$$S = \frac{1}{Y + 2Y_0} \begin{pmatrix} -Y & 2Y_0 \\ 2Y_0 & -Y \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$S = S_\phi \cdot S \cdot S_\phi$$

$$S_\phi = \begin{pmatrix} e^{-j\phi} & 0 \\ 0 & e^{-j\phi} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} e^{-2j\phi} & 2 \\ 2 + j\bar{B} & -j\bar{B} \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \frac{B}{Y_0}$$

(Annotations: $\angle \frac{B}{2}$ phase $\frac{1}{2} \arctg(\frac{2}{\bar{B}})$ for the top-left element; phase -2ϕ for the top-left element; phase $-\frac{\pi}{2}$ for the top-right element)

Si logramos que $S_{11} = \frac{-j\bar{B}e^{-2j\phi}}{2 + j\bar{B}}$ sea real, la red será un inversor.

$$S_{11} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{B}^2}}} e^{2j(\psi - \phi)} \quad \psi = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{\bar{B}}\right)$$

será real cuando $\psi - \phi = 0$
 $\phi = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{\bar{B}}\right)$

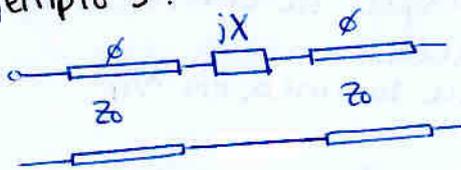
si:

$$\phi = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{\bar{B}}\right) \Rightarrow \text{es un inversor}$$

$$\bar{B} = \frac{1 - K^2}{K}$$

ecuación de síntesis

ejemplo 3: inversor admitancia serie



- pasiva y sin pérdidas
- recíproca y simétrica

si forzamos S_{11} real $\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{\bar{X}}\right)$
 análisis similar $\bar{X} = \frac{1 - \bar{J}^2}{\bar{J}}$

ejemplo 2: con una bobina paralelo

$$L \quad Y = \frac{1}{j\omega L} = jB \quad B = -\frac{1}{\omega L}$$

entonces aplicando lo obtenido

$$\begin{aligned} \varphi_{S_{11}} &= 2(\psi - \phi) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{Z}{B}\right) - \phi \right) \\ &\approx 2 \cdot \left[\frac{1}{B} - \phi \right] = 2 \cdot [-\bar{L}\omega - \phi] = 2[-\bar{L}\omega - \beta l] \\ &= 2 \cdot \left[-\bar{L}\omega - \frac{\omega}{v_p} \cdot l \right] \end{aligned}$$

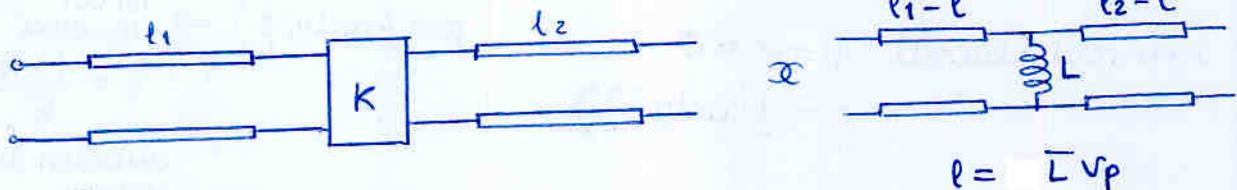
$$\varphi_{S_{11}} = -2\omega \left[\bar{L} + \frac{l}{v_p} \right]$$

Si $\varphi_{S_{11}} = 0 \implies$ La red será un inversor

$$\begin{aligned} \hookrightarrow -2\omega \left[\bar{L} + \frac{l}{v_p} \right] &= 0 \\ \bar{L} &= -\frac{l}{v_p} \end{aligned}$$

Si utilizamos una bobina (L siempre > 0) la longitud de las líneas laterales deberán ser $l = -\bar{L}v_p \rightarrow$ no depende de ω

Necesitamos longitudes negativas; esto obviamente no es posible de forma aislada, pero sí podemos 'restar' esa distancia a cualquier línea anterior y posterior al que haya en el sistema



¡ l no depende de ω !

De esta forma consigo un inversor que siempre es inversor independientemente de la frecuencia, aunque la constante de inversión sí que varíe con la frecuencia. Ese comportamiento es mucho mejor que la línea en $\lambda/4$

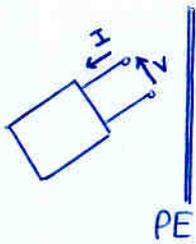
ejemplo 2 con un condensador: se obtiene que $\varphi_{S_{11}} = 0$ sólo para una cierta frecuencia; por tanto sólo es inversor a esa frecuencia (se obtiene que l depende de ω)

- Los inversores con admitancia paralelo \rightarrow los hacemos siempre con bobinas $l < 0$
 - Los inversores con admitancia serie \rightarrow los hacemos siempre con condensadores $l < 0$
- ↑ análisis y conclusiones similares

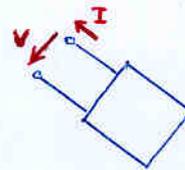
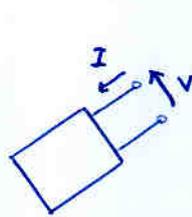
Simetrias

Pared eléctrica y pared magnética:

PE $\Rightarrow E_T = 0$

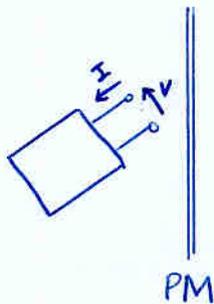


Teoría de imágenes

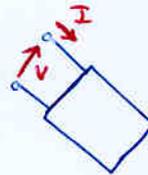
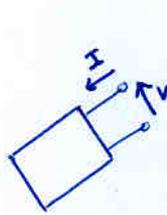


la tensión se anula
la corriente se refuerza

PM $\Rightarrow H_T = 0$ (i.e. no hay corriente que atraviese la pared)

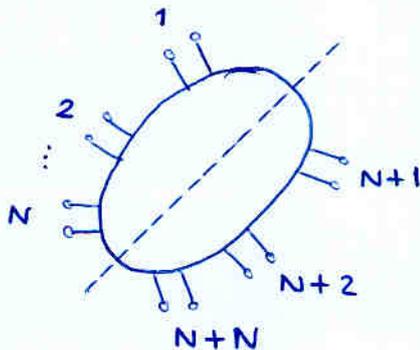


Teoría de imágenes



la corriente se anula
y la tensión se refuerza

Supongamos la siguiente red simétrica, con la numeración adecuada:



$$S = \begin{pmatrix} S_{1N \times N} & S_{2N \times N} \\ S_{3N \times N} & S_{4N \times N} \end{pmatrix}_{2N \times 2N}$$

$$\bar{b} = \bar{S} \cdot \bar{a} \rightarrow \begin{pmatrix} b_i \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ a_d \end{pmatrix}$$

$$b_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad b_d = \begin{pmatrix} b_{N+1} \\ b_{N+2} \\ \vdots \\ b_{N+N} \end{pmatrix}$$

$$a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad a_d = \begin{pmatrix} a_{N+1} \\ a_{N+2} \\ \vdots \\ a_{N+N} \end{pmatrix}$$

S_1 sólo relaciona los puertos de la izquierda

S_4 sólo relaciona los puertos de la derecha

Por simetría; $S_1 = S_4$

y además $S_2 = S_3$

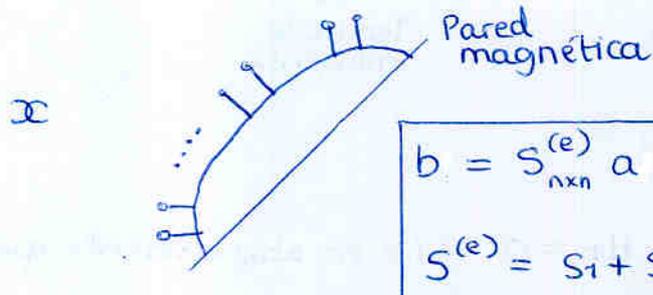
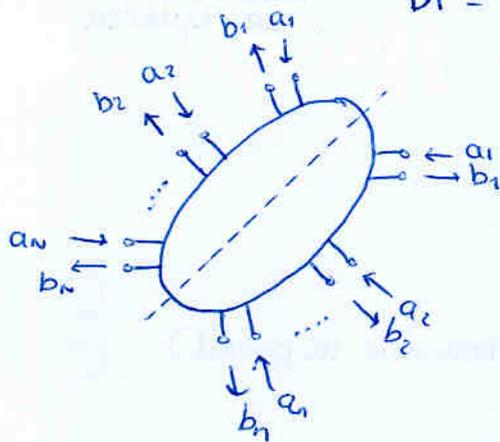
(me da igual entrar por el 1 y salir por el 8
que entrar por el N+1 y salir por el N+N)

Gracias a la numeración de puertos que hemos escogido

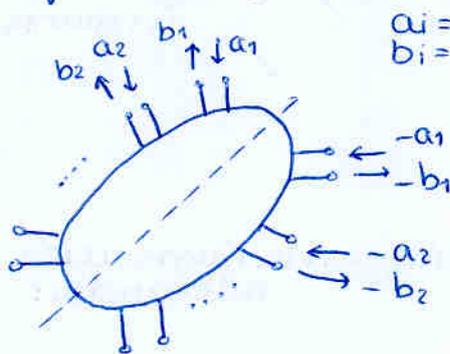
Por tanto $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} b_i &= S_1 a_i + S_2 a_d \\ b_d &= S_2 a_i + S_1 a_d \end{aligned}$

- Si hago una excitación simétrica (par) (even)

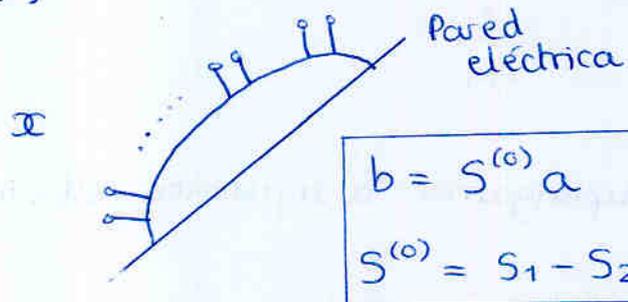
$$\begin{aligned} a_i &= a_d \quad \rightarrow \quad b_i = (S_1 + S_2) a_i \\ b_i &= b_d \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad b_d = \underbrace{(S_2 + S_1)}_{S^{(e)}} a_i$$



- Si hago una excitación antisimétrica (impar) (odd)



$$\begin{aligned} a_i &= -a_d \quad \rightarrow \quad b_i = (S_1 - S_2) a_i \\ b_i &= -b_d \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad b_d = (S_1 - S_2) a_i$$



Por tanto

$$\begin{aligned} S^{(e)} &= S_1 + S_2 \\ S^{(o)} &= S_1 - S_2 \\ S &= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

⇒
sumando
y restando

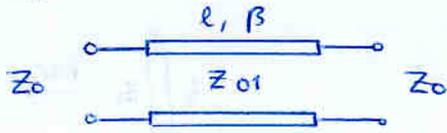
$$S_1 = \frac{1}{2} (S^{(e)} + S^{(o)})$$

$$S_2 = \frac{1}{2} (S^{(e)} - S^{(o)})$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{bmatrix}$$

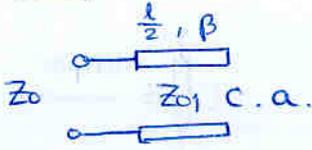
Técnica muy buena para analizar redes simétricas reduciendo considerablemente el esfuerzo

ejemplo:



sólo será simétrica si las impedancias de referencia las defino iguales (sino, las ondas a y b serían distintas)

Par

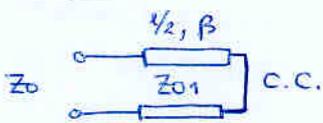


$$S^{(e)} = S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

siendo $Z_{in} = -j Z_{01} \cotg(\beta \frac{l}{2})$

fórmula para i. de tx acabada en circuito abierto

Impar



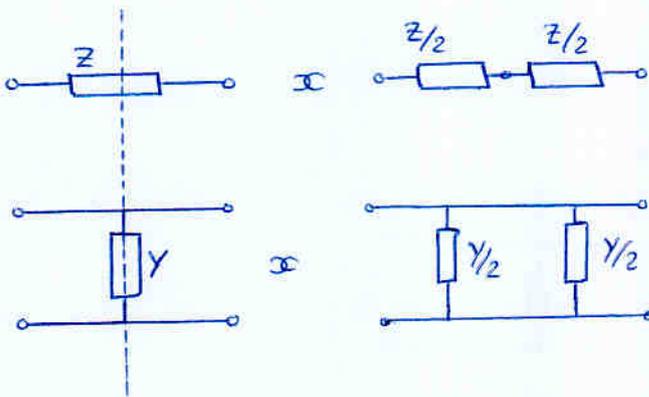
$$S^{(o)} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

siendo $Z_{in} = j Z_{01} \tg(\beta \frac{l}{2})$

Por tanto, finalmente

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix}$$

Nota: como separar en mitades simétricas



Lineas de transmisión:

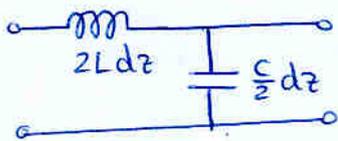


Hay que utilizar el modelo de L. de tx.

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C}$$

Si separamos con una pared magnética (caso PAR)

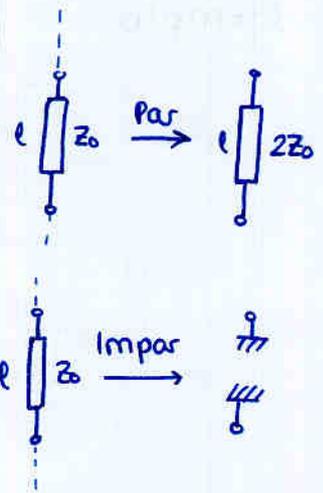


$$\beta' = \omega \sqrt{LC}$$

$$Z_0' = \sqrt{\frac{2L}{C/2}}$$

$$\beta' = \beta$$

$$Z_0' = 2 \cdot Z_0$$



Si separamos con una pared eléctrica (caso IMPAR)
toda la línea se va a masa

Problemas Tema 3

Tenemos una red

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2j & 2j \\ 2j & 1-2j \end{pmatrix}$$

vemos que es recíproca pero no simétrica

Hallar su equivalente en T

Regla mnemotécnica

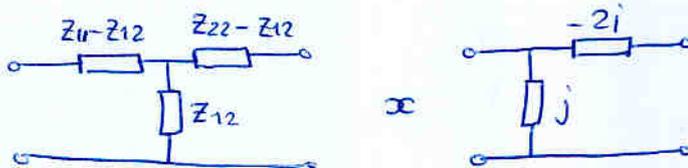
recordando: $\Gamma = \frac{Z-Z_0}{Z+Z_0} = \frac{\bar{Z}-1}{\bar{Z}+1} \rightarrow \bar{Z} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$

en matrices: $S = (\bar{Z}-1)(\bar{Z}+1)^{-1} \rightarrow \bar{Z} = (1+S)(1-S)^{-1}$

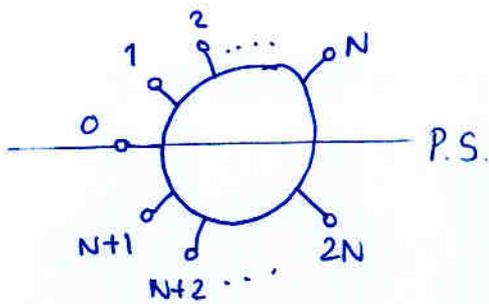
$1 = \text{matriz identidad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{Z} = (1+S)(1-S)^{-1} = j \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z = j \begin{pmatrix} Z_0 & Z_0 \\ Z_0 & -Z_0 \end{pmatrix}$$



¿Y si hay un acceso en el plano de simetría?



$$[S] = \begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \dots & S_{0, 2N} \\ S_{10} & & & \\ S_{20} & & & \\ \vdots & & & \\ S_{2N,0} & & & \end{bmatrix}$$

← (2N+1) →

↑ 2N+1 ↓

Estos no se pueden resolver por simetría

Esta submatriz corresponde al acceso 0 terminado con Z_0 , y ahora la red sí que es simétrica

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} ([S^e] + [S^o]) & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

¿Y qué hago para calcular estas?

$$S_{00} = \frac{b_1}{a_0} \Big|_{a_1=a_2=\dots=0}$$

Hacemos lo que dijimos en el divisor Wilkinson



Al estar excitando en un punto contenido en el plano de simetría, todas las tensiones y corrientes serán simétricas, y por tanto será como tener una excitación par (pared magnética)

Nota: aunque una red sea simétrica, si no "coinciden simétricamente" las impedancias de referencia de los puertos, NO PUEDO aplicar NADA de simetría

Analizamos el circuito partido



Puedo hacer este análisis para toda la columna

$$S_{i0} = \frac{b_i}{a_0} \Big|_{a_1=a_2=\dots=0}$$

Aún me falta toda la primera fila, si la red es recíproca será igual a la primera columna

2. This diagram shows an example of a simple circuit.



The diagram shows a simple circuit with a battery, a resistor, and a light bulb. The current flows from the positive terminal of the battery through the resistor and the light bulb, and back to the negative terminal.

The diagram shows a cross-section of a wire with multiple strands. The strands are labeled as 'Conductor' and 'Insulation'.

$$I = \frac{V}{R} \quad \text{and} \quad P = IV$$



The diagram shows a cross-section of a wire with multiple strands. The strands are labeled as 'Conductor' and 'Insulation'. The diagram also shows a voltage source connected to the wire.

The diagram shows a cross-section of a wire with multiple strands. The strands are labeled as 'Conductor' and 'Insulation'. The diagram also shows a voltage source connected to the wire.

The diagram shows a cross-section of a wire with multiple strands. The strands are labeled as 'Conductor' and 'Insulation'. The diagram also shows a voltage source connected to the wire.

The diagram shows a cross-section of a wire with multiple strands. The strands are labeled as 'Conductor' and 'Insulation'.



The diagram shows a cross-section of a wire with multiple strands. The strands are labeled as 'Conductor' and 'Insulation'.

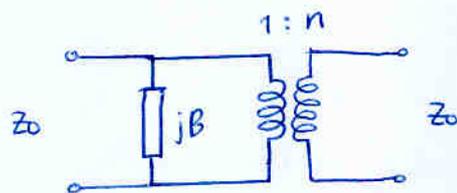
$$I = \frac{V}{R} \quad \text{and} \quad P = IV$$

The diagram shows a cross-section of a wire with multiple strands. The strands are labeled as 'Conductor' and 'Insulation'. The diagram also shows a voltage source connected to the wire.

Problema 8

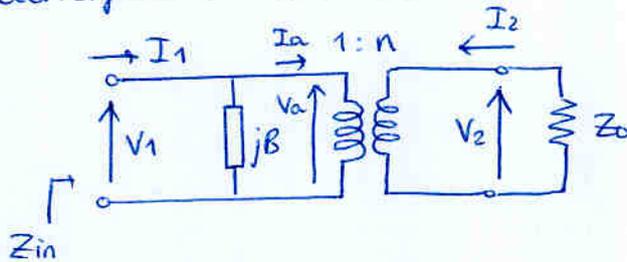
$$S_{11} = \frac{-1-j}{3+j}$$

$$S_{22} = \frac{1-j}{3+j}$$



con $Z_0 = 1$
(jB normalizado)

Identificar: S_{11} S_{12}



$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{\bar{Z}_{in} - 1}{\bar{Z}_{in} + 1} = \frac{1 - \bar{Y}_{in}}{1 + \bar{Y}_{in}}$$

si: $V_a = V_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_a}{V_2} = \frac{1}{n} \\ \frac{I_a}{I_2} = -n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} V_2 = -Z_0 I_2 \\ V_a = -\frac{Z_0 I_2}{n} \\ I_a = -n I_2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \boxed{\begin{array}{l} \frac{V_a}{I_a} = \frac{Z_0}{n^2} \end{array}}$$

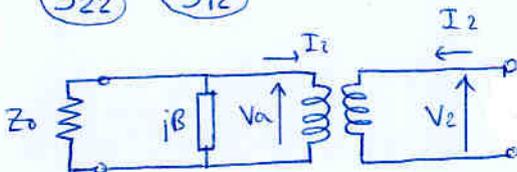
$$Y_{in} = jB + \frac{I_a}{V_a} = jB + \frac{Z_0}{n^2}$$

por tanto (tomando $Z_0 = 1$)

$$S_{11} = \frac{1 - j\bar{B} - n^2}{1 + j\bar{B} + n^2} = \frac{-1-j}{3+j} \rightarrow \begin{cases} \bar{B} = 1 \\ n^2 = 2 \end{cases}$$

$$S_{21} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11}) = \left\{ \frac{V_2}{V_1} = n \right\} =$$

S_{22} S_{12}



$$S_{22} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_a}{V_2} = \frac{1}{n} \\ \frac{I_a}{I_2} = -n \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} V_a \cdot n = V_2 \\ I_2 = \frac{-I_a}{n} \end{array}$$

$$\frac{V_2}{I_2} = \frac{-V_a}{I_a} \cdot n^2 = n^2 (1 + j\beta)$$

\uparrow $Y_0 = 1$

$$\frac{1}{\left(\frac{-I_a}{V_a}\right)} = \frac{1}{Y_0 + j\beta}$$

admitancia Y_a

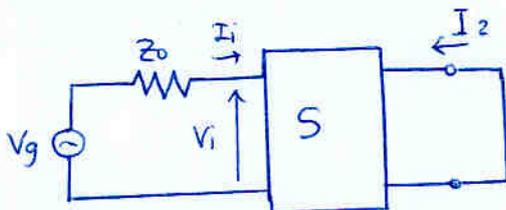
Por tanto

$$S_{22} = \frac{n^2 - 1 - j\beta}{n^2 + 1 + j\beta} = \frac{1 - j}{3 + j}$$

para S_{12} :
aplicando
la fórmula

$$S_{12} = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \frac{V_1}{V_2} (1 + S_{22}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es recíproco}}}{=} S_{21}$$

Problema 26



Red pasiva
recíproca
sin pérdidas
simétrica

$$\begin{array}{l} V_g = 10 \text{ V} \\ Z_0 = 50 \Omega \\ I_2 = -1,018 \text{ A} \\ S_{21} = \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

pasiva y sin pérdidas \rightarrow unitaria
recíproca
simétrica
 S_{21} real } \rightarrow Es un inversor

inversor

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{además } Z_{in} = \frac{K^2}{Z_L} \Big|_{Z_L=0} = \infty$$

estamos viendo circuito abierto

$$\begin{array}{l} V_1 = V_g \\ I_1 = 0 \end{array}$$

Por tanto

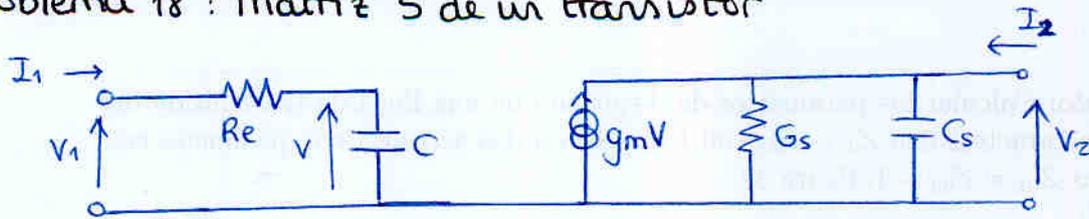
$$\begin{array}{l} V_1 = Z_{12} I_2 \rightarrow Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{V_g}{I_2} = j 55,5 \Omega \\ V_2 = Z_{12} I_1 = 0 \end{array}$$

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{12}/Z_0 \\ Z_{12}/Z_0 & 0 \end{pmatrix}$$

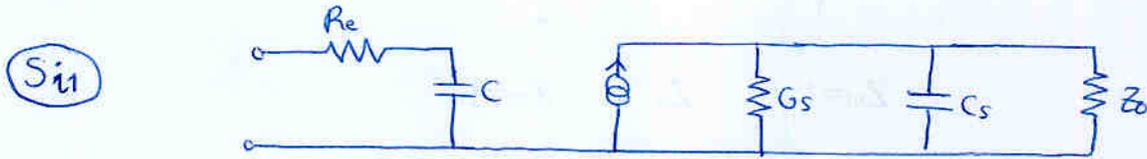
Entonces:

$$S = (\bar{Z} - 1)(\bar{Z} + 1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{12}/Z_0 \\ Z_{12}/Z_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 18 : Matriz S de un transistor



Tomar $Z_0 = 1$



$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \quad Z_{in} = R_e + \frac{1}{j\omega C_e} \quad X_e = -\frac{1}{C_e \omega}$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11})$$

↓
 $\frac{V_2}{V_1}$?

por tanto:

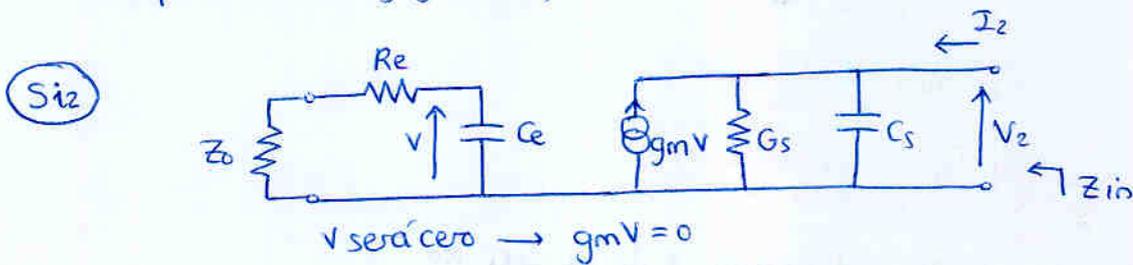
$$S_{11} = \frac{R_e + jX_e - Z_0}{R_e + jX_e + Z_0}$$

$$\frac{V_1 - V}{R_e} = I_1 = \frac{V_1}{Z_{in}} \rightarrow V = \frac{Z_{in} - R_e}{Z_{in}} \cdot V_1$$

$$g_m V = \frac{V_2}{(1/G_s)} + \frac{V_2}{(1/j\omega C_s)} + \frac{V_2}{Z_0}$$

$$V_2 \cdot \left(G_s + jC_s \omega + \frac{1}{Z_0} \right) = g_m \cdot \frac{Z_{in} - R_e}{Z_{in}} \cdot V_1$$

Ya sólo habría que sustituir para obtener S₁₁ y S₂₁ (expresión muy grande)



$$S_{22} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \quad Y_{in} = G_s + jC_s \omega$$

$$= \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}} = \frac{Y_0 - G_s - jC_s \omega}{Y_0 + G_s + jC_s \omega}$$

es una red no recíproca ($S_{21} \neq S_{12}$)

$$S_{12} = \frac{V_1}{V_2} (1 + S_{22}) \stackrel{V_1=0}{=} 0$$

Ejemplo: Calcular los parámetros de dispersión de una línea de transmisión de impedancia característica Z_0 y longitud l respecto a dos accesos de impedancias características $Z_{01} = Z_{02} = 1$, figura 3.6.

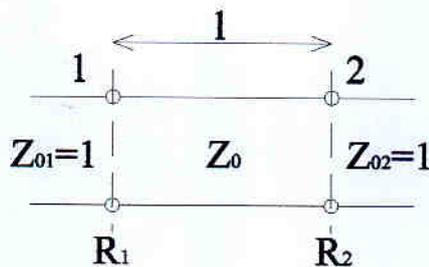


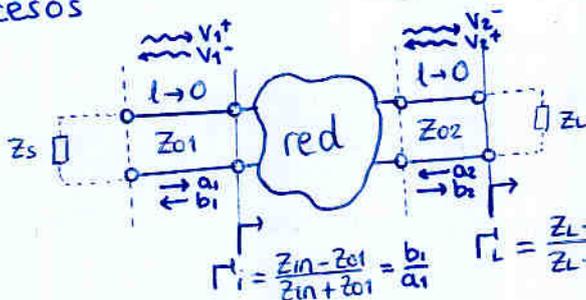
Figura 3.6: Línea de transmisión

Para el caso del cálculo de los parámetros S_{11} y S_{21} se cargará el acceso 2 con $Z_{02} = 1$, tal y como se muestra en la figura 3.7.

El factor de reflexión en la línea en $z = 0$ vendrá dado por:

$$\rho = \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0} = \frac{1 - Z_0}{1 + Z_0}$$

Nota: Cuidado con las impedancias de referencia de los accesos



$$a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_{01}}}$$

$$b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_{01}}}$$

$$a_2 = \frac{V_2^+}{\sqrt{Z_{02}}}$$

$$b_2 = \frac{V_2^-}{\sqrt{Z_{02}}}$$

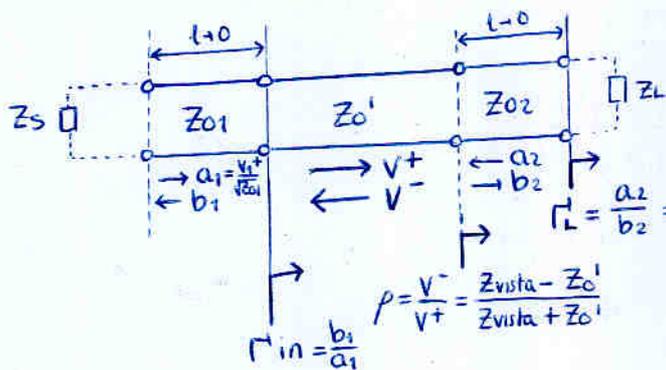
$$\Gamma_i = \frac{Z_{in} - Z_{01}}{Z_{in} + Z_{01}} = \frac{b_1}{a_1}$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}} = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\Gamma_i = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

Cuidado si la red tiene líneas de tx con imp caracter. Z_0'

En este ejemplo la red es una l. de tx con Z_0'



$V_1^+ = a_1 \sqrt{Z_{01}} \neq V^+$
 onda progresiva en "el puerto" Z_{01}
 onda progresiva en la red

$$\Gamma_L = \frac{a_2}{b_2} = \frac{Z_L - Z_{02}}{Z_L + Z_{02}}$$

$$\rho = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_{vista} - Z_0'}{Z_{vista} + Z_0'}$$

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1}$$

$$\Gamma_{in} = S_{11} \text{ si } a_2 = 0$$

i.e. $\Gamma_L = 0$
 i.e. $Z_L = Z_{02}$

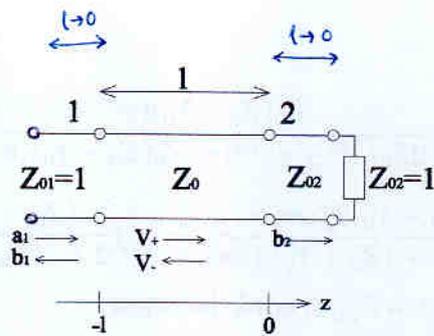
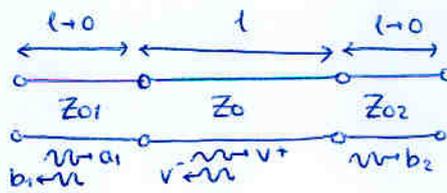


Figura 3.7: Cálculo de S_{11} y S_{21} .

Y la tensión y la corriente en la línea de transmisión vendrá dada por:

$$V(z) = V^+(e^{-j\beta z} + \rho e^{j\beta z})$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} V^+(e^{-j\beta z} - \rho e^{j\beta z})$$

La impedancia que se verá en el acceso 1, Z_1 , será el cociente de la tensión y la corriente que vendrán dadas por:

$$V_1 = V(z = -l) = V^+(e^{j\phi} + \rho e^{-j\phi})$$

$$I_1 = I(z = -l) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{j\phi} - \rho e^{-j\phi})$$

con $\phi = \beta l$.

Por lo que:

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = Z_0 \frac{e^{j\phi} + \rho e^{-j\phi}}{e^{j\phi} - \rho e^{-j\phi}} = Z_0 \frac{(1 + Z_0)e^{j\phi} + (1 - Z_0)e^{-j\phi}}{(1 + Z_0)e^{j\phi} - (1 - Z_0)e^{-j\phi}}$$

$$Z_1 = Z_0 \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi} + Z_0(e^{j\phi} - e^{-j\phi})}{e^{j\phi} - e^{-j\phi} + Z_0(e^{j\phi} + e^{-j\phi})}$$

Y por tanto el parámetro S_{11} vendrá dado por:

$$S_{11} = \frac{Z_1 - Z_{01}}{Z_1 + Z_{01}} = \frac{Z_1 - 1}{Z_1 + 1} = \frac{Z_0[e^{j\phi} + e^{-j\phi} + Z_0(e^{j\phi} - e^{-j\phi})] - [e^{j\phi} - e^{-j\phi} + Z_0(e^{j\phi} + e^{-j\phi})]}{Z_0[e^{j\phi} + e^{-j\phi} + Z_0(e^{j\phi} - e^{-j\phi})] + [e^{j\phi} - e^{-j\phi} + Z_0(e^{j\phi} + e^{-j\phi})]}$$

$$S_{11} = \frac{(Z_0^2 - 1)(e^{j\phi} - e^{-j\phi})}{2Z_0(e^{j\phi} + e^{-j\phi}) + (Z_0^2 + 1)(e^{j\phi} - e^{-j\phi})}$$

$$Z_0 [e^{j\phi} + e^{-j\phi} + Z_0(e^{j\phi} - e^{-j\phi})] - [e^{j\phi} - e^{-j\phi} + Z_0(e^{j\phi} + e^{-j\phi})]$$

$$= (e^{j\phi} + e^{-j\phi})(Z_0 - Z_0) + (e^{j\phi} - e^{-j\phi})(Z_0^2 - 1)$$

$$= (Z_0^2 - 1)(e^{j\phi} - e^{-j\phi})$$

en el interior de la línea

$$\rho = \frac{V^-}{V^+} = \frac{1 - Z_0}{1 + Z_0}$$

$$\Gamma = \frac{a_2}{b_2} = \frac{1 - Z_{02}}{1 + Z_{02}}$$

en el puerto

$$S_{11} = \frac{Z_0(Z_0 - Y_0)(e^{j\phi} - e^{-j\phi})}{2Z_0(e^{j\phi} + e^{-j\phi}) + Z_0(Z_0 + Y_0)(e^{j\phi} - e^{-j\phi})}$$

$$S_{11} = \frac{(Z_0 - Y_0)2j \sin \phi}{2 \cdot 2 \cos \phi + (Z_0 + Y_0)2j \sin \phi} = j \frac{(Z_0 - Y_0) \tan \phi}{2 + j(Z_0 + Y_0) \tan \phi} \quad (3.2.30)$$

En cuanto al parámetro S_{21} vendrá dado por:

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} = \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{V_2}{V_1}(1 + S_{11})$$

Las tensiones V_1 y V_2 vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} V_2 &= V(z=0) = V^+(1 + \rho) \\ V_1 &= V(z=-l) = V^+(e^{j\phi} + \rho e^{-j\phi}) \end{aligned}$$

De forma que se tendrá que:

$$S_{21} = \frac{1 + \rho}{e^{j\phi} + \rho e^{-j\phi}}(1 + S_{11}) = \frac{2}{e^{j\phi} + Z_0 e^{j\phi} + e^{-j\phi} - Z_0 e^{-j\phi}}(1 + S_{11})$$

$$S_{21} = \frac{2}{2 \cos \phi + 2Z_0 j \sin \phi} \left(\frac{2 + 2jZ_0 \tan \phi}{2 + j(Z_0 + Y_0) \tan \phi} \right)$$

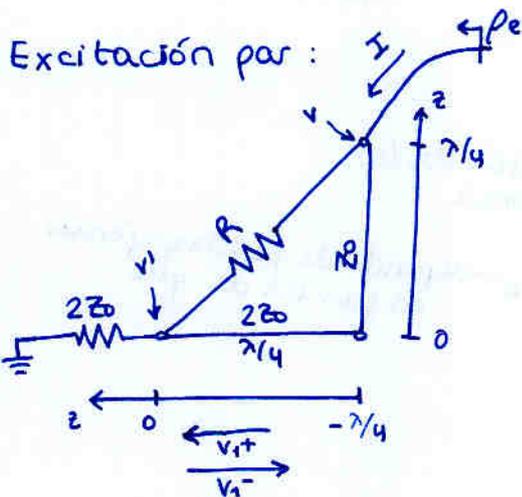
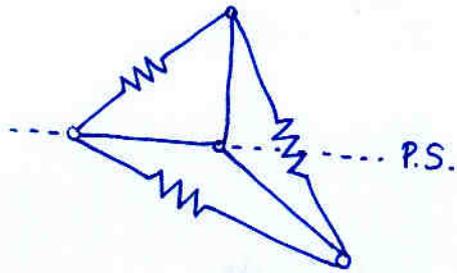
$$S_{21} = \frac{2/\cos \phi}{2 + j(Z_0 + Y_0) \tan \phi} \quad (3.2.31)$$

Y por simetría $S_{22} = S_{11}$ y $S_{12} = S_{21}$, quedando la matriz de dispersión de la línea de transmisión como:

$$[S] = \frac{1}{2 + j(Z_0 + Y_0) \tan \phi} \begin{bmatrix} j(Z_0 - Y_0) \tan \phi & 2/\cos \phi \\ 2/\cos \phi & j(Z_0 - Y_0) \tan \phi \end{bmatrix} \quad (3.2.32)$$

Bucles con líneas de transmisión

ejemplo:



$$\rho^e = \frac{Y_0 - Y^e}{Y_0 + Y^e}$$

$$\text{con } Y^e = \frac{I}{V}$$

$$LT_1 \rightarrow \begin{cases} V_1(z) = V_1^+ e^{-j\beta z} + V_1^- e^{+j\beta z} \\ I_1(z) = \frac{1}{2Z_0} (V_1^+ e^{-j\beta z} - V_1^- e^{+j\beta z}) \end{cases}$$

$$LT_2 \rightarrow \begin{cases} V_2(z) = V_2^+ e^{-j\beta z} + V_2^- e^{+j\beta z} \\ I_2(z) = \frac{1}{Z_0} (V_2^+ e^{-j\beta z} - V_2^- e^{+j\beta z}) \end{cases}$$

• Condiciones de contorno: (ramas por cada nodo)

$$I = I_R + I_{LT_2} = I_R - I_2(z = \lambda/4)$$

$$\text{siendo } I_2(z = \lambda/4) = \frac{1}{Z_0} (-jV_2^+ - jV_2^-)$$

$$I_R = \frac{V - V'}{R}$$

$$V' = V_1(z=0) = V_1^+ + V_1^-$$

$$\text{1º nodo} \begin{cases} V = V_2(z = \lambda/4) = -jV_2^+ + jV_2^- \\ I = \frac{V - V_1^+ - V_1^-}{R} + j \frac{1}{Z_0} (V_2^+ + V_2^-) \end{cases}$$

Para el segundo nodo:

$$I_R = \frac{V'}{2Z_0} - I_1(z=0) = \frac{V_1^+ + V_1^-}{2Z_0} - \frac{1}{2Z_0} (V_1^+ - V_1^-)$$

Para el tercer nodo:

$$-I_1(z=-\gamma u) = I_2(z=0)$$

$$-\frac{1}{2Z_0} (jV_1^+ + jV_1^-) = \frac{1}{Z_0} (V_2^+ - V_2^-) \quad \leftarrow \text{condición de las corrientes}$$

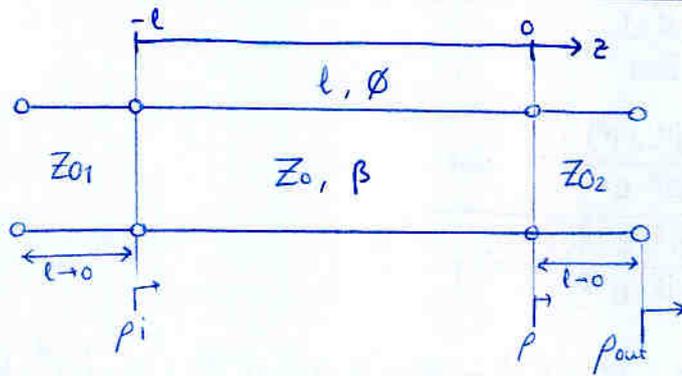
$$V_1(z=-\gamma u) = V_2(z=0)$$

$$jV_1^+ - jV_1^- = V_2^+ + V_2^- \quad \leftarrow \text{condición de las tensiones}$$

Incógnitas: $V_1^+, V_1^-, V_2^+, V_2^-$, $\frac{V}{I}$
 ← depende de qué despejemos en función de qué

Tenemos 5 ecuaciones

Problema. Matriz S de una línea de transmisión



- S_{11} y S_{21} (primera columna)
se termina el acceso 2 con impedancia Z_{02}
en la línea

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z} \\ I(z) = \frac{1}{Z_0} [V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{+j\beta z}] \end{cases}$$

donde $\frac{V^-}{V^+} = \rho = \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0}$

$$\begin{cases} V(z) = V^+ (e^{-j\beta z} + \rho e^{+j\beta z}) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \rho e^{+j\beta z}) \end{cases}$$

de esta fórmula obtenemos todo

en $z = -l \rightarrow \beta z = -\beta l = -\phi$

$$\begin{cases} V(-l) = V^+ (e^{j\phi} + \rho e^{-j\phi}) \\ I(-l) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{j\phi} - \rho e^{-j\phi}) \end{cases}$$

la impedancia de entrada es, por tanto:

$$Z_{in} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = Z_0 \cdot \frac{e^{j\phi} + \rho e^{-j\phi}}{e^{j\phi} - \rho e^{-j\phi}}$$

sustituyendo $\rho = \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0}$

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \frac{e^{j\phi} + \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0} e^{-j\phi}}{e^{j\phi} - \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0} e^{-j\phi}} = \frac{(Z_{02} + Z_0)e^{j\phi} + (Z_{02} - Z_0)e^{-j\phi}}{(Z_{02} + Z_0)e^{j\phi} - (Z_{02} - Z_0)e^{-j\phi}} \cdot Z_0 \\ &= Z_0 \cdot \frac{Z_{02}(e^{j\phi} + e^{-j\phi}) + Z_0(e^{j\phi} - e^{-j\phi})}{Z_0(e^{j\phi} + e^{-j\phi}) + Z_{02}(e^{j\phi} - e^{-j\phi})} \end{aligned}$$

Por tanto

$$S_{11} = \rho_{in}|_{z=0} = \frac{Z_{in} - Z_{01}}{Z_{in} + Z_{01}}$$

$$S_{11} = \frac{Z_0 \cdot \frac{Z_{02}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_0(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{Z_0(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_{02}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} - Z_{01}}{Z_0 \cdot \frac{Z_{02}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_0(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{Z_0(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_{02}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} + Z_{01}}$$

$$= \frac{Z_0 (Z_{02}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_0(e^{i\theta} - e^{-i\theta})) - Z_{01} (Z_0(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_{02}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}))}{Z_0 (Z_{02}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_0(e^{i\theta} - e^{-i\theta})) + Z_{01} (Z_0(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_{02}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}))}$$

$$S_{11} = \frac{(Z_0 Z_{02} - Z_0 Z_{01})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (Z_0^2 - Z_{01} Z_{02})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(Z_0 Z_{02} + Z_0 Z_{01})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (Z_0^2 + Z_{01} Z_{02})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}$$

En cuanto a S_{21} :

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11}) \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}$$

$$\begin{cases} V_2 = V(z=0) = V^+(1 + \rho) \\ V_1 = V(z=-l) = V^+(e^{i\theta} + \rho e^{-i\theta}) \end{cases}$$

por tanto

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \rho}{e^{i\theta} + \rho e^{-i\theta}}$$

sustituyendo $\rho = \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0}$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0}}{e^{i\theta} + \frac{Z_{02} - Z_0}{Z_{02} + Z_0} e^{-i\theta}} = \frac{Z_{02} + Z_0 + Z_{02} - Z_0}{(Z_{02} + Z_0)e^{i\theta} + (Z_{02} - Z_0)e^{-i\theta}} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_0(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} 1 + S_{11} &= 1 + \frac{(Z_0 Z_{02} - Z_0 Z_{01})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (Z_0^2 - Z_{01} Z_{02})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(Z_0 Z_{02} + Z_0 Z_{01})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (Z_0^2 + Z_{01} Z_{02})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} \\ &= \frac{2Z_0 Z_{02}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 2Z_0^2(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(Z_0 Z_{02} + Z_0 Z_{01})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (Z_0^2 + Z_{01} Z_{02})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} \end{aligned}$$

Por tanto

$$S_{21} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \cdot \frac{2Z_{02}}{Z_{02}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + Z_0(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} \cdot \frac{2Z_0 Z_{02}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 2Z_0^2(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(Z_0 Z_{02} + Z_0 Z_{01})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (Z_0^2 + Z_{01} Z_{02})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}$$

Particularizando $Z_{o1} = Z_{o2}$

$$S_{11} = \frac{(Z_o^2 - Z_{o1}^2)(e^{j\phi} - e^{-j\phi})}{2Z_o Z_{o1}(e^{j\phi} + e^{-j\phi}) + (Z_o^2 + Z_{o1}^2)(e^{j\phi} - e^{-j\phi})}$$

$$= \frac{j(Z_o^2 - Z_{o1}^2) \sin \phi}{2Z_o Z_{o1} \cos \phi + j(Z_o^2 + Z_{o1}^2) \sin \phi}$$

$$= \frac{(Z_o^2 - Z_{o1}^2) j \tan \phi}{2Z_o Z_{o1} + (Z_o^2 + Z_{o1}^2) j \tan \phi}$$

$\times \frac{1}{\cos \phi}$

sacando factor común Z_o
(y poniendo γ_o allá donde quede γ_{z_o})

al fin el paso que todos esperábamos

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

$$S_{11} = \frac{(Z_o - \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi}{2Z_{o1} + (Z_o + \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi}$$

$$1 + S_{11} = \frac{2Z_{o1} + 2Z_o j \tan \phi}{2Z_{o1} + (Z_o + \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi}$$

$$\sqrt{\frac{Z_{o1}}{Z_{o2}}} = 1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2Z_{o1}}{2Z_{o1} \cos \phi + 2Z_o j \sin \phi} = \frac{Z_{o1} / \cos \phi}{Z_{o1} + Z_o j \tan \phi}$$

$$S_{21} = \sqrt{\frac{Z_{o1}}{Z_{o2}}} \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdot (1 + S_{11}) = \frac{2Z_{o1}}{2Z_{o1} \cos \phi + 2Z_o j \sin \phi} \cdot \left(\frac{2Z_{o1} + 2Z_o j \tan \phi}{2Z_{o1} + (Z_o + \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi} \right)$$

$$= \frac{2Z_{o1} + 2Z_o j \tan \phi}{Z_{o1} \cos \phi + Z_o j \sin \phi} \cdot \frac{1}{2Z_{o1} + (Z_o + \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi}$$

$$= \frac{2}{\cos \phi} \cdot \frac{1}{2Z_{o1} + (Z_o + \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi}$$

$$S_{21} = \frac{2 / \cos \phi}{2Z_{o1} + (Z_o + \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi}$$

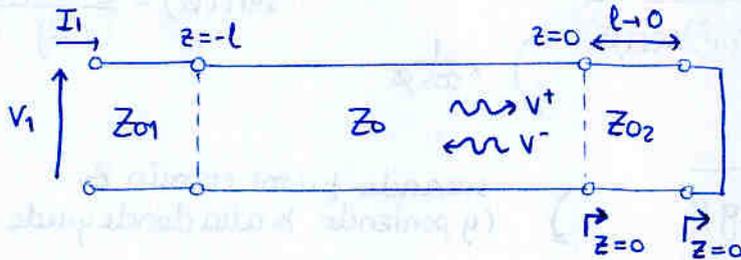
Por tanto (por simetría $S_{22} = S_{11}$ y $S_{12} = S_{21}$)

$$S = \frac{1}{2Z_{o1} + j(Z_o + \gamma_o Z_{o1}^2) \tan \phi} \begin{pmatrix} (Z_o - \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi & \frac{2}{\cos \phi} \\ \frac{2}{\cos \phi} & (Z_o - \gamma_o Z_{o1}^2) j \tan \phi \end{pmatrix}$$

Matriz Y de una línea de transmisión

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$



$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z} = V^+ (e^{-j\beta z} + \rho e^{+j\beta z}) \\ I(z) = \frac{1}{Z_0} [V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{+j\beta z}] = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \rho e^{+j\beta z}) \end{cases}$$

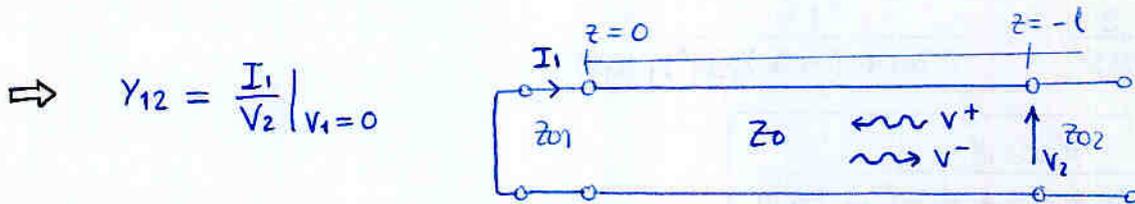
$$\rho = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$$

$$\begin{cases} V(z) = V^+ (e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}) \end{cases}$$

$$I_1 = I(z = -l) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) = \frac{V^+}{Z_0} 2 \cos(\beta l)$$

$$V_1 = V(z = -l) = V^+ (e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}) = V^+ 2j \sin(\beta l)$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\cos \beta l}{Z_0 j \sin \beta l} = \boxed{-j Y_0 \cot(\beta l) = Y_{11}}$$



Al darle la vuelta al eje \$z\$ se vuelve a obtener

$$\begin{cases} V(z) = V^+ (e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}) \end{cases}$$

$$I_1 = -I(z = 0) = -2 \frac{V^+}{Z_0}$$

$$V_2 = V(z = -l) = V^+ (e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}) = V^+ 2j \sin \beta l$$

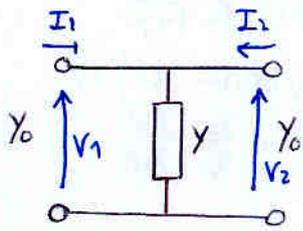
$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = -\frac{1}{Z_0 j \sin \beta l} = \boxed{j Y_0 \frac{1}{\sin \beta l} = Y_{12}}$$

Por simetría y reciprocidad

$$Y_{11} = Y_{22}$$

$$Y_{12} = Y_{21}$$

Cálculo de la matriz S de una admitancia paralelo



Lo calcularé calculando primero Z y pasándola a S

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned}$$

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{Y} \quad \text{Por simetría} \quad Z_{22} = \frac{1}{Y}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{Y} \quad Z_{12} = \frac{1}{Y}$$

entonces

$$Z = \begin{pmatrix} 1/Y & 1/Y \\ 1/Y & 1/Y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normalizando}} \bar{Z} = \begin{pmatrix} Y_0/Y & Y_0/Y \\ Y_0/Y & Y_0/Y \end{pmatrix}$$

$\bar{Z}_{ij} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{Z_{11} Z_{22}}}$

sabiendo la regla mnemotécnica

$$\rho = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{\bar{Z} - I}{\bar{Z} + I} \Rightarrow S = (\bar{Z} - I) \cdot (\bar{Z} + I)^{-1}$$

$$\bar{Z} - I = \begin{pmatrix} \frac{Y_0}{Y} - 1 & \frac{Y_0}{Y} \\ \frac{Y_0}{Y} & \frac{Y_0}{Y} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{Y} \begin{pmatrix} Y_0 - Y & Y_0 \\ Y_0 & Y_0 - Y \end{pmatrix}$$

$$\bar{Z} + I = \frac{1}{Y} \begin{pmatrix} Y_0 + Y & Y_0 \\ Y_0 & Y_0 + Y \end{pmatrix}$$

$$(\bar{Z} + I)^{-1} = - \frac{Y}{(Y_0 + Y)^2 - Y_0^2} \begin{pmatrix} Y_0 + Y & -Y_0 \\ -Y_0 & Y_0 + Y \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{2Y_0 + Y} \begin{pmatrix} Y_0 + Y & -Y_0 \\ -Y_0 & Y_0 + Y \end{pmatrix}$$

recuerda

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A_{adj})^t$$

siendo A_{adj} la matriz de los menores alternando el signo

Por tanto

$$S = \frac{1}{Y} \begin{pmatrix} Y_0 - Y & Y_0 \\ Y_0 & Y_0 - Y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2Y_0 + Y} \begin{pmatrix} Y_0 + Y & -Y_0 \\ -Y_0 & Y_0 + Y \end{pmatrix}$$

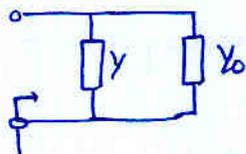
$$= \frac{1}{Y(2Y_0 + Y)} \begin{pmatrix} Y_0^2 - Y^2 - Y_0^2 & -Y_0^2 + Y_0Y + Y_0(Y_0 + Y) \\ Y_0^2 + Y_0Y - Y_0^2 + Y_0Y & -Y_0^2 + Y_0^2 - Y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{Y(2Y_0 + Y)} \begin{pmatrix} -Y^2 & 2Y_0Y \\ 2Y_0Y & -Y^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2Y_0 + Y} \begin{pmatrix} -Y & 2Y_0 \\ 2Y_0 & -Y \end{pmatrix} \quad \parallel \parallel$$

$$\begin{pmatrix} Y_0 + Y & -Y_0 \\ -Y_0 & Y_0 + Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 - Y & Y_0 \\ Y_0 & Y_0 - Y \end{pmatrix}$$

Calculando los parámetros directamente:

S_{11} :



$$Y_{in} = Y + Y_0$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1+\rho}{1-\rho} \Rightarrow Y_{in} = Y_0 \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

$$(1+\rho)Y_{in} = Y_0(1-\rho)$$

$$\rho = \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}}$$

$$S_{11} = \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}} = \frac{-Y}{2Y_0 + Y}$$

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11}) \underbrace{\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}}_1 = 1 \cdot (1 + S_{11}) = 1 + \frac{-Y}{2Y_0 + Y}$$

$$= \frac{2Y_0}{2Y_0 + Y}$$

por simetría
y reciprocidad

$$S_{22} = S_{11}$$

$$S_{12} = S_{21}$$

Así que hemos obtenido:

$$S = \frac{1}{2Y_0 + Y} \begin{pmatrix} -Y & 2Y_0 \\ 2Y_0 & -Y \end{pmatrix}$$

Obviamente este método ha resultado ser mucho más simple

Tema 4. Divisores y acopladores

- 4.1 - Redes de 3 accesos
 - 4.11 - Propiedades
 - 4.12 - Divisores
- 4.2 - Acopladores direccionales
- 4.3 - Lineas acopladas

1. Redes de 3 accesos

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

Vamos a suponer
unitariedad: $S \cdot S^+ = 1$

Recíproca $S = \begin{pmatrix} \circ & \alpha & \beta \\ \alpha & \circ & \gamma \\ \beta & \gamma & \circ \end{pmatrix}$

Vamos a demostrar que no podemos lograr

$$S = \begin{pmatrix} \circ & \alpha & \beta \\ \alpha & \circ & \gamma \\ \beta & \gamma & \circ \end{pmatrix} \text{ es decir, adaptar los 3 puertos}$$

cuando la red es pasiva, sin pérdidas y recíproca

$$\text{Unitariedad: } \left. \begin{array}{l} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \\ |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ suma de filas y columnas de elementos al cuadrado}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta \cdot \gamma^* = 0 \\ \alpha \cdot \gamma^* = 0 \\ \alpha \cdot \beta^* = 0 \end{array} \right\} \text{ producto escalar entre filas y columnas es cero}$$

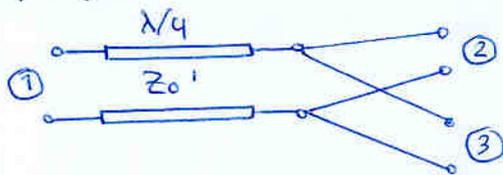
$$\beta \cdot \gamma^* = 0 \rightarrow \gamma = 0 \xrightarrow{(2)(3)} \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ |\beta| = 1 \end{cases} \rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 2 \text{ no es posible}$$

Lo mismo para las otras dos

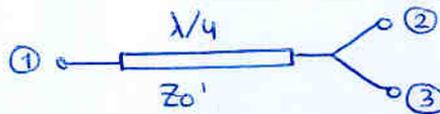
Por tanto lo que intentaremos será:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & \gamma & \delta \\ \beta & \delta & \epsilon \end{pmatrix} \text{ que al menos } S_{11} \text{ sea cero}$$

ejemplo:

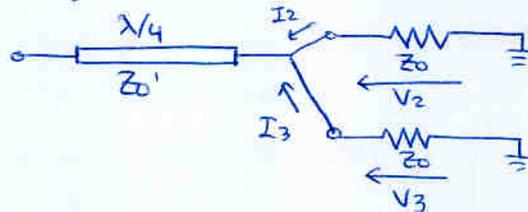


Se suele representar:



calculemos S de esta red pasiva, reciproca, sin pérdidas

$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0, a_3=0}$ puertos 2 y 3 terminados con impedancias de referencia



por simetria

$$V_2 = V_3$$

$$I_2 = I_3$$

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

$$Z_{in} = \frac{Z_0'^2}{Z_L} = \frac{Z_0'^2}{Z_0/2}$$

la linea $\lambda/4$ es un inversor
 $K^2 = Z_0'^2$

por tanto

$$S_{11} = \frac{2Z_0'^2 - Z_0}{2Z_0'^2 + Z_0} = 0 \Rightarrow Z_0' = \frac{Z_0}{\sqrt{2}}$$

$$S_{11} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Z_0' = \frac{Z_0}{\sqrt{2}}$$

análisis

síntesis: es lo que queremos diseñar

¿cómo calculo V_2/V_1 ?

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11})$$

siempre que haya l. de tx, ponemos ondas de tensión

$V_1 = V^+ + V^-$

$I_1 = \frac{V^+ - V^-}{Z_0'}$

Propaga las ondas

! son ondas de tensión SOBRE la linea interna no sobre la externa que suponemos con $l \rightarrow 0$ y Z_0

$V^+ \neq V_1^+$

\uparrow referida a la imped. de la linea interna

\uparrow referida a la impedancia de referencia (siendo $a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_0}}$)

$$V^+ e^{-j\beta l} + V^- e^{+j\beta l} \stackrel{\uparrow}{=} -jV^+ + jV^- = -j(V^+ - V^-) = V_2$$

$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$= -j Z_0' \cdot I_1 = \boxed{-j Z_0' \frac{V_1}{Z_{in}} = V_2}$$

$Z_{in} = \frac{Z_0'^2}{Z_0/2}$

ya tenemos la relación V_2/V_1 sin más que propagar las tensiones

También podríamos haber propagado las corrientes

$$\frac{V^+ e^{-j\beta l} - V^- e^{+j\beta l}}{Z_0'} = -I_2 - I_3$$

$$= \frac{-jV^+ - jV^-}{Z_0'} = -2I_2 = -2 \cdot \frac{-V_2}{Z_0} = \frac{2V_2}{Z_0} = \frac{-j(V^+ + V^-)}{Z_0} = \boxed{\frac{-jV_1}{Z_0'} = \frac{2V_2}{Z_0}}$$

Ya tengo la relacion $\frac{V_2}{V_1} = \frac{-j Z_0}{2 \cdot Z_0'}$

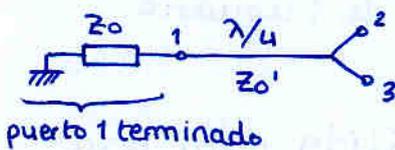
por tanto $S_{12} = S_{13} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$
 ↑ logica
 $= S_{21} = S_{31}$
 ↑ reciprocidad

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & S_{22} & S_{23} \\ -j/\sqrt{2} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

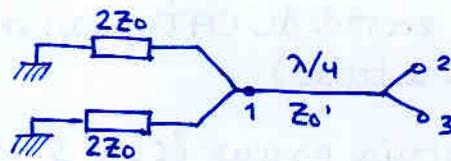
$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2} \Big|_{a_1=a_3=0} \quad S_{23} = \frac{b_2}{a_3} \Big|_{a_1=a_2=0}$$

$$S_{32} = \frac{b_3}{a_2} \Big|_{a_1=a_3=0} \quad S_{33} = \frac{b_3}{a_3} \Big|_{a_1=a_2=0}$$

Todos tienen en común que $a_1 = 0$



x

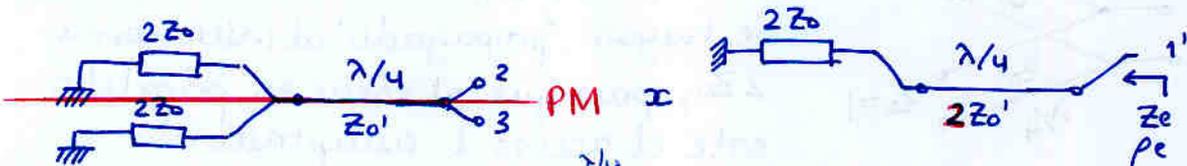


Podria interpretar

$$S = \begin{pmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

los parámetros S de una red de 2 accesos que además tiene simetría.

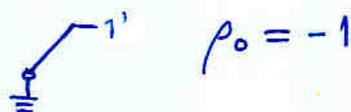
Excitación Par



Es un inversor: $Z_e \stackrel{\text{inversor } \lambda/4}{=} \frac{(2Z_0')^2}{2Z_0} = \frac{4}{2} = 2$
 $\rho^e = 0$

Excitación impar

substituir PS (pared simétrica) por una PE (i.e. un cortocircuito) la línea por tanto desaparece



Por tanto: $S'_{11} = S_{22} = \frac{1}{2}(\rho^e + \rho^o) = \frac{1}{2}$
 $S'_{21} = S_{32} = \frac{1}{2}(\rho^e - \rho^o) = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que, finalmente:

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -j\sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

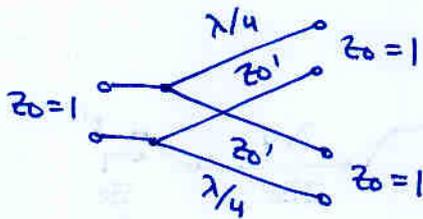
Recordemos $S \leftarrow$ tensión normalizada

Si pensamos en la potencia (módulo al cuadrado) $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = (\frac{1}{2})$
vemos que se divide la potencia en 2 (i.e. -3dB)

Como $S_{22} \neq 0$ $S_{33} \neq 0$ las entradas 2 y 3 no están acopladas
(no podríamos por ejemplo usarlo como un acoplador que saque por 1 la suma de 2 y 3)

- Vemos además que tiene el fallo de que no hay desacoplo entre 2 y 3 (i.e. si entra por error algo por 2, afectará a 3. i.e. si se usara en red de CATV, las reflexiones de 1 usuario afectarían a todos)
- Otra desventaja es que ésta S sólo es válida para una frecuencia determinada (que la long. de la línea sea $\lambda/4$)

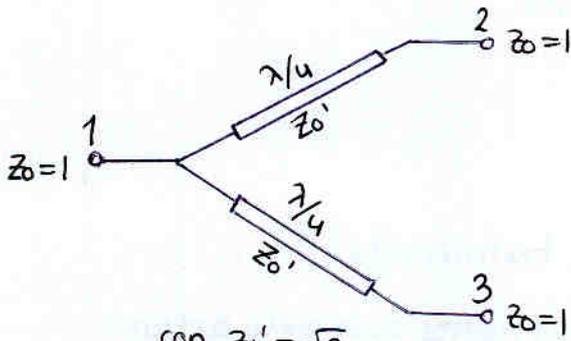
Una red similar sería:



queremos que al inicio de ambas líneas de tx, las impedancias de carga Z_0 se hayan 'propagado' al inicio como $2Z_0$, para que al estar en paralelo esté el acceso 1 adaptado.

i.e. $Z_0' = \sqrt{2}$ ya que $k = (Z_0')^2$ es un inversor

Problema: divisor con linea $\lambda/4$



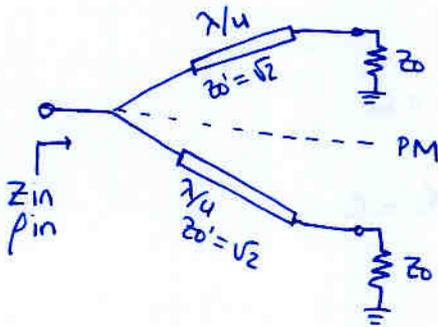
con $Z_0' = \sqrt{2}$
para que las lineas
sean un inversor
con $K = (Z_0')^2 = 2$
y el paralelo sea 1

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

excitamos en
punto de simetría
(pared magnética)

$a_1 = 0$
analizar por
simetría par/impar

- Primera columna: Accesos 2 y 3 terminados

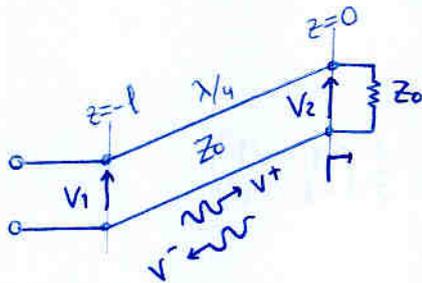


$$S_{11} = \rho_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = 0$$

fácil de
ver
 $Z_{in} = \frac{(\sqrt{2}Z_0)^2}{Z_0} \parallel \frac{(\sqrt{2}Z_0)^2}{Z_0} = Z_0$

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11})$$

Propaguemos las ondas



$$\begin{cases} V(z) = v^+(e^{-i\beta z} + \rho e^{+i\beta z}) \\ I(z) = \frac{v^+}{Z_0}(e^{-i\beta z} - \rho e^{+i\beta z}) \end{cases}$$

$$\rho = \frac{Z_0 - Z_0'}{Z_0 + Z_0'} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

Z_0
de la
línea

$$\beta \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = j$$

$$\begin{cases} V(z) = v^+(e^{-i\beta z} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} e^{+i\beta z}) \\ I(z) = \frac{v^+}{Z_0}(e^{-i\beta z} - \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} e^{+i\beta z}) \end{cases}$$

$$V_1 = V(z=-l = -\lambda/4) = v^+(-j + j \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}) = v^+ j \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - 1 \right)$$

$$V_2 = V(z=0) = v^+ \left(1 + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right) = v^+ \left(\frac{2}{1+\sqrt{2}} \right) \quad \leftarrow -\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

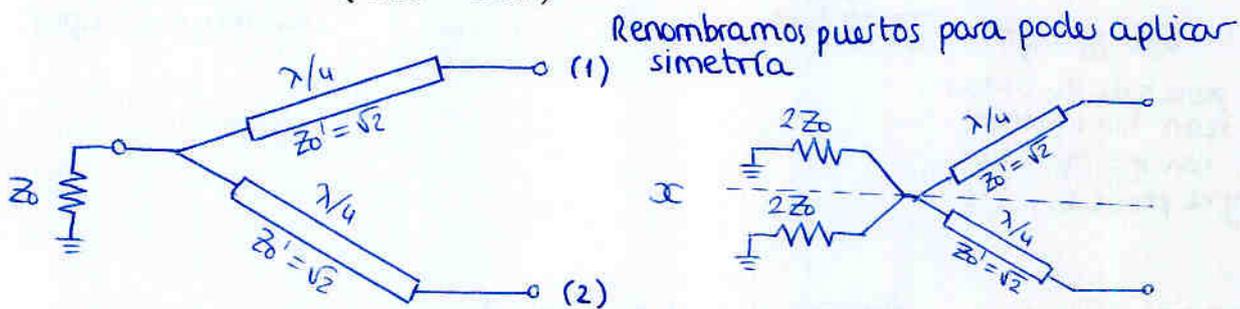
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{+2}{-2\sqrt{2}j} = j \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{Z_0' = \sqrt{2}}{=} \frac{1}{2} j\sqrt{2}$$

Por tanto

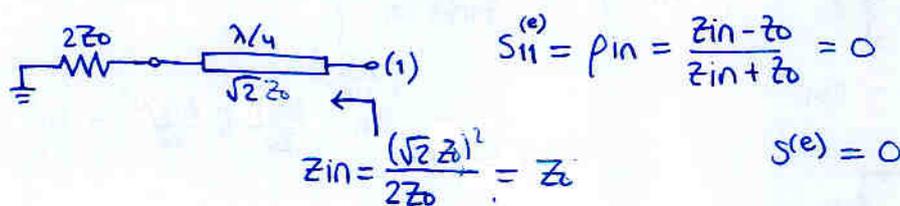
$$S_{21} \stackrel{\text{reciprocidad}}{=} S_{12} = \frac{1}{2} j\sqrt{2}$$

$$S_{31} = \frac{V_3}{V_1} (1 + S_{11}) = S_{13} \stackrel{\text{análisis idéntico}}{=} \frac{1}{2} j\sqrt{2}$$

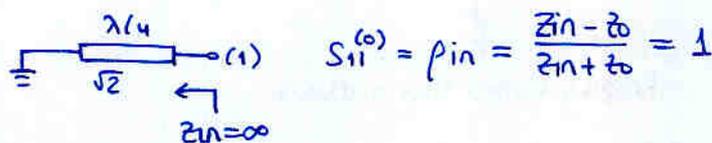
• Submatriz $\begin{pmatrix} S_{22} & S_{32} \\ S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}$ Puerto 1 terminado



• Excitación par: \rightarrow Pared magnética



• Excitación impar: \rightarrow Pared eléctrica



Por tanto

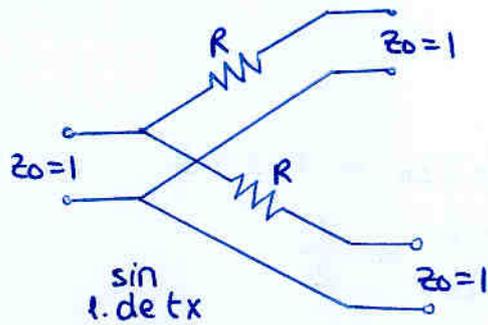
$$\begin{pmatrix} S_{22} & S_{32} \\ S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que, finalmente

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & j\sqrt{2} & j\sqrt{2} \\ j\sqrt{2} & 1 & -1 \\ j\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Divisores resistivos

mejores características a costa de tener pérdidas



Parece fácil ver que si $R = Z_0$, al terminar los accesos (2) y (3) (con Z_0) a la entrada se verá impedancia Z_0 y por tanto $S_{11} = 0$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=a_3=0} = \frac{V_2^- / \sqrt{Z_0}}{V_1^+ / \sqrt{Z_0}} = \frac{V_2^-}{V_1^+}$$

↑
gracias a haber elegido misma impedancia de referencia en ambos accesos

Nota: aunque no hayan líneas de tx, podemos hablar de ondas de tensión y corriente sin más que hacerlas constantes (sin $e^{-i\beta z}$) ya que $\beta z \approx 0$ (aprox. Tª circuitos)

además:

$$V_1 = V_1^+ + V_1^- \stackrel{S_{11}=0}{=} V_1^+$$

$$V_2 = V_2^+ + V_2^- \stackrel{\substack{\uparrow \text{la entrante} \\ \text{por acceso 2}}}{=} \stackrel{\substack{\uparrow \\ a_2=0 \\ \downarrow \\ V_2^+=0}}{=} V_2^-$$

Por lo tanto nos queda tan sencillo como

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1}$$

Es un simple divisor resistivo

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_0}{R + Z_0} = \frac{1}{2}$$

$$S_{21} = \frac{1}{2}$$

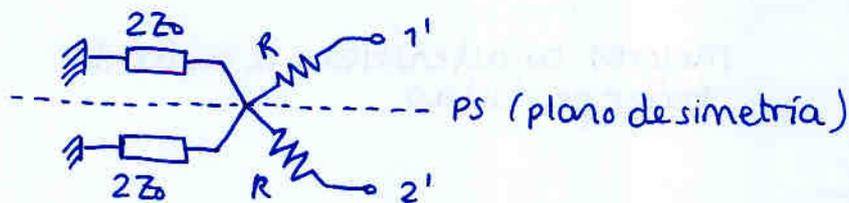
$$S_{21} = S_{31} = S_{31} = S_{21} = \frac{1}{2}$$

↑ simetría ↑ reciprocidad

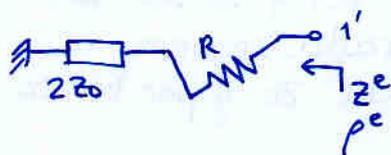
Tenemos:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & S_{22} & S_{23} \\ \frac{1}{2} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

la condición común es $a_1 = 0$ como antes, puede interpretarlo como una red simétrica de dos accesos



Caso par PS = PM



$$Z^e = R + 2Z_0 = 1 + 2 = 3$$

$$\rho^e = \frac{Z^e - Z_0}{Z^e + Z_0} = \frac{1}{2}$$

Caso impar PS = PE



$$Z^o = R = Z_0$$

$$\rho^o = \frac{Z^o - Z_0}{Z^o + Z_0} = 0$$

entonces:

$$S_{22} = S'_{11} = \frac{1}{2}(\rho^e + \rho^o) = \frac{1}{4} = S_{33} \quad \leftarrow \text{simetría}$$

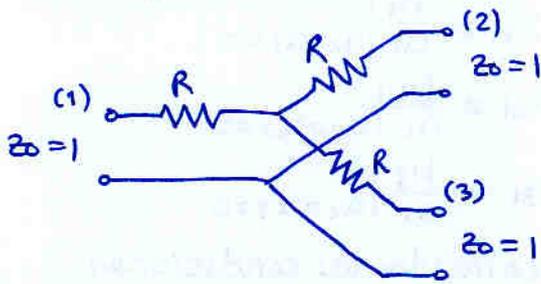
$$S_{32} = S'_{21} = \frac{1}{2}(\rho^e - \rho^o) = \frac{1}{4} = S_{23}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Comentarios:

- accesos (2) y (3) siguen desadaptados
- toda la potencia que llega por (1) entra ($S_{11}=0$) pero no todo sale (sale $1/4$ y $1/4$ por puertos (2) y (3)). Estamos perdiendo la mitad de la potencia dentro (disipada)
- siguen acoplados los accesos (2) y (3)
i.e. reflexión en usuario (2) afecta al usuario (3)
- Ventaja: no depende de la frecuencia.
Es un divisor de banda ancha

Otra forma de divisor resistivo



Para lograr adaptar el puerto (1)

$$A = \frac{Z_0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1+1/3}{1+1/3} \right) = 1$$

↑ con puertos (2) y (3) terminados ↓

$$S_{11} = 0$$

Ademas, lógicamente tambien se cumple

Hemos logrado adaptar todos los accesos

$$S_{22} = 0$$

$$S_{33} = 0$$

Estudiándolo se obtiene

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

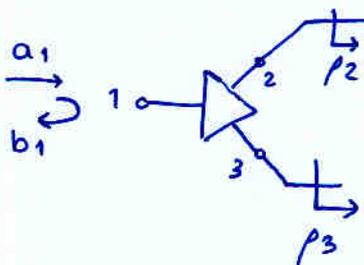
- Todos los puertos adaptados
- se pierde la mitad de la potencia (disipada en la resistencia)
- siguen sin estar desacoplados accesos 2 y 3
- No depende de la frecuencia.

¿cómo podríamos mejorarlo?

¿Qué le pediríamos a un divisor ideal?

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 3 \text{ accesos adaptados} \\ \rightarrow \text{reparte la potencia por igual} \\ \rightarrow \text{accesos (2) y (3) desacoplados} \end{array}$$

Además; imaginemos que no cargamos los accesos (2) y (3) correctamente

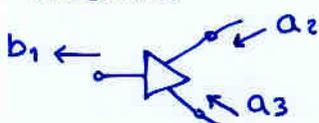


tendríamos:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

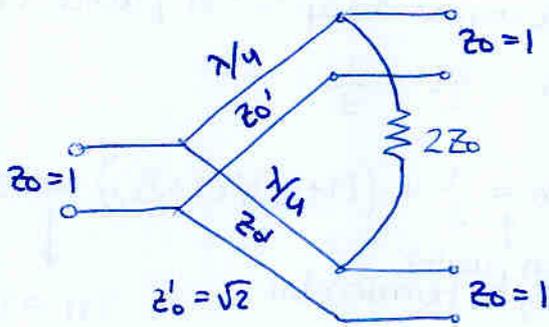
$$\begin{cases} b_2 = \alpha a_1 \\ b_3 = \alpha a_1 \end{cases} \rightarrow \text{se sigue comportando bien}$$

ademas



se tendría $b_1 = \alpha(a_2 + a_3) \rightarrow$ se comporta como combinador ideal

Divisor Wilkinson

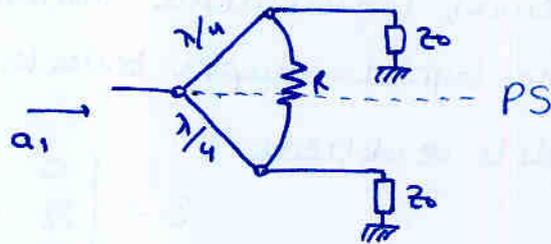


$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=a_3=0}$$

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=a_3=0}$$

$$S_{31} = \frac{b_3}{a_1} \Big|_{a_2=a_3=0}$$

coinciden las condiciones de contorno de estos 3 parámetros



Situación curiosa: estamos excitando en un punto perteneciente al plano de simetría.

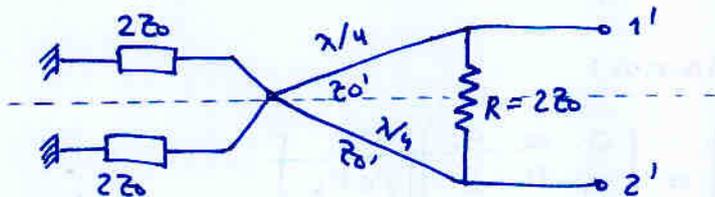
Por simetría, a la resistencia entrarán por ambas direcciones la misma corriente (dirección opuesta) por tanto no va a fluir corriente por ella, por tanto podemos ignorarla para calcular S_{11} , S_{21} , S_{31}

son ya conocidos de un análisis anterior:

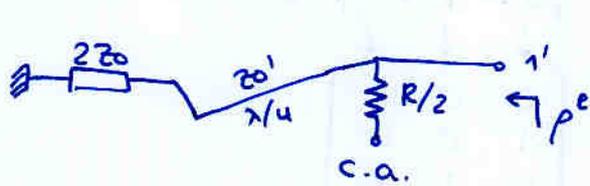
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & & \\ -i/\sqrt{2} & & \end{pmatrix}$$

Los 4 parámetros que faltan tienen como condición común que el acceso 1 está terminado.

Hacemos como siempre:



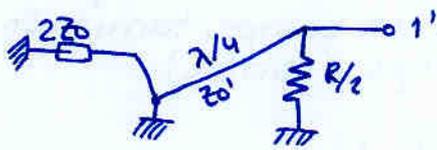
Par : PS → PM



$$Z^e = \frac{(Z_0')^2}{2Z_0} = \frac{Z_0}{2} = 1$$

$$\rho^e = 0$$

Impar PS → PE



$$Z^e = \frac{R}{2} \parallel \frac{(Z_0')^2}{0}$$

$$= \frac{R}{2} = Z_0 = 1$$

$$\rho^e = 0$$

$$S'_{11} = S_{22} = \frac{1}{2}(\rho^e + \rho^o) = 0$$

$$S'_{21} = S_{32} = \frac{1}{2}(\rho^e - \rho^o) = 0$$

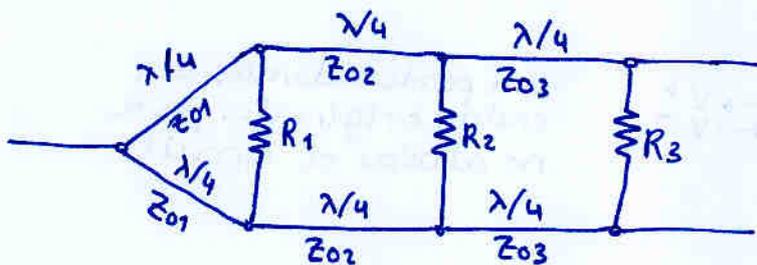
Hemos logrado:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Justo lo que queríamos
y para colmo no se disipa
potencia en la resistencia

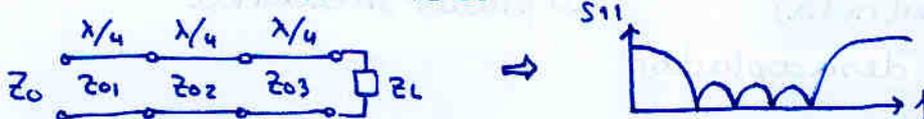
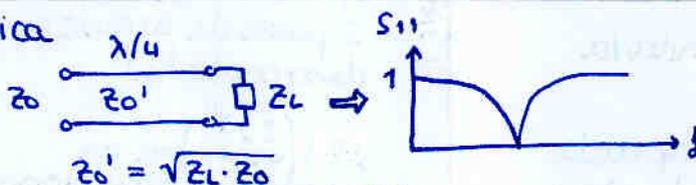
Desventaja : válida sólo para una frecuencia (banda estrecha)

Se puede lograr un divisor wilkinson de banda ancha:

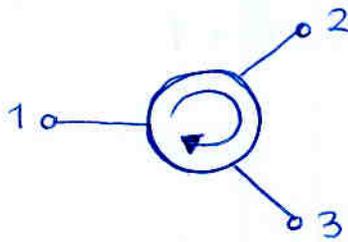


Hemos introducido grados de libertad que nos permiten diseñar para mejorar la respuesta en frecuencia

Es una técnica típica



Circulador



$$S = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{entra} \\ \text{por 1} \\ \downarrow \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{entra} \\ \text{por 2} \\ \downarrow \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{entra} \\ \text{por 3} \\ \downarrow \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

• No es simétrica: tendré que hacer uso de un comportamiento anisótropo (ferrita)

• Es pasiva y sin pérdidas \leftrightarrow unitariedad

En la práctica no son ideales:

Pérdidas de retorno: $L_R = -20 \log |S_{11}|$ ideal: $-\infty$ dB

Pérdidas de inserción: $L_I = -20 \log |S_{21}|$ ideal: 0 dB

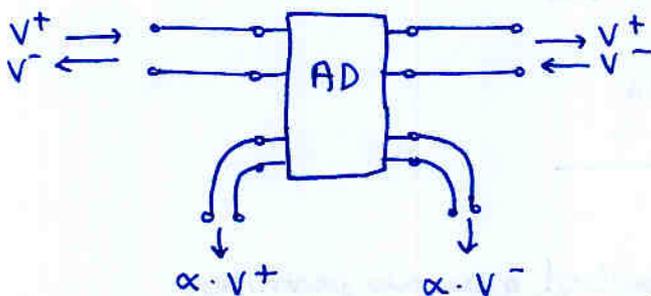
Aislamiento: $I = -20 \log |S_{31}|$ ideal: $-\infty$ dB
i.e. entrar por 1 y salir por 3

una mejor definición:

$$\text{Aislamiento: } I = -20 \log |S_{31}| - L_I$$

4.2 Acopladores direccionales

Nos permite discriminar entre onda positiva y negativa para poder medir; ya que si medimos la tensión $V = V^+ + V^-$ no tenemos esa información



sin perder además las ondas originales para no alterar el circuito

se puede demostrar

Red 4 accesos

- Pasiva
- Sin pérdidas
- Recíproca
- Completamente adaptado ($S_{ii} = 0$) (diagonal nula)

\rightarrow S unitaria

aparecen automáticamente 2 pares de accesos desacoplados

\Downarrow
por tanto será un acoplador direccional

Dem:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & \delta & 0 & \sigma \\ \gamma & \varepsilon & \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

Exigiendo unitariedad

$$SS^+ = I$$

$$\begin{cases} (1^{\text{a}} \text{ columna}) \cdot (2^{\text{a}} \text{ columna}) = 0 \\ (1^{\text{a}} \text{ columna}) \cdot (3^{\text{a}} \text{ columna}) = 0 \\ (1^{\text{a}} \text{ columna}) \cdot (4^{\text{a}} \text{ columna}) = 0 \end{cases}$$

↑ producto escalar
(no olvidar conjugado)

$$\begin{cases} (1) \beta \cdot \delta^* + \gamma \cdot \varepsilon^* = 0 \\ (2) \alpha \cdot \delta^* + \gamma \cdot \sigma^* = 0 \\ (3) \alpha \varepsilon^* + \beta \cdot \sigma^* = 0 \end{cases}$$

Con estas 3 ecuaciones tendremos suficiente

$$(2) \text{ y } (3) \equiv \begin{pmatrix} \delta^* & \gamma \\ \varepsilon^* & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \sigma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistema homogéneo

$$\text{Solución: } \begin{cases} \alpha = \sigma^* = 0 \\ \Delta = \det \begin{pmatrix} \delta^* & \gamma \\ \varepsilon^* & \beta \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$(4) \delta^* \beta - \gamma \varepsilon^* = 0 \leftarrow \text{misma ec. que la primera pero signo cambiado}$$

$$\begin{cases} (1) + (4) \Rightarrow 2\delta^* \beta = 0 \\ (1) - (4) \Rightarrow 2\gamma \varepsilon^* = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} (1) + (4) \\ (1) - (4) \end{cases}} \right\} \text{2 valores de estos 4 deben ser igual a cero}$$

⇒ lo cual implica que hay dos pares de accesos desacoplados

Ya que la numeración de los puertos es arbitraria, puedo llamar tales que 1y2 y 3y4 sean los accesos desacoplados

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ \gamma & \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] & [B] \\ [B]^t & [0] \end{pmatrix}$$

Resulta que si S es unitaria $\Rightarrow B$ es unitaria
 $SS^+ = I \quad BB^+ = I$

Dem:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ B^+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^+ & 0 \\ 0 & B^t B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto podemos dar a B el aspecto de una matriz que cumpla unitariedad (pasiva y sin pérdidas)

$$B = \begin{bmatrix} \cos T e^{i\phi_1} & \text{sen} T e^{i\phi_2} \\ \text{sen} T e^{i\phi_3} & -\cos T e^{i(\phi_2 - \phi_1 + \phi_3)} \end{bmatrix}$$

Podemos jugar ahora con los planos de referencia (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) de forma que lleguemos a una situación canónica:

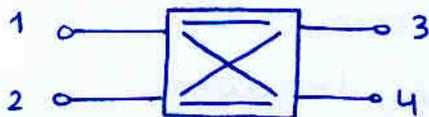
$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos T & \text{sen} T \\ 0 & 0 & \text{sen} T & -\cos T \\ \cos T & \text{sen} T & 0 & 0 \\ \text{sen} T & -\cos T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ó

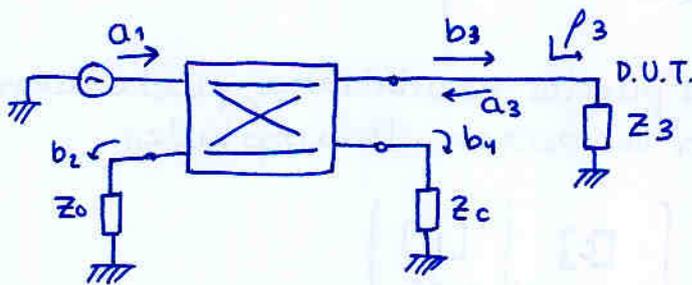
$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos T & j \text{sen} T \\ 0 & 0 & j \text{sen} T & \cos T \\ \cos T & j \text{sen} T & 0 & 0 \\ j \text{sen} T & \cos T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las dos formas canónicas de la matriz [S] de un acoplador direccional.

ejemplo: uso de un acoplador direccional

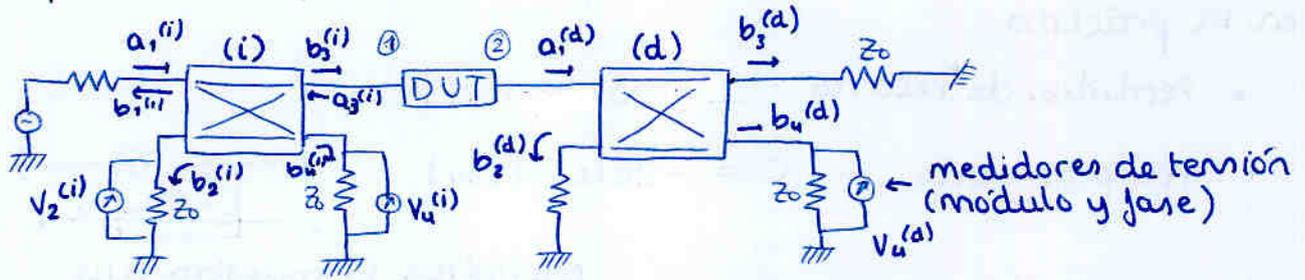


Donde los pares de accesos desacoplados son los que no están unidos por líneas



Haciendo el cociente $\frac{b_4}{b_2}$ puedo obtener ρ_3 de una carga incógnita

ejemplo mas completo



Queremos medir los parametros S en el DUT

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= b_3^{(i)} \\ b_1 &= a_3^{(i)} \\ a_2 &= b_1^{(d)} \\ b_2 &= a_1^{(d)} \end{aligned} \right\} \text{CUIDADO: siempre y cuando el DUT se vea terminado con las impedancias de referencia (ya que } a_i = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_0}} \leftarrow \begin{matrix} \text{en } S_{11} \\ \text{es igual} \end{matrix} \right)$$

condiciones de contorno

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = S \cdot a$$

para (i):

$$\begin{cases} b_1^{(i)} = \cos \alpha \cdot a_3^{(i)} \\ b_2^{(i)} = \sin \alpha \cdot a_3^{(i)} \\ b_3^{(i)} = \cos \alpha \cdot a_1^{(i)} \\ b_4^{(i)} = \sin \alpha \cdot a_1^{(i)} \end{cases}$$

ignorando las ondas que son nulas

$$\begin{aligned} a_2^{(d)} &= 0 \\ a_3^{(i)} &= 0 \\ a_4^{(d)} &= 0 \\ a_4^{(i)} &= 0 \\ a_3^{(d)} &= 0 \end{aligned}$$

para (d):

$$\begin{cases} b_1^{(d)} = 0 \\ b_2^{(d)} = 0 \\ b_3^{(d)} = \cos \alpha \cdot a_1^{(d)} \\ b_4^{(d)} = \sin \alpha \cdot a_1^{(d)} \end{cases}$$

se cumplen las condiciones ($a_2=0$) para medir S_{11} y S_{21} sólo necesito los cocientes

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} \quad S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0}$$

$$\left. \begin{aligned} b_2^{(i)} = \sin \alpha \cdot a_3^{(i)} &\rightarrow V_2^{(i)} = \sin \alpha \cdot b_1 \\ b_3^{(i)} = \cos \alpha \cdot a_1^{(i)} &\rightarrow a_1 = \cos \alpha \cdot a_1^{(i)} \\ b_4^{(i)} = \sin \alpha \cdot a_1^{(i)} &\rightarrow V_4^{(i)} = \sin \alpha \cdot a_1^{(i)} \end{aligned} \right\} S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{V_2^{(i)} / \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \frac{V_4^{(i)}}{\sin \alpha}}$$

$$S_{11} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{V_2^{(i)}}{V_4^{(i)}}$$

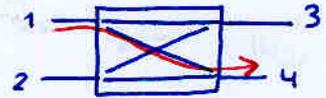
$$\left. \begin{aligned} b_1^{(d)} = 0 &\rightarrow a_2 = 0 \\ b_4^{(d)} = \sin \alpha \cdot a_1^{(d)} &\rightarrow V_4^{(d)} = \sin \alpha \cdot b_2 \end{aligned} \right\} S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{V_4^{(d)} / \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \frac{V_4^{(i)}}{\sin \alpha}}$$

$$S_{21} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{V_4^{(d)}}{V_4^{(i)}}$$

Podemos definir parámetros del acoplador direccional en la práctica

- Pérdidas de retorno $L = -20 \log |S_{ii}|$

- Acoplamiento $C = -20 \log |S_{14}|$



Nos indica la muestra que tomamos
 se toma el camino con S_{ij} más pequeño
 No siempre es S_{14} , depende de la numeración de puertos

- Directividad $D = 20 \log \frac{|S_{14}|}{|S_{12}|}$

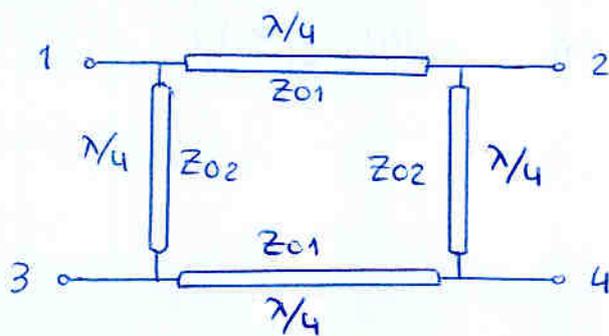
← qué parte de la señal monitorizo
 ← qué parte de la señal me sale por el puerto que monitorizo que no toca!

Aislamiento = $20 \log |S_{12}|$

la directividad indica CUANTAS veces mejor es el acoplamiento que el aislamiento

- Híbrido: un acoplador direccional con $C = 3 \text{ dB}$
 i.e. se toma la mitad de la potencia como muestra ($\alpha = 45^\circ$)
 $\sin \alpha = \cos \alpha$

implementación: Branch Line



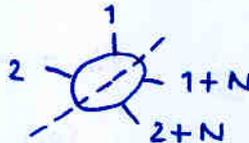
Pasiva sin pérdidas } unitaria

si consigo que la diagonal sea cero ya tendremos:

Unitaria diagonal ceros } ⇒ aparecen 4 ceros más ⇒ será un acoplador direccional

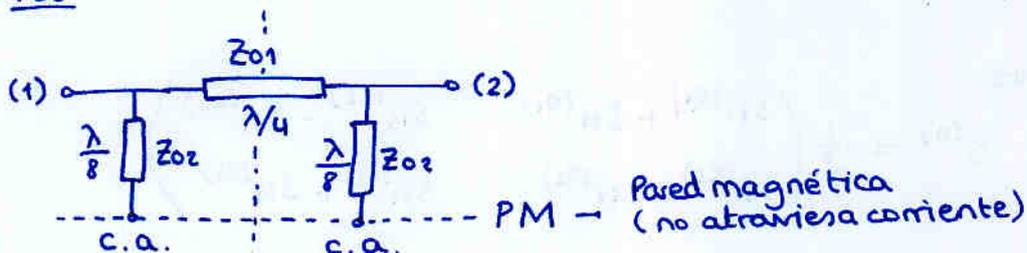
Para analizarlo, hacemos uso de la doble simetría:

Primero la simetría horizontal porque así ya nos encaja la numeración

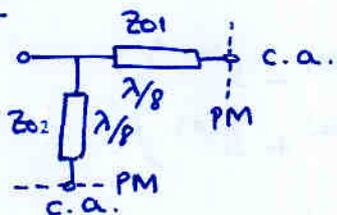


Aplicamos "recursivamente" la simetría

Par



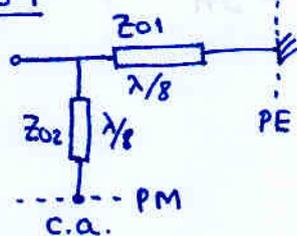
Par₁



$$S_{11}^{(e1)} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

$$\begin{aligned} Y_{in} &= Y_a + Y_b \\ &= j Y_{01} \cdot \operatorname{tg}(\beta l) + j Y_{02} \cdot \operatorname{tg}(\beta l) \\ &= j Y_{01} + j Y_{02} \end{aligned}$$

Impar₁



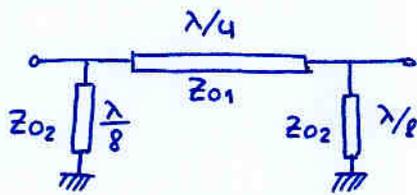
$$\begin{aligned} Y_{in} &= Y_a + Y_b \\ &= -j Y_{01} \operatorname{cotg}(\beta l) + j Y_{02} \cdot \operatorname{tg}(\beta l) \\ &= -j Y_{01} + j Y_{02} \end{aligned}$$

$$S_{11}^{(o1)} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

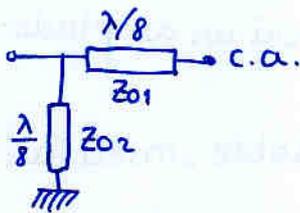
Por tanto

$$S^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_{11}^{(e_1)} + S_{11}^{(o_1)} & S_{11}^{(e_1)} - S_{11}^{(o_1)} \\ S_{11}^{(e_1)} - S_{11}^{(o_1)} & S_{11}^{(e_1)} + S_{11}^{(o_1)} \end{pmatrix}$$

Impar

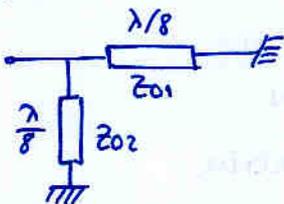


Par



$$\begin{aligned} Y_{in} &= Y_a + Y_b \\ &= jY_{01} \operatorname{tg}(\beta l) - jY_{02} \operatorname{cotg}(\beta l) \\ &= jY_{01} - jY_{02} \\ S_{11}^{(e_2)} &= \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}} \end{aligned}$$

Impar



$$\begin{aligned} Y_{in} &= -jY_{01} - jY_{02} \\ S_{11}^{(o_2)} &= \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}} \end{aligned}$$

Por tanto

$$S^{(o)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_{11}^{(e_2)} + S_{11}^{(o_2)} & S_{11}^{(e_2)} - S_{11}^{(o_2)} \\ S_{11}^{(e_2)} - S_{11}^{(o_2)} & S_{11}^{(e_2)} + S_{11}^{(o_2)} \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix}$$

Para que sea un acoplador direccional hay que forzar

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (S_{11}^{(e_1)} + S_{11}^{(o_1)} + S_{11}^{(e_2)} + S_{11}^{(o_2)})$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \bar{Y}_{01}^2 &= 1 + \bar{Y}_{02}^2 && \text{normalizada} \\ Y_{01}^2 &= Y_0 + Y_{02}^2 && \text{sin normalizar} \end{aligned}}$$

La matriz entonces queda :

$$S = \frac{-1}{Y_{01}} \begin{pmatrix} 0 & j & 0 & Y_0 \\ j & 0 & Y_{02} & 0 \\ 0 & Y_{02} & 0 & j \\ Y_{02} & 0 & j & 0 \end{pmatrix}$$

tal y como se demostró:

Han aparecido 4 ceros más

forzando ceros en la diagonal S unitaria

Si renumeramos mis puertos

$$\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3} \quad (\text{cambiar filas } 2 \leftrightarrow 3 \\ \text{cambiar columnas } 2 \leftrightarrow 3)$$

$$S = \frac{-1}{Y_{01}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & j & Y_{02} \\ 0 & 0 & Y_{02} & j \\ j & Y_{02} & 0 & 0 \\ Y_{02} & j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

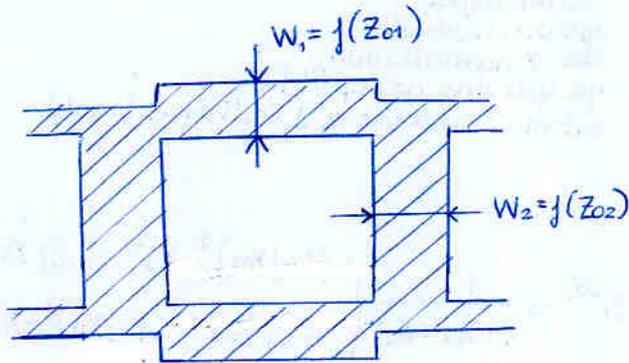
Parámetro importante: Acoplamiento

El acoplamiento será el S_{ij} + pequeño en módulo (sin contar desacoplados)

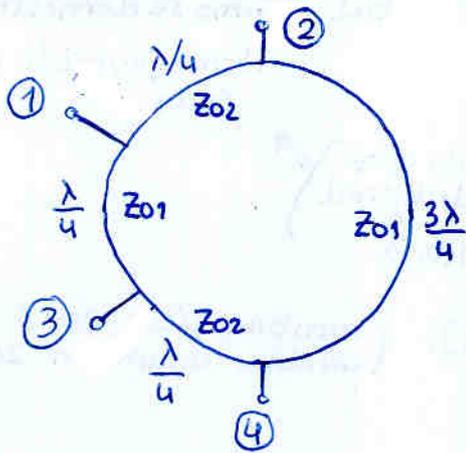
Híbrido \Rightarrow $Y_{02} = 1$
 $Y_{01} = \sqrt{2}$
 $Y_{01}^2 = 1 + Y_{02}^2$

$$S = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & j & 1 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ j & 1 & 0 & 0 \\ 1 & j & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En microstrip:

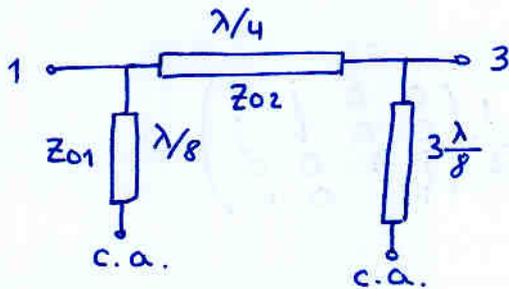


Acoplador en anillo



Tengo la numeración correcta para hacer simetría (si no la tuviera, simplemente la cambiaría para hacer el análisis)

Par

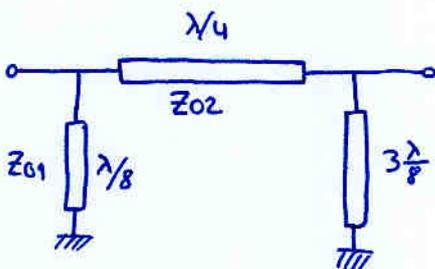


calculando la matriz S
(se recomienda practicar)

$$S^{(e)} = \frac{1}{1 + \gamma_{01}^2 + \gamma_{02}^2} \begin{pmatrix} (1 - j\gamma_{01})^2 - \gamma_{02}^2 & -2j\gamma_{02} \\ -2j\gamma_{02} & (1 + j\gamma_{01})^2 - \gamma_{02}^2 \end{pmatrix}$$

por lógica dimensional, estamos hablando de \bar{Y} normalizada, ya que sino no se podría estar sumando a 1 (adimensional)

Impar

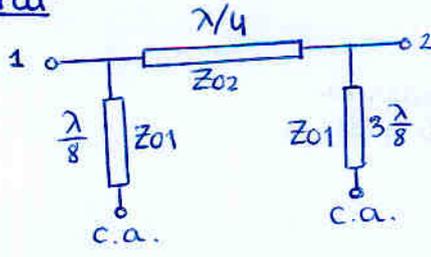


$$S^{(o)} = \frac{1}{1 + \gamma_{01}^2 + \gamma_{02}^2} \begin{pmatrix} (1 + j\gamma_{01})^2 - \gamma_{02}^2 & -2j\gamma_{02} \\ -2j\gamma_{02} & (1 - j\gamma_{01})^2 - \gamma_{02}^2 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix}$$

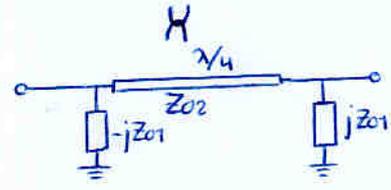
Pasivo sin pérdidas } → unitaria
 forzamos diagonal 0 } → acoplador direccional (dos accesos desacoplados)

Par



$$Z_{in1} = Z_{01} \cdot \frac{Z_L + Z_0 j \operatorname{tg}(\beta l)}{Z_0 + Z_L j \operatorname{tg}(\beta l)} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ Z_L = \infty \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ -j \frac{Z_{01}}{\operatorname{tg}(\beta l)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ -j Z_{01} \end{matrix}$$

$l = \lambda/8$
 $\beta l = \pi/4$
 $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$

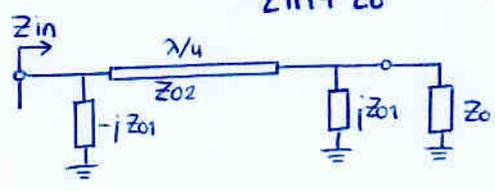


$$Z_{in2} = Z_{01} \cdot \frac{Z_L + Z_0 j \operatorname{tg}(\beta l)}{Z_0 + Z_L j \operatorname{tg}(\beta l)} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ Z_L = \infty \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ -j \frac{Z_{01}}{\operatorname{tg}(\beta l)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ j Z_{01} \end{matrix}$$

$l = 3\lambda/8$
 $\beta l = 3\pi/4$
 $\operatorname{tg}(3\pi/4) = -1$

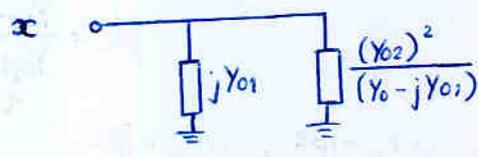
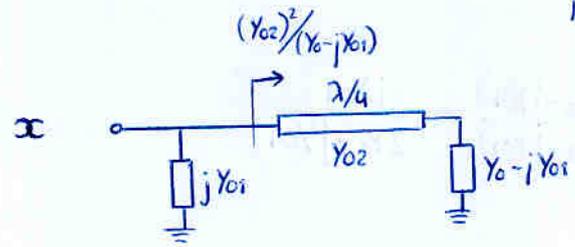
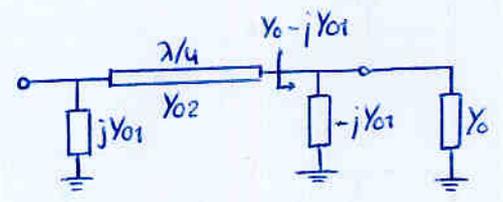
• S_{11} y S_{21} se calculan con el acceso 2 terminado

• entonces $S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$; hallemos Z_{in}



será más fácil con admitancias

$$\frac{1}{-jZ_{01}} = \frac{j}{Z_{01}} = jY_{01}$$

$$\frac{1}{jZ_{01}} = \frac{-j}{Z_{01}} = -jY_{01}$$


$Y_{in} = jY_{01} + \frac{(Y_{02})^2}{(Y_0 - jY_{01})}$

$$Y_{in} = \frac{jY_{01}(Y_0 - jY_{01}) + (Y_{02})^2}{(Y_0 - jY_{01})} = \frac{jY_{01}Y_0 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2}{(Y_0 - jY_{01})}$$

$$S_{11} = \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}} = \frac{Y_0 - \frac{jY_{01}Y_0 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2}{(Y_0 - jY_{01})}}{Y_0 + \frac{jY_{01}Y_0 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2}{(Y_0 - jY_{01})}}$$

$$= \frac{Y_0^2 - 2jY_{01}Y_0 - Y_{01}^2 - Y_{02}^2}{Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2} = \frac{(Y_0 - jY_{01})^2 - Y_{02}^2}{Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2} //$$

nota: la próxima vez mejor trabajar con impedancias normalizadas que es mucho más cómodo

$$S_{11} = \frac{1 - y_{in}}{1 + y_{in}} = \frac{1 - \frac{jy_{01} + y_{01}^2 + y_{02}^2}{1 - jy_{01}}}{1 + \frac{jy_{01} + y_{01}^2 + y_{02}^2}{1 - jy_{01}}} = \frac{1 - jy_{01} - jy_{01} - y_{01}^2 - y_{02}^2}{1 - jy_{01} + jy_{01} + y_{01}^2 + y_{02}^2}$$

$$= \frac{1 - 2jy_{01} - y_{01}^2 - y_{02}^2}{1 + y_{01}^2 + y_{02}^2} = \frac{(1 - jy_{01})^2 - y_{02}^2}{1 + y_{01}^2 + y_{02}^2}$$

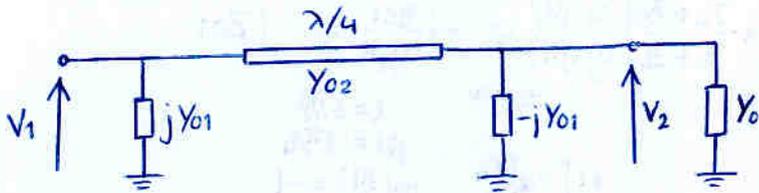
aunque por otra parte es más difícil darse cuenta de un error dimensional

• calculamos S_{21} a partir de S_{11}

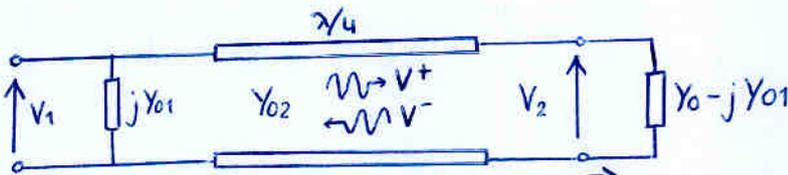
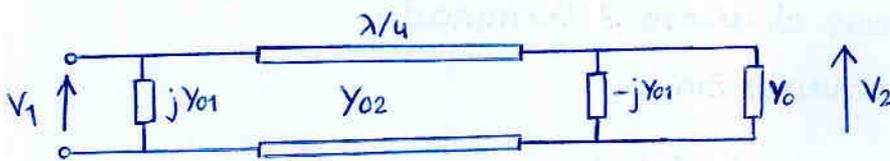
$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11}) \sqrt{\frac{Z_0}{Z_0}}$$

↑
Hay que hallar V_2/V_1

↙ hemos definido la misma impedancia de referancia en puertos ① y ②



III Usando la representación más típica



$$\rho_L = \frac{Y_{02} - (Y_0 - jY_{01})}{Y_{02} + (Y_0 - jY_{01})} = \frac{Y_{02} - Y_0 + jY_{01}}{Y_{02} + Y_0 - jY_{01}}$$

$$\begin{cases} v(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z} \\ V_1 = V(z = -\lambda/4) \\ V_2 = V(z = 0) \end{cases}$$

en $z=0$ $V(z=0) = V_2 = V^+ + V^- \stackrel{V^- = \rho_L V^+}{=} V^+ + \rho_L V^+ = V^+ (1 + \rho)$

$$= V^+ \left(1 + \frac{Y_{02} - Y_0 + jY_{01}}{Y_{02} + Y_0 - jY_{01}} \right)$$

$$V_2 = V^+ \left(\frac{2Y_{02}}{Y_{02} + Y_0 - jY_{01}} \right)$$

en $z = -\lambda/4$

$$\begin{aligned} V_1 = V(z = -\lambda/4) &= V^+ e^{-j\beta(-\lambda/4)} + V^- e^{+j\beta(-\lambda/4)} \\ &= +jV^+ - jV^- \\ &= +jV^+ - j\rho_L V^+ \\ &= jV^+ (1 - \rho_L) \\ &= jV^+ \left(1 - \frac{Y_{02} - Y_0 + jY_{01}}{Y_{02} + Y_0 - jY_{01}} \right) \end{aligned}$$

$$V_1 = jV^+ \left(\frac{2Y_0 - 2jY_{01}}{Y_{02} + Y_0 - jY_{01}} \right)$$

$$\beta \left(-\frac{\lambda}{4} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = +j$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

en general para una linea de tx de long. l .

$$\begin{aligned} V(z=0) = V_2 &= V^+ (1 + \rho) \\ V(z=-l) = V_1 &= V^+ (e^{+j\beta l} + \rho e^{-j\beta l}) \end{aligned}$$

Ya tenemos la relación

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V^+ \cdot \left(\frac{2Y_{02}}{Y_{02} + Y_0 - jY_{01}} \right)}{jV^+ \cdot \left(\frac{2Y_0 - 2jY_{01}}{Y_{02} + Y_0 - jY_{01}} \right)} = -j \frac{Y_{02}}{Y_0 - jY_{01}}$$

entonces

$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11})$$

$$= -j \frac{Y_{02}}{Y_0 - jY_{01}} \left(1 + \frac{(Y_0 - jY_{01})^2 - Y_{02}^2}{Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2} \right)$$

$$S_{21} = -j \frac{Y_{02}}{Y_0 - jY_{01}} \left(\frac{Y_{02}^2 + Y_{01}^2 + Y_0^2 + (Y_0 - jY_{01})^2 - Y_{02}^2}{Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2} \right)$$

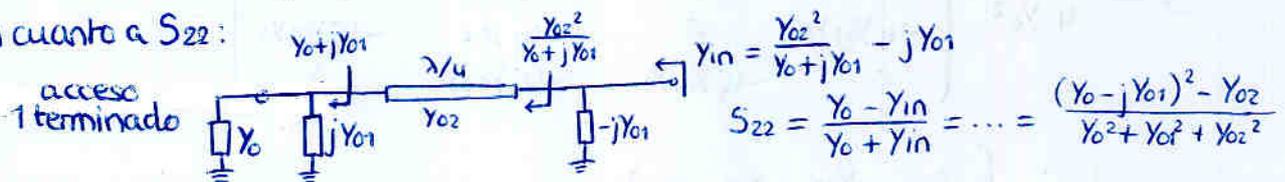
$$= -j \left(\frac{Y_{02} (Y_{01}^2 + Y_0^2 + (Y_0 - jY_{01})^2)}{Y_0 - jY_{01}} \right) \left(\frac{1}{Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2} \right)$$

$$= -j \frac{Y_{02} ((Y_0 + jY_{01})(Y_0 - jY_{01}) + (Y_0 - jY_{01})^2)}{(Y_0 - jY_{01})(Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2)} = -j \frac{Y_{02} (Y_0 - jY_{01}) ((Y_0 + jY_{01}) + (Y_0 - jY_{01}))}{(Y_0 - jY_{01})(Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2)}$$

$$S_{21} = \frac{-2j Y_0 Y_{02}}{(Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2)}$$

• Por reciprocidad, ya que no hay ningún elemento no recíproco: $S_{21} = S_{12}$

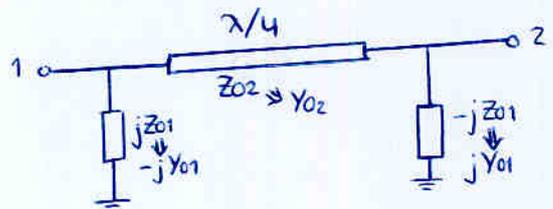
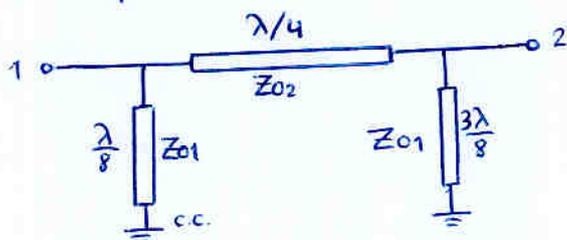
• En cuanto a S_{22} :



Por tanto finalmente tenemos la matriz S para la excitación par

$$S^{(e)} = \frac{1}{Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2} \begin{pmatrix} (Y_0 - jY_{01})^2 - Y_{02}^2 & -2j Y_0 Y_{02} \\ -2j Y_0 Y_{02} & (Y_0 - jY_{01})^2 - Y_{02}^2 \end{pmatrix}$$

Impar



El circuito es igual al caso par si cambiásemos la numeración de los puertos, por tanto:

$$S^{(o)} = \frac{1}{Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2} \begin{pmatrix} (Y_0 - jY_{01})^2 - Y_{02}^2 & -2j Y_0 Y_{02} \\ -2j Y_0 Y_{02} & (Y_0 + jY_{01})^2 - Y_{02}^2 \end{pmatrix}$$

$$Z_{in1} = Z_{01} \cdot \frac{Z_L + jZ_{01} \operatorname{tg} \beta l}{Z_{01} + jZ_L \operatorname{tg} \beta l} \Bigg|_{Z_L=0} = jZ_{01} \operatorname{tg} \beta l \Bigg|_{\substack{l=\lambda/8 \\ \beta l = \pi/4}} = jZ_{01}$$

$$Z_{in2} = Z_{01} \cdot \frac{Z_L + jZ_{01} \operatorname{tg} \beta l}{Z_{01} + jZ_L \operatorname{tg} \beta l} \Bigg|_{Z_L=0} = jZ_{01} \operatorname{tg} \beta l \Bigg|_{\substack{l=3\lambda/8 \\ \beta l = 3\pi/4}} = -jZ_{01}$$

La matriz final del acoplador completo será:

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Y_0^2 + Y_{01}^2 + Y_{02}^2} \begin{pmatrix} \begin{matrix} (Y_0 - jY_{01})^2 + (Y_0 + jY_{01})^2 - 2Y_{02}^2 & -4jY_{02}Y_0 \\ -4jY_{02}Y_0 & (Y_0 - jY_{01})^2 + (Y_0 + jY_{01})^2 - 2Y_{02}^2 \end{matrix} & \begin{matrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ (Y_0 - jY_{01})^2 - (Y_0 + jY_{01})^2 & 0 \\ 0 & (Y_0 + jY_{01})^2 - (Y_0 - jY_{01})^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{matrix} & \begin{matrix} S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Si exigimos ceros en la diagonal

$$(Y_0 - jY_{01})^2 + (Y_0 + jY_{01})^2 - 2Y_{02}^2 = 0$$

$$Y_0^2 - 2jY_{01}Y_0 - Y_{01}^2 + Y_0^2 + 2jY_{01}Y_0 - Y_{01}^2 - 2Y_{02}^2 = 0$$

$$-2Y_{01}^2 + 2Y_0^2 - 2Y_{02}^2 = 0$$

$$\boxed{Y_{01}^2 + Y_{02}^2 = Y_0^2}$$

Entonces queda

$$S = \frac{1}{4Y_0^2} \begin{pmatrix} 0 & -4jY_{02}Y_0 & -4jY_{01}Y_0 & 0 \\ -4jY_{02}Y_0 & 0 & 0 & -4jY_{01}Y_0 \\ -4jY_{01}Y_0 & 0 & 0 & -4jY_{02}Y_0 \\ 0 & -4jY_{01}Y_0 & -4jY_{02}Y_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = -\frac{j}{Y_0} \begin{pmatrix} 0 & Y_{02} & Y_{01} & 0 \\ Y_{02} & 0 & 0 & Y_{01} \\ Y_{01} & 0 & 0 & Y_{02} \\ 0 & Y_{01} & Y_{02} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = \frac{1}{2} [S_{11}^{(e)} + S_{11}^{(o)}] = S_{33} = 0 \\ S_{22} = \frac{1}{2} [S_{22}^{(e)} + S_{22}^{(o)}] = S_{44} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \bar{Y}_{01}^2 + \bar{Y}_{02}^2 = 1 \\ Y_{01}^2 + Y_{02}^2 = Y_0^2 \end{array}$$

queda

$$S = -j \begin{pmatrix} 0 & Y_{02} & Y_{01} & 0 \\ Y_{02} & 0 & 0 & -Y_{01} \\ Y_{01} & 0 & 0 & Y_{02} \\ 0 & -Y_{01} & Y_{02} & 0 \end{pmatrix}$$

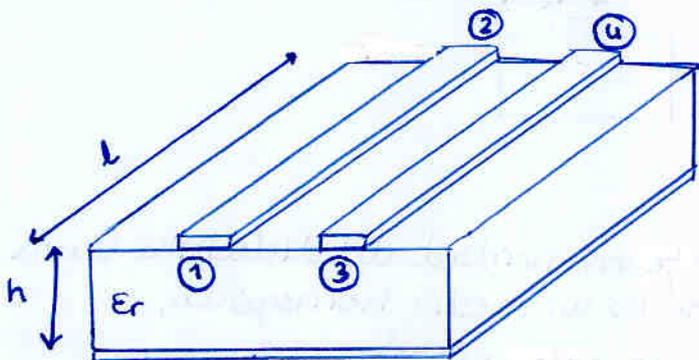
Forzando ceros en la diagonal me han aparecido cuatro ceros extra:

Los ceros extra me indican que los puertos 1 y 4 y 2 y 3 están desacoplados entre si

Renombrando los puertos ② y ④

$$S = -j \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_{01} & Y_{02} \\ 0 & 0 & Y_{02} & -Y_{01} \\ Y_{01} & Y_{02} & 0 & 0 \\ Y_{02} & -Y_{01} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineas acopladas simétricas



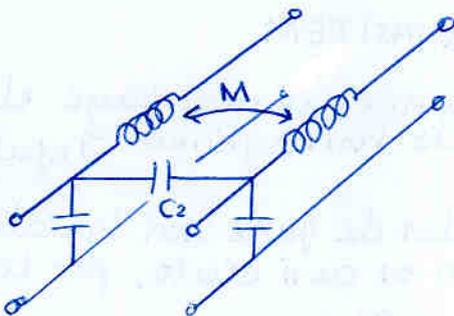
Las dos líneas de transmisión estarán acopladas simplemente por su proximidad

Recuerda:
diferencial de l. de tx



$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

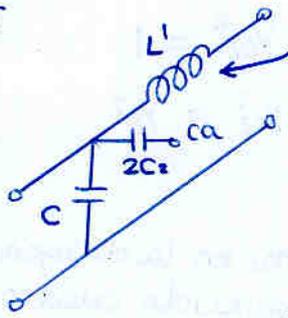
$$Z_0 = \sqrt{L/C}$$



Aparece una M y una C₂ debido al acoplamiento entre las líneas

Aplicamos simetría:

Par



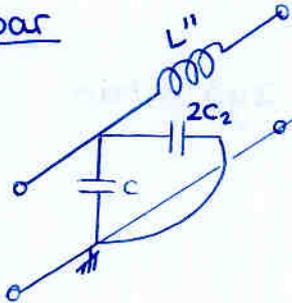
L' tiene en cuenta L original y M (inducción mutua)

entonces: obtenemos una nueva l. de tx

$$\beta^{(e)} = \omega \sqrt{L'C} = \omega \sqrt{\mu \epsilon^{(e)}}$$

$$Z_0^{(e)} = \sqrt{\frac{L'}{C}} = \sqrt{\frac{L'C}{C^2}} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon^{(e)}}}{C} = \frac{1}{v_p^{(e)} \cdot C}$$

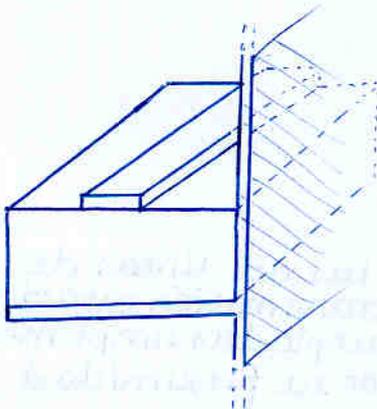
Impar



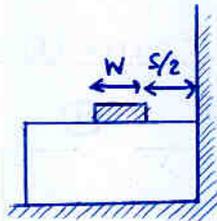
$$\beta^{(o)} = \omega \sqrt{L''(C+2C_2)} = \omega \sqrt{\mu \epsilon^{(o)}}$$

$$Z_0^{(o)} = \sqrt{\frac{L''}{C+2C_2}} = \frac{1}{v_p^{(o)} (C+2C_2)}$$

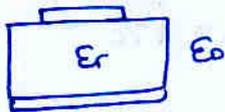
Podemos ver el caso impar de forma gráfica:



Vemos que, en efecto, es una línea de transmisión



Nota: en líneas microstrip la permitividad del dieléctrico varía por tanto no es un medio homogéneo.



Estrictamente no existen modos TEM: habrá E_z, H_z pero muy pequeños se llaman modos QUASITEM

Para poder estudiar un medio homogéneo, se sustituye el aire y el dieléctrico por un único medio homogéneo $\epsilon_{efectiva}$

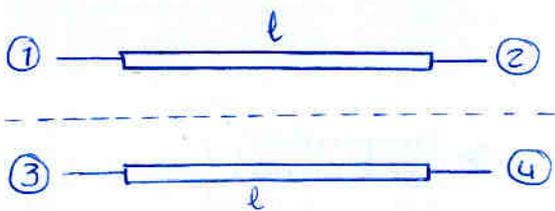
En un medio homogéneo, las velocidades de fase son iguales; si no estamos en medio homogéneo, eso es casi cierto, por tanto

$$v_p^{(e)} \approx v_p^{(o)} \quad \text{y entonces}$$

$$\beta^{(e)} = \beta^{(o)}$$

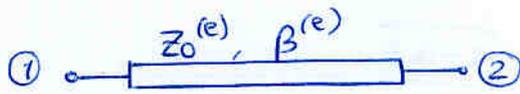
$$Z_0^{(e)} > Z_0^{(o)}$$

$$\frac{1}{v_p^{(e)} \cdot C} > \frac{1}{v_p^{(o)} \cdot (C+2C_2)}$$



medio homogéneo da igual que lógica : $\epsilon^{(e)} = \epsilon^{(o)} = \epsilon_{ef}$ ← haya PE o PM
 $\Rightarrow \beta^{(e)} = \omega \sqrt{\mu \epsilon^{(e)}} = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{L''(C+2C_e)} = \omega \sqrt{\mu \epsilon^{(o)}} = \beta^{(o)}$
 i.e.: $L'C = L''(C+2C_e)$ "se compensa"
 $\Rightarrow V_p^{(e)} = V_p^{(o)}$
 $\sqrt{\frac{L'}{C}} = Z_0^{(e)} \neq Z_0^{(o)} = \sqrt{\frac{L''}{C+2C_e}}$

Par



Calculo matriz S con $Z_{01} = Z_{02} = 1$ (i.e. valores normalizados)
 Para calcularla puedo usar la otra simetría

$$S_{11}^{(e)} = S_{22}^{(e)} = \frac{j(Z_0^{(e)} - Y_0^{(e)}) \cdot \text{tg}(\phi_e)}{\Delta^{(e)}}$$

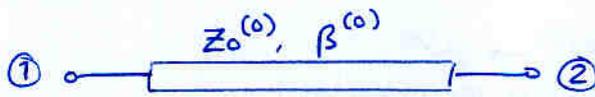
$$S_{12}^{(e)} = S_{21}^{(e)} = \frac{2/\cos(\phi_e)}{\Delta^{(e)}}$$

siendo $\Delta^{(e)} = 2 + j(Z_0^{(e)} + Y_0^{(e)}) \text{tg} \phi_e$
 $\phi_e = \beta^{(e)} \cdot l$

Parámetros S de una l. de tx de impedancia $Z_0^{(e)}$

$$S^{(e)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(e)} & S_{12}^{(e)} \\ S_{21}^{(e)} & S_{22}^{(e)} \end{pmatrix}$$

Impar



$$S_{11}^{(o)} = S_{22}^{(o)} = \frac{j(Z_0^{(o)} - Y_0^{(o)}) \cdot \text{tg}(\phi_o)}{\Delta^{(o)}}$$

$$S_{12}^{(o)} = S_{21}^{(o)} = \frac{2/\cos(\phi_o)}{\Delta^{(o)}}$$

siendo $\Delta^{(o)} = 2 + j(Z_0^{(o)} + Y_0^{(o)}) \text{tg} \phi_o$
 $\phi_o = \beta^{(o)} \cdot l$

Parámetros S

$$S^{(o)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(o)} & S_{12}^{(o)} \\ S_{21}^{(o)} & S_{22}^{(o)} \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix}$$

exigiendo, para lograr acoplador:

$$S_{11} = S_{12} = S_{21} = S_{22} = 0$$

$$\frac{1}{2}(S_{11}^{(e)} + S_{11}^{(o)}) = 0$$

$$\Rightarrow Z_0^{(e)} Z_0^{(o)} = 1$$

$$\Rightarrow \phi_e = \phi_o$$

diagonal = 0
 y por tanto es acoplador direccional

$\epsilon_e = \epsilon_o$
 $\beta_e = \beta_o$
 $\phi_e = \phi_o$
 \iff medio homogéneo

En líneas inhomogéneas, se cumplirá casi.
 Nos conformaremos con exigir $Z_0^{(e)} Z_0^{(o)} = 1$
 ya que supondremos $\phi_e = \phi_o$

misma longitud eléctrica en caso par e impar

Por tanto

suponemos $\phi_e = \phi_o$
 (en realidad es una aprox, ya que sólo se cumple $\phi_e = \phi_o \iff$ línea homogénea)

$$\phi_e = \phi_o \quad Z^{(e)} \cdot Z^{(o)} = 1 \quad \left. \vphantom{\phi_e = \phi_o} \right\} \text{diagonal ceros} \Rightarrow \text{acoplador direccional}$$

$$Z^{(e)} \cdot Z^{(o)} = 1 \Rightarrow \text{acoplador direccional}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{13} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{12} \\ 0 & S_{13} & S_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$S_{12} = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi}$$

$$S_{13} = \frac{j \alpha \cdot \sin \phi}{\sqrt{1-\alpha^2} \cdot \cos \phi + j \sin \phi}$$

no hay que saberse las expresiones, hay que poder deducirlas

$$\alpha = \frac{Z_0^{(e)} - Z_0^{(o)}}{Z_0^{(e)} + Z_0^{(o)}} \quad \phi = \beta l$$

Caso particular:

si vamos separando las líneas (aumentando separación) entonces $\alpha = 0$

$Z_0^{(e)} \rightarrow Z_0^{(o)}$
 (tienden a ser iguales)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{12} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{no hay relación entre las líneas}$$

Acoplamiento:

$$C = -20 \log |S_{ij}| = -20 \log |S_{13}| = -20 \log \left| \frac{\alpha \cdot \sin \phi}{\sqrt{1-\alpha^2} \cos^2 \phi} \right|$$

$$|S_{13}|^2 = \frac{\alpha^2 \sin^2 \phi}{1-\alpha^2 \cos^2 \phi}$$

si $\phi = \pi/2 \equiv l = \lambda/4$ ganto un grado de libertad

$$\Rightarrow |S_{13}| = |\alpha|$$

$$\Rightarrow C = -20 \log |\alpha|$$

por tanto

$$\text{si } l = \lambda/4 \Rightarrow C = -20 \log \left| \frac{Z_0^{(e)} - Z_0^{(o)}}{Z_0^{(e)} + Z_0^{(o)}} \right|$$

\downarrow
 $\phi = \pi/2$

sin olvidar que debe cumplirse $Z_0^{(e)} \cdot Z_0^{(o)} = Z_0^2$

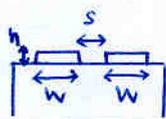
ejemplo

$$C = 20 \text{ dB} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z_0^{(e)} = 55'30 \Omega \\ Z_0^{(o)} = 45'23 \Omega \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{tablas}} \begin{array}{l} \text{si } \epsilon_r = 2'1 \\ \frac{W}{h} = 0'86 \\ \frac{S}{h} = 0'3 \end{array} \quad h = 1 \text{ mm}$$

$$Z_0 = 50 \Omega \quad \text{se cumple } Z_0^{(e)} \cdot Z_0^{(o)} = Z_0^2$$

ejemplo problemático

$C = 10 \text{ dB}$: queremos que se "tome una muestra" más grande se obtiene $\frac{S}{h} = 0'041$
 $\frac{W}{h} = 0'70$



una S tan pequeña es tecnológicamente muy difícil

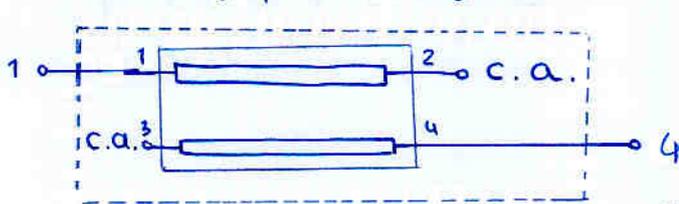
- Por tanto estos acopladores sólo sirven para $|C|$ altos (tomar muestra pequeña)
- $l = \frac{\lambda}{4}$ sólo se cumple para $f = f_0$

en general: $\phi = \beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{f}{f_0} \right)$
 con $l = \frac{\lambda_0}{4}$

Lineas acopladas funcionando como inversores

(sabiendo que se comportan como acoplador direccional)

si cargo puertos ② y ③ con c.a. $\rho_L = 1$



$$\begin{cases} a_2 = \rho_L \cdot b_2 = +b_2 \\ a_3 = \rho_L \cdot b_3 = +b_3 \end{cases}$$

$b = S \cdot a$
 con las de las líneas acopladas

$$\begin{cases} b_1 = S_{12} a_2 + S_{13} a_3 \\ b_2 = S_{12} a_1 + S_{13} a_4 \\ b_3 = S_{13} a_1 + S_{12} a_4 \\ b_4 = S_{13} a_2 + S_{12} a_3 \end{cases} \begin{array}{l} \downarrow \\ a_3 = b_3 \\ a_2 = b_2 \\ \uparrow \\ a_3 = b_3 \\ a_2 = b_2 \end{array}$$

$$b_1 = (S_{12}^2 + S_{13}^2) a_1 + (2 S_{12} S_{13}) a_4$$

$$b_4 = (2 S_{12} S_{13}) a_1 + (S_{12}^2 + S_{13}^2) a_4$$



se obtiene la matriz S de nuestra nueva red (un cuádrupolo)



$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}' & S_{12}' \\ S_{21}' & S_{22}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{11}' = S_{22}' = S_{12}^2 + S_{13}^2 \\ S_{12}' = S_{21}' = 2 S_{12} S_{13} \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_{11}' = \frac{1 - \alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \phi}{\Delta} \\ S_{12}' = \frac{2j\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \sin \phi}{\Delta} \end{array}$$

$$\Delta = \sqrt{1 - \alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi$$

$$\alpha = \frac{Z_0^{(e)} - Z_0^{(o)}}{Z_0^{(e)} + Z_0^{(o)}} \quad \phi = \beta \cdot l$$

ejemplo:

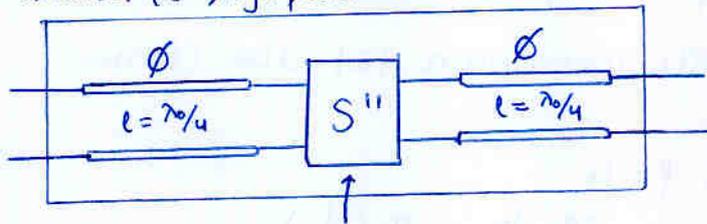
$$l = \frac{\lambda_0}{4} \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{\lambda_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-\alpha^2} \cos \phi + j \sin \phi \approx e^{j\phi} \\ 1-\alpha^2 - \alpha^2 \sin \phi \approx 1-2\alpha^2 \\ 2j\alpha \sqrt{1-\alpha^2} \sin \phi \approx 2j\alpha \sqrt{1-\alpha^2} \end{array} \right.$$

$\alpha^2 \ll 1$

podemos escribir:

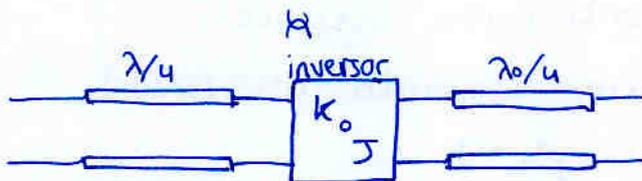
$$S' = e^{-2j\phi} \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & 2j\alpha \sqrt{1-\alpha^2} \\ 2j\alpha \sqrt{1-\alpha^2} & 1-2\alpha^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-j\phi} & 0 \\ 0 & e^{-j\phi} \end{pmatrix}}_{S_\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & 2j\alpha \sqrt{1-\alpha^2} \\ 2j\alpha \sqrt{1-\alpha^2} & 1-2\alpha^2 \end{pmatrix}}_{S''} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{j\phi} & 0 \\ 0 & e^{j\phi} \end{pmatrix}}_{S_\phi}$$

que es la matriz S de un inversor (S'') (ya que es unitario con S'' real)



inversor con

$$1-2\alpha^2 = \gamma = \frac{k^2 - z_0^2}{k^2 + z_0^2}$$



S'' es:
recíproca
simétrica
unitaria
parámetro S'' real

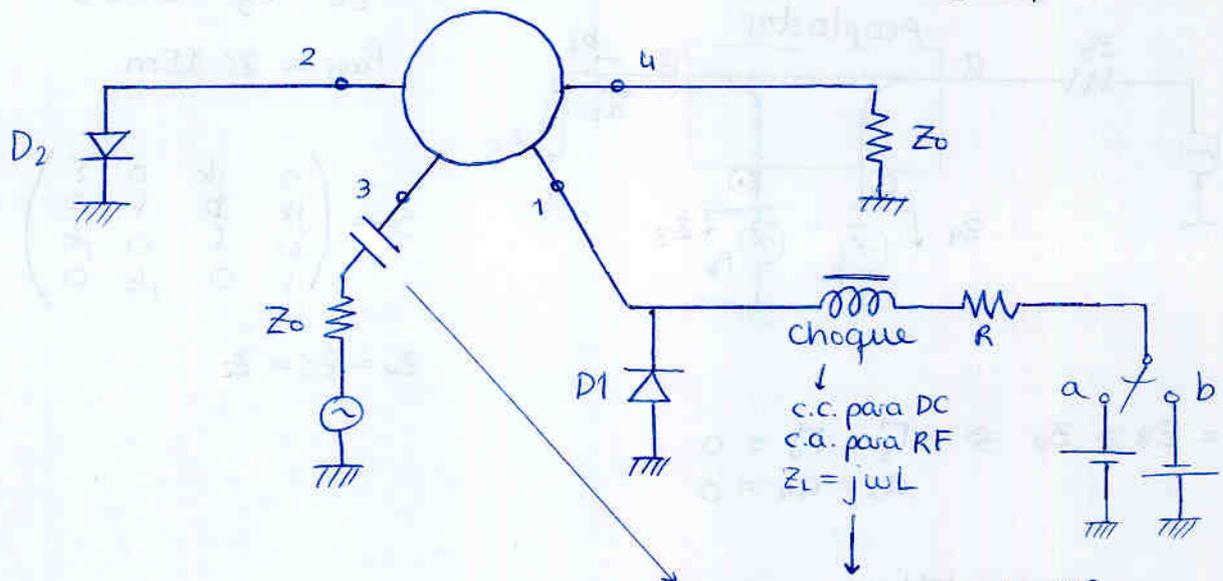
S'' es un inversor

$$\bar{J} = \frac{1}{2} (z_0^{(e)} - z_0^{(o)}) \quad \text{Análisis}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_0^{(e)} = \bar{J} + \sqrt{1 + \bar{J}^2} \\ z_0^{(o)} = -\bar{J} + \sqrt{1 + \bar{J}^2} \end{array} \right\} \text{síntesis}$$

Problema V-9

Se pide $\frac{b_4}{a_3} |_{a,b}$



aisla continua de RF
(también se usan condensadores)

nota: desde el pto. de vista de continua, la red del anillo es un único punto de longitud despreciable. i.e. la alim. continua polariza los diodos

matriz S del anillo:

$$S = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha a_3 + \alpha a_4 \\ b_2 &= \alpha a_3 - \alpha a_4 \\ b_3 &= \alpha a_1 + \alpha a_2 \\ b_4 &= \alpha a_1 - \alpha a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \Gamma_1 b_1 \\ a_2 &= \Gamma_2 b_2 \end{aligned}$$

↑ coef de reflexión en los diodos

Posición a) D_1 pol. en inversa \rightarrow c.a. $\rightarrow \Gamma_1 = 1$
 D_2 pol. en directa \rightarrow c.c. $\rightarrow \Gamma_2 = -1$

Posición b) D_1 en directa \rightarrow c.c. $\rightarrow \Gamma_1 = -1$
 D_2 en inversa \rightarrow c.a. $\rightarrow \Gamma_2 = 1$

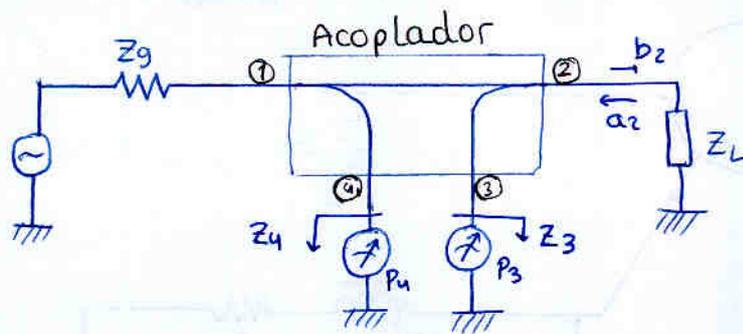
Ya es fácil sacar b_4/a_3

$$\begin{aligned} b_4 &= \alpha a_1 - \alpha a_2 \\ &= \alpha \Gamma_1 b_1 - \alpha \Gamma_2 b_2 \\ &= \alpha \Gamma_1 \alpha a_3 - \alpha \Gamma_2 \alpha a_2 \end{aligned}$$

$$b_4 = \alpha^2 (\Gamma_1 - \Gamma_2) \cdot a_3 \quad \text{con } \alpha = -j/\sqrt{2}$$

$$\frac{b_4}{a_3} = -\frac{1}{2} (\Gamma_1 - \Gamma_2)$$

V-25



$$Z_0 = Z_g = 50 \Omega$$

$$P_{avs} = 20 \text{ dBm}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & jk & 0 & \delta \\ jk & 0 & \delta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & jk \\ \delta & 0 & jk & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_4 = Z_3 = Z_0$$

$$Z_4 = Z_3 = Z_0 \Rightarrow \Gamma_3 = \Gamma_4 = 0 \\ a_3 = a_4 = 0$$

a)
$$ROE = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

De la matriz S:

$$b_1 = jk \cdot a_2$$

$$b_2 = jk \cdot a_1$$

$$b_3 = \delta \cdot a_2 \quad \text{---} \quad P_3 = \frac{1}{2} |\delta|^2 |a_2|^2 = \frac{1}{2} |\delta|^2 |\Gamma_L|^2 |b_2|^2 = \frac{1}{2} |\delta|^2 |\Gamma_L|^2 |k|^2 |a_1|^2$$

$$b_4 = \delta \cdot a_1 \quad \text{---} \quad P_4 = \frac{1}{2} |\delta|^2 |a_1|^2$$

Lo he dejado todo en función de a_1

Nota: impedancia q. está viendo la fuente:

$$b_1 = jk a_2 = jk \Gamma_L jk a_1$$

$$\frac{b_1}{a_1} = -k^2 \Gamma_L$$

Recordemos:

$$P_{avs} = \frac{1}{2} |a_1|^2 \frac{|1 - \Gamma_L \Gamma_S|^2}{1 - |\Gamma_S|^2} = \frac{1}{2} |a_1|^2$$

ya que
 $Z_g = Z_0 \rightarrow \Gamma_S = 0$

Nota: esto no significa que esté entregando toda la potencia disponible, significa que la ONDA INCIDENTE si que lleva toda la potencia incidente (pero faltaria restar la onda reflejada)

Por tanto:

$$P_3 = |\delta|^2 |\Gamma_L|^2 |k|^2 \cdot P_{avs}$$

$$P_4 = |\delta|^2 \cdot P_{avs}$$

} ver la lógica de estas expresiones

acoplador direccional \Rightarrow unitariedad \Rightarrow producto escalar de 2 filas o columnas es igual a 1

$$|\delta|^2 + |k|^2 = 1$$

$$P_3 = |\delta|^2 \cdot |\Gamma_L|^2 \cdot P_{avs}$$

$$P_4 = |\delta|^2 \cdot P_{avs}$$

se obtiene

$$\Gamma_L$$

$$|\Gamma_L|^2 = \frac{P_3}{P_4} \cdot \frac{P_{avs}}{(P_{avs} - P_4)}$$

b) dado $P_3 = -12 \text{ dBm}$

$P_4 = 0 \text{ dBm}$

hallar la ROE

Pasar P_3 y P_4 a lineal, y sustituir en la fórmula obtenida ROE = 1'68

desventaja de este medidor: sólo medimos potencia (perdiendo la información de la fase que obteníamos al medir tensión) por tanto sólo obtenemos $|\Gamma_L|$ y no Γ_L . Es decir, perdemos la info de la fase por culpa de medir potencias.

c) Hallar C (acoplamiento)

El valor más pequeño de S (será la muestra que estoy tomando)

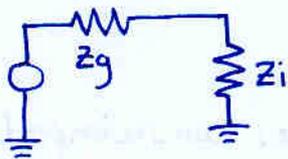
$$C = -20 \log \delta$$

$$P_4 = |\delta|^2 \cdot P_{avs} \rightarrow |\delta| = \sqrt{\frac{P_4}{P_{avs}}} = 0'1$$

$$C = 20 \text{ dB}$$

d) Potencia disipada en Z_g

Desde el punto de vista del generador:



$$\Gamma_i = \frac{Z_i - Z_0}{Z_i + Z_0} = \frac{b_1}{a_1} = -k^2 \Gamma_L$$

$$P_{Rg} = \frac{1}{2} R_g |I_1|^2$$

$$a_1 = \frac{V_1 + Z_0 I_1}{2\sqrt{Z_0}}$$

$$b_1 = \frac{V_1 - Z_0 I_1}{2\sqrt{Z_0}}$$

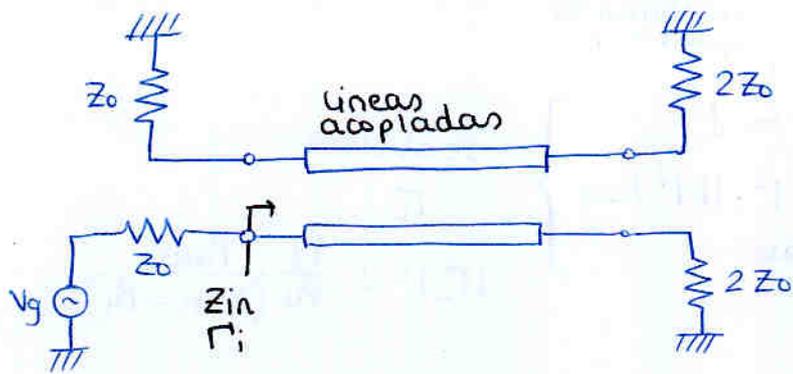
$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \sqrt{Z_0} (a_1 + b_1) \\ I_1 = \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{Z_0}} = \frac{a_1}{\sqrt{Z_0}} \cdot (1 - \Gamma_L)^2 \end{array} \right.$$

Por tanto, potencia disipada en la fuente

$$P_{Rg} = P_{avs} |1 + k^2 \Gamma_L|^2$$

cuidado, necesito Γ_L y no me basta con $|\Gamma_L|$

Problema V-37



$$Z_0 = 50 \Omega$$

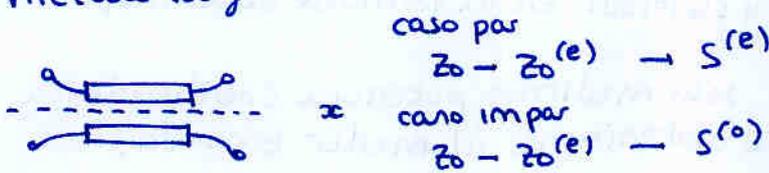
$$Z_0^{(e)} = 73 \Omega$$

$$Z_0^{(o)} = 30 \Omega$$

no son un acoplador direccional porq debería ser $Z_0^{(e)}, Z_0^{(o)} = Z_0^2$

Calcular Z_{in}

• método largo



$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ - & + \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \dots$$

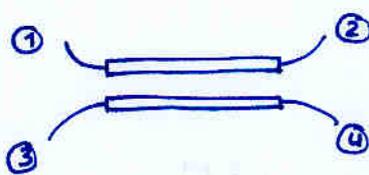
$$b_2 = \dots$$

$$b_3 = \dots$$

$$b_4 = \dots$$

• método simple

la impedancia de referencia de los puertos es la que nos da la gara.



$$Z_{01} = Z_0$$

$$Z_{02} = 2Z_0$$

$$Z_{03} = Z_0$$

$$Z_{04} = 2Z_0$$

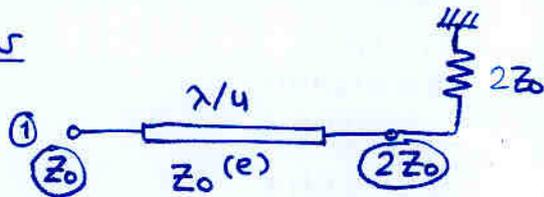
se sigue cumpliendo la simetria

Ahora los puertos 1 2 y 4 están terminados con su impedancia de referencia y por tanto

$$\Gamma_i = S_{33}$$

Desarrollemos el caso simple:

Par

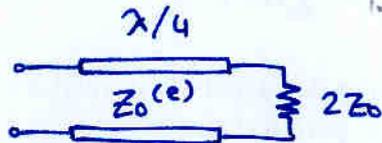


$$S^{(e)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(e)} & S_{12}^{(e)} \\ S_{21}^{(e)} & S_{22}^{(e)} \end{pmatrix}$$

Yo necesito

$$S_{33} \quad S = \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix}$$

$$S_{33} = S_{11}^{(e)} + S_{11}^{(o)}$$



Como en un inversor: $Z_{in} = \frac{(Z_0^{(e)})^2}{2Z_0}$

$$\Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = S_{11}^{(e)} = \frac{(Z_0^{(e)})^2 - 2Z_0}{(Z_0^{(e)})^2 + 2Z_0}$$

Nota: cuidado
Al haber distinta
impedancia de referencia,
si quisiéramos S_{22}

$$S_{22} \neq S_{11}$$

$$S_{22} = \frac{Z_{in} - 2Z_0}{Z_{in} + 2Z_0}$$

Impar

Es el mismo problema

$$S_{11}^{(o)} = \frac{(Z_0^{(o)})^2 - 2Z_0}{(Z_0^{(o)})^2 + 2Z_0}$$

Finalmente

$$S_{33} = S_{11}^{(e)} + S_{11}^{(o)} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

$$Z_{in} = Z_0 \cdot \frac{1 + S_{33}}{1 - S_{33}}$$

Calculando se obtiene

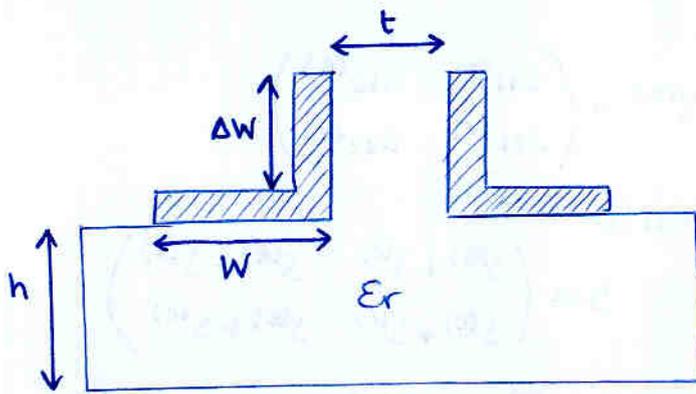
$$S_{11}^{(e)} = 3'2 \cdot 10^{-2}$$

$$S_{11}^{(o)} = -0'695$$

$$S_{33} = -0'3315$$

$$Z_{in} = 25'1 \Omega$$

Problema V-22



Datos

$$h = 1 \text{ mm}$$

$$t = 0.2 \text{ mm}$$

$$\epsilon_{\text{ref}} = 2.5$$

$$f_0 = 3 \text{ GHz}$$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$S_{12} = \frac{jk \sin \theta}{\sqrt{1-k^2} \cos \theta + j \sin \theta}$$

$$k = \frac{Z_0^{(e)} - Z_0^{(o)}}{Z_0^{(e)} + Z_0^{(o)}}$$

Despreciar efectos de bordes

Se pide:

$$C = 10 \text{ dB}$$

$$C = -20 \log |S_{12}|$$

S_{12} : dos grados de libertad

"gastamos" uno con $l = \lambda/4 \rightarrow \theta = \beta l = \pi/2$

$$l = \lambda/4$$

$$l = \frac{v_p}{4 f_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{\text{ref}}}} \cdot \frac{1}{4 f_0} = 15.81 \text{ mm}$$

$$C = -20 \log |S_{12}| \stackrel{\downarrow}{=} -20 \log |k| \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} k &= \frac{Z_0^{(e)} - Z_0^{(o)}}{Z_0^{(e)} + Z_0^{(o)}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ Z_0^{(e)} \cdot Z_0^{(o)} &= Z_0^2 \end{aligned} \right.$$

$$Z_0^{(e)} = 69.37 \Omega$$

$$Z_0^{(o)} = 36.04 \Omega$$

$$Z_0^{(e)} = \sqrt{\frac{L'}{C}} = \frac{\sqrt{L' C}}{C} = \frac{1}{v_p \cdot C}$$

con C en F/m

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{W \cdot Z}{h} / Z$$

$$= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{W}{h}$$

$$Z_0^{(o)} = \sqrt{\frac{L''}{C + 2C_2}} = \frac{1}{v_p (C + 2C_2)}$$

$$\text{siendo } C_2 = \epsilon_0 \epsilon_{\text{ref}} \frac{\Delta W}{t}$$

despreciando efecto de bordes, C_2 se debe unicamente al trocito levantado

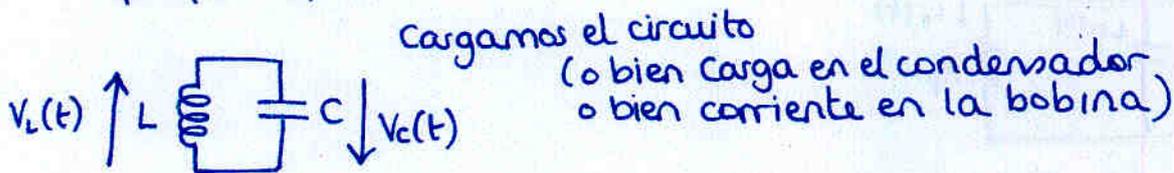
Tema 5. Circuitos Resonantes

- 5.1 Propiedades
- 5.2 Resonadores en L.T.
 - 5.2.1 Cto. equivalente
 - 5.2.2 impedancias Z_d, Z_i
 - 5.2.3 pérdidas
- 5.3 Cavidades resonantes
 - 5.3.1 rectangular
 - 5.3.2 cilíndrica

1. Propiedades (analizamos resonancia en circuitos RLC)

son muy selectivos en frecuencia \rightarrow muy útil en osciladores

ejemplo típico:



Como el circuito está aislado

$$V_L(t) + V_C(t) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad v = j\omega L I \\ V_C(t) = \frac{q(t)}{C} \\ i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \end{array} \right.$$

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

Solucionando la ecuación diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \\ i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{array} \right.$$

siendo $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Variación armónica

Energías que tengo en la bobina y el condensador

$$U_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) = \frac{1}{2C} q_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_c^2(t) = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$U_T = U_e + U_m = \frac{q_0^2}{2C}$$

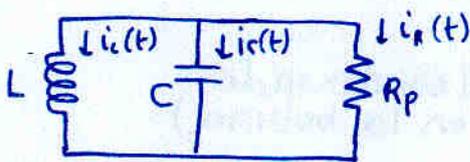
Valores instantáneos.

Si hiciésemos valor medio

$$U_m = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot L \cdot \overbrace{I^2}^{\text{valor}} \right]$$

la energía total se va repartiendo entre energía eléctrica y energía magnética

Si introduzco pérdidas



$$i_L(t) + i_C(t) + i_R(t)$$

$$\frac{1}{L} \int v(t) dt + C \frac{\partial v(t)}{\partial t} + \frac{v(t)}{R_p} = 0$$

solucionando la ecuación diferencial:

$$v(t) \propto \cos(\omega_n t) e^{-\alpha t}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{R_p \cdot 2 \cdot C} \\ \omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{G}{2\omega_0 C}\right)^2} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases}$$

Variación armónica
(a pulsación ω_n
diferente pero muy
similar a ω_0)

que se atenúa
exponencialmente
con el tiempo

- Frecuencia natural de resonancia: $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$
frec a la que oscila el circuito aislado
(similar al caso sin pérdidas)
 ω_0
 $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{G}{2\omega_0 C}\right)^2}$

Frecuencia de resonancia

No confundir con frecuencia natural de resonancia

- Frecuencia de resonancia f_r : 2 definiciones equivalentes
 - 1 - La que tiene un generador conectado al circuito resonante (para mantener la resonancia) tal que el generador vea una impedancia unicamente real - $Im(Z_{in}) = 0$
 - 2 - la que tiene un generador conectado al circuito resonante para que la media de energías U_m y U_e sean iguales

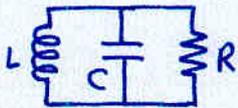
¿Porqué son definiciones equivalentes?

$$Z_{in} = R + jX$$

↓ ↓
potencia potencia
dissipada reactiva
 (un intercambio)

Si hacemos que el generador vea $X=0$, significa que el generador no hace intercambio de energía; el intercambio se hace entre energía eléctrica y magnética dentro del propio circuito, sin involucrar al generador.

ejemplo:



1. valores medios de las energías:

$$U_m = \frac{1}{4} \cdot L \cdot |I_L|^2$$

$$U_e = \frac{1}{4} \cdot C \cdot |V_C|^2$$

como $I_L = \frac{V_C}{j\omega L}$

$$U_m = \frac{1}{4} L \frac{|V_C|^2}{L^2 \omega^2} \quad \left. \vphantom{U_m} \right\} U_m = U_e$$

$$U_e = \frac{1}{4} C \cdot |V_C|^2$$

↓
 $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \neq \omega_n$

2. Impedancia real pura

$$Y_{in} = \frac{1}{R_p} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$Im(Y_{in}) = 0 \Rightarrow \left(C\omega - \frac{1}{\omega L} \right) = 0 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Factor de calidad

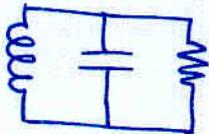
Valor adimensional para medir la bondad del circuito

$$Q = \omega_r \cdot \frac{U_T}{P_L} \Big|_{\omega = \omega_r} = \text{pulsación de resonancia} \cdot \frac{\text{energía total}}{\text{potencia media disipada}}$$

$$U_T = U_e + U_m = 2U_e = 2U_m \quad (\text{valor medio})$$

P_L : potencia media disipada

ej: RLC paralelo



$$U_e = \frac{1}{4} \cdot C \cdot |V_c|^2 \rightarrow \text{Energía eléctrica (almacenada en C)}$$

$$P_L = \frac{1}{2} R_p |I_{R_p}|^2 = \frac{1}{2} \frac{|V_c|^2}{R_p} \rightarrow \text{Pot disipada (pérdidas en } R_p)$$

$$Q = \omega_r \frac{2U_e}{P_L} = \frac{C \omega_r}{G_p} \Rightarrow \text{RLC paralelo } Q = \frac{C \omega_r}{G_p}$$

por tanto

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{G}{2\omega_0 C}\right)^2} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

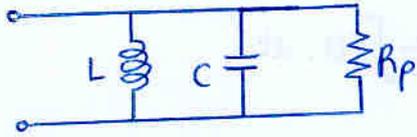
$$\omega_r \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \Rightarrow$$

Como $Q \uparrow$ (lo típico es 1000, 2000, ...)
Hablamos indistintamente de freq natural de resonancia con freq de resonancia

$$\omega_r \approx \omega$$

Incluso con un Q malo de 10 son muy parecidas

Admitancia de entrada RLC paralelo



$$Y_{in} = G_p + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

$$= G_p + jC\omega \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)$$

se anula para
 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_r = \omega_0$

$$Y_{in} = G_p (1 + 2jQ\Delta)$$

$$Q = \frac{C\omega}{G_p}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega \cdot \omega_0} \right)$$

δ si $\omega \rightarrow \omega_0$
 $\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \rightarrow \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \delta$
 $\omega + \omega_0 \rightarrow 2\omega_0$

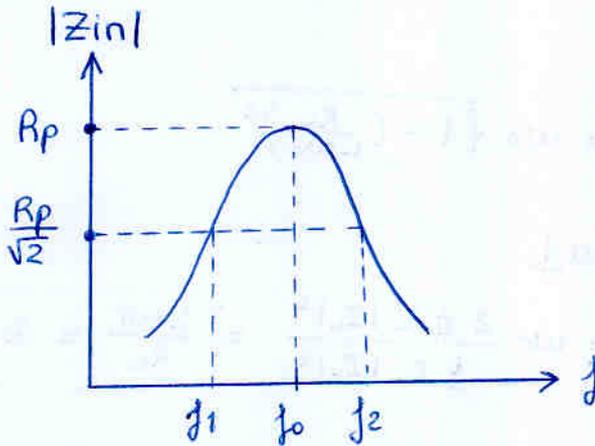
$$\Delta \approx \delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

Por tanto, en el entorno de ω_0

$$Y_{in} \approx G_p (1 + 2jQ\delta)$$

$$\omega = \omega_0 (1 + \delta)$$

$$f = f_0 (1 + \delta)$$



$$\frac{f_2 - f_1}{f_0} = BW = \frac{1}{Q}$$

ancho de banda relativo a -3dB es el inverso del factor de calidad

RLC paralelo:

$$Y_{in} = G_p + jC\omega \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \quad \text{con } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\approx G_p + jC\omega_0 2\delta$$

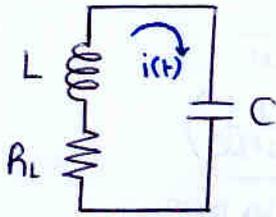
$$\approx \frac{C\omega}{Q} + 2jC\omega_0\delta$$

$Q = \frac{C\omega}{G}$

$\omega \rightarrow \omega_0$

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega^2} \approx \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cdot \frac{2\omega_0}{\omega_0} \approx \delta \cdot 2$$

ejemplo: otro circuito



Resolviendo el circuito aislado:

$$R_L i(t) + L \frac{\partial i(t)}{\partial t} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

resolviendo:

$$i(t) \propto e^{-\alpha t} \cos(\omega_{nr} t)$$

$$\alpha = \frac{R_L}{2L}$$

$$\omega_{nr} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R_L}{2\omega_0 L}\right)^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

nota: si R_L es muy grande sale ω_{nr} negativo en ese caso el coseno es una exponencial decreciente

- Hallemos la frecuencia de resonancia:
- método igualando energías

$$\begin{cases} U_e = \frac{1}{4} C |V_c|^2 & \leftarrow \text{Energía eléctrica almacenada en C} \\ U_m = \frac{1}{4} L |I_L|^2 & \leftarrow \text{Energía magnética almacenada en L} \\ & = \frac{1}{4} L \left| \frac{V_c}{R_L + j\omega L} \right|^2 \end{cases}$$

recuerda

valor instantáneo
 $U_e(t) = \frac{1}{2} C V_c^2(t)$

valor medio
 $U_e = \frac{1}{4} C |V_c|^2$
← factor

$U_e = U_m$

• resolviendo: $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{R_L}{L\omega_0}\right)^2}$

- Hallemos factor de calidad

$$Q = \omega_r \frac{U_T}{P_L} = \omega_r \frac{2U_m}{P_L} = \omega_r \frac{2 \cdot \frac{1}{4} L |I_L|^2}{\frac{1}{2} R_L |I_L|^2} = \frac{L\omega_r}{R_L} = Q_L$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &\approx \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \\ \omega_{nr} &\approx \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \end{aligned} \right\} \omega_r = \omega_0 \text{ para valores de } Q \text{ normales (aunque sean muy malos)}$$

↓

La frecuencia de resonancia, aún para Q 's malos, es muy parecida a la frecuencia de resonancia sin pérdidas.

⇒ Para calcular la frec de resonancia la aproximaremos calculando el caso sin pérdidas

• calculando la impedancia de entrada

$$Y_{in} = jC\omega + \frac{1}{R_L + j\omega L} = jC\omega + \frac{1/R_L}{1 + (\frac{\omega}{\omega_r})^2 Q_L^2} - j \frac{L\omega/R_L^2}{1 + (\frac{\omega}{\omega_r})^2 Q_L^2}$$

podríamos comprobar como, anulando la parte imaginaria, nos aparece la misma frecuencia de resonancia que igualando energías (son 2 métodos equivalentes)

• Despreciando 1 frente a Q_L^2

$$Q_L = \frac{L\omega_r}{R_L} \quad Y_{in} \approx jC\omega + \frac{1/R_L}{(\frac{\omega}{\omega_r})^2 Q_L^2} = j \frac{L\omega/R_L^2}{(\frac{\omega}{\omega_r})^2 Q_L^2}$$

$$= \frac{1}{Q_L^2 (\frac{\omega}{\omega_r})^2 R_L} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

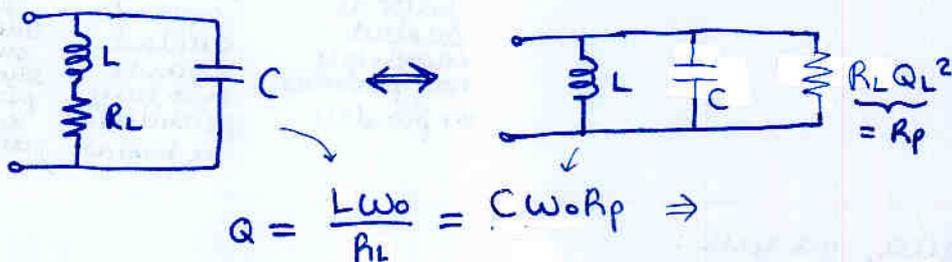
• y En el entorno de la frecuencia de resonancia
 $\frac{\omega}{\omega_r} \approx 1$

$$Y_{in} \approx \frac{1}{R_L Q_L^2} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

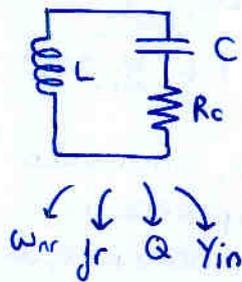
comparando con RLC paralelo

$$Y_{in} \approx \frac{1}{R_p} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

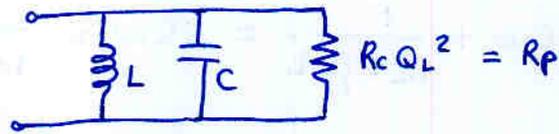
En el entorno de la frecuencia de resonancia se comporta igual que el circuito RLC paralelo



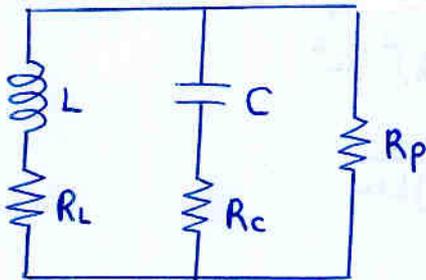
Otro caso



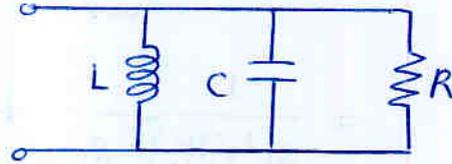
↔
tambien
sale
equivalente
RLC paralelo



Caso general



↔



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_L Q_L^2} + \frac{1}{R_c Q_c^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$Q = \frac{C\omega_0}{G} = C\omega_0 R$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{G}{C\omega_0} = \frac{1}{Q_p} + \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_c}$$

↑
factor de
calidad
cuando solo
hay pérdidas
en paralelo

↑
factor de
calidad
cuando
solo hay
pérdidas en
la bobina

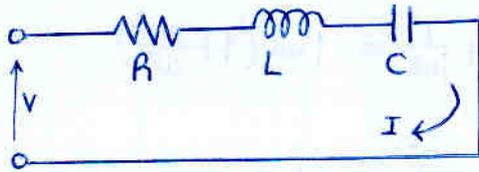
↑
factor de
calidad
cuando
solo hay
pérdidas
en el
condens.

Tiene lógica, ya que:

$$Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L} \rightarrow \frac{1}{Q} = \frac{P_L}{\omega_0 U_T} = \frac{P_{R_p} + P_{R_L} + P_{R_c}}{\omega_0 U_T} = \frac{1}{Q_p} + \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_c}$$

Podemos ir viendo las pérdidas en cada caso (separando las fuentes de pérdidas) y sumar las inversas del factor de calidad asociado a cada una, para obtener el factor de calidad total

Circuito RLC serie



$$U_e = \frac{1}{4} C |V_e|^2$$

$$U_m = \frac{1}{4} L |I|^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} R |I|^2$$

Frecuencia de resonancia:

1. $U_e = U_m$

$$\frac{1}{4} C |V_e|^2 = \frac{1}{4} L |I|^2$$

$$\frac{1}{4} C |I \cdot \frac{1}{j\omega C}|^2 = \frac{1}{4} L |I|^2 \Rightarrow \frac{L}{\omega^2 C^2} = L \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{LC}$$

2. $\text{Im}(Z_{in}) = 0$

$$Z_{in} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{LC}$$

Factor de calidad

$$Q = \omega_r \cdot \frac{U_T}{P_L} \Big|_{\omega=\omega_r} = \omega_r \cdot \frac{2U_m}{P_L}$$
$$= \omega_r \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4} L |I|^2}{\frac{1}{2} R |I|^2}$$

$$Q = \omega_r \frac{L}{R}$$

Impedancia de entrada

$$Z_{in} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$
$$= R + j\omega L \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$Z_{in} \approx R + j\omega L 2\delta$$
$$\approx \frac{\omega_0 L}{Q} + j\omega L 2\delta$$

recuerda:

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx 2\delta$$

$$\text{con } \delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

Frecuencia de resonancia compleja

Recordemos $Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L}$ ← energía total
 P_L ← pérdidas (potencia disipada)

$$\text{pero } P_L = - \frac{\partial U_T}{\partial t} = \omega_0 \frac{U_T}{Q}$$

Ecuación diferencial
resolviendo:

Energía Total $U_T(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}$

He aquí un posible significado físico del factor de calidad Q

Como la energía es \propto a V^2 e I^2

$$\left. \begin{matrix} v(t) \\ i(t) \end{matrix} \right\} \propto e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} e^{j\omega_0 t}$$

$$\left(e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos \omega_0 t \right)$$

$$= e^{j \underbrace{\omega_0 \left(1 + \frac{j}{2Q}\right)}_{\Omega_0} t}$$

$$= e^{j \Omega_0 t}$$

Y los fasores que usaremos eliminarán $e^{j\omega_0 t}$ (en lugar de $e^{j\omega t}$) será éste el término que obviemos

Frecuencia de resonancia compleja

$$\Omega_0 = \omega_0 \left(1 + \frac{j}{2Q}\right)$$

$$\text{Re}(\Omega_0) = \omega_0$$

$$\text{Im}(\Omega_0) = \frac{\omega_0}{2Q}$$

Uso de los fasores con resonancia compleja Ω_0

faseor: $V_0 = |V_0| \cdot e^{j\angle V_0}$

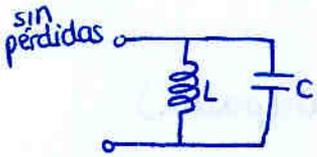
señal real: $v(t) = \text{Re} \{ V_0 \cdot e^{j\Omega_0 t} \}$

$$= \text{Re} \left\{ V_0 \cdot \underbrace{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}_{\text{variación senoidal}} \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{\text{exponencial real decreciente}} \right\}$$

$$= \underbrace{|V_0| e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}_{\text{amplitud y atenuación}} \cos(\omega_0 t + \angle V_0)$$

es la raíz cuadrada de la atenuación de la potencia
 $P \propto e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}$

ejemplo: red LC



$$Y_{in} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = jC\omega \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

ya hemos analizado el circuito sin pérdidas; ahora hacemos

$$\omega_0 \rightarrow \Omega_0 = \omega_0 \left(1 + \frac{j}{2Q}\right)$$

tomando la Q asociada a las pérdidas que tengamos (ej: pérdidas paralelo $Q = C\omega_0 R_p$)

con pérdidas:

$$Y_{in} = jC\omega \left[1 - \frac{\omega_0^2 \left(1 + \frac{j}{2Q} - \frac{1}{4Q^2}\right)}{\omega^2}\right]$$

$$\approx jC \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - j \frac{\omega_0^2}{Q}}{\omega^2}$$

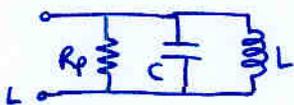
$$= jC \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega \cdot \omega} + \frac{C\omega_0^2}{Q\omega}$$

• si tenemos $\omega \approx \omega_0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(\omega + \omega_0)}{\omega} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega} \approx 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2\delta \\ \frac{\omega_0^2}{\omega} \approx \omega_0 \end{array} \right.$$

$$Y_{in} \approx \frac{C\omega_0}{Q} + 2jC\omega_0\delta$$

que es equivalente a la red LC con pérdidas en paralelo



$$Y_{in} \approx \frac{1}{R_p} + 2jC\omega_0\delta$$

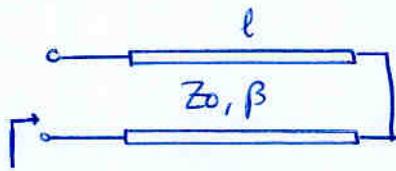
es igual cuando $R_p = \frac{Q}{C\omega_0}$

$Q = C\omega_0 R_p$ que es justo lo que habríamos introducido en Ω_0 para 'simular' pérdidas R_p

Por tanto, sustituyendo $\omega_0 \rightarrow \Omega_0$ lo que logramos es introducir las pérdidas al análisis previo sin pérdidas

2. Resonancia en líneas de transmisión

Hacemos el análisis sin pérdidas (ya las introduciremos luego)



$$Z_{in} = j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l)$$

- Para hallar la frecuencia de resonancia:

$$\operatorname{Im}(Z_{in}) = 0 \quad (\text{método 1})$$

nota: como no hay pérdidas $\operatorname{Re}(Z_{in}) = 0$
por tanto $\operatorname{Im}(Z_{in}) = 0 \Rightarrow Z_{in} = 0$

$$\operatorname{Im}(Z_{in}) = j Z_0 \operatorname{tg} \beta l = 0$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l = n \cdot \pi \quad \rightarrow \quad l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda_r = \frac{2l}{n}$$

Longitud sea un número entero de medias longitudes de onda

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$f_r = n \cdot \frac{c}{2l}$$

un conjunto de frecuencias de resonancia para cierta longitud l

- Factor de calidad.

como no consideramos pérdidas $Q = \infty$

- Impedancia de entrada

$$Z_{in} = j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l)$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 + \delta) l = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 + \delta) n \frac{\lambda_0}{2}$$

$$= n\pi (1 + \delta)$$

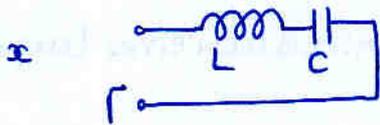
$$l = n \frac{\lambda_0}{2}$$

$$Z_{in} = j Z_0 \operatorname{tg}(n\pi (1 + \delta))$$

$$Z_{in} = j Z_0 \operatorname{tg}(n\pi \delta)$$

$$Z_{in} \approx j Z_0 n\pi \delta \quad \text{en el entorno de } \omega_r$$

Ahora podemos asociarle :



$$Z_{in} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = jL\omega \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$Z_{in} = jL\omega \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega^2} \quad \omega \rightarrow \omega_0$$

$$Z_{in} \approx 2jL\omega_0 \delta$$

recuerda: en LC
paralelo
 $Z_{in} \approx 2jC\omega_0 \delta$

No hay mas que ver

$$jZ_0 n \pi \delta = 2jL\omega_0 \delta$$

$$\Rightarrow L = \frac{Z_0 n \pi}{2\omega_0}$$

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2}$$

Para cada frecuencia de resonancia de la l. de tx hay asociado un circuito equivalente con elementos concentrados.

(Esto no siempre es posible para cualquier l. de tx.)

• Más frecuencias de resonancia

Cuando se anule la parte imaginaria de Y_{in} (en lugar de la de Z_{in})

$$\text{Im}(Y_{in}) = 0 = -Y_0 \cotg \beta l = 0$$

$$\text{Im}(Y_{in}) = -Y_0 \cotg \beta l = 0$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

$$l = (2n+1) \left(\frac{\lambda}{4}\right)$$

$$f = (2n+1) \frac{c}{4l}$$

¿Cómo es posible?

Si $\text{Im}(Z_{in}) = 0$

implica $Z_{in} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Y_{in} = 1/Z_{in} \in \mathbb{R}$

$\text{Im}(Y_{in}) = 0$ debería dar los mismos resultados!

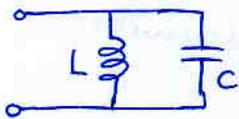
ver nota (*) \rightarrow

La admitancia de entrada

$$\begin{aligned}
 Y_{in} &= -jY_0 \cotg(\beta l) \\
 &= -jY_0 \cotg\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)(1+\delta)\right) \\
 Y_{in} &= jY_0 \tg\left(\frac{\pi}{2} \cdot \delta (2n+1)\right)
 \end{aligned}$$

$$Y_{in} \approx jY_0 \frac{\pi}{2} (2n+1) \cdot \delta$$

que podemos asociarle



$$\begin{aligned}
 Y_{in} &= jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \\
 Y_{in} &\approx 2jC\omega_0\delta
 \end{aligned}$$

Basta con identificar

$$\begin{aligned}
 jY_0 \frac{\pi}{2} (2n+1) \delta &= 2jC\omega_0\delta \\
 C &= \frac{Y_0 \pi (2n+1)}{4\omega_0} \\
 L &= \frac{1}{C\omega_0^2}
 \end{aligned}$$

para cada frecuencia de resonancia de la l. de tx obtenemos un equivalente LC paralelo

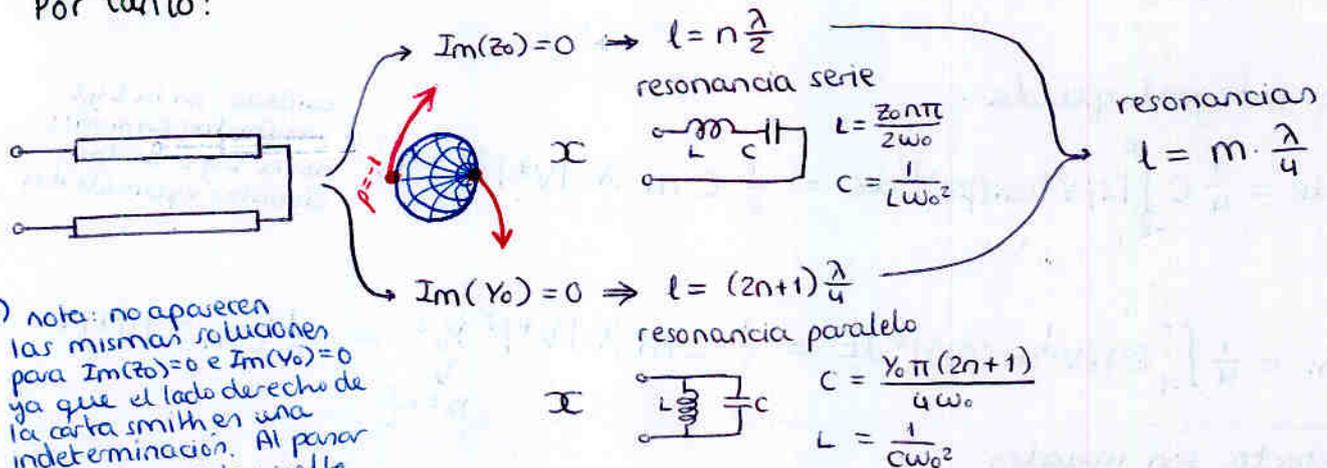
Nota

Lo mismo se puede hacer con l. de tx terminadas en abierto

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(Z_{in}) &= 0 \\
 \text{Im}(Y_{in}) &= 0
 \end{aligned}$$

(ver pag siguiente; explicado paso a paso)

Por tanto:



(*) nota: no aparecen las mismas soluciones para $\text{Im}(Z_0) = 0$ e $\text{Im}(Y_0) = 0$ ya que el lado derecho de la carta smith es una indeterminación. Al pasar a λ le damos la vuelta.

Hemos calculado las frec. de resonancias igualando la parte imaginaria a cero, veamos si se puede hacer igualando las energías eléctricas y magnéticas

Lo que ya hemos hecho

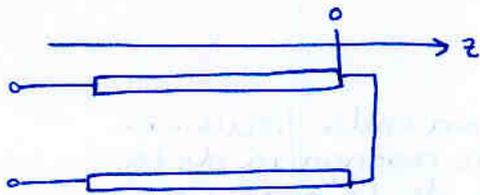
$$\left. \begin{array}{l} \text{Im}(Z_0) = 0 \rightarrow l = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{resonancia serie} \\ \text{Im}(Y_0) = 0 \rightarrow l = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{resonancia paralelo} \end{array} \right\} l = m \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Igualando energías

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_0^l |V(z)|^2 dz$$

[F/m] parámetro primario: no confundir con C en el circuito equivalente LC

$$U_m = \frac{1}{4} L \int_0^l |I(z)|^2 dz$$



$$V(z) = V^+ e^{-i\beta z} + V^- e^{i\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V^+ e^{-i\beta z} - V^- e^{i\beta z}}{Z_0}$$

C.C. $\Rightarrow V(z)|_{z=0} = V^+ + V^- = 0$
 $V^+ = -V^-$

sustituyendo en $V(z)$ e $I(z)$

$$V(z) = -2jV^+ \sin(\beta z)$$

$$I(z) = 2Y_0 V^+ \cos(\beta z)$$

$$\frac{V(-l)}{I(-l)} = j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l) \quad \text{coincide con lo esperado}$$

La integral queda:

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_{-l}^0 |2jV^+ \sin(\beta z)|^2 dz = \frac{1}{8} C m \lambda |V^+|^2$$

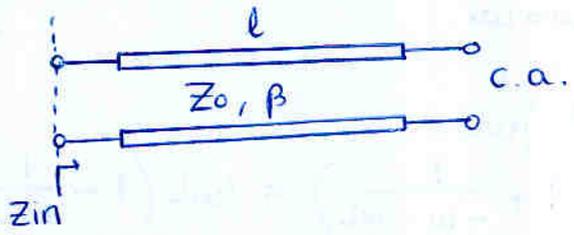
cuidado: son la Ly C parámetros primarios, no la Ly C de los circuitos equivalentes

$$U_m = \frac{1}{4} \int_{-l}^0 |2Y_0 V^+ \cos(\beta z)|^2 dz = \frac{1}{8} L m \lambda |V^+|^2 Y_0^2 = \frac{1}{8} C m \lambda |V^+|^2$$

$Y_0^2 = \frac{C}{L}$

En efecto, son iguales

Dem: Circuito equivalente para linea acabada en c.a.

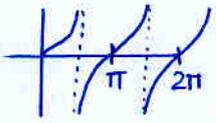


$$Z_{in} = -j Z_0 \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta l)}$$

$$Y_{in} = j Y_0 \operatorname{tg}(\beta l)$$

Resonancia serie: $Z_{in} = 0$

$$Z_{in} = -j Z_0 \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta l)} = 0$$

$\operatorname{tg}(\beta l) = \infty \rightarrow \beta l = (2n+1) \frac{\pi}{2}$

 $\frac{2\pi}{\lambda} l = (2n+1) \frac{\pi}{2}$
 $l = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$

para cualquier λ :

$$Z_{in} = -j Z_0 \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta l)}$$

$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l$
 $= \frac{2\pi}{\lambda_0} (1+\delta) \cdot l$
 $= \frac{2\pi}{\lambda_0} (1+\delta) \cdot (2n+1) \frac{\lambda_0}{4}$
 estando l ajustado para λ_0
 $\beta l = \frac{\pi}{2} (2n+1) (1+\delta)$
 $= \frac{\pi}{2} \delta (2n+1) + (2n+1) \frac{\pi}{2}$

nota:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1+\delta)$$

$$Z_{in} = -j Z_0 \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \delta (2n+1) + (2n+1) \frac{\pi}{2}\right)}$$

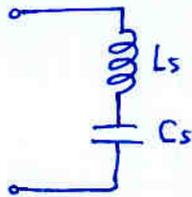
nota:
 $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$

 $= \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$
 $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$
 ↓ por induccion
 $\operatorname{tg}\left(x + (2n+1) \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$

$Z_{in} = j Z_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \delta (2n+1)\right)$
 $Z_{in} \simeq j Z_0 \frac{\pi}{2} \delta (2n+1)$

$\operatorname{tg} x \simeq x$
 \uparrow
 $x \downarrow$

Circuito equivalente:



(el circ. equiv tiene a L y C en serie porque en la configuración con la cual $Z_{in} = 0$ en $\omega = \omega_0$)

$$Z_{in} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= j\omega L \left(1 + \frac{1}{j\omega C \cdot j\omega L} \right) = j\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)$$

$$= j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{en efecto a } \omega_0, Z_{in} = 0)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Recuerda:

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$$

Nota:

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega^2}$$

si $\omega \rightarrow \omega_0$

$$\approx \frac{(\omega - \omega_0)(2\omega_0)}{\omega_0^2} = 2 \frac{(\omega - \omega_0)}{\omega_0} = 2\delta$$

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \approx 2\delta$$

por tanto si $\omega \rightarrow \omega_0$

$$Z_{in} = j\omega_0 L 2\delta$$

a una frecuencia

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0(1 + \delta) \\ f &= f_0(1 + \delta) \end{aligned}$$

Para hallar el circuito equivalente, igualamos impedancias:

$$j\omega_0 L 2\delta = j Z_0 \frac{\pi}{2} \delta (2n + 1)$$

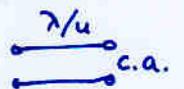
$$L = \frac{Z_0 \pi (2n + 1)}{4 \omega_0}$$

$$C = \frac{1}{L \omega_0^2}$$

$$C = \frac{4 Y_0}{\pi (2n + 1) \omega_0}$$

ei: para

$$l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}$$



$$n = 0 \Rightarrow L = \frac{Z_0 \pi}{4 \omega_0}$$

Resonancia paralelo $Y_{in} = 0$

$$Y_{in} = j Y_0 \operatorname{tg}(\beta l) = 0$$

$$\operatorname{tg}(\beta l) = 0 \rightarrow \beta l = n\pi$$
$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l = n\pi$$
$$l = n \frac{\lambda}{2}$$


para una λ cualquiera (cerca a λ_0)

$$Y_{in} = j Y_0 \operatorname{tg}(\beta l)$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1+\delta) l$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} (1+\delta) n \frac{\lambda_0}{2}$$

$$= \pi n (1+\delta)$$

$$Y_{in} = j Y_0 \operatorname{tg}(\pi n + \pi n \delta)$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \operatorname{tg}(x)$$

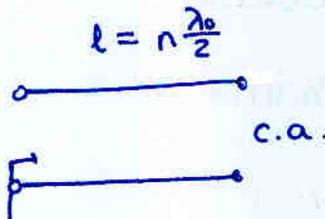
↓ induccion

$$\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg}(x)$$

$$Y_{in} = j Y_0 \operatorname{tg}(\pi n \delta)$$

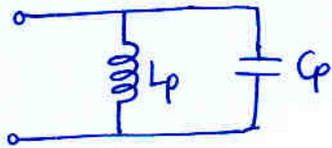
si $\delta \ll 1$

$$Y_{in} = j Y_0 \pi n \delta$$



Y_{in} para
 λ cercano a λ_0

Circuitos equivalente (ponemos L y C en paralelo, porque es así como puede tenerse $Y_{in}=0 \Rightarrow Z_{in}=\infty$ cuando $\omega=\omega_0$)



$$Y_{in} = j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p}$$

$$\begin{aligned} j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p} &= j\omega C_p \left(1 + \frac{1}{j\omega L_p \times j\omega C_p}\right) \\ &= j\omega C_p \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_p C_p}\right) \\ &= j\omega C_p \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \end{aligned}$$

$$j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\omega C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

en efecto, vemos que $Y_{in}=0$, $Z_{in}=\infty$ si $\omega = \omega_0$

$$Y_{in} = j\omega C_p \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

sabemos de antes que

$$\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \underset{\omega \rightarrow \omega_0}{\approx} 2\delta$$

si $\omega \rightarrow \omega_0$

$$Y_{in} \approx j\omega_0 C_p 2\delta$$

Para hacer el circuito equivalente igualamos impedancias

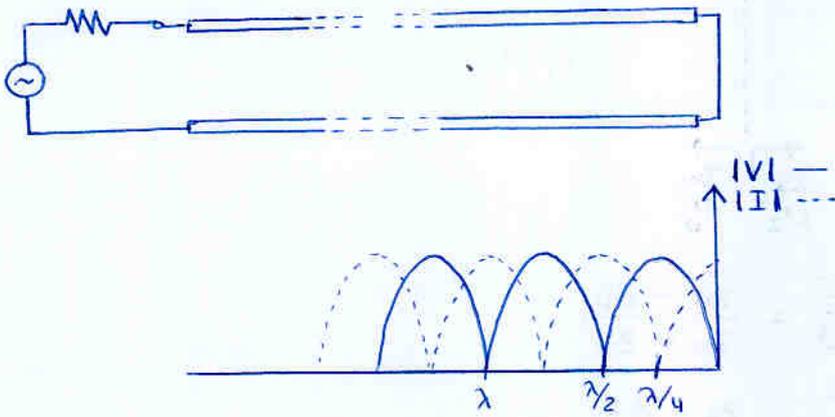
$$j\omega_0 C_p 2\delta = jY_0 \pi n \delta$$

$$C_p = \frac{n\pi Y_0}{2\omega_0}$$

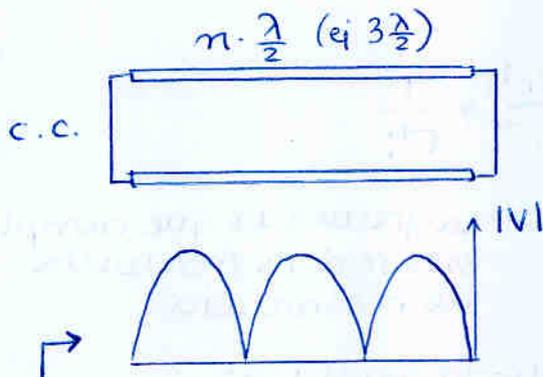
$$Y_p = \frac{1}{\omega_0^2 C_p}$$

$$L_p = \frac{2Z_0}{n\pi\omega_0}$$

Explicación "gráfica"



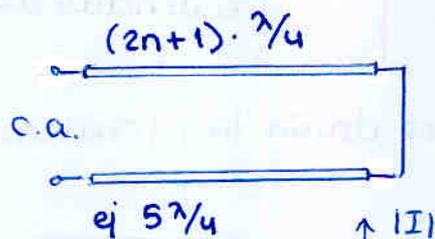
si corto la línea y pongo un cortocircuito allí donde $|V|$ sea cero o un circuito abierto allí donde $|I|=0$, no altera las condiciones de contorno:



Veo una impedancia cero

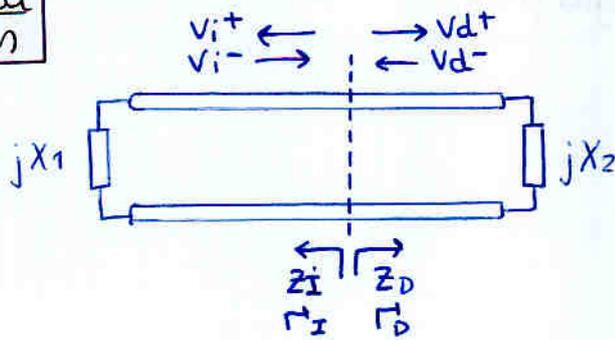
- $Re=0 \rightarrow$ no pérdidas
- $Im=0 \rightarrow$ condición de resonancia

Si no hay pérdidas existe una señal durante un tiempo indefinido. Esta señal sólo puede existir a la frecuencia natural de resonancia



Veo una admitancia cero

Caso general
sin pérdidas



$$\Gamma_D = \frac{V_{d^-}}{V_{d^+}} = \frac{Z_0 - Z_D}{Z_0 + Z_D}$$

$$\Gamma_I = \frac{V_{i^-}}{V_{i^+}} = \frac{Z_0 - Z_I}{Z_0 + Z_I}$$

y tenemos la condición de contorno $V_{d^+} = V_{i^-}$
 $V_{d^-} = V_{i^+}$

por tanto

$$\Gamma_D = \frac{V_{d^-}}{V_{d^+}} = \frac{V_{i^+}}{V_{i^-}} = \frac{1}{\Gamma_I}$$

⇒ $\Gamma_D \cdot \Gamma_I = 1$

La frecuencia que cumpla esto será la frecuencia de resonancia

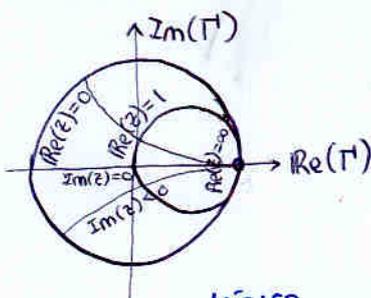
Dos formas de cumplir la condición:

- ① $Z_D + Z_I = 0$
- ② $\left. \begin{matrix} Z_D \\ Z_I \end{matrix} \right\} = \pm j\infty$

⇒ Se obtienen las frecuencias de resonancia

Ambas condiciones nos darán las frecuencias de resonancia

Nota: ¿que implica $\Gamma_D \cdot \Gamma_I = 1$?



lógico $Z_D + Z_I = 0$
si $\text{Re}(z) \geq 0$

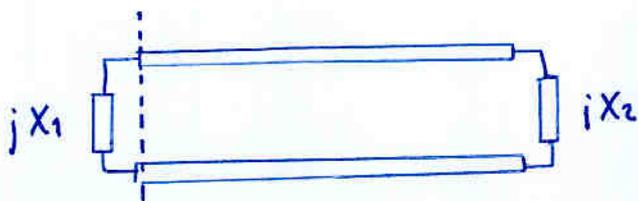
Implica que $|\Gamma_D| = |\Gamma_I| = 1$
(ya que circuito pasivo $|\Gamma| \leq 1$)

Estamos en la circunferencia unidad

$$\text{Re}(Z_D) = \text{Re}(Z_I) = 0$$

No hay pérdidas

Podemos cortar donde queramos
ejemplo: cortando en un lateral



$$Z_I = jX_1$$

$$Z_D = Z_0 \frac{jX_2 + jZ_0 \operatorname{tg}(\beta l)}{Z_0 + jX_2 j \operatorname{tg}(\beta l)}$$

① $\left. \begin{matrix} Z_I \\ Z_D \end{matrix} \right\} = \infty \rightarrow$ ne se cumple nunca, ya que $Z_I = jX_1$

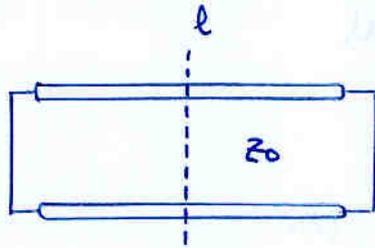
de esta condición no salen frecuencias de resonancia

② $Z_D + Z_I = 0$

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2 - 1}$$

$$\beta l = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2 - 1}\right) + n\pi$$

ejemplo:



→ Cortando por la mitad:

$$Z_D = Z_I = j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l/2)$$

Apliquemos las condiciones de resonancia:

• $Z_D = Z_I = 0 \Rightarrow \beta l/2 = n\pi$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{l}{2} = n\pi$$

$$l = n \cdot \lambda$$

$$l = (2n) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

existe resonancia cuando l es un número par de longitudes de onda

• $Z_D = Z_I = \infty \Rightarrow \beta l/2 = (2n+1) \frac{\pi}{2}$

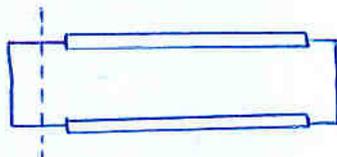
$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{l}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

$$l = (2n+1) \frac{\lambda}{2}$$

existe resonancia cuando l es un número impar de longitudes de onda

Así hemos obtenido todo el conjunto de frecuencias de resonancia

→ Cortando en un lateral



$$Z_I = 0$$

$$Z_D = j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l)$$

condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} Z_D = 0 \\ Z_I = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta l = n\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda} l = n\pi \end{array}$$

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

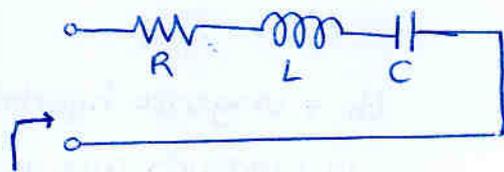
De una tacada nos han salido todas

$$\left. \begin{array}{l} Z_D \\ Z_I \end{array} \right\} = \infty$$

Esta condición no se satisface nunca (ya que $Z_I = 0$) por tanto de aquí no salen más frecuencias de resonancia

C → Podemos hallar el circuito equivalente que se comporte igual en el entorno de la freq de resonancia

Esta vez habrá que considerar un circuito LC con pérdidas (i.e. con R)



$$Z_i = R + (j\omega L + \frac{1}{j\omega C})$$

$$= R + j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$\frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega^2} \underset{\omega \rightarrow \omega_0}{\approx} 2\delta$$

$$Z_i \approx R + 2jL\omega_0\delta$$

Iguualando la Z_i para identificar términos:

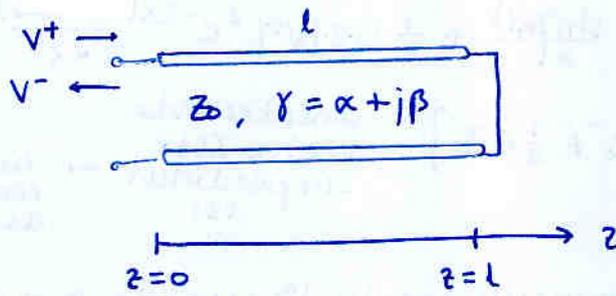
$$2L\omega_0 = Z_0 n \pi \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{Z_0 n \pi}{2\omega_0} \\ C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \\ R = Z_0 \alpha l \end{cases}$$

D → El factor de calidad: lo calculamos a partir del circuito equivalente

$$Q = \omega_0 \cdot \frac{U_T}{P_e} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{Z_0 n \pi}{2Z_0 \alpha l} = \frac{n \pi}{2\alpha l} \underset{l = n \frac{\lambda}{2}}{\uparrow} \frac{2n \pi}{2\alpha n \lambda} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

En general no tiene porque existir circuito equivalente, por tanto necesitaremos calcular el factor de calidad Q de otra forma (directamente con la fórmula)

Cálculo de Q (cálculo directo) (por si no existe circuito equivalente)



$$Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L}$$

$$\left. \begin{aligned} V(z) &= V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{\gamma z} = -2V^+ e^{-\gamma l} \cdot \text{sh}(\gamma(z-l)) \\ I(z) &= \frac{V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{\gamma z}}{Z_0} = 2V^+ \gamma_0 e^{-\gamma l} \cdot \text{ch}(\gamma(z-l)) \end{aligned} \right\} (1)$$

c.c. $V(z=l) = 0 \Rightarrow V^- = -V^+ e^{-2\gamma l}$

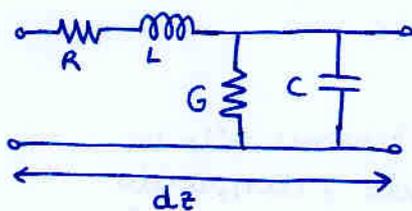
Para calcular factor cal. Q podemos suponer que no hay pérdidas ($\gamma = j\beta$) en $V(t)$ e $I(t)$?

$$\left. \begin{aligned} V(z) &= -2jV^+ e^{-j\beta l} \text{sen}(\beta(z-l)) \\ I(z) &= 2V^+ \gamma_0 e^{-j\beta l} \text{cos}(\beta(z-l)) \end{aligned} \right\} (2)$$

Calcularemos Q tanto con (1) con (2), y veremos que con (1) es mucho más difícil, y que el resultado tiende al de (2) cuando $\alpha \downarrow$

• Necesitamos P_L

recuerda:
línea con pérdidas



bajas pérdidas:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$\alpha = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{R}{Z_0}}_{\alpha_c} + \underbrace{\frac{1}{2} G Z_0}_{\alpha_d}$$

$$P_L = \frac{1}{2} R \int_0^l |I(z)|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_0^l |V(z)|^2 dz$$

sumamos las pérdidas en R y en G para cada dz

Integrando

$$P_L = \begin{cases} \frac{1}{2} R_2 |V^+|^2 e^{-2\alpha l} \gamma_0^2 \frac{\text{sh}(2\alpha l)}{2\alpha} + \frac{1}{2} G_2 |V^+|^2 e^{-2\alpha l} \frac{\text{sh}(2\alpha l)}{2\alpha} & \text{considerando } V(z) \text{ e } I(z) \text{ con pérdidas (1)} \\ 2 |V^+|^2 l \gamma_0 \underbrace{\left[\frac{1}{2} R \gamma_0 + \frac{1}{2} G Z_0 \right]}_{\alpha} & \text{considerando } V(z) \text{ e } I(z) \text{ sin pérdidas (2)} \end{cases}$$

→ aunque en realidad no desprecia α

Vemos que la 1ª expresión coincide con la 2ª cuando $\alpha \rightarrow 0$

• Necesitamos U_T

Ya que es mucho más cómodo manipular $V(z)$ e $I(z)$ sin pérdidas, siempre lo haremos así.

$$U_T = U_e + U_m$$

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_0^l |V(z)|^2 dz$$

← la suma de la energía almacenada en cada condensador

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot C \cdot |V^+|^2 e^{-2\alpha l} \frac{\text{sh}(2\alpha l)}{2\alpha} & \text{para } V(z) \text{ e } I(z) \text{ con pérdidas} \\ \frac{1}{4} C \cdot 4 \cdot |V^+|^2 \frac{l}{2} & \text{para } V(z) \text{ e } I(z) \text{ sin pérdidas} \end{cases}$$

$$U_m = \frac{1}{4} L \int_0^l |I(z)|^2 dz$$

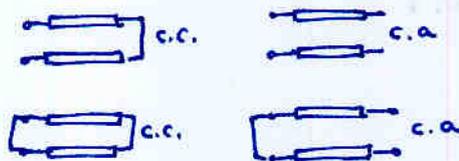
$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot L \cdot |V^+|^2 \gamma_0^2 e^{-2\alpha l} \frac{\text{sh}(2\alpha l)}{2\alpha} \\ L |V^+|^2 \frac{l}{2} \gamma_0^2 \end{cases}$$

en realidad no hace falta ya que $U_m = U_e$

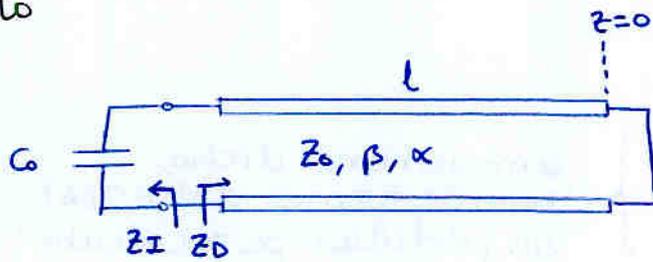
Finalmente

$$Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

válido siempre que tenemos sólo la línea almacenando y disipando energía (ningún otro elemento)



ejemplo



$$\begin{cases} Z_I = \frac{1}{j\omega C_0} \\ Z_D = Z_0 \operatorname{th}(\gamma l) \\ \quad = jZ_0 \operatorname{tg}(\beta l) \end{cases} \text{ considerando sin pérdidas}$$

- siempre calcularemos las frecuencias de resonancia sin considerar pérdidas; serán igual

① $Z_I + Z_D = 0$

$$jZ_0 \operatorname{tg}(\beta l) + \frac{1}{j\omega C_0} = 0$$

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \frac{1}{Z_0 C_0 \omega}$$

↓

$$l = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{Z_0 C_0 \omega}\right) + n\pi}{\beta}$$

es una ecuación trascendente si buscas ω que hay que resolver numericamente

② $\left. \begin{matrix} Z_I \\ Z_D \end{matrix} \right\} = \infty$ Nunca se puede conseguir simultaneamente ambas cosas (ya que $Z_I = \infty$ sólo para $\omega = 0$)

Cálculo del factor de calidad

$$Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L}$$

$$\left. \begin{aligned} V(z) &= V^+ e^{-i\beta z} + V^- e^{i\beta z} \\ I(z) &= \frac{V^+ e^{-i\beta z} - V^- e^{i\beta z}}{Z_0} \end{aligned} \right\}$$

como ya hemos dicho,
consideraremos $V(z)$ e $I(z)$
sin pérdidas para calcular
 P_L (consideraremos
otras pérdidas)

↓ c.c.
 $V(0) = 0$
↳ $V^- = -V^+$

$$V(z) = -2jV^+ \sin(\beta z)$$

$$I(z) = 2V^+ \cos(\beta z)$$

$$P_L = \frac{1}{2} R \int_{-l}^0 |I(z)|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_{-l}^0 |V(z)|^2 dz = \dots$$

sumar las pérdidas en R y G (parámetros primarios)
para cada dz . ⚠ habría que sumar las pérdidas en
cualquier otra resistencia que hubiere
en el circuito.

$$U_T = U_e + U_m$$

U_m : será la suma de la almacenada en las L 's (parámetro
primario) para cada dz

$$U_m = \frac{1}{4} \cdot L \cdot \int_{-l}^0 |I(z)|^2 dz$$

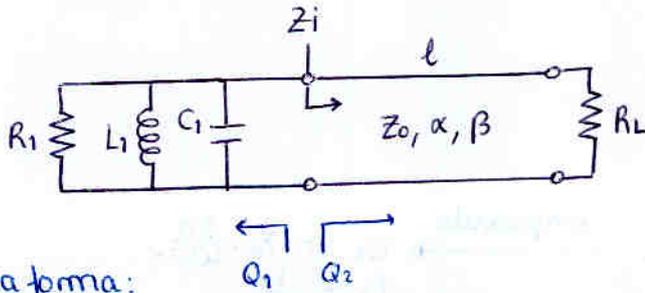
U_e : será la suma de la energía almacenada en los C 's
(parámetro primario) para cada dz , y la energía
almacenada en C_0 ⚠

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_{-l}^0 |V(z)|^2 dz + \frac{1}{4} C_0 |V_0|^2$$

$\uparrow V_0 = V(z = -l)$

Basta calcular una de las dos, ya que $U_e = U_m$
y entonces $U_T = 2U_m = 2U_e$

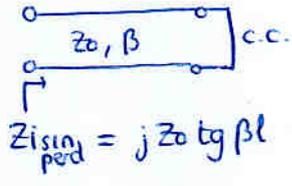
Problema



$f_0 = 6 \text{ GHz}$
 $Q = 670$
 $C_1 = 2 \text{ pF}$
 $R_1 = 70 \text{ k}\Omega$
 $R_L = 1 \Omega$
 $l = 2.6191 \text{ cm}$

• una forma:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \rightarrow Q_2$$

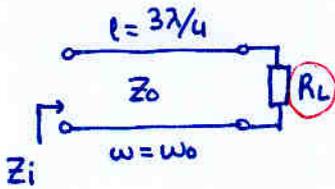


$$Z_{i \text{ sin perd}} = j Z_0 \operatorname{tg} \beta l$$

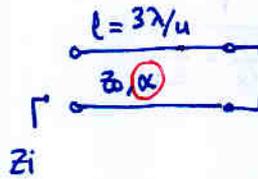
$$\omega_0 \Rightarrow \Delta \omega_0 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q_2}\right)$$

$Z_{i \text{ con perd}}$

• otra forma: perdidas por separado



$$Z_i = \frac{Z_0^2}{R_L}$$



$$Z_i = j Z_0 \operatorname{th}(\gamma l)$$

$$Z_i = Z_0 \cdot \operatorname{th}(\gamma l)$$

$$\operatorname{th}(\gamma l) = \operatorname{th}(\alpha l + j\beta l) = \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + \operatorname{th}(j\beta l)}{1 + \operatorname{th}(\alpha l) \operatorname{th}(j\beta l)}$$

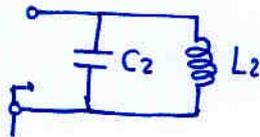
$$= \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + j \operatorname{tg}(\beta l)}{1 + j \operatorname{th}(\alpha l) \operatorname{tg}(\beta l)}$$

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \infty$$

$$= \frac{1}{\operatorname{th}(\alpha l)} \approx \frac{1}{\alpha l}$$

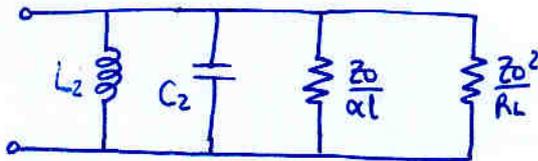
$$Z_i = \frac{Z_0}{\alpha l}$$

Comparándolo con



$$Y_i = j\omega C_2 - \frac{1}{j\omega L_2} = \dots \approx j\omega_0 C_2 \quad \xrightarrow{\text{comparando}} \quad \begin{aligned} C_2 &= Y_0 \cdot \frac{3\pi}{4\omega_0} \\ L_2 &= \frac{1}{\omega_0^2 C_2} \end{aligned}$$

Y ahora podría poner el efecto de las dos pérdidas



→ Por la primera forma

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \rightarrow Q_2 = \frac{1}{\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_1}}$$

caso sin pérdidas:

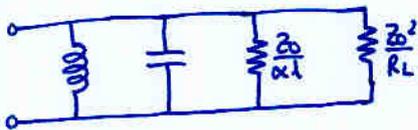
$$\begin{aligned} Z_i &= j Z_0 \operatorname{tg} \beta l && \text{en } \omega_0 \rightarrow \delta = 0 \\ &= j Z_0 \operatorname{tg} \left[\frac{\omega_0(1+d)}{v_p} \cdot l \right] \downarrow && j Z_0 \operatorname{tg} \frac{\omega_0 l}{v} \end{aligned}$$

$$\omega_0 \rightarrow \omega_{00} = \omega_0 \left(1 + j \frac{1}{2Q_2} \right)$$

$$\begin{aligned} Z_i &= j Z_0 \operatorname{tg} \left[\frac{l}{v} \omega_0 \left(1 + j \frac{1}{2Q_2} \right) \right] \\ &= j Z_0 \operatorname{tg} \left[\frac{3\pi}{2} \left(1 + j \frac{1}{2Q_2} \right) \right] = -j Z_0 \frac{1}{\operatorname{tg} \left(j \frac{1}{2Q_2} \cdot \frac{3\pi}{2} \right)} \\ &= -j \frac{Z_0}{-j \operatorname{th} \left(\frac{3\pi}{2} \frac{1}{2Q_2} \right)} = \frac{Z_0}{\operatorname{th} \left(\frac{3\pi}{2} \frac{1}{2Q_2} \right)} \approx \frac{Z_0}{\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{2Q_2}} \end{aligned}$$

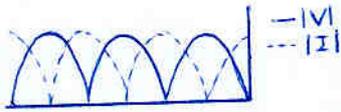
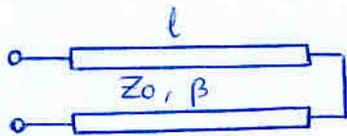
$$Y_i \approx Y_0 \cdot \frac{3\pi}{4Q_2} \Rightarrow \text{circuito equivalente: } \begin{aligned} &\text{Circuit diagram with } C_2, L_2, \text{ and } Z_0^2/RL \text{ in parallel.} \\ G_2 &= Y_0 \frac{3\pi}{4Q_2} \end{aligned}$$

coincide



$$\begin{aligned} G_2 &= \alpha l Y_0 + R_L Y_0^2 \\ Q_2 &= \frac{\omega_0 C_2}{G_2} = \frac{\omega_0 \frac{3\pi Y_0}{4\omega_0}}{Y_0 \frac{3\pi}{4Q_2}} = Q_2 \\ G_2 &= Y_0 \frac{3\pi}{4} \frac{1}{Q_2} \end{aligned}$$

Problema: Resonancia línea de tx acabada en c.c.



$$Z_i = Z_0 \cdot \frac{Z_L + j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l)}{Z_0 + j Z_L \operatorname{tg}(\beta l)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} Z_L = 0$$

$$= j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l)$$

Resonancia serie $Z_i = 0$

$$Z_i = j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta l = n \cdot \pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} l = n \cdot \pi \quad l = n \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{para una } \lambda = \lambda_0$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 + \delta) n \frac{\lambda_0}{2}$$

$$= n\pi (1 + \delta)$$

$$= \delta n\pi + n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 + \delta)$$

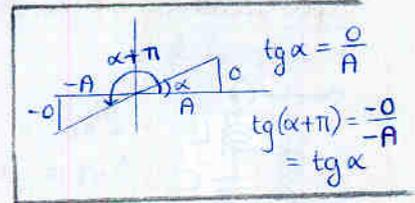
ACUERDATE DE APLICAR ESTO

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \operatorname{tg}(\delta n\pi + n\pi)$$

$$= \operatorname{tg}(n\pi\delta)$$

$$\approx n\pi\delta$$

$\delta \uparrow \downarrow$



$$Z_i \approx j Z_0 n\pi\delta$$

Equivalente circuital (no siempre existe)

RLC serie



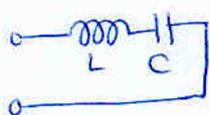
$$U_m = \frac{1}{4} L I^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} I^2 R$$

$$Q = \omega_0 \cdot \frac{U_T}{P_L} \Big|_{\omega = \omega_0} = \omega_0 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4} L I^2}{\frac{1}{2} I^2 R}$$

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R}$$

Como estábamos analizando el caso sin pérdidas



$$Z_{in} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$= j2\delta\omega L$$

$$= j\omega L \left(1 + \frac{1}{j\omega C j\omega L}\right)$$

$$= j\omega L \left(1 + \frac{1}{-\omega^2 LC}\right) = j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega^2}$$

si $\omega \approx \omega_0$

$$\approx \frac{(\omega - \omega_0)(2\omega_0)}{\omega_0^2} = 2\delta$$

Iguando expresiones de Z_{in}

$$j Z_0 n\pi\delta = j2\delta\omega L \Rightarrow L = \frac{Z_0 n\pi}{2\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{2}{Z_0 n\pi\omega_0}$$

Resonancia paralelo $Y_{in} = 0$

$$Y_{in} = \frac{1}{Z_{in}} = -jY_0 \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta l)} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$l = (2n+1)\frac{\lambda_0}{4}$$

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (2n+1)\frac{\lambda_0}{4}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} (1+s)(2n+1)\frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2} (1+s)(2n+1)$$

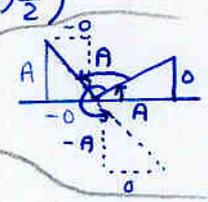
$$= (2n+1)\frac{\pi}{2} s + (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \operatorname{tg}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} s + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}(x + (2n+1)\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} s\right)}$$

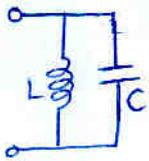
$$\approx -\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2} s}$$



$$Y_{in} = +jY_0 (2n+1)\frac{\pi}{2} s$$

Equivalente RLC paralelo

sin pérdidas



$$Z_{in}$$

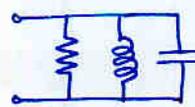
$$Y_{in} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$= j\omega C \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$\approx j\omega 2sC$$

} mismos dos "trucos"

con pérdidas



$$U_e = \frac{1}{4} C V^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V^2}{R}$$

$$Q = \omega_r \cdot \frac{U_T}{P_L} \Big|_{\omega_r} = \omega_r \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4} C V^2}{\frac{1}{2} \frac{V^2}{R}}$$

$$Q = \omega_r \frac{C}{R}$$

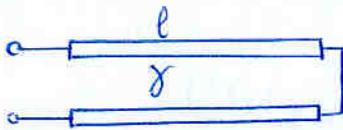
Comparando Y_{in}

$$jY_0 (2n+1)\frac{\pi}{2} s = j\omega 2sC \Rightarrow C = \frac{Y_0 (2n+1)\pi}{4\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{4}{Y_0 (2n+1)\pi\omega_0}$$

Línea de tx con pérdidas acabada en c.c.

Ahora tenemos $\gamma = \alpha + j\beta$



$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \operatorname{th}(\gamma l)}{Z_0 + Z_L \operatorname{th}(\gamma l)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} Z_L = 0$$

$$= Z_0 \operatorname{th}(\gamma l)$$

$$= Z_0 \operatorname{th}((\alpha + j\beta)l)$$

$$= Z_0 \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + j \operatorname{tg}(\beta l)}{1 + j \operatorname{th}(\alpha l) \operatorname{tg}(\beta l)}$$

tangente hiperbólica de un número complejo

• Resonancia serie:

$Z_i = 0 \rightarrow$ se obtienen las MISMAS frecuencias de resonancia que en el caso sin pérdidas

$$l = n \frac{\lambda_0}{2} \quad \beta l = n\pi(1 + \delta)$$

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \operatorname{tg}(n\pi + \delta n\pi) = \operatorname{tg}(\delta n\pi) \approx \delta n\pi$$

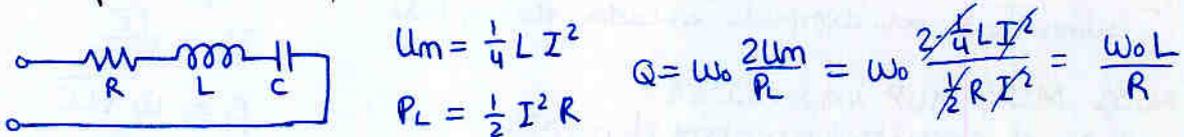
$$\operatorname{th}(\alpha l) \approx \alpha l$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{\alpha l + j\delta n\pi}{1 + j \cdot \alpha l \cdot \delta n\pi} = Z_0 \alpha l + j\delta n\pi Z_0$$

$\alpha \downarrow \delta \downarrow$
infinitésimos de 2º orden

cálculo del factor de calidad

1. A partir del equivalente RLC serie (no siempre es posible ya que no siempre existe)



$$Z_{in} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\approx R + j2\delta\omega L$$

$$= \frac{\omega_0 L}{Q} + j2\delta\omega L$$

ver desarrollo en pag anterior

igualando Z_{in} 's

$$Z_0 \alpha l + j\delta n\pi Z_0 = \frac{\omega_0 L}{Q} + j2\delta\omega L \Rightarrow$$

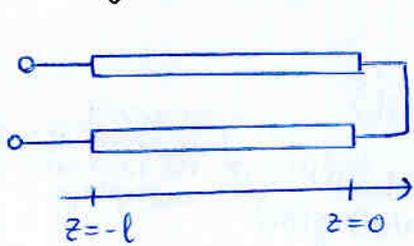
$$L = \frac{Z_0 n\pi}{2\omega_0} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{2}{Z_0 n\pi \omega_0}$$

$$R = Z_0 \alpha l$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{Z_0 \alpha l} = \frac{\omega_0 Z_0 n \pi}{Z_0 \alpha l 2 \omega_0} = \frac{n \pi}{2 \alpha l} \underset{l = n \frac{\lambda_0}{2}}{=} \frac{\pi}{\alpha \lambda_0} = \frac{\beta}{2 \alpha}$$

2- Integrando en la línea



$$\begin{cases} V(z) = V^+(e^{-j\gamma z} + \rho e^{+j\gamma z}) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\gamma z} - \rho e^{+j\gamma z}) \end{cases}$$

siendo $\rho = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$

Está justificado en V-11, para calcular α podemos suponer que $\gamma \approx \alpha + j\beta \approx j\beta$
 $\alpha = 0$

$$\begin{cases} V(z) = V^+(e^{-j\gamma z} - e^{+j\gamma z}) = -2jV^+ \text{sen}(\gamma z) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\gamma z} + e^{+j\gamma z}) = \frac{2V^+}{Z_0} \text{cos}(\gamma z) \end{cases}$$

$\alpha = 0$ (por sencillez)

$$\begin{cases} V(z) = -2jV^+ \text{sen}(\beta z) \\ I(z) = \frac{2V^+}{Z_0} \text{cos}(\beta z) \end{cases}$$

$$U_T = U_e + U_m$$

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_{-l}^0 |V(z)|^2 dz$$

suma de la energía almacenada en cada Cdz

$$U_m = \frac{1}{4} L \int_{-l}^0 |I(z)|^2 dz$$

suma de la e. en cada Ldz

$$P_L = \frac{1}{2} R \int_{-l}^0 |I(z)|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_{-l}^0 |V(z)|^2 dz$$

suma de la pot. disipada en cada Rdz y Gdz

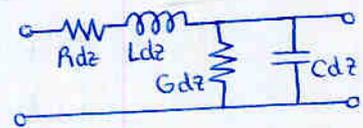
Nota MUY, MUY importante:
 Si en el circuito hay otros elementos que almacenen energía o disipen potencia HAY que sumarlo al término correspondiente

Nota: C, L, R y G son los parámetros de la línea; no tienen nada que ver con el equiv. RC

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} + \frac{1}{2} G \cdot Z_0$$



Integremos pues:

$$U_e = \frac{1}{4} C \int_{-l}^0 |V(z)|^2 dz = \frac{1}{4} C \int_{-l}^0 |1 - 2jV^+ \sin(\beta z)|^2 dz$$

$$= \frac{1}{4} C \cdot 4|V^+|^2 \int_{-l}^0 \sin^2(\beta z) dz$$

Primera forma: matemáticamente

$$\int_{-l}^0 \sin^2(\beta z) dz = \int_{-l}^0 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\beta z) dz$$

$$= \left[\frac{z}{2} - \frac{1}{4\beta} \sin(2\beta z) \right]_{-l}^0$$

$$= \frac{1}{4\beta} \sin(2\beta l) + \frac{l}{2} = \frac{l}{2} = n \frac{\lambda}{4}$$

como $l = n \frac{\lambda}{2}$
 $2\beta l = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \frac{\lambda}{2} = 2\pi n$
 $\sin(2\beta l) = 0$

$$U_e = C|V^+|^2 \cdot n \frac{\lambda}{4} = C|V^+|^2 \frac{l}{2}$$

Energía magnética: no haría falta calcularla porque sabemos que $U_m = U_e$ en resonancia, pero no me cuesta nada

$$U_m = \frac{1}{4} L \int_{-l}^0 |I(z)|^2 dz = \frac{1}{4} L \int_{-l}^0 \left| \frac{2V^+}{Z_0} \cos(\beta z) \right|^2 dz$$

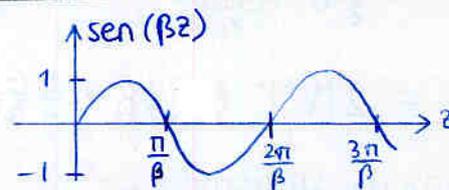
$$= \frac{1}{4} L \cdot 4 \frac{|V^+|^2}{Z_0^2} \int_{-l}^0 \cos^2(\beta z) dz$$

$$= L \frac{|V^+|^2}{Z_0^2} \cdot n \frac{\lambda}{4} = L \frac{|V^+|^2}{Z_0^2} \frac{l}{2}$$

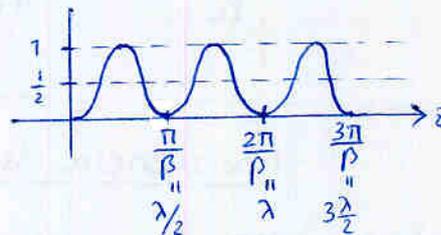
Ya que estamos, comprobamos:

$$U_e = U_m? \quad C|V^+|^2 \frac{l}{2} = L \frac{|V^+|^2}{Z_0^2} \frac{l}{2}$$

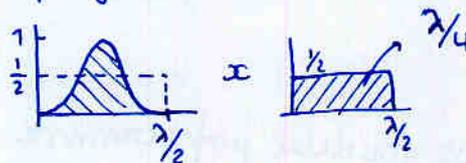
$$C = \frac{L}{Z_0^2} \quad \text{en efecto } Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ por def.}$$



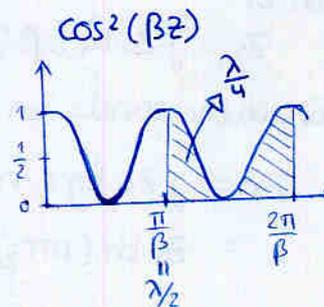
$$\sin^2(\beta z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\beta z)$$



segunda forma: pensando cada "montañita" tiene el mismo área que un rectángulo (al fin y al cabo es un coseno)



Como estamos en resonancia serie, la $V(z)$ en $-l$ será siempre 0 (para $Z_{in} = 0$) por tanto para $l = n \frac{\lambda}{2}$, cogemos n "montañitas" = $n \frac{\lambda}{4}$



$$P_L = \frac{1}{2} R \int_{-l}^0 |I(z)|^2 dz + \frac{1}{2} G \int_{-l}^0 |V(z)|^2 dz$$

$$= \frac{1}{2} R \cdot 4 \frac{|V|^2}{Z_0^2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} G \cdot 4 |V|^2 \cdot \frac{l}{2}$$

$$= 2 |V|^2 \cdot l \left(\frac{1}{2} \frac{R}{Z_0^2} + \frac{1}{2} G \right) = 2 |V|^2 \cdot l \cdot \frac{1}{Z_0} \left(\frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} + \frac{1}{2} G Z_0 \right)$$

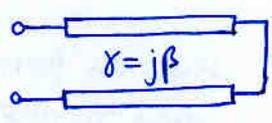
$$Z_0 C = \sqrt{\frac{L}{C}} C = \sqrt{LC}$$

Así que finalmente:

$$Q = \omega_0 \cdot \frac{U_T}{P_L} = \omega_0 \frac{2Ue}{P_L} = \omega_0 \cdot \frac{C |V|^2 l}{2 |V|^2 l \cdot \frac{1}{Z_0} \alpha} = \omega_0 \frac{Z_0 C}{2\alpha} = \frac{\beta}{2\alpha} //$$

Frecuencia de resonancia compleja : veámosla en acción

veamos como, a partir del circuito sin pérdidas:



Resonancia serie
 $l = n \frac{\lambda_0}{2}$
 $Z_{in} = j Z_0 \operatorname{tg}(\beta l)$

si $\omega = \omega_0 \rightarrow \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \frac{\lambda_0}{2} = n\pi$
 $Z_{in} = 0 \rightarrow$ como cabe esperar en un circuito resonante sin pérdidas

Podemos modelar perfectamente las pérdidas si conocemos Q sin más que hacer el cambio a frecuencia de resonancia compleja

$$\omega_0 \rightarrow \omega_{\alpha} = \omega_0 \left(1 + j \frac{1}{2Q} \right)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f_0}{v_p} = \frac{\omega_0}{v_p}$$

como $\beta = \frac{\omega_0}{v_p}$

$$\beta \rightarrow \beta \cdot \left(1 + j \frac{1}{2Q} \right)$$

entonces:

$$Z_i = j Z_0 \operatorname{tg} \left(\beta l \left(1 + j \frac{1}{2Q} \right) \right)$$

$$\operatorname{tg}(jx) = \frac{\operatorname{sen}(jx)}{\operatorname{cos}(jx)}$$

particularizando en ω_0 : $\beta l = n\pi$

$$Z_i = j Z_0 \operatorname{tg} \left(n\pi \left(1 + j \frac{1}{2Q} \right) \right) = j Z_0 \operatorname{tg} \left(n\pi j \frac{1}{2Q} \right)$$

$$= Z_0 \operatorname{th} \left(n\pi \frac{1}{2Q} \right) \approx \frac{Z_0 n\pi}{2Q}$$

\uparrow
 $\alpha \uparrow \uparrow$

en efecto

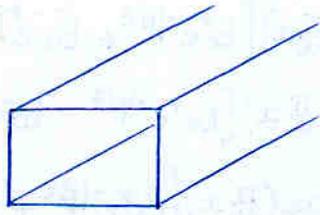
$$\frac{n\pi}{2Q} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{n\pi R}{2\omega_0 L} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{n\pi Z_0 \alpha l 2\omega_0}{2\omega_0 Z_0 n\pi} = \alpha l$$

$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ $R = Z_0 \alpha l$
 $L = \frac{Z_0 n\pi}{2\omega_0}$

$Z_i = Z_0 \operatorname{th}(\alpha l) \leftarrow$ coincide con la Z_{in} de la l. de tx con pérdidas

3 Cavidades

No existen modos TEM (sólo hay 1 conductor)
 (por tanto estrictamente no existen $I(z)$ ni $V(z)$, así que usaremos $\bar{H}(z)$ y $\bar{E}(z)$ en su lugar)



TE
TM

TE

$$\left. \begin{aligned} E_z &= 0 \\ \nabla_t H_z + k_c^2 H_z &= 0 \\ \bar{H}_t &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z \\ \bar{E}_t &= Z_{TE} (\bar{H}_t \times \hat{z}) \end{aligned} \right\}$$

esto es para la onda progresiva $e^{-\gamma z}$

$$H_z = () e^{-\gamma z} + () e^{\gamma z}$$

$$H_t = () e^{-\gamma z} - () e^{\gamma z}$$

$$E_t = () e^{-\gamma z} + () e^{\gamma z}$$

↑ i.e. la componente tangencial del campo es la suma de la progresiva y la regresiva

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon + \gamma^2$$

TM

$$\left. \begin{aligned} H_z &= 0 \\ \nabla_t E_z + k_c^2 E_z &= 0 \\ \bar{E}_t &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z \\ \bar{H}_t &= \frac{\hat{z} \times \bar{E}_t}{Z_{TM}} \end{aligned} \right\}$$

esto es para la onda progresiva $e^{-\gamma z}$

$$E_z = () e^{-\gamma z} + () e^{\gamma z}$$

$$E_t = () e^{-\gamma z} - () e^{\gamma z}$$

$$H_t = () e^{-\gamma z} + () e^{\gamma z}$$

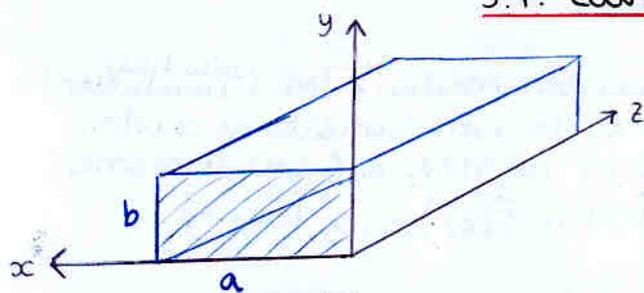
↑ los signos vienen de considerar la dirección de propagación $+z$ y $-z$ que al derivar, el signo 'baja' de la exponencial

Truco

TE	TM	
$E_z=0$	$H_z=0$	
H_z	E_z	+
H_t	E_t	-
E_t	H_t	+

Y luego se van poniendo, una a una, las dos paredes que forman la cavidad, cada una exigiendo su condición de contorno

3.1. Cavity Rectangular



TE_mn } campos ≡
TM_mn } Comb. lineal de modos

centrándonos en TE₁₀

$$E_y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \left[E_0^+ e^{-i\beta z} + E_0^- e^{i\beta z} \right]$$

$$H_x = -\frac{1}{Z_{TE}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \left[E_0^+ e^{-i\beta z} - E_0^- e^{i\beta z} \right]$$

$$H_z = \frac{j}{\eta} \left(\frac{\lambda}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \left[E_0^+ e^{-i\beta z} + E_0^- e^{i\beta z} \right]$$

f(x,y)
variación transversal

la variación con z es exactamente igual al caso TEM ya visto

- Colocamos un cortocircuito en z=0

Se impone una condición de contorno

$$E_y|_{z=0} = 0 \Rightarrow E_0^+ + E_0^- = 0$$

$$E_0^- = -1 E_0^+$$

coef de reflexión en pared eléctrica en TE es -1

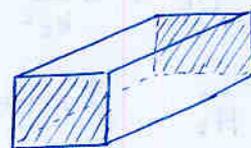
Entonces:

$$E_y = -2j E_0^+ \text{sen}(\beta z) \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_x = -\frac{2E_0^+}{Z_{TE}} \cos(\beta z) \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_z = \frac{2E_0^+}{\eta} \frac{\lambda}{2a} \text{sen}(\beta z) \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

onda estacionaria con misma dependencia con z que en el caso TEM



- Colocamos otro cortocircuito en z=d (creo una cavidad)

Se impone una condición de contorno

$$E_y|_{z=d} = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_0 = 0 \rightarrow \text{solución trivial} \\ \text{sen}(\beta d) = 0 \end{cases}$$

$$\text{sen}(\beta d) = 0 \Rightarrow \beta d = p \cdot \pi$$

long. de onda en la guía

$$d = p \cdot \frac{\lambda_g}{2}$$

misma solución que en el modo TEM

Además en cualquier otro modo TE o TM la dependencia con z es la misma. El resultado es válido para cualquier modo

Todos los modos tienen misma dependencia con z

$d = p \cdot \frac{\lambda_g}{2}$ sirve para TODOS los modos?
 La expresión matemática es la misma
 PERO no da lugar a las mismas frecuencias

Cuidado $\lambda_g = \text{long. de onda en la guía}$
 λ_g dependerá del modo

$$\lambda_g \neq \frac{c}{f} = \lambda$$

$$\neq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} f}$$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

$$= \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

k_c depende del modo

en guía rectangular
en TE

$$k_c^2 = \underbrace{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}_{k_x^2} + \underbrace{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}_{k_y^2}$$

$$k = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\downarrow$$

$$f = \frac{k}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{k_c^2 - \beta^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

no confundir con frecuencia de corte $f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$

$$d = p \cdot \frac{\lambda_g}{2} \implies \beta = \frac{p\pi}{d} \iff \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

$$\sin(p\beta d) = 0$$

$$\beta d = p \cdot \pi$$

$$\beta^2 = \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_c^2$$

las frecuencias de resonancia:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{k_c^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

caso general para cualquier modo

$$f_{0|_{\text{TE/TM}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

TE_{mnp} y TM_{mnp} tienen misma k_c (misma frec. corte) en guía rectangular (en guía circular esto no ocurrirá)

los llamamos modos
TE_{mnp}
TM_{mnp}

Factor de calidad en cavidad rectangular (para TE_{10p})

$$Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L}$$

• $U_T = U_e + U_m$

$$U_e = \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_r \iiint |\vec{E}|^2 dV$$

y se cumple $U_e = U_m$
(que además sería otra forma de calcular las frecuencias de resonancia)

$$U_m = \frac{1}{4} \mu_0 \mu_r \iiint |\vec{H}|^2 dV$$

Requerirá menos trabajo U_e ya que sólo tenemos una componente

$$U_T = 2U_e = 2 \cdot \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_r \int_0^a \int_0^b \int_0^d |E_y|^2 dz dy dx$$

para TE₁₀ →
$$U_T = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r a b d}{8} |2E_0|^2$$

• La potencia disipada

$$P_L = P_{Lc} + P_{Ld}$$

↑
potencia disipada en el conductor a causa de conductividad finita (idealmente infinita)

↑
potencia disipada en el dieléctrico a causa de conductividad finita (idealmente 0)

$$P_{Lc} = \frac{1}{2} R_s \oint_S |\vec{J}_s|^2 dS \quad [W]$$

en la practica son 3 integrales ya que caras opuestas son mismo resultado

↑
integral en las 6 paredes de la cavidad



siendo
$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$

↓
depende de en que cara estamos, \hat{n} enfrente al dieléctrico

↑
pot disipada TOTAL en la cavidad

recuerda: normalmente

$$P_{Lc} = \frac{1}{2} R_s \oint |\vec{J}_s|^2 dl \quad \left[\frac{W}{m} \right]$$

↑
integral en el contorno porque dividiamos por la distancia para eliminar la dependencia con z .
i.e. pot disipada por unidad de longitud

$$P_{Ld} = \frac{1}{2} \sigma_e \iiint |E|^2 dV \quad [W]$$

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \omega \epsilon_0 \epsilon_r \operatorname{tg} \delta \\ &= \omega \epsilon_0 \epsilon'' \end{aligned}$$

en realidad (intuitivamente)

$$\delta \cdot E = J$$

entonces

$$\delta \cdot E^2 = \delta \cdot J$$

pérdidas por efecto Joule

recuerda normalmente

$$P_{LD} = \frac{1}{2} \sigma_e \iint |E|^2 dS \quad [W/m]$$

↑
sólo una superficie porque eliminábamos la dependencia con z (pot disipada por unidad de longitud)

$$\alpha_d = \frac{P_{LD}}{2 P_T}$$

Calculando se obtiene:

$$P_{Lc} |_{TE_{01}} = \frac{R_s \lambda^2}{8 \eta^2} \cdot 12 E_0^+{}^2 \cdot \left[\frac{ab}{d^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right) \right]$$

ejercicio:
hacerlo en casa

$P_{LD} |_{TE_{01}}$

finalmente:

$$Q |_{TE_{01}} = \frac{\pi \eta}{4 R_s} \left[\frac{2b(a^2+d^2)^{3/2}}{ad(a^2+d^2) + 2b(a^3+d^3)} \right]$$

$$R_s = \frac{1}{\delta \sigma} \quad \text{resistencia superficial}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad \text{profundidad de penetración}$$

ejemplo: cavidad cúbica

$$a = b = d \rightarrow Q = 0.742 \frac{\eta}{R_s}$$

$$\text{si hacemos } f_0 = 10 \text{ GHz} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\epsilon_r = 1$$

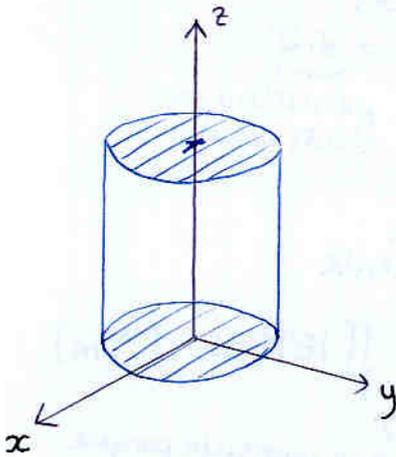
$$R_s |_{cu} = 0.0261 \Omega$$

↓
frec resonancia en TE₀₁

En cavidades salen valores muy buenos (mucho mejor q en l. detx)

$$Q = 10700$$

3.2 Cavidades cilíndricas



TE_{nl}

$$E_r = j_1(r, \varphi) [A^+ e^{-i\beta z} + A^- e^{i\beta z}]$$

$$E_\varphi = j_2(r, \varphi) [A^+ e^{-i\beta z} + A^- e^{i\beta z}]$$

$$H_r = j_3(r, \varphi) [A^+ e^{-i\beta z} - A^- e^{i\beta z}]$$

$$H_\varphi = j_4(r, \varphi) [A^+ e^{-i\beta z} - A^- e^{i\beta z}]$$

variación transversal (resolver ec. onda)

variación con z

por ser TE

si fuera TM

⊕

⊖

⊕

⊖

⊖

⊕

⊖

⊕

- conductor en $z=0$

$$E_{r,\varphi}|_{z=0} = 0$$

se obtiene:

$$E_r = j_1(r, \varphi) \cdot \text{sen}(\beta z)$$

$$E_\varphi = j_2(r, \varphi) \cdot \text{sen}(\beta z)$$

$$H_r = j_3(r, \varphi) \cdot \text{cos}(\beta z)$$

$$H_\varphi = j_4(r, \varphi) \cdot \text{cos}(\beta z)$$

misma variación en z (SIEMPRE en la misma para cualquier guía)

- conductor en $z=d$

$$E_{r,\varphi}|_{z=d} = 0 \Rightarrow \text{implica } \begin{cases} A^+ = 0 \\ \text{sen}(\beta z) = 0 \end{cases}$$

$$\beta = \frac{p\pi}{d} \rightarrow d = p \cdot \frac{\lambda_g}{2}$$

- Frecuencias de resonancia

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$$

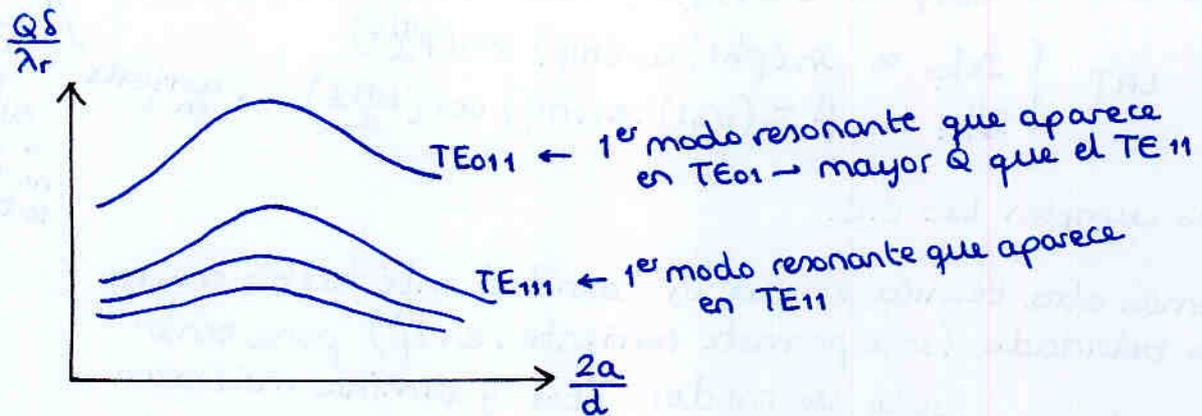
$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{k_c^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

$$k_c \text{ depende del modo: } \begin{cases} \text{TE}_{nl} \rightarrow k_c = \frac{p'nl}{a} \\ \text{TM}_{nl} \rightarrow k_c = \frac{pnl}{a} \end{cases}$$

en esta guía si que difiere la k_c entre TE y TM, por tanto difieren las frecuencias de resonancia

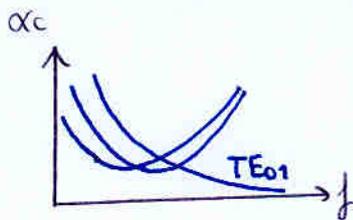
Factor de calidad en cavidad cilíndrica

$$Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L} \rightarrow \dots \text{ integrales (mismo método que guía rectangular)}$$



Resulta que el TE_{01} tiene alto factor de calidad
 Esto se debe a que tiene muy bajas pérdidas en el conductor

$$P_{lc} \text{ bajo} \rightarrow P_L \text{ bajo} \rightarrow Q \text{ alto}$$



se tiende a usar TE_{01} en cavidades resonantes circulares

El problema es los modos inferiores (y modo degenerado)

$$TE_{01} \Leftrightarrow \begin{matrix} TM_{11} \\ TE_{11} \end{matrix}$$

¿Cómo logramos excitar únicamente el modo TE_{01} ?

Ponemos C.C. que no cumplan los modos inferiores

La tapa superior no llega a tocar las paredes
 \hookrightarrow eliminamos cualquier corriente que pase de paredes a tapas

Curiosamente únicamente los modos TE_{0l} lo cumplen

$$\left. \begin{aligned} \text{TAPAS: } \vec{J}_s &\propto J_0' \left(\frac{\rho'_{0l}}{a} r \right) \hat{\phi} \\ \text{LAT: } \vec{J}_s &\propto J_0'(\rho'_{0l}) \ln \left(\frac{l \pi z}{d} \right) \hat{\phi} \end{aligned} \right\} TE_{0l}$$


Son corrientes circunferenciales (y que encima son cero donde está el corte \rightarrow pocas pérdidas por la rotura)

En cambio para el resto de modos

TE_{nlp}
 TAPAS $\begin{cases} J_s|_r \propto \frac{n}{r} \cdot J_n\left(\frac{p'_{nl}}{a} r\right) \cdot \sin(n\varphi) \rightarrow \text{corriente en } r \\ J_s|\varphi \propto J'_n\left(\frac{p'_{nl}}{a} r\right) \cos(n\varphi) \end{cases}$

LAT $\begin{cases} J_s|\varphi \propto J_n(p'_{nl}) \cos(n\varphi) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ J_s|z \propto \frac{n}{r} J_n(p'_{nl}) \sin(n\varphi) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \rightarrow \text{corriente en } z \end{cases}$



No cumplen las C.C.

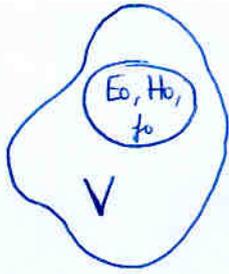
Además otra técnica es que la cavidad esté hecha con un hilo bobinado (sólo permite corrientes en $\hat{\varphi}$) para tener sólo los modos TE_{0l} y eliminar más aun el resto \rightarrow se logran Q 's altísimas



Además la tapa deslizante permite variar fácilmente d



Teoría perturbacional



Si vario algo, ¿cómo afecta a la resonancia?

- 1) Perturbación en material ej ϵ, μ
- 2) Perturbación en la forma
ej: martillazo
ej: tornillo

si la perturbación es poca, la variación será poca.

Analicémoslo:

En el caso inicial se cumple:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}_0 = -j\omega_0 \mu \vec{H}_0 \\ \nabla \times \vec{H}_0 = j\omega_0 \epsilon \vec{E}_0 \end{cases}$$

Tras la perturbación se siguen cumpliendo las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega (\mu + \delta\mu) \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega (\epsilon + \delta\epsilon) \vec{E} \end{cases}$$

pulsación de resonancia
 ω_0
↓
 ω

↑
perturbación (variación de ϵ y μ en cada punto del volumen)

Si ahora aplicamos la identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}_0^* - \vec{E}_0^* \cdot \nabla \times \vec{H} + \vec{H}_0^* \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}_0^*$$

$$\nabla \cdot (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) = j \cdot \left[(\omega_0 \epsilon - \omega (\epsilon + \delta\epsilon)) \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + (\omega_0 \mu - \omega (\mu + \delta\mu)) \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} \right]$$

Ahora integro a ambos lados $\iiint () dV$

Parte de la izquierda:

$$\iiint \nabla \cdot [] dV \stackrel{\uparrow}{=} \iint_S (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) \cdot d\vec{S} = 0$$

↑
Tª Gauss

- \vec{E}_0 y \vec{E} siempre es normal a la superficie.
 - Al hacer producto vectorial, el resultado será tangencial a la superficie
 - Al hacer $\cdot d\vec{S}$ se anula (ya $d\vec{S}$ es perpendicular)
- (ya que componente tangencial a conductor es cero)

Por tanto la integral de volumen de la parte de la derecha es cero, por muy grande que sea la perturbación.

Igualando a cero y agrupando términos:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = - \frac{\iiint_V (\delta\epsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \delta\mu \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV}{\iiint_V (\epsilon \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \mu \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV}$$

Si la variación es pequeña \Rightarrow

$$\begin{aligned} \omega &\approx \omega_0 \\ E &\approx E_0 \\ H &\approx H_0 \end{aligned}$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx - \frac{\iiint_V (\delta\epsilon |\vec{E}_0|^2 + \delta\mu |\vec{H}_0|^2) dV}{\iiint_V (\epsilon |\vec{E}_0|^2 + \mu |\vec{H}_0|^2) dV}$$

- Puedo calcular la nueva frecuencia de resonancia utilizando los campos anteriores.
- $\delta\epsilon$ es prácticamente cero en todo el volumen salvo en el trocito perturbado \rightarrow podemos hacer la integral sólo en el volumen perturbado.
- Normalmente $\delta\mu = 0$ (ya que en general introducimos dieléctricos)

- En el denominador aparece cuatro veces la energía total. Y además estamos en resonancia y entonces $U_e = U_m$ (simplifica el cálculo a la mitad)

recuerda

$$U_e = \frac{1}{4} \epsilon_r \epsilon_0 \iiint |\vec{E}_0|^2 dV$$

$$U_m = \frac{1}{4} \mu_r \mu_0 \iiint |\vec{H}_0|^2 dV$$

- El numerador será 4 veces la variación de energía

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \delta$$

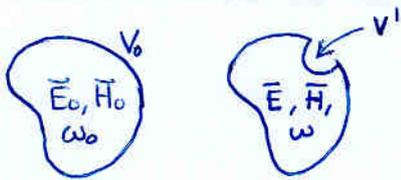
- se puede utilizar la fórmula 'al revés' para despejar $\delta\epsilon$ y $\delta\mu$

ejemplo: \rightarrow cavidad conocida con ω_0
 \rightarrow meto una tiza dentro (allá donde $|\vec{E}_0| \neq 0$ o $|\vec{H}_0| \neq 0$)
 \rightarrow mido ω nueva
 \rightarrow ¡obtengo $\delta\epsilon$ y $\delta\mu$ introducido por la tiza!

meter la tiza donde haya campo que se pueda perturbar

\Rightarrow Es MUY UTIL para caracterizar material
 si metemos material allá donde $H=0 \rightarrow$ obtengo $\delta\epsilon$
 si metemos material allá donde $E=0 \rightarrow$ obtengo $\delta\mu$

• Perturbación de forma

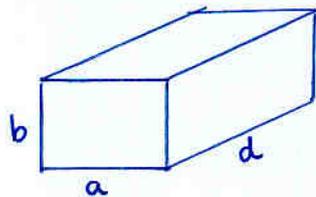


Se obtiene la expresión para la nueva ω a partir de la que ya conocíamos ω_0 .

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{\iiint_{V'} (\mu \bar{H}_0 \bar{H}_0^* - \epsilon \bar{E}_0 \bar{E}_0^*) dV}{\iiint_{V_0} (\epsilon \bar{E}_0 \bar{E}_0^* + \mu \bar{H}_0 \bar{H}_0^*) dV} = \frac{\delta U_m - \delta U_e}{2 U_e}$$

- El denominador es igual a la energía total
 = 2 veces la energía eléctrica
 = 2 veces la energía magnética
- El nominador es la variación de energía que se establece en el volumen extraído

ejemplo:



TE₁₀₁

$$\begin{cases} H_{0z} = \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi z}{d} \\ H_{0x} = -\frac{a}{d} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \cos \frac{\pi z}{d} \\ E_{0y} = -j \frac{\omega_0 \mu_0}{\pi/a} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi z}{d} \end{cases}$$

¿que ocurre cuando colocamos un pequeño tornillo en la cara superior con volumen V' en $x = \frac{a}{2}$, $y = b$, $z = \frac{d}{2}$

↓ suponemos constantes los campos por ser V' pequeño

$$\begin{cases} H_{0z} = 0 \\ H_{0x} = 0 \\ E_{0y} = -j \frac{\omega_0 \mu_0}{\pi/a} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{No introduciremos variación de la energía magnética} \\ \text{Introducimos variación de energía eléctrica} \end{array}$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{-\epsilon_0 \iiint_{V'} (E_{0y} \cdot E_{0y}^*) dV}{2 \epsilon_0 \iiint_{V_0} \bar{E}_0 \cdot \bar{E}_0^* dV} = -2 \frac{V'}{V_0}$$

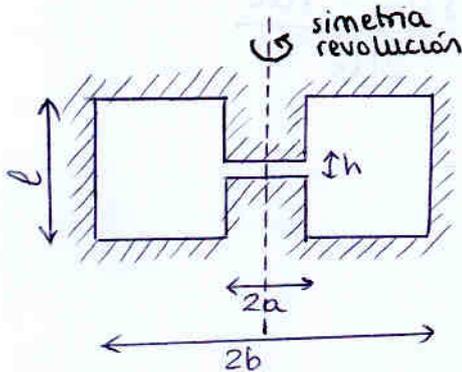
se reduce la pulsación de resonancia se debe a que hemos disminuido la energía eléctrica y no la magnética

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\delta U_m - \delta U_e}{2 U_e}$$

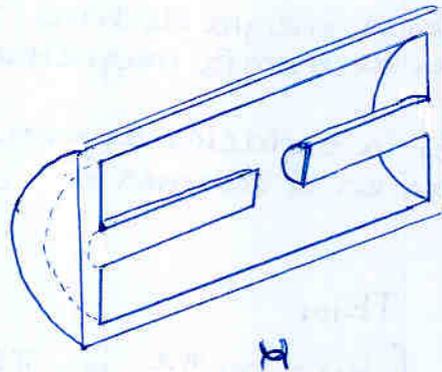
Puede ser muy útil para ajustar finamente la frecuencia de resonancia de la cavidad cuando el mecanizado de la cavidad tiene cierta tolerancia en la fabricación.

Problemas del Tema

Problema :

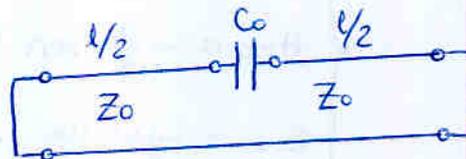


Es como dos líneas coaxiales cortocircuitadas en su extremo alejado y donde el conductor central tiene una pequeña interrupción. La interrupción puede modelarse como un condensador



$$C_0 = \epsilon_0 \frac{\pi a^2}{h} \quad \text{condens. de placas paralelas}$$

$$Z_0 = 60 \ln \frac{b}{a} \quad \text{cable coaxial}$$



a) calcular frecuencia de resonancia

- Queremos que la impedancia y admitancia de entrada se anulen. ¿En qué punto consideramos la impedancia de entrada? → No podemos garantizar que el lugar que elijamos nos de lugar a todas las frecuencias de resonancia
- mejor calcular ω_r usando la igualdad entre energía eléctrica y magnética?

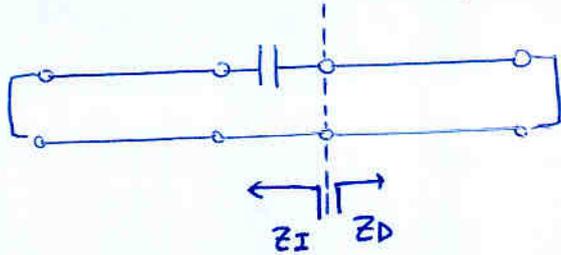
$$\text{Energía eléctrica} = \text{Energía magnética}$$

condensador ↓
ambas l. de tx (integrales a lo largo de las líneas)

↓
ambas l. de tx. (integrales)

sería también un método muy jarragoso

3- Igualar impedancia a izquierdas y a derechas.
Esta vez podemos usar cualquier punto

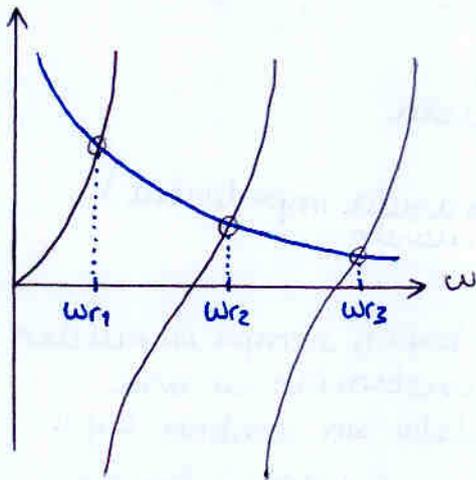


$$\begin{cases} Z_I = \frac{1}{j\omega C_0} + jZ_0 \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1}{2} \\ Z_D = jZ_0 \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

① $Z_I + Z_D = 0$

$$2jZ_0 \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{j\omega C} = 0$$

$$2Z_0 \operatorname{tg} \frac{\omega r}{v_g} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \text{obtener } \omega r$$

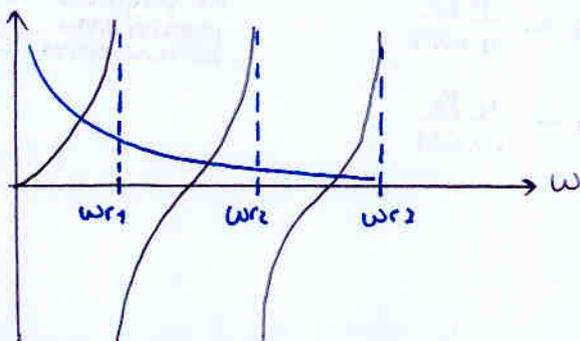


② $Z_I, Z_D = \pm j\infty$

$$\frac{1}{j\omega C} = \pm j\infty \rightarrow \omega r = 0 \text{ (solución trivial)}$$

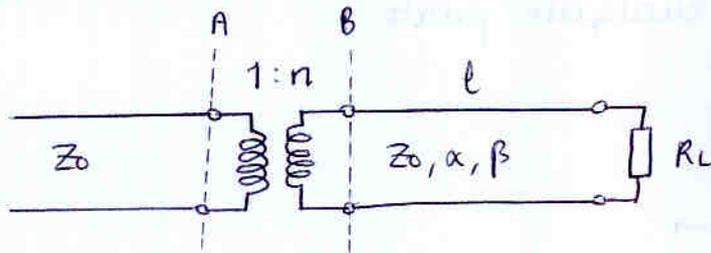
$$j \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1}{2} = \pm j\infty \rightarrow \omega r$$

Como vemos, la condición ① no nos daba TODAS las ωr .



Curiosamente si hubiésemos mirado Z_I y Z_D en el cortocircuito, con ① habrían salido todas (las mismas)

Problema



$$v_p = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$\alpha = 0.463 \text{ dB/m}$$

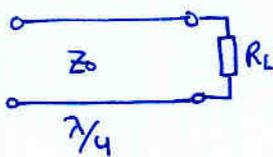
$$f_0 = 1 \text{ GHz}$$

$$l = \frac{\lambda}{4}$$

$$R_L = 2.5 \text{ k}\Omega$$

a) $f = f_0$. ¿Circuito equivalente en B? ¿a de ese circuito?

- Asumimos que las pérdidas son pequeñas
- Elementos que disipan potencia:

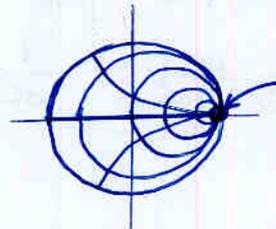


la línea y la resistencia ($\alpha \neq 0$)

además R_L normalizado es muy grande

$$\frac{R_L}{Z_0} = \frac{2.5 \text{ k}}{50} = 50$$

está prácticamente en circuito abierto!



Tras la línea $\lambda/4$ presentará una impedancia muy pequeña

↓
circuito resonante serie (se anula impedancia)

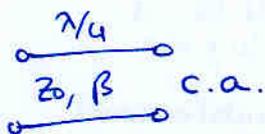


Recuerda:

Cuando hay pérdidas bajas, siempre se pueden modelar todas las resistencias en una resistencia en paralelo sin cambiar L y C.

En este caso también con pérdidas bajas se pueden modelar las resist. como una resistencia en serie

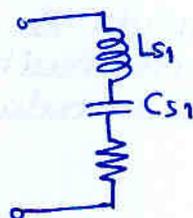
Calcularemos L y C en el caso sin pérdidas ① $\alpha = 0, R_L = \infty$
En este caso, el caso ideal será que R en efecto sea un c.a.



Ecuaciones para L y C de circuito serie

$$L_{s1} = \frac{\pi Z_0}{4 \omega s_1}$$

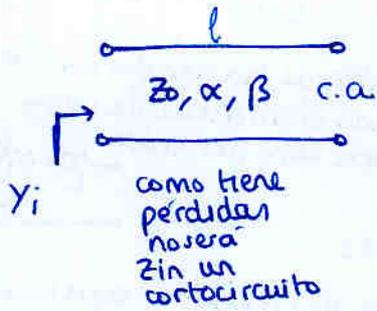
$$C_{s1} = \frac{4 Y_0}{\pi \omega s_1}$$



no confundir con parámetros secundarios L y C

Ahora hay que añadirle las pérdidas
 lo estudiaremos por separado: l. de tx y R_L

② $\alpha \neq 0, R_L = \infty$



Impedancia de entrada de un stub terminado en c.a.

$$\begin{aligned}
 Y_i &= Y_0 \operatorname{th}(\gamma l) \\
 &= Y_0 \operatorname{th}(\alpha l + j\beta l) \\
 &\quad \text{propiedad de } \downarrow \\
 &\quad \text{la th} \\
 &= Y_0 \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + \operatorname{th}(j\beta l)}{1 + \operatorname{th}(\alpha l)\operatorname{th}(j\beta l)} \\
 &= Y_0 \frac{\operatorname{th}(\alpha l) + j \operatorname{tg}(\beta l)}{1 + j \operatorname{th}(\alpha l) \operatorname{tg}(\beta l)}
 \end{aligned}$$

sustituyendo

$$l = \lambda/4 \Rightarrow \operatorname{tg} \beta l = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$\Rightarrow Y_i = Y_0 \cdot \frac{1}{\operatorname{th}(\alpha l)}$$

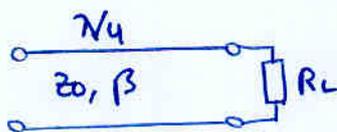
$$Z_i = Z_0 \operatorname{th}(\alpha l)$$

$\downarrow \alpha l \ll 1$

$$Z_i \approx Z_0 \cdot \alpha \cdot l$$

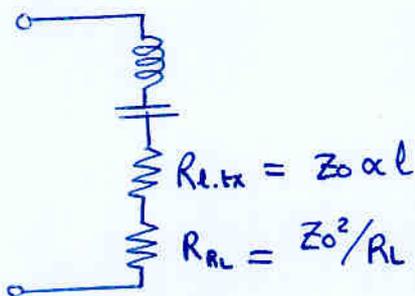
⚠ CUIDADO
 α debe estar en NP/m
 no en dB/m

③ $\alpha = 0, R_L = 2500 \Omega$

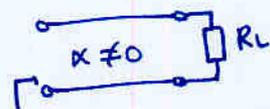


$$Z_i = \frac{Z_0^2}{R_L}$$

Así, finalmente:

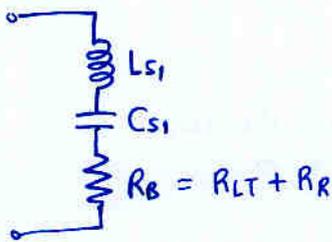


Nota: se podrían haber hecho los dos casos juntos



$$\begin{aligned}
 Z_i &= Z_0 \cdot \frac{R_L + Z_0 \operatorname{th}(\gamma l)}{Z_0 + R_L \operatorname{th}(\gamma l)} \\
 &= Z_0 \left(\alpha l + \frac{Z_0}{R_L} \right)
 \end{aligned}$$

Cálculo del factor de calidad



$$Q = \omega r \left. \frac{U}{P_L} \right|_{\omega r}$$

$$U = 2U_m = 2U_e$$

↓
integral a lo largo de la línea de la pot magnética contenida en cada Ldz (sección elemental de línea)

P_L integral haciendo uso de la sección elemental de una línea con pérdidas



sería muy laborioso

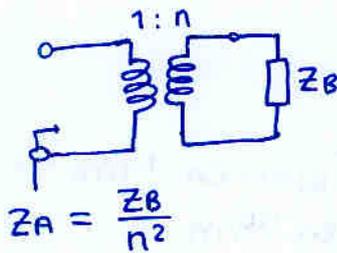
mejor aplicar la fórmula de Q para el circuito equivalente

$$Q = \frac{\omega r L_B}{R_B}$$

Ⓢ truco:

$R \rightarrow 0 \Rightarrow Q \rightarrow \infty \Rightarrow R$ debe estar dividiendo
Ambas debe haber dimensiones de impedancia

b) ¿n? tal que $Z_A = Z_0$

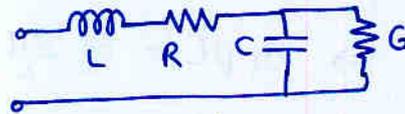


a $f_0 \Rightarrow Z_B = R_B$

$$n^2 = \frac{R_B}{Z_A}$$

$$n = \sqrt{\frac{R_B}{Z_A}}$$

Nota: - Si desease usar el primer método. ¿Cómo sacamos R y G a partir de α ?



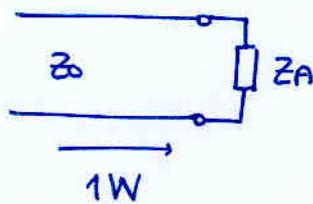
$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0} + \frac{1}{2} Z_0 G$$

hay 2 incógnitas

podríamos suponer que no hay pérdidas en el dieléctrico y considerar sólo pérdidas con $R = Z_0 \alpha$

c) Incide 1W en el plano de referencia A

Puesto que hay adaptación ($Z_A = Z_0$) todo se transmitirá

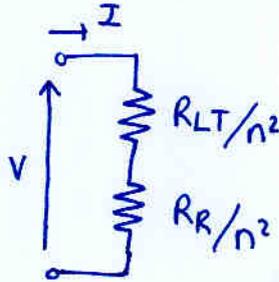


¿Cómo se reparte la potencia entre la línea de tx y R_L ?

Podría calcularse con ondas de tensión y todo el rollo. (Integral de cada dz en la línea con pot disipada en R y G)

Es mucho más sencillo aplicar el circuito equivalente

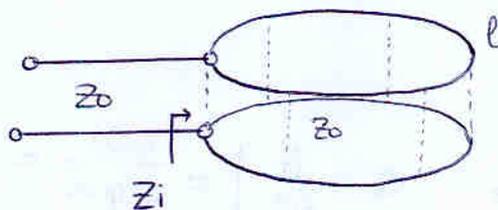
a f_0 :
resonan
L y C
↓
cortocircuito



$$P = \frac{1}{2} V I^* = 1W$$

$$P_{LT} = \frac{1}{2} V \frac{R_{LT}/n^2}{R_{LT}/n^2 + R_R/n^2}$$

Problema



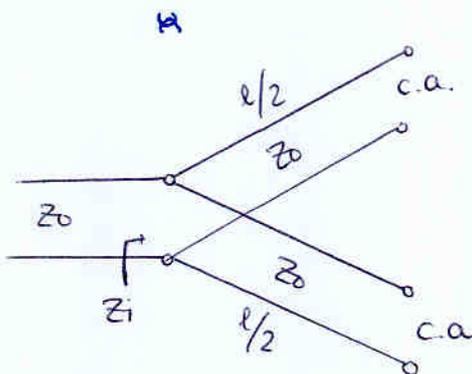
a) ¿ Z_i ?

Podría hacerse un complicado sistema de ecuaciones; pero si pensamos un poco:

Estamos excitando un circuito simétrico en un punto perteneciente a la línea de simetría

↓
La excitación será simétrica

↓
No habrá corriente al otro extremo



$$Y_i = 2 \cdot jY_0 \operatorname{tg} \beta \frac{l}{2}$$

$$Z_i = \frac{1}{Y_i} = -j \frac{Z_0}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \beta \frac{l}{2}}$$

b) En vista del resultado anterior, y sabiendo

$$v_p = 2'4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$l = 30 \text{ cm}$$

Hallar las 3 primeras frecuencias de resonancia

usamos que $Z_i = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix} \right\} = -i \frac{Z_0}{2} \frac{1}{\tan \beta l/2} \Big|_{\omega_r}$

$$Z_i = 0$$

$$\omega_{sn} = \frac{c}{l} \pi (2n + 1) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Z_i = \infty$$

$$\omega_{pn} = \frac{c}{l} 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

la trivial

$$1^{\text{a}} \text{ freq: } \omega_{s0} = \frac{c}{l} \pi \Rightarrow f_{s0} = 400 \text{ MHz}$$

$$2^{\text{o}} \text{ freq: } \omega_{p1} = \frac{c}{l} 2\pi \Rightarrow f_{p1} = 800 \text{ MHz}$$

$$3^{\text{a}} \text{ freq: } \omega_{s1} = \frac{c}{l} 3\pi \Rightarrow f_{s1} = 1200 \text{ MHz}$$

c) Hallar Q si $\alpha = 0'45 \text{ dB/m}$ en $\omega = \omega_{s0}$

• El único elemento que tiene capacidad de almacenar energía es la línea de tx

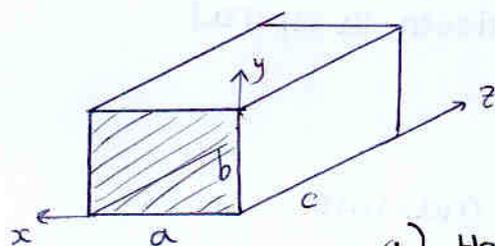
• El único elemento que tiene capacidad para disipar potencia es la l. de tx

SIEMPRE

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} \Big|_{\omega_{s0}} = \frac{\omega_{s0}}{2v_p \alpha} = 101$$

↑
Neper/m !

Problema



TM₁₁₀ TM₁₁

$$m=1 \quad k_x = \pi/a$$

$$n=1 \quad k_y = \pi/b$$

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = k^2 + \gamma^2$$

a) Hallar los campos en modo TM₁₁₀

TM₁₁

$$\begin{cases} E_z = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) [Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}] \\ E_x = Z_{TM} \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) [-Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}] \\ E_y = Z_{TM} \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) [-Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}] \\ H_x = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) [-Ae^{+\gamma z} - Be^{+\delta z}] \\ H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) [+Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}] \end{cases}$$

Sabemos si en $Ae^{-\gamma z} \pm Be^{\gamma z}$ usando el truco para TM

$$\begin{cases} H_z = 0 \\ \nabla_t \cdot \vec{E}_t + k_c^2 E_z = 0 \quad \oplus \\ \vec{E}_t \quad \ominus \\ \vec{H}_t \quad \oplus \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de contorno

$$E_T(z=0) = 0 \Rightarrow -A + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = +A}$$

Ⓜ vemos que en modo TM el coeficiente de reflexión de una pared eléctrica es igual a +1

entonces:

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} = A \cdot 2 \operatorname{ch}(\gamma z) \\ Be^{\gamma z} - Ae^{-\gamma z} = A \cdot 2 \operatorname{sh}(\gamma z) \\ -Be^{\gamma z} - Ae^{-\gamma z} = -A \cdot 2 \operatorname{ch}(\gamma z) \end{cases}$$

$$E_T(z=c) = 0 \Rightarrow \sin(\beta \cdot c) = 0 \Rightarrow \beta \cdot c = p\pi \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{p\pi}{c}}$$

Ya puedo despejar las frecuencias de resonancia

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2$$

$$\boxed{k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{k_c^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2}}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}}$$

en este caso $p=0$ (TM₁₁₀)

sustituyendo β se obtiene:

$$\begin{cases} E_z = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot 2 \cdot A \\ E_x = 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$$

no hay variación en z (de ahí $p=0$)

$$H_x = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) (-2A)$$

$$H_y = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) (2A)$$

b) Poner una espira en la guía para excitar TM_{110}

· Una espira genera H . (si fuera dipolo usaríamos E paralelo al dipolo)

⇒ Interesa generar H_x o H_y (que atraviesen la espira)

Como b es menor que a , $H_x > H_y$

por tanto lo mejor será excitar H_x

Hay que elegir el punto donde H_x es máximo

$$H_x = \frac{-j\omega E}{kc^2} \frac{\pi}{b} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot (-2A)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ y = b \\ z \text{ me da igual} \end{array} \right.$$

espira en el plano YZ
(para que excite H_x)

c) Queremos que el generador que se conecta a esa espira vea una impedancia R_0

sugerencia: Hallar V en la espira → $P_L = \frac{V^2}{2R_0}$

P_L lo sabremos a partir de Q (Q es dato) $Q = \omega_0 \frac{UT}{P_L}$

$$P_L = \frac{V^2}{2R_0} = \omega_0 \frac{UT}{Q}$$

↑
pot disipada será la que el generador debe entregar

· Hallar UT

$$UT = U_e + U_m = 2U_e = 2U_m$$

Será más fácil U_e ya que sólo hay una componente de E

$$UT = 2U_e = 2 \cdot \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_r \iiint_V |E|^2 dV = \epsilon_0 \epsilon_r |A|^2 \frac{abc}{2}$$

Hallar V

$$V_{en} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow V_{en} = -j\omega \mu \iint_{S_{espira}} \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

$$= -j\omega \mu \iint (H_x \hat{x} + H_y \hat{y}) \cdot (dS \hat{x})$$

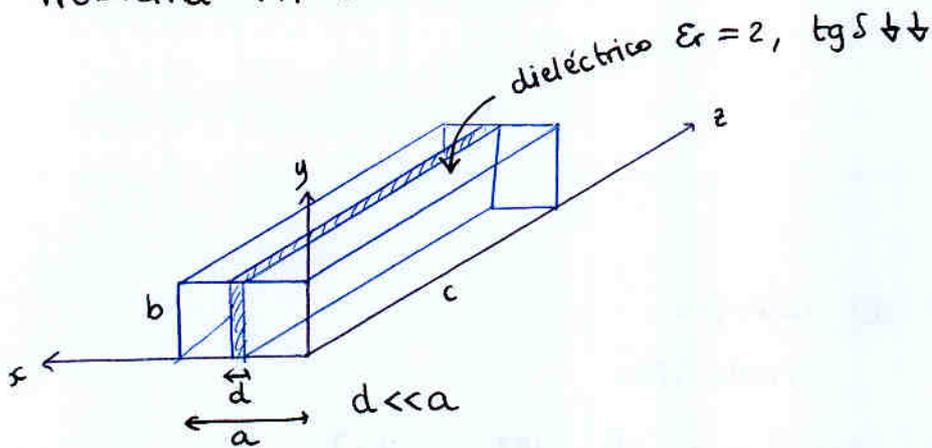
Ya solo sustituir y despejar S_{ESP}

suponemos H_x constante en toda la sección de la espira
con $x = a/2$, $y = b$

$$= -j\omega \mu \iint H_x dS$$

$$\approx -j\omega \mu \left(\frac{-j\omega E}{kc^2} (-2A) \frac{\pi}{b} \right) \cdot S_{ESP}$$

Problema VII-50



$$Q = \omega_0 \frac{U_T}{P_L}$$

necesitamos ω_0

Para ω_0 supondremos la que tendríamos sin dieléctrico

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2}$$

TE₁₀₁

$$\begin{cases} E_y = -2j E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{c}z\right) \\ H_z = \dots \\ H_x = \dots \end{cases}$$

→ cambiará muy poco el resultado

necesitamos P_L

aproximamos con el campo eléctrico sin dieléctrico

$$P_{L0} = \frac{1}{2} \sigma_e \iiint_{V_{01EL}} |\vec{E}|^2 dV \approx \frac{1}{2} \sigma_e \iiint |\vec{E}_0|^2 dV$$

siendo $\sigma_e = \omega \epsilon_0 \epsilon' \operatorname{tg} \delta$

$$= \frac{1}{2} \sigma_e \int_{\frac{a}{2}-\frac{d}{2}}^{\frac{a}{2}+\frac{d}{2}} \int_0^b \int_0^c |\vec{E}_0|^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{c}z\right) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_e \cdot 4 \cdot |\vec{E}_0|^2 \cdot \frac{bc}{4} \cdot \left[d + \frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi d}{a}\right) \right]$$

$$d + \frac{a}{\pi} \cdot \frac{\pi d}{a} = 2d$$

$$= \sigma_e \cdot |\vec{E}_0|^2 \cdot bcd$$

suponemos sin dieléctrico

necesitamos P_L

$$U_T = U_e + U_m = 2U_m = 2U_e = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \epsilon_0 \cdot 1 \int_0^a \int_0^b \int_0^c |\vec{E}|^2 dV$$

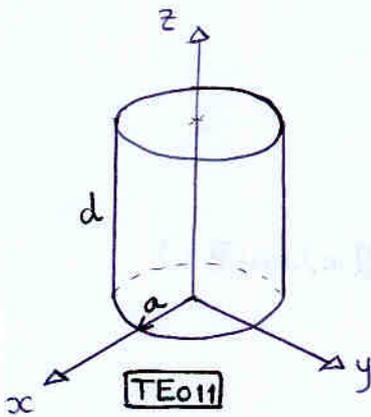
$$= \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}_0|^2 abc$$

Podríamos haber sido más exactos haciendo 3 integrales, 2 de ellas con ϵ_0 y la del volumen del dieléctrico con $\epsilon_0 \epsilon_r$, pero aproximando que en las 3 usamos ϵ_0

Ya podemos calcular Q

$$Q = \frac{a}{2\epsilon_r \cdot d \cdot \text{tg}\delta}$$

Problema VII - 59



a) campos

Modo TE_{011}

$$H_z = J_0(k_{cr}r) [A e^{-i\beta z} + B e^{i\beta z}]$$

$$H_r = -\frac{\gamma}{k_c} J_0'(k_{cr}r) \cdot [A e^{-i\beta z} - B e^{i\beta z}]$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} J_0'(k_{cr}r) [A e^{-i\beta z} + B e^{i\beta z}]$$

Condición de contorno:

$$E_r(z=0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$H_z = -2jB J_0(k_{cr}r) \text{sen}(\beta z)$$

$$H_r = -\frac{\gamma}{k_c} B \cdot 2 \cdot J_0'(k_{cr}r) \cos(\beta z)$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} J_0'(k_{cr}r) 2jB \cdot \text{sen}(\beta z)$$

$$E_r(z=d) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\beta d) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\rho\pi}{d}$$

b) Hallar las corrientes en las paredes

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$$

$$\begin{aligned} z=d \rightarrow \vec{J}_s &= -\hat{z} \times \vec{H}(z=d) \\ &= -\hat{z} \times (H_z(z=d)\hat{z} + H_r(z=d)\hat{r}) \\ &= +\hat{\phi} \cdot \frac{\gamma B}{k_c} J_0'(k_{cr}r) \end{aligned}$$

$$z=0 \rightarrow \vec{J}_s = \hat{z} \times \vec{H}(z=0) = -\hat{\phi} \cdot \frac{\gamma B}{k_c} J_0'(k_{cr}r)$$

$$z=a \rightarrow \vec{J}_s = -\hat{r} \times \vec{H}(z=a) = \hat{\phi} (-2jB) J_0(k_{cr}r) \text{sen}(\beta z)$$

Tema 6. Filtros de Microondas

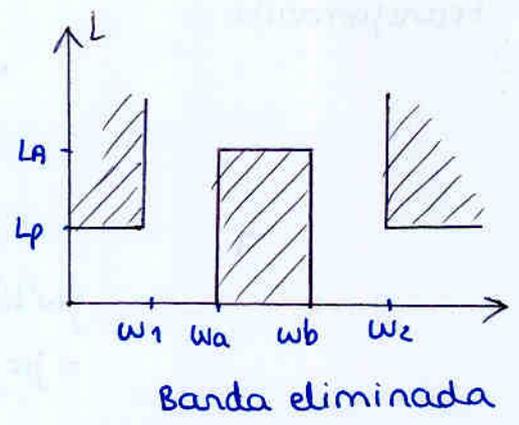
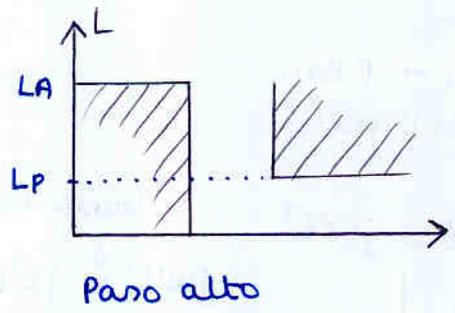
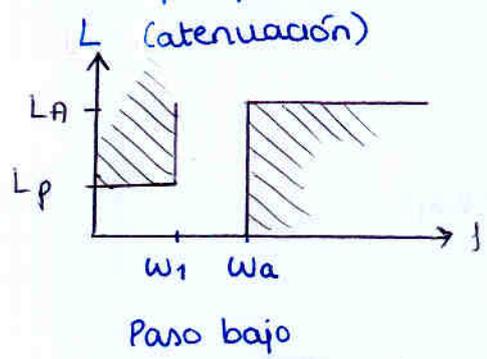
- 6.1 Introducción
- 6.2 F. P. Bajo
- 6.3 F. P. Banda con inversores

1. Introducción

Hay 4 tipos de filtro

- ↳ paso bajo
- ↳ paso banda
- ↳ paso alto
- ↳ banda eliminada

Se especifican con una máscara



Para diseñarlos siempre se hace diseñando un F.P. B.j y luego haciendo un cambio de variable

cambios de variable

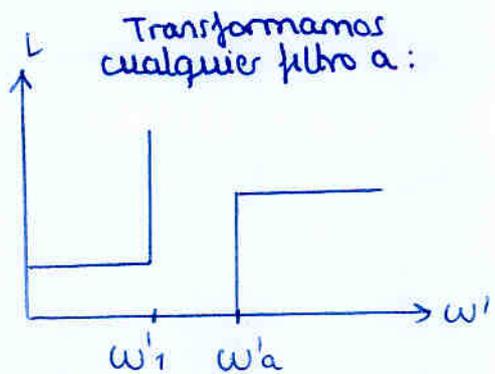
$$P_{bajo} \rightarrow P_{bajo} \Rightarrow w' = \frac{w}{w_1} \quad (\text{escalado en } w)$$

$$P_{banda} \rightarrow P_{bajo} \Rightarrow w' = \frac{1}{W} \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right) \quad \begin{matrix} w_0^2 = w_1 w_2 \\ W = \frac{w_2 - w_1}{w_0} \end{matrix}$$

$$P_{alto} \rightarrow P_{bajo} \Rightarrow w' = \frac{-w_1}{w}$$

$$B_{elim} \rightarrow P_{bajo} \Rightarrow w' = W \cdot \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right)^{-1}$$

son las ecuaciones de transformación de máscara



$w'_1 = 1$

ejemplo:

P banda \rightarrow P bajo

aplicar la transformaci3n

$w'(w_1) = \pm 1$

$w'(w_2) = \pm 1$

$w'(w_a) = w'_a$
 $w'(w_b) = w'_b$ } = w'_a

tomamos
 $w'_a = \min(|w'_a|, |w'_b|)$
 el menor en m3dulo

ejemplo:

con una bobina



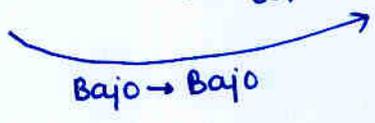
$Z = jw'L'$

en el dominio transformado

transf. P. Bajo P. Bajo

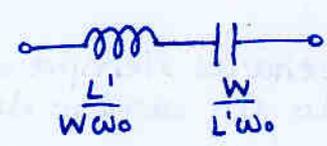
$jw'L' = jL'(\frac{w}{w_1})$

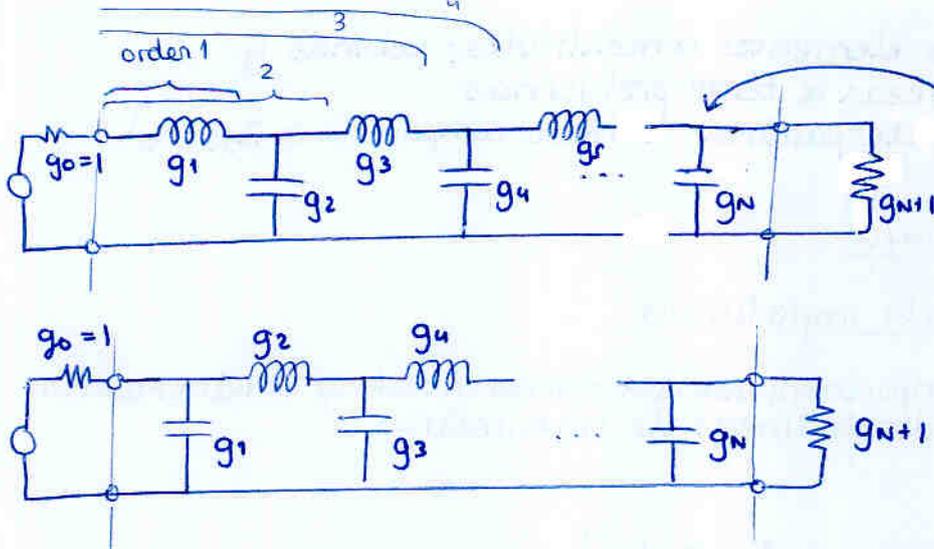
$= jw \frac{L'}{w_1}$



$jw'L' = jL' \frac{1}{w} (\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w})$

$= jw \frac{L'}{w w_0} + \frac{1}{jw (\frac{w}{L' w_0})}$





Cuidado: se termina en bobina o en condensador según el orden del filtro

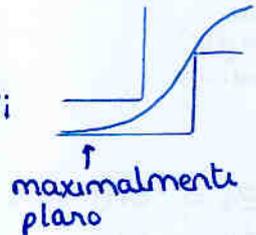
g_i : valor normalizado a la resistencia de generador

- si es bobina se desnormaliza: $L_i = g_i \cdot Z_0$

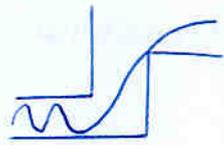
- si es condensador se desnormaliza: $C_i = g_i \cdot Y_0$

Podemos hacer síntesis de

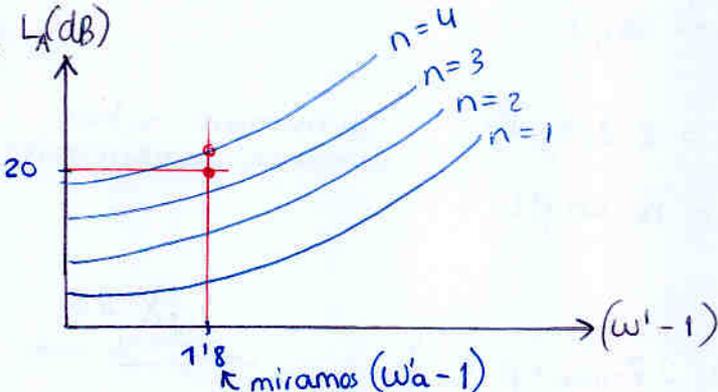
• Butterworth : tablas con las g_i



• Chebyshev



atenuación en la banda atenuada



Gráfica de atenuación en banda eliminada a distintas $\omega' - 1$.

Hay una gráfica para cada orden de filtro N , cada tipo respuesta (Butterworth o Chebyshev) y para cada atenuación en la banda de paso L_p

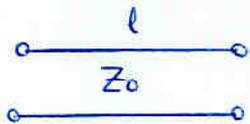
ej: queremos $\omega'_a = 2.8$ $L = 20 \text{ dB}$ \rightarrow cogemos $n=4$ \rightarrow $\left. \begin{matrix} g_0=1 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \end{matrix} \right\}$ se leen en la tabla

A altas frecuencias, los elementos concentrados; bobinas y condensadores, empiezan a tener problemas (pérdida de calidad, efectos parásitos, tamaño comparable a λ_g , ...)

6.2 Filtros paso bajo

6.2.1 Con saltos de impedancia

queremos el comportamiento de bobinas en serie y condensadores en paralelo mediante líneas de transmisión



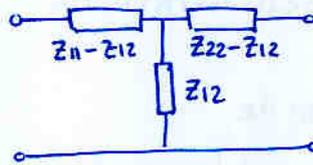
$$[Z] = -j \frac{Z_0}{\sin \beta l} \begin{bmatrix} \cos \beta l & 1 \\ 1 & \cos \beta l \end{bmatrix}$$

Nos ponemos en casos extremos

$Z_0 \begin{cases} Z_{0 \max} \\ Z_{0 \min} \end{cases}$ limitaciones tecnológicas

ejemplo: línea microstrip $Z_0 = f(w)$
anchura w tiene límite mínimo y límite máximo

equivalente en T

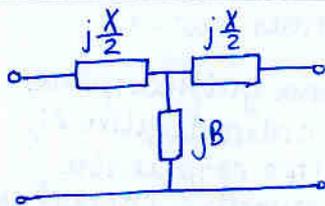


$$\begin{cases} Z_s = Z_{11} - Z_{12} = Z_{22} - Z_{12} \\ Z_p = Z_{12} \end{cases}$$

usando propiedades trigonométricas se obtiene:

$$\begin{cases} Z_s = j Z_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} \\ Z_p = -j Z_0 \frac{1}{\operatorname{sen} \beta l} \end{cases}$$

entonces



$$\begin{cases} X = 2 Z_0 \operatorname{tg} \frac{\beta l}{2} \\ B = Y_0 \operatorname{sen} \beta l \end{cases}$$

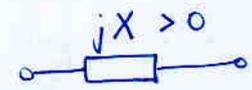
de momento no hay ninguna aproximación

si consideramos

$$\beta l < \pi/4$$

$$Z_0 = Z_{0 \max}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X \approx Z_{0 \max} \cdot \beta \cdot l \\ B \approx 0 \end{cases} \Rightarrow$$



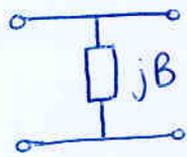
$$X = \omega L$$

hemos conseguido una bobina con una l. de tx

$$L = \frac{Z_{0 \max} \cdot \beta \cdot l}{\omega}$$

$$\text{ya que } \beta = \frac{\omega}{v_p}$$

$$l = \frac{L v_p}{Z_{0 \max}}$$

si $\beta l < \pi/4$
 $Z_0 = Z_{\min}$ } \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} X \approx 0 \\ B \approx \frac{1}{Z_{\min}} \beta l \end{array} \right\} \Rightarrow$ 

hemos conseguido un condensador con una línea de transmisión

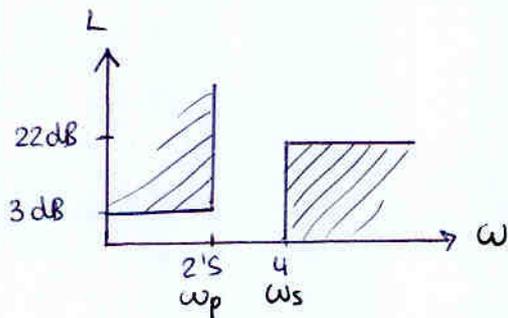
$B = \omega C = \frac{1}{Z_{\min}} \beta l$

$l = C \cdot v_p \cdot Z_{\min}$

El filtro se convertirá en una sucesión de líneas de Z_0 alternándose

ejemplo:

- $\left\{ \begin{array}{l} Z_{\max} = 150 \Omega \\ Z_{\min} = 10 \Omega \end{array} \right.$ \rightarrow Paso bajo
- \rightarrow Respuesta Butterworth
- \rightarrow Banda de paso: $f_p = 2.5 \text{ GHz}$, $L_p = 3 \text{ dB}$
- \rightarrow Banda eliminada: $f_s = 4 \text{ GHz}$, $L_s = 22 \text{ dB}$
- $- Z_0 = 50 \Omega$



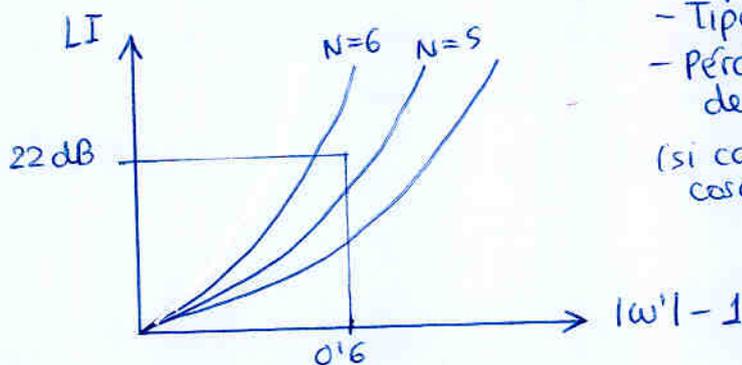
1º. Especificación del prototipo paso bajo

Transformación P. Bajo \rightarrow P. Bajo
 ω_p debe trasladarse a $\omega'_p = 1$

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_p} \Rightarrow \begin{cases} \omega'_p = 1 \\ \omega'_s = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{4}{2.5} = 1.6 \end{cases} \quad \text{i.e. cuantas veces mayor es } \omega_s \text{ frente a } \omega_p$$

2º. Ver el orden del filtro

usar gráficas que dan pérdidas de inserción vs. orden del filtro correspondientes a:



- Tipo de respuesta Butterworth
- Pérdidas de inserción en banda de paso de 3 dB

(si cambiásemos una de esas dos cosas habría que cambiar de gráficas)

Vemos que es necesario un filtro de orden 6

$N=6$

$g_0 = 1$ ← generador
 g_1
 g_2
 g_3
 g_4
 g_5
 g_6
 $g_7 = 1$ ← carga

- Lo miramos en tablas para
- Tipo de respuesta Butterworth
- 3dB en banda de paso
- Orden 6

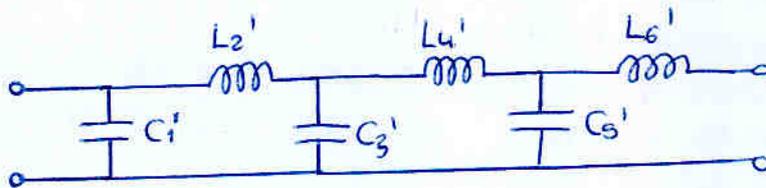
se obtiene

$$g_1 = g_6 = 0.5176$$

$$g_2 = g_5 = 1.4142$$

$$g_3 = g_4 = 1.9318$$

$$g_7 = 1$$



Nota:

g_1, g_2, g_3, \dots
 van alternando
 siendo:
 admitancia, impedancia,
 admitancia, ...
 esto es importante
 para conocer g_7

↑
 Podemos elegir
 comenzar con bobina
 y entonces g_1
 tiene dimensiones
 de impedancia,
 y el g_7 tendría
 también impedancia

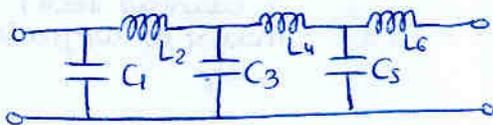
En este caso da igual
 porque $g_7 = 1$

3) Desnormalizar Y — hacer la transformación de frecuencia

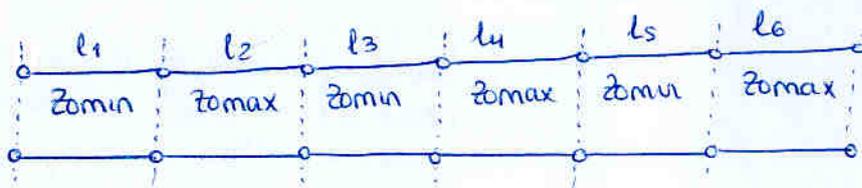
Por ser "paso bajo → paso bajo", resulta que C 's y L 's seguirán siendo C 's y L 's, sólo cambiarán de valor

$$L_k = \frac{L_k' \cdot Z_0}{\omega_p} \leftarrow \begin{array}{l} \text{denormalización} \\ \text{transformación en} \\ \text{frecuencia} \end{array}$$

$$C_k = \frac{C_k'}{\omega_p Z_0}$$



4) convertir a líneas de transmisión

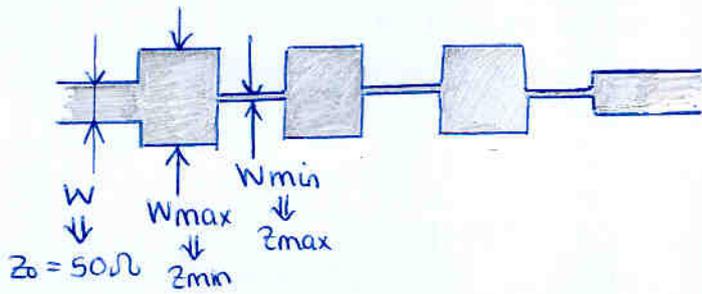


$$l_1 = C_1 Z_{0min} v_p$$

$$l_2 = \frac{L_2 v_p}{Z_{0min}}$$

etc...

La implementación física sería:

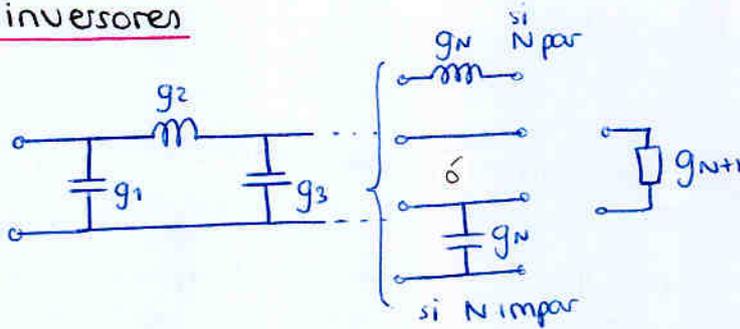


Las especificaciones en la práctica difieren un poco de la teoría, pero la sencillez es tal que esta técnica es la más utilizada (podemos pedir mejores especificaciones)

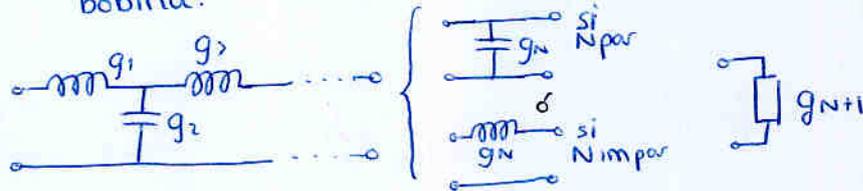
3. Filtros Paso Banda

3.1 Con inversores

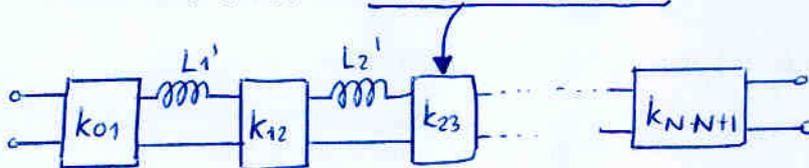
Prototipo paso bajo



o bien al revés, comenzando con bobina.



Además puedo conseguir los condensadores a partir de las bobinas usando inversores en $\lambda/4$.



Con esto gano MUCHOS grados de libertad. Puedo consumirlos provechosamente haciendo todas las bobinas iguales, y jugando con las k , se puede demostrar que se tiene:

$$L' = L_1' = L_2' = \dots = L_N'$$

$$K_{0,1} = \sqrt{\frac{L'}{g_1}}$$

⋮

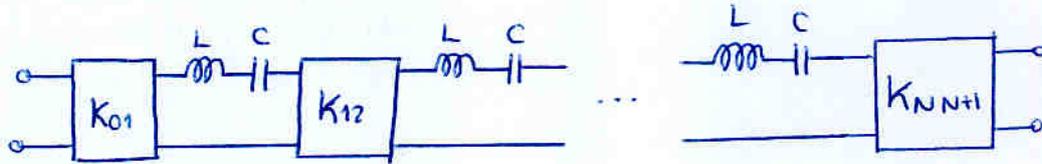
$$K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{L'}{g_i g_{i+1}}}$$

⋮

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{L'}{g_N g_{N+1}}}$$

Ahora hay que aplicar la transformación en frecuencia

- Las bobinas se convierten en circuito resonante serie
- Suponemos que los inversores, al ser ideales, son inversores a todas las frecuencias

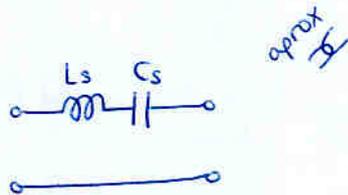
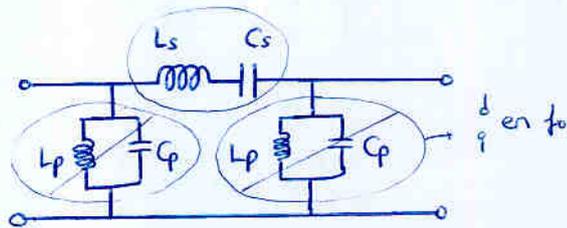
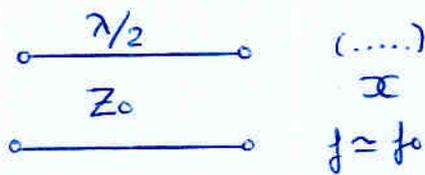


con $L = \frac{L'}{\omega_0 \Delta}$ $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$
 $C = \frac{\Delta}{\omega_0 L'}$ $\Delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$

Estas \$L\$ y \$C\$ son todavía normalizadas



Además se tiene como aproximación al circuito resonante L-C

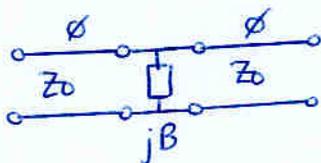


siendo

$$L_s = \frac{\pi Z_0}{2 \omega_0} \quad C_s = \frac{2 Y_0}{\pi \omega_0}$$

$$L_p = \frac{4 Z_0}{\pi \omega_0} \quad C_p = \frac{\pi Y_0}{4 \omega_0}$$

Recordemos también una implementación del inversor

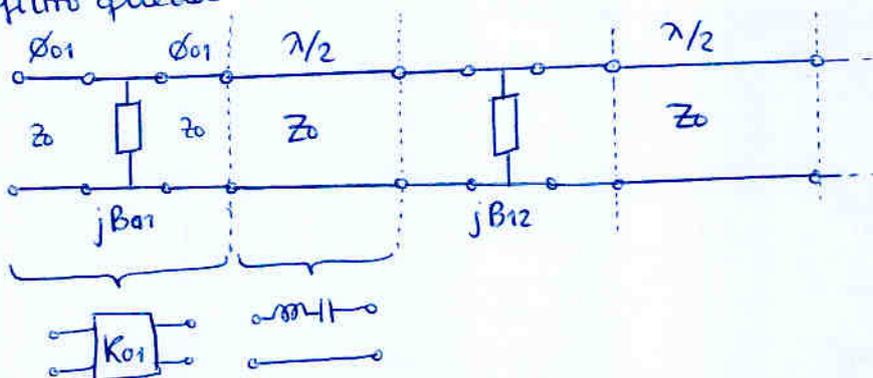


$$\phi = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2}{B}$$

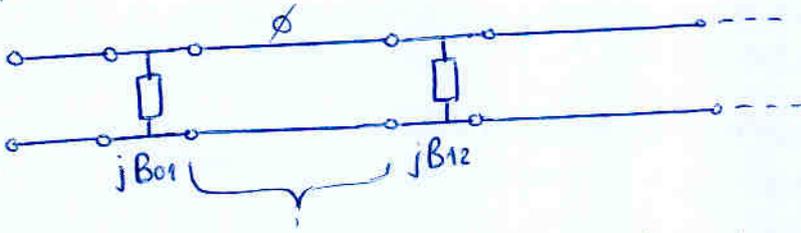
$$|B| = \frac{1 - k^2}{k}$$

Recordemos que se consiguen inversores a todas las frecuencias cuando \$k < 0\$

El filtro queda



uniendo las líneas ϕ (que podían ser long. negativa) con las $\lambda/2$ queda



$$\phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left(\text{atan} \left(\frac{2}{B_{j-1,j}} \right) + \text{atan} \left(\frac{2}{B_{j,j+1}} \right) \right)$$

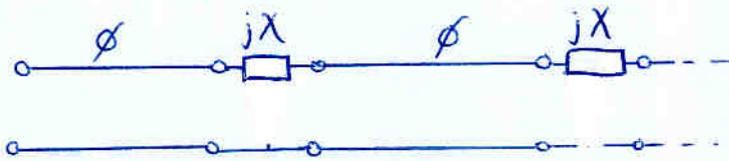
$$\begin{array}{l} \lambda/2 \\ \phi = \beta l = \pi \\ \frac{2\pi l}{\lambda} = \pi \\ l = \frac{\lambda}{2} \end{array}$$

$$|B_{ij}| = \frac{1 - K_{ij}^2}{K_{ij}}$$

siendo las constantes de inversión

$$L' = \bar{L}_s = \frac{\pi}{2\omega_0} \Rightarrow \begin{pmatrix} K_{01} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_1}} \\ \vdots \\ K_{i,i+1} = \frac{\pi \Delta}{2\sqrt{g_i g_{i+1}}} \\ \vdots \\ K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_N g_{N+1}}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} B_{01} \\ B_{02} \\ \vdots \\ B_{N,N+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_j$$

si hubiéramos empezado con bobina en lugar de condensador



$$|X_{ij}| = \frac{1 - J_{ij}^2}{J_{ij}}$$

$$\phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left(\text{atan} \frac{2}{X_{i-1,i}} + \text{atan} \frac{2}{X_{i,i+1}} \right)$$

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_1}}$$

$$J_{i,i+1} = \frac{\pi \Delta}{2\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

$$J_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_N g_{N+1}}}$$

Aproximaciones

- Inversor no es ideal
- Hemos sustituido los resonadores por líneas $\lambda/2$ (sólo es cierto en el entorno f_0)
- En el equivalente en Π hemos eliminado los resonadores paralelo por considerarlos despreciables

En la práctica

si $N \leq 6 \Rightarrow$ La aproximación es buena

ejemplo:

- Paso banda
- Respuesta Chebyshev
- $f_{p1} = 2'4628 \text{ GHz}$, $f_{p2} = 2'53786 \text{ GHz}$; $L_p = 0'5 \text{ dB}$
- $f_{s1} = 2'4 \text{ GHz}$, $f_{s2} = 2'6 \text{ GHz}$; $L_s = 30 \text{ dB}$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

obtenemos el equivalente paso bajo

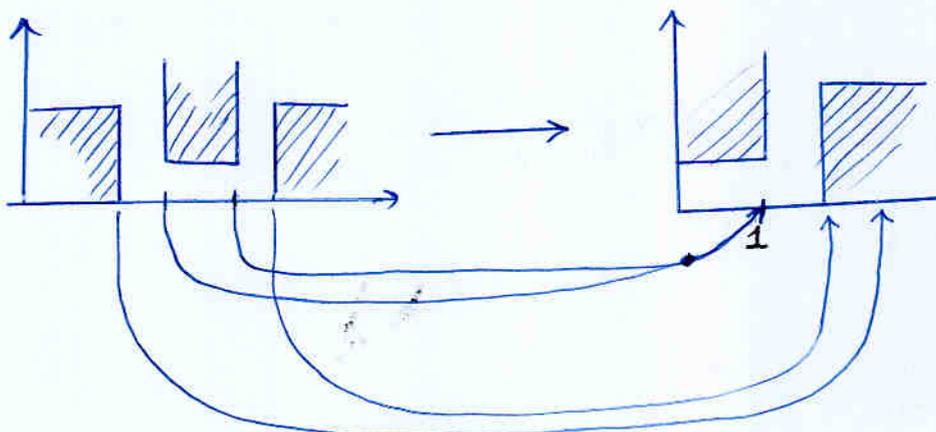
$$f_0 = \sqrt{f_{p1} \cdot f_{p2}} = 2'5 \text{ GHz} \quad (\text{la media geométrica}) \quad (\text{media en el eje logarítmico})$$

$$\Delta = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{f_0} = 0'03$$

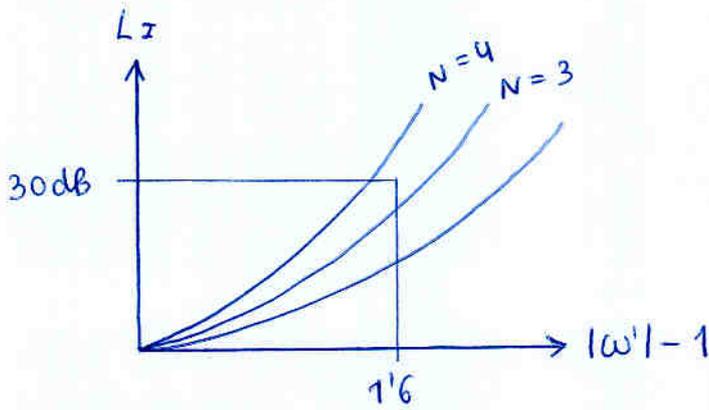
$$\omega' = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \Rightarrow \begin{cases} \omega'_{s1} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{f_{s1}}{f_0} - \frac{f_0}{f_{s1}} \right) = -2'722 \\ \omega'_{s2} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{f_{s2}}{f_0} - \frac{f_0}{f_{s2}} \right) = 2'6154 \end{cases}$$

Hay que ignorar el signo negativo y hay que tomar el más restrictivo

(i)



Veamos el orden del filtro



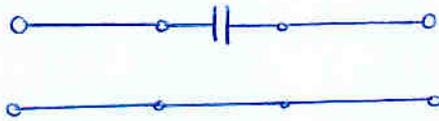
escogemos empezar con bobina

$N=4 \Rightarrow$

$g_0 = 1$			
$g_1 = 1'6703$	$= L_1'$	imp.	
$g_2 = 1'1926$	$= C_2'$	adm	
$g_3 = 2'3661$	$= L_3'$	imp.	
$g_4 = 0'8419$	$= C_4'$	adm	
$g_5 = 1'9841$		imp.	

g_5 debe tener interpretación de impedancia porque le corresponde al haber comentado con bobina

Elegimos hacerlo con sólo condensadores e inductores



Podemos aplicar las fórmulas directamente, sin pensar.

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_1}} = 0'168$$

$$J_{12} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{g_1 g_2}} = 0'0334$$

$$\vdots$$

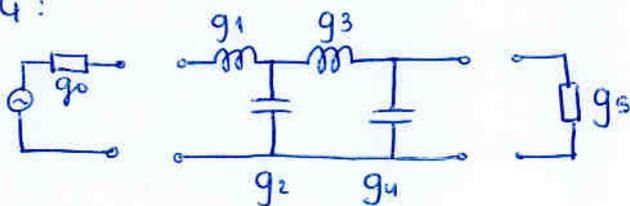
$$\left. \begin{array}{l} |X_{01}| = \frac{1 - J_{01}^2}{J_{01}} = 5'7841 \\ |X_{12}| = \dots \\ \vdots \\ |X_{i, i+1}| \\ \vdots \end{array} \right\}$$

De donde podemos calcular

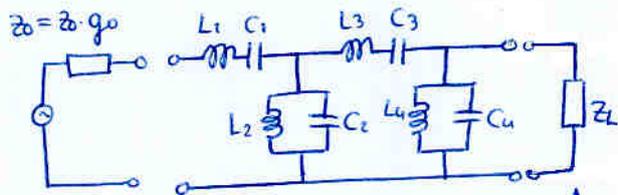
$$\theta_1 = \pi - \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{2}{|X_{01}|} + \arctan \frac{2}{|X_{12}|} \right)$$

veámoslo más paso a paso

$N=4$:



transformación frecuencia y desnormalización



con $L_1 = \frac{g_1 Z_0}{\omega_0 \cdot \Delta} = 177'22 \text{ nH}$

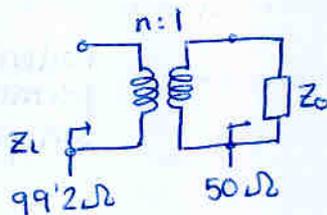
$L_2 = \frac{\Delta Z_0}{\omega_0 g_2} =$

\vdots

Esta sería la implementación exacta, sin ninguna aproximación

con $Z_L = g_5 \cdot Z_0 = 99'2 \Omega$

El filtro está esperando que se le presenten $99'2 \Omega$ a la salida, y no los 50Ω que habrán. Hay que adaptar

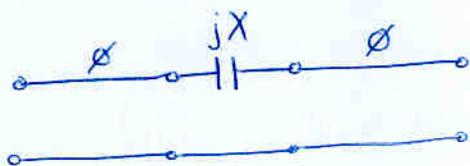


$Z_L = n^2 \cdot Z_0$
 $n = \sqrt{\frac{Z_L}{Z_0}}$

$V_2 = \frac{V_1}{n} \quad I_2 = n \cdot I_1$
 $\frac{V_1}{I_1} = \frac{n \cdot V_2}{I_2/n} = n^2 \frac{V_2}{I_2}$

como no disponemos de bobinas y condensadores a tan alta frecuencia, hay que implementarlo con reactancias e inversores

Un unico inversor sería



$\phi = \frac{1}{2} \text{atan} \frac{2}{X}$

$|X| = \frac{1 - J^2}{J}$

$N=4 \Rightarrow$ Necesitaremos $N+1=5$ inversores
(ya que siempre hay uno al principio y al final)

Las constantes de inversión (aún normalizadas)

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_1}} = 0'168$$

$$J_{12} = \frac{\pi \Delta}{2 \sqrt{g_1 g_2}} = 0'0334$$

...

se pueden calcular con la fórmula directamente a partir de g_1, g_2, \dots, g_N sin todos los pasos anteriores

con J obtenemos las reactancias normalizadas $|X|$

$$|X_{01}| = \frac{1 - J_{01}^2}{J_{01}} = 5'7841$$

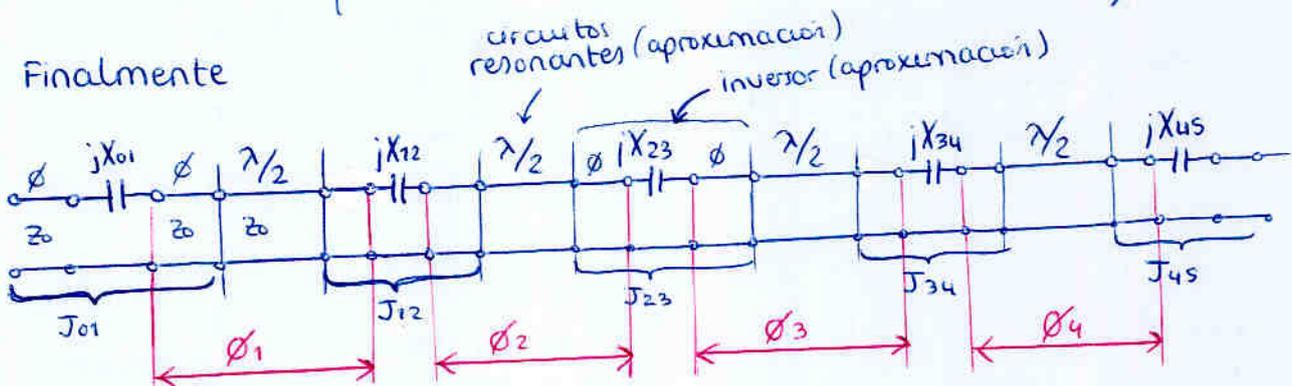
$$|X_{12}| = \frac{1 - J_{12}^2}{J_{12}} = 29'90$$

...

Con las reactancias normalizadas de cada tramo, puedo obtener los desfases de cada tramo (incluyendo el inversor y la línea $\pi/2$)

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \pi - \frac{1}{2} \left(\operatorname{atan} \frac{2}{|X_{01}|} + \operatorname{atan} \frac{2}{|X_{12}|} \right) \\ \phi_2 &= \pi - \frac{1}{2} \left(\operatorname{atan} \frac{2}{|X_{12}|} + \operatorname{atan} \frac{2}{|X_{23}|} \right) \\ \phi_3 &= \dots \\ &\vdots \end{aligned} \right\}$$

Finalmente

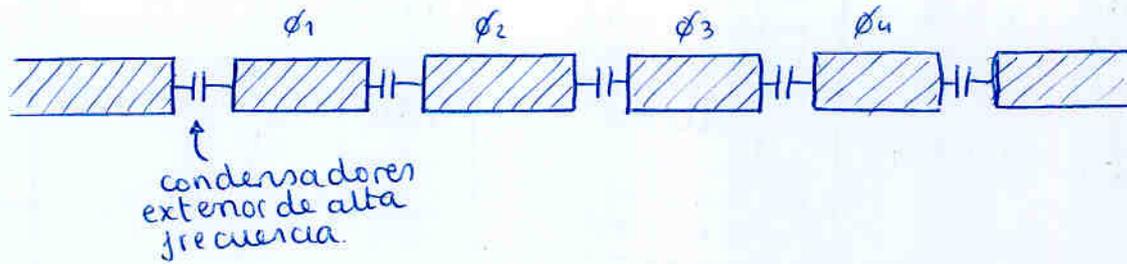


Los condensadores sí que hay que ponerlos físicamente

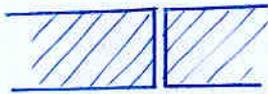
$$\left. \begin{aligned} C_{01} &= \frac{1}{\omega_0 |X_{01}| Z_0} = 0'22 \text{ pF} \\ C_{12} &= \frac{1}{\omega_0 |X_{12}| Z_0} = 0'0426 \text{ pF} \\ &\vdots \end{aligned} \right\}$$

Han habido ciertas aproximaciones que harán que la respuesta no sea exacta, pero para orden $N \leq 6$ se obtiene una muy buena aproximación. Esto se usa mucho.

La implementación física es:



Si los valores de los condensadores son suficientemente pequeños, se pueden implementar implícitamente por la proximidad entre las líneas

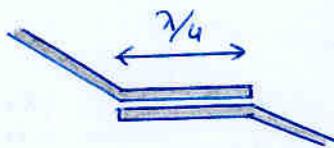


Si el condensador tiene un valor demasiado grande, tecnológicamente no se pueden aproximar tanto las líneas

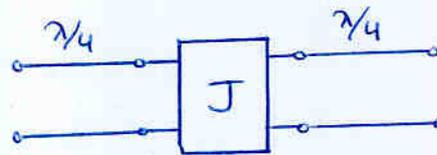
Nota: el último inversor (ya se ha tenido en cuenta al calcular la fórmula) nos adapta la Z_0 a la Z_L que el filtro está esperando. Por tanto no hace falta transformador

(i)

Otra forma de hacer los inversores: líneas acopladas

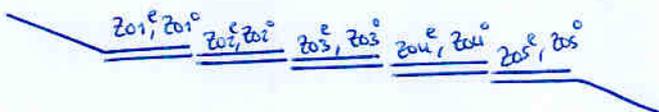


\approx



$$J = \frac{1}{2}(Z_0^e - Z_0^o)$$

Entonces el filtro es:



Necesitamos implementar las impedancias par e impar, que vienen dadas por la relación que tienen con J .

$$\begin{cases} Z_{01}^e = \sqrt{1 + J_{01}^2} + J_{01} = 1.182 \\ Z_{01}^o = \sqrt{1 + J_{01}^2} - J_{01} = 0.846 \\ \vdots \end{cases}$$



Capítulo 6

Filtros de microondas

6.1. Introducción

Un filtro es una red de dos accesos que se utiliza para controlar la respuesta en frecuencia en un determinado punto de un sistema de comunicaciones, permitiendo transmisión dentro de la banda de paso (Pass Band en inglés) del filtro y presentando atenuación en la banda eliminada (Stop Band en inglés) del mismo. Este tipo de comportamiento se hace necesario en todo sistema de comunicaciones.

El diseño de un filtro se puede abordar por varios métodos:

1. Estructuras periódicas. Presentan comportamientos paso bajo y son especialmente útiles en el diseño de amplificadores de onda progresiva.
2. Método del parámetro imagen. Permite fijar la frecuencia de corte y las características de atenuación, pero no permite especificar la respuesta en frecuencia, lo que obliga a seguir un proceso iterativo para conseguir la respuesta deseada.
3. Método de las pérdidas de inserción. Corrige las limitaciones del método del parámetro imagen.

Por su carácter más general, el método de las pérdidas de inserción será el único que se exponga en estos apuntes.

6.1.1. Método de las pérdidas de inserción

Un filtro ideal tendría las siguientes características:

- Pérdidas de inserción nulas en la banda de paso.
- Atenuación infinita en la banda eliminada.

- Fase lineal en la banda de paso.

En la realidad un filtro real no podrá cumplir con estas características y tendrá unas ciertas pérdidas de inserción en la banda de paso, una atenuación finita en la banda eliminada y una fase no lineal en la banda de paso. El método de las pérdidas de inserción presenta un carácter sistemático que permite controlar todos los parámetros del filtro: pérdidas de inserción en la banda de paso, atenuación en la banda eliminada, frecuencia de corte, características de fase, etc.

Como su nombre indica el método se fijará en las pérdidas de inserción del filtro. Las pérdidas de inserción de una red de dos accesos no es otra cosa que la inversa de la ganancia de transmisión vista en el capítulo 3. Para el caso de que haya adaptación tanto en la fuente, $Z_s = Z_0$, como en la carga, $Z_L = Z_0$, las pérdidas de inserción en dB viene dada por:

$$L(\text{dB}) = -20 \log |S_{21}| \quad (6.1.1)$$

Haciendo uso de estas pérdidas de inserción, junto con la respuesta en frecuencia, se pueden definir cuatro tipos de respuestas de filtros, que serán:

- Filtro paso bajo (PB)
- Filtro paso alto (PA)
- Filtro paso banda (PBd)
- Filtro banda eliminada (BE)

Se conoce como máscara de un filtro la representación gráfica de las zonas de exclusión de las pérdidas de inserción en función de la frecuencia. Las figuras 6.1 y 6.2 representan las máscaras de los cuatro tipos de filtros mencionados anteriormente.

Tal y como muestran las máscaras, las bandas de paso quedan definidas por su nivel de pérdidas de inserción, L_P , y las frecuencias de corte de la banda, ω_P ; y de igual forma se definen las bandas eliminadas, con sus pérdidas de inserción, L_S , y sus frecuencias de corte, ω_S .

Las especificaciones de un filtro incluyen la máscara correspondiente y el tipo de respuesta. Son varios los tipos de respuestas que se encuentran en la bibliografía, siendo los más destacados los siguientes:

1. Butterworth o maximalmente plana o binomial.
2. Chebyshev o de rizado constante.
3. Elíptico.

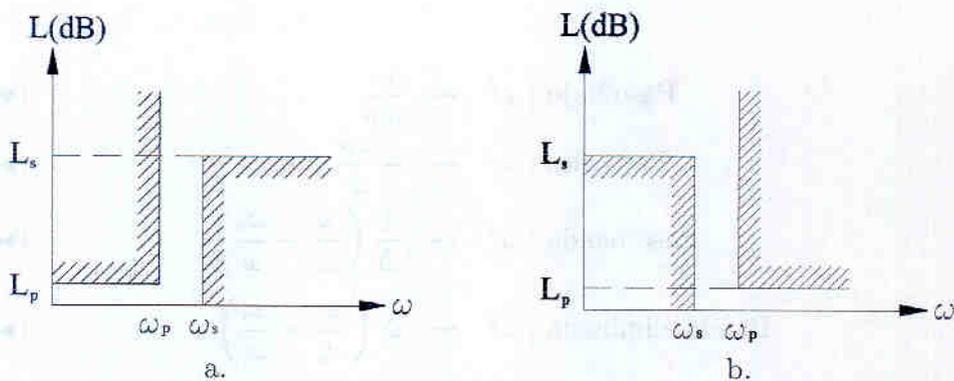


Figura 6.1: a. Filtro paso bajo. b. Filtro paso alto.

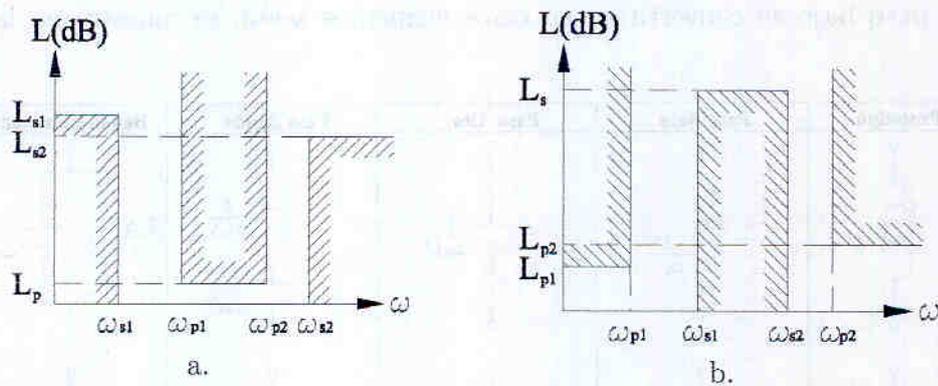


Figura 6.2: a. Filtro paso banda. b. Filtro banda eliminada.

4. Fase lineal.

Normalmente, el proceso de diseño de un filtro pasa siempre por el cálculo de un filtro paso bajo conocido como prototipo. Para trasladar las especificaciones del filtro a diseñar a las del prototipo paso bajo es necesario hacer una transformación en frecuencia, de ω , frecuencia del filtro, a ω' , frecuencia del prototipo. Asumiendo que el prototipo paso bajo siempre va a tener una pulsación de corte de la banda de paso igual a $\omega'_p = 1$, las transformaciones de frecuencia que se tendrían que aplicar son las siguientes:

$$\text{Paso bajo ; } \omega' \leftarrow \frac{\omega}{\omega_P} \quad (\blacktriangleright 6.1.2)$$

$$\text{Paso alto ; } \omega' \leftarrow -\frac{\omega_P}{\omega} \quad (\blacktriangleright 6.1.3)$$

$$\text{Paso banda ; } \omega' \leftarrow \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \quad (\blacktriangleright 6.1.4)$$

$$\text{Banda eliminada ; } \omega' \leftarrow \Delta \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^{-1} \quad (\blacktriangleright 6.1.5)$$

donde $\Delta = (\omega_{P_2} - \omega_{P_1})/\omega_o$ y $\omega_o = \sqrt{\omega_{P_1}\omega_{P_2}}$. En el caso del filtro de banda eliminada es habitual que se cumpla $\omega_o = \sqrt{\omega_{S_1}\omega_{S_2}} = \sqrt{\omega_{P_1}\omega_{P_2}}$.

Con estas transformaciones en frecuencia las bobinas y los condensadores del prototipo paso bajo se convertirían en otros elementos según se muestra en la figura 6.3.

Prototipo	Paso Bajo	Paso Alto	Paso Banda	Banda Eliminada

Figura 6.3: Transformación L's y C's.

El proceso de diseño de un filtro consta de los siguientes pasos:

1. Cálculo especificaciones prototipo paso bajo a partir de las especificaciones del filtro.
2. Cálculo orden del filtro y valores normalizados de los condensadores y bobinas del prototipo.
3. Transformación en frecuencia y desnormalización de impedancia.

Con estos tres pasos se obtendría finalmente los valores de los condensadores y bobinas que compondrían el filtro. En el caso de frecuencias de microondas existe la dificultad de encontrar elementos concentrados como bobinas y condensadores, y habrá que recurrir a otras estructuras para su realización. No obstante se partirá de los valores de estas bobinas y condensadores para su diseño.

A modo de resumen a continuación se explican cada uno de los pasos a seguir:

1. **Cálculo especificaciones prototipo paso bajo a partir de las especificaciones del filtro.** Las especificaciones de un filtro vendrían dadas por los siguientes parámetros:

- Tipo filtro: paso bajo, paso alto, paso banda o banda eliminada.
- Tipo respuesta: Butterworth, Chebyshev, elíptica,...
- Banda de paso: ω_P, L_P .
- Banda eliminada: ω_S, L_S .

Las especificaciones del prototipo serían:

- Tipo filtro: paso bajo.
- Tipo respuesta: la misma que el filtro.
- Banda de paso: $\omega'_P = 1, L_P$.
- Banda eliminada: $\omega'_S = \text{Transformación frecuencia}(\omega_S), L_S$.

Para el caso de los filtros paso banda y banda eliminada, donde se tendrán dos valores de ω_P y de ω_S , se escogerán aquéllos que sean más restrictivos una vez aplicada la transformación.

2. **Cálculo orden del filtro y valores normalizados de los condensadores y bobinas del prototipo.** El prototipo paso bajo constará de N elementos reactivos, dispuestos de manera alterna, según se muestra en las figuras 6.4 y 6.5. Tanto el orden del filtro, N , como los valores de elementos del filtro, g_i , se obtendrán de las tablas correspondientes, una vez fijadas el tipo de respuesta del filtro, las pérdidas de la banda de paso y las pérdidas de la banda eliminada, [7], (más adelante se verá un ejemplo con estos detalles). Los coeficientes g_0 y g_{N+1} representan los valores de impedancia de fuente y de carga respectivamente. Estos valores generalmente tienen valor 1, por lo que hay que interpretar todos los valores g_i como normalizados.

3. **Transformación en frecuencia y desnormalización de impedancia.** Una vez obtenidos los valores de los condensadores y bobinas del prototipo paso bajo

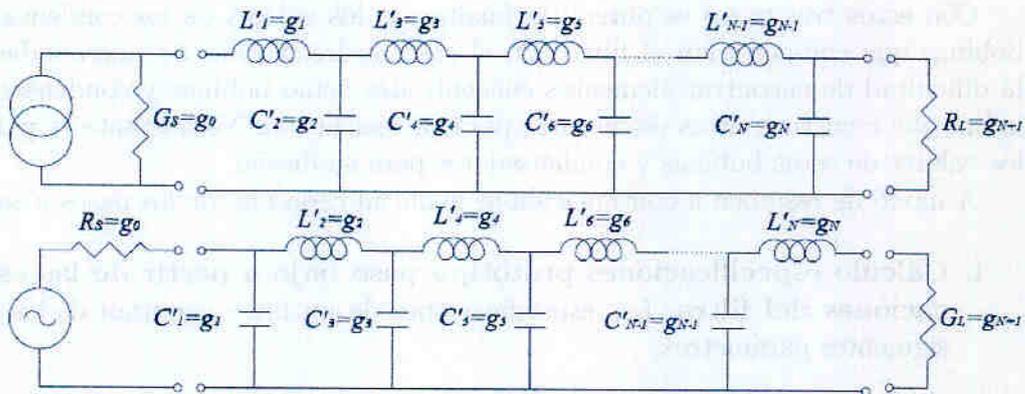


Figura 6.4: Prototipo paso bajo, con N par

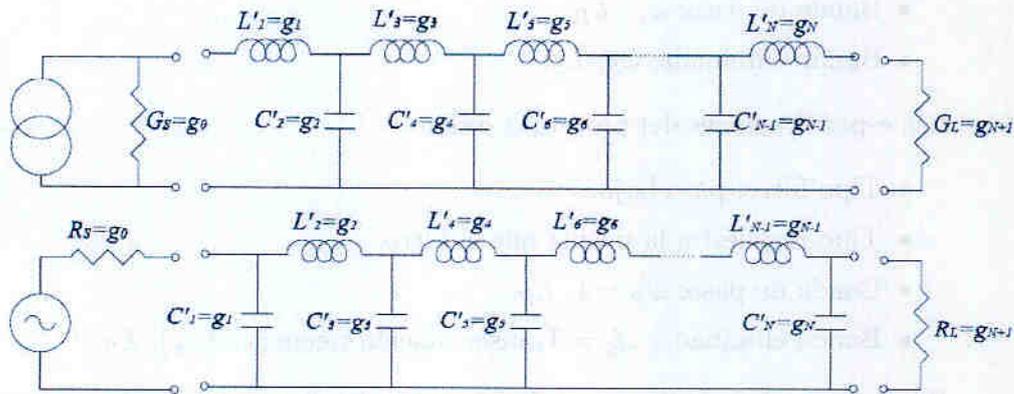


Figura 6.5: Prototipo paso bajo, con N impar

hay que proceder a aplicar la transformación en frecuencia adecuada, ecuaciones (►6.1.2)-(►6.1.5), obteniéndose los valores de los nuevos elementos, siguiendo la equivalencia correspondiente mostrada en la figura 6.3. Por último, teniendo presente que los coeficientes g_i debían interpretarse como normalizados, hay que proceder a la desnormalización según las siguientes relaciones:

$$L = \bar{L}Z_0 \tag{6.1.6}$$

$$C = \frac{\bar{C}}{Z_0} \tag{6.1.7}$$

Con todo esto se han detallado los pasos a seguir para obtener los valores de condensadores y bobinas del filtro deseado. En los siguientes apartados se verán dos

casos particulares de realización de filtros en la banda de microondas, partiendo de los valores de condensadores y bobinas previamente calculados.

6.2. Filtros paso bajo

La realización de filtros con elementos concentrados a frecuencias de microondas son difíciles de implementar. Los condensadores y bobinas reales están limitados en frecuencia. Para superar esta limitación a las frecuencias de microondas se utilizan elementos distribuidos como la línea de transmisión.

6.2.1. Con saltos de impedancia

Una manera fácil de realizar filtros paso bajo con líneas de transmisión es alternar secciones de muy alta impedancia, Z_{0max} , con secciones de muy baja impedancia, Z_{0min} . Debido a las aproximaciones utilizadas, sus propiedades no son del todo buenas, pero su simplicidad hace que en determinados casos se utilice, como por ejemplo cuando no se requiere un cambio abrupto en la respuesta en frecuencia.

En primer lugar se busca la matriz de impedancias de una línea de transmisión de longitud l , impedancia Z_0 y constante de propagación β . La matriz viene dada por:

$$[Z] = -j \frac{Z_0}{\text{sen } \beta l} \begin{bmatrix} \cos \beta l & 1 \\ 1 & \cos \beta l \end{bmatrix} \quad (6.2.1)$$

Por otro lado se conoce la equivalencia entre una red con elementos concentrados en T y los valores de los elementos de la matriz de impedancia, figura 6.6.

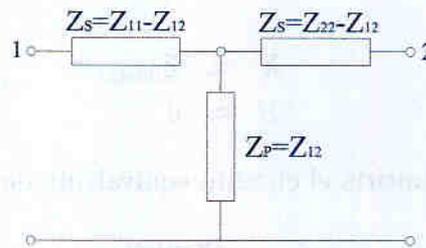


Figura 6.6: Red en T.

Resultando que las impedancias serie de la red en T, Z_S , vendrán dadas, en el caso de la línea de transmisión, por:

$$Z_S = Z_{11} - Z_{12} = -jZ_0 \left(\frac{\cos \beta l}{\text{sen } \beta l} - \frac{1}{\text{sen } \beta l} \right) = jZ_0 \frac{1 - \cos \beta l}{\text{sen } \beta l} = jZ_0 \tan \frac{\beta l}{2} \quad (6.2.2)$$

Y la impedancia paralelo como:

$$Z_P = Z_{12} = -jZ_0 \frac{1}{\text{sen } \beta l} \quad (6.2.3)$$

Para $\beta l < \pi/2$ la impedancia serie, Z_S , presentará una reactancia positiva y Z_P presentará una reactancia negativa. Se puede modelar la línea de transmisión, en este caso, por la red de la figura 6.7. donde

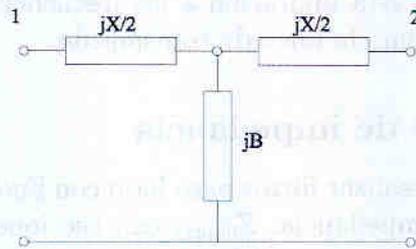


Figura 6.7: Red en T para $\beta l < \pi/2$.

$$X = 2Z_0 \tan \frac{\beta l}{2} \quad (6.2.4)$$

$$B = Y_0 \text{sen } \beta l \quad (6.2.5)$$

Esta red admite dos situaciones extremas. Una primera en que, siendo l pequeño ($\beta l < \pi/4$) y la impedancia característica grande, $Z_0 = Z_{0max}$, se puede aproximar que:

$$X \approx Z_{0max} \beta l$$

$$B \approx 0$$

Es decir, la línea admitiría el circuito equivalente de la figura 6.8.

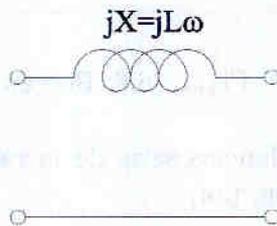


Figura 6.8: Circuito equivalente para LT de Z_{0max}

De forma que la relación entre la longitud de la línea, l , y el valor de la inductancia equivalente será:

$$l = \frac{L\omega}{Z_{0max}\beta} = \frac{Lv_p}{Z_{0max}} \quad (\blacktriangleright 6.2.6)$$

La otra situación extrema ocurrirá cuando la impedancia característica sea pequeña, Z_{0min} , pudiéndose aproximar que:

$$\begin{aligned} X &\approx 0 \\ B &\approx \frac{1}{Z_{0min}}\beta l \end{aligned}$$

Es decir, la línea admitiría el circuito equivalente de la figura 6.9.

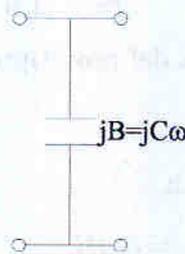


Figura 6.9: Circuito equivalente para LT de Z_{0min}

De forma que la relación entre la longitud de la línea, l , y el valor de la capacidad equivalente será:

$$l = \frac{C\omega Z_{0min}}{\beta} = Cv_p Z_{0min} \quad (\blacktriangleright 6.2.7)$$

Con estos tramos de línea se puede sintetizar un filtro paso bajo, pues se disponen de condensadores paralelo y bobinas serie, cuyos valores se controlarían con las longitudes l de los tramos, dados unos valores mínimo y máximo de las impedancias. Estos valores extremos de las impedancias características vendrán determinados por las limitaciones tecnológicas en la fabricación de las líneas.

Ejemplo: Con líneas de transmisión que presentan impedancias extremas iguales a $Z_{0max} = 150 \Omega$ y $Z_{0min} = 10 \Omega$, diseñar un filtro con las siguientes especificaciones:

- Tipo filtro: paso bajo.
- Tipo respuesta: Butterworth.

- Banda de paso: $f_P = 2,5 \text{ GHz}$, $L_P = 3 \text{ dB}$.
- Banda eliminada: $f_S = 4 \text{ GHz}$, $L_S = 22 \text{ dB}$.
- Impedancias de fuente y carga: $Z_0 = 50 \Omega$.

Siguiendo los pasos de diseño propuestos anteriormente, se calcularían en primer lugar las especificaciones del prototipo paso bajo. La transformación de frecuencia correspondiente sería:

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_P} = \frac{f}{f_P}$$

de forma que $\omega'_P = 1$. Por otro lado la ω'_S del prototipo vendrá dada por:

$$\omega'_S = \frac{f_S}{f_P} = \frac{4}{2,5} = 1,6$$

Por lo que las especificaciones del prototipo paso bajo serán:

- Tipo filtro: paso bajo.
- Tipo respuesta: Butterworth.
- Banda de paso: $\omega'_P = 1$, $L_P = 3 \text{ dB}$.
- Banda eliminada: $\omega'_S = 1,6$, $L_S = 22 \text{ dB}$.

En segundo lugar se calcularían el orden del filtro y los valores normalizados de las bobinas y condensadores del prototipo.

Para calcular el orden del filtro se puede acudir a la gráfica correspondiente a una respuesta Butterworth con $L_P = 3 \text{ dB}$, como la de la figura 6.10. Situando en el eje de abscisas el valor $|\omega'_S| - 1 = 0,6$, y en el de ordenadas el valor $L_S = 22 \text{ dB}$, se deduce que hace falta un filtro de orden $N = 6$, pues con $N \leq 5$ las pérdidas de inserción L_S en la banda eliminada serían menores que 22 dB .

Los coeficientes g_i , valores normalizados de las bobinas y condensadores, se encuentran en la tabla correspondiente a una respuesta Butterworth con $L_P = 3 \text{ dB}$, tabla 6.1.

Escogiendo, por ejemplo, un filtro que comience con un condensador en paralelo, figura 6.11, se tendrían los siguientes valores:

$$\begin{aligned} C'_1 &= g_1 = 0,5176 = L'_6 \\ L'_2 &= g_2 = 1,4142 = C'_5 \\ C'_3 &= g_3 = 1,9318 = L'_4 \end{aligned}$$

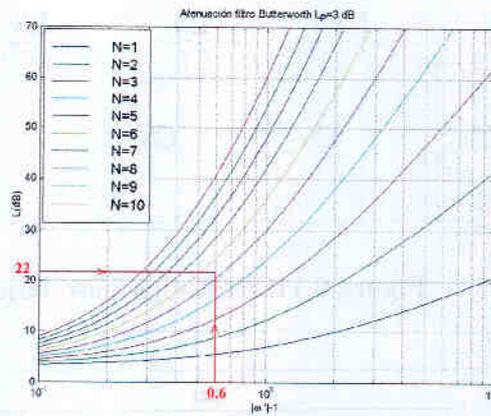


Figura 6.10: Cálculo orden N para respuesta Butterworth $L_P = 3$ dB

N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
1	2,0000	1,0000									
2	1,4142	1,4142	1,0000								
3	1,0000	2,0000	1,0000	1,0000							
4	0,7654	1,8478	1,8478	0,7654	1,0000						
5	0,6180	1,6180	2,0000	1,6180	0,6180	1,0000					
6	0,5176	1,4142	1,9318	1,9318	1,4142	0,5176	1,0000				
7	0,4450	1,2470	1,8019	2,0000	1,8019	1,2470	0,4450	1,0000			
8	0,3902	1,1111	1,6629	1,9615	1,9615	1,6629	1,1111	0,3902	1,0000		
9	0,3473	1,0000	1,5321	1,8794	2,0000	1,8794	1,5321	1,0000	0,3473	1,0000	
10	0,3129	0,9080	1,4142	1,7820	1,9754	1,9754	1,7820	1,4142	0,9080	0,3129	1,0000

Tabla 6.1: Coeficientes g_i para un filtro Butterworth con $L_P = 3$ dB, $\omega'_P = 1$ y $g_0 = 1$

Con estos valores se obtendría una respuesta en frecuencia como la mostrada en la figura 6.12. Se observa que cumple con las especificaciones.

El siguiente paso consistiría en deshacer la transformación en frecuencia y en desnormalizar los valores de los condensadores y de las bobinas. Esto supondrá que los nuevos valores vendrán dados por:

$$L_k = \frac{Z_0 L'_k}{\omega_P}$$

$$C_k = \frac{C'_k}{Z_0 \omega_P}$$

Sustituyendo valores se obtendrán los siguientes condensadores y bobinas:

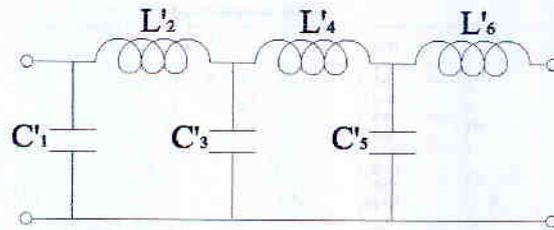


Figura 6.11: Prototipo paso bajo

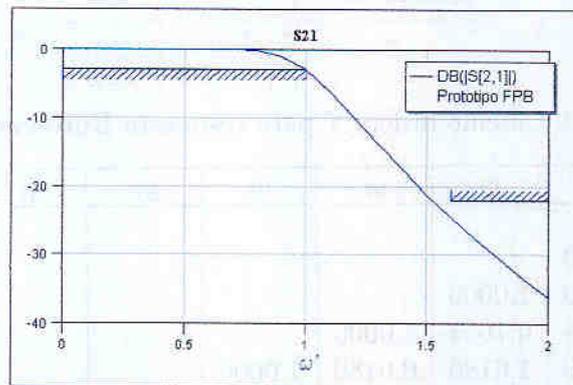


Figura 6.12: Respuesta prototipo paso bajo ejemplo.

$$C_1 = \frac{C'_1}{Z_0 \omega_P} = \frac{g_1}{Z_0 \omega_P} = 0,65903 \text{ pF}$$

$$L_2 = \frac{Z_0 L'_2}{\omega_P} = \frac{Z_0 g_2}{\omega_P} = 4,5015 \text{ nH}$$

$$C_3 = \frac{C'_3}{Z_0 \omega_P} = \frac{g_3}{Z_0 \omega_P} = 2,4596 \text{ pF}$$

$$L_4 = \frac{Z_0 L'_4}{\omega_P} = \frac{Z_0 g_3}{\omega_P} = 6,1491 \text{ nH}$$

$$C_5 = \frac{C'_5}{Z_0 \omega_P} = \frac{g_2}{Z_0 \omega_P} = 1,8006 \text{ pF}$$

$$L_6 = \frac{Z_0 L'_6}{\omega_P} = \frac{Z_0 g_1}{\omega_P} = 1,6476 \text{ nH}$$

Con estos valores se obtendría una respuesta en frecuencia como la observada en la

figura 6.13(en línea azul-discontinua). Donde se observa que cumpliría con exactitud las especificaciones propuestas.

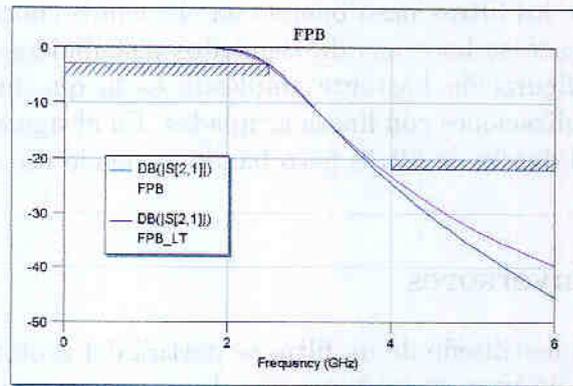


Figura 6.13: Respuesta filtro paso bajo ejemplo.

Por último, faltaría calcular las longitudes de las líneas de transmisión de impedancias mínimas y máximas que sustituyan a los condensadores y bobinas. Para ello se aplicarán las expresiones:

$$l_k = C_k Z_{0min} v_p$$

$$l_k = \frac{L_k v_p}{Z_{0max}}$$

Suponiendo que $v_p = c = 3 \cdot 10^8$ m/s, resultarán los siguientes valores:

$$l_1 = 0,002 \text{ m} ; \beta l_1|_{f=f_P} = 5,9313^\circ$$

$$l_2 = 0,009 \text{ m} ; \beta l_2|_{f=f_P} = 27,0092^\circ$$

$$l_3 = 0,0074 \text{ m} ; \beta l_3|_{f=f_P} = 22,1368^\circ$$

$$l_4 = 0,0123 \text{ m} ; \beta l_4|_{f=f_P} = 36,8947^\circ$$

$$l_5 = 0,0054 \text{ m} ; \beta l_5|_{f=f_P} = 16,2055^\circ$$

$$l_6 = 0,0033 \text{ m} ; \beta l_6|_{f=f_P} = 9,8854^\circ$$

En la figura 6.13 se muestra con línea roja-continua la respuesta del filtro con líneas de transmisión. Se observa que a pesar del alto grado de aproximación utilizado, la respuesta casi cumple perfectamente con las especificaciones.

6.3. Filtros paso banda

De igual forma que ocurre con los filtros paso bajo a muy altas frecuencias, la implementación de los filtros paso banda con elementos concentrados resulta difícil. También en este caso se hace uso de elementos distribuidos para conseguir su realización. Una configuración bastante empleada es la que utiliza inversores, y que tendrá posibles realizaciones con líneas acopladas. En el siguiente apartado se verá el caso particular del diseño de filtros paso banda haciendo uso de inversores.

6.3.1. Con inversores

Como en cualquier diseño de un filtro se partirá del prototipo paso bajo. En este prototipo, la idea de usar inversores parte de un primer supuesto, que consiste en pensar que, por ejemplo, se pueden conseguir bobinas serie pero no condensadores paralelo. En esta supuesta situación, los condensadores se pueden sustituir por la combinación de un inversor y una bobina serie, figura 6.14. En esta figura se observa que el número de bobinas, L_k , es N , siendo éste el orden del filtro. También puede verse que aparecen $N + 1$ inversores. Existe un gran número de grados de libertad, los $N + 1$ inversores y las N bobinas, para poder sintetizar el mismo prototipo paso bajo de partida.

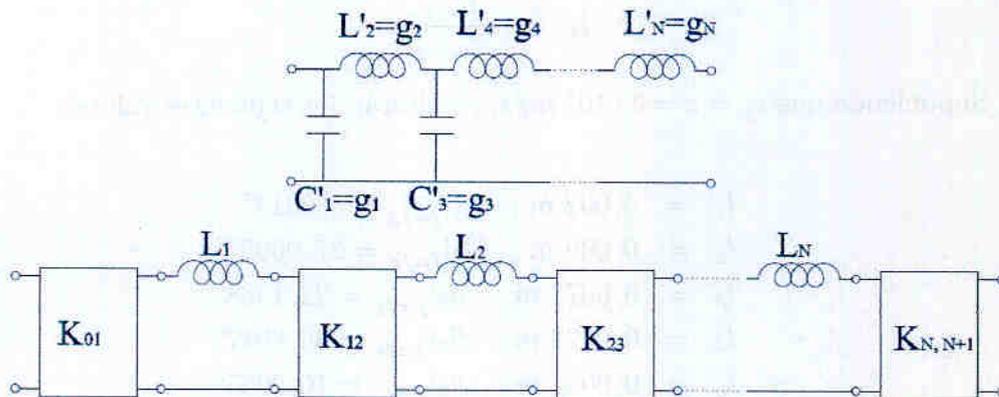


Figura 6.14: Filtro paso bajo con inversores.

Es fácil calcular la equivalencia entre los valores de los inversores junto a los valores de las nuevas bobinas, con los valores de los condensadores y bobinas originales. Las

constantes de los inversores deberán cumplir las siguientes relaciones:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{L_1}{g_1}} \quad (\blacktriangleright 6.3.1)$$

$$K_{12} = \sqrt{\frac{L_1 L_2}{g_1 g_2}} \quad (\blacktriangleright 6.3.2)$$

$$K_{23} = \sqrt{\frac{L_2 L_3}{g_2 g_3}} \quad (\blacktriangleright 6.3.3)$$

$$\dots \quad (\blacktriangleright 6.3.4)$$

$$\dots \quad (\blacktriangleright 6.3.5)$$

$$K_{i,i+1} = \sqrt{\frac{L_i L_{i+1}}{g_i g_{i+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.6)$$

$$\dots \quad (\blacktriangleright 6.3.7)$$

$$\dots \quad (\blacktriangleright 6.3.8)$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{L_N}{g_N g_{N+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.9)$$

Dado el elevado grado de libertad, lo que se suele hacer es fijar el valor de todas la bobinas iguales:

$$L_1 = L_2 = \dots = L_N = L'$$

Quedando que los valores de los inversores vendrán dados por:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{L'}{g_1}} \quad (\blacktriangleright 6.3.10)$$

$$\dots \quad (\blacktriangleright 6.3.11)$$

$$\dots \quad (\blacktriangleright 6.3.12)$$

$$K_{i,i+1} = \frac{L'}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.13)$$

$$\dots \quad (\blacktriangleright 6.3.14)$$

$$\dots \quad (\blacktriangleright 6.3.15)$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{L'}{g_N g_{N+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.16)$$

expresiones en que L' todavía está por definir.

El paso siguiente consiste en realizar la transformación de frecuencias que lleve la respuesta del prototipo paso bajo a la banda deseada, figura 6.15.

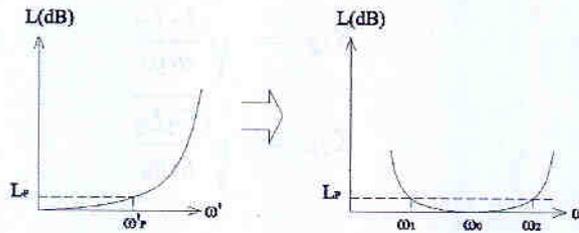


Figura 6.15: Transformación filtro paso bajo a paso banda.

La transformación equivale a la sustitución de cada inductancia por un circuito resonante serie, figura 6.3, con los nuevos valores L y C iguales a:

$$L = \frac{L'}{\omega_o \Delta}$$

$$C = \frac{\Delta}{\omega_o L'}$$

siendo $\omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ y $\Delta = (\omega_2 - \omega_1)/\omega_o$.

Suponiendo que los inversores son ideales, la transformación en frecuencia los mantiene iguales, y el filtro paso banda quedaría como el mostrado en la figura 6.16.

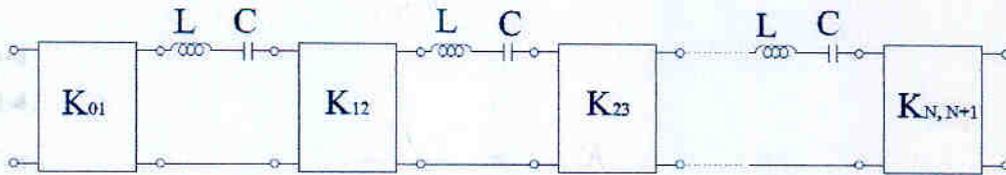


Figura 6.16: Filtro paso banda con inversores.

Haciendo uso de la relación de la bobina L con L' , se pueden poner los valores de

las constantes de inversión como:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{\omega_o \Delta L}{g_1}} \quad (\blacktriangleright 6.3.17)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.18)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.19)$$

$$K_{i,i+1} = \frac{\omega_o \Delta L}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.20)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.21)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.22)$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\omega_o \Delta L}{g_N g_{N+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.23)$$

De disponer de inversores ideales y circuitos resonantes serie ideales, la respuesta del filtro obtenida habría sido la calculada. Una forma de realizar los circuitos resonantes serie consiste en utilizar una línea de transmisión de longitud $\lambda/2$. En este caso, en el entorno de la frecuencia que hace que la longitud eléctrica de la línea sea $\lambda/2$, se puede modelar por una red en Π compuesta por tres circuitos resonantes, como muestra la figura 6.17.

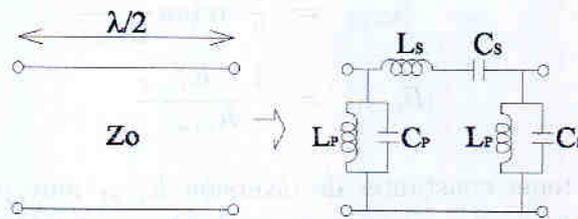


Figura 6.17: Equivalente en Π línea de $\lambda/2$.

Donde los valores de los elementos vienen dados por:

$$L_S = \frac{\pi Z_0}{2\omega_o} \quad (\blacktriangleright 6.3.24)$$

$$C_S = \frac{2Y_0}{\pi\omega_o} \quad (\blacktriangleright 6.3.25)$$

$$L_P = \frac{4Z_0}{\pi\omega_o} \quad (\blacktriangleright 6.3.26)$$

$$C_P = \frac{\pi Y_0}{4\omega_o} \quad (\blacktriangleright 6.3.27)$$

En las situaciones donde la línea de $\lambda/2$ se cargue con impedancias muy pequeñas, los circuitos resonantes paralelo se podrán despreciar al presentar éstos impedancia elevada. En cuyo caso la línea se estará comportando como un circuito resonante serie con L_S y C_S .

En cuanto a la forma de realizar los inversores, se puede hacer uso de aquella configuración que combinaba una susceptancia en paralelo, B , con dos tramos de líneas de igual longitud, ϕ , figura 6.18.

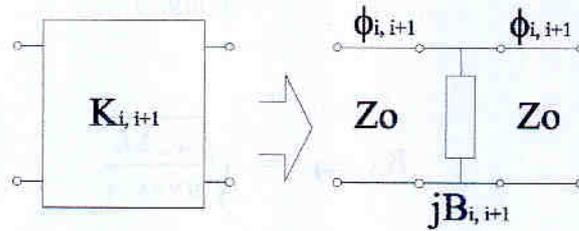


Figura 6.18: Inversor con susceptancia paralelo y líneas.

Donde debe cumplirse que:

$$\phi_{i,i+1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2}{B_{i,i+1}} \quad (\blacktriangleright 6.3.28)$$

$$|B_{i,i+1}| = \frac{1 - K_{i,i+1}^2}{K_{i,i+1}} \quad (\blacktriangleright 6.3.29)$$

En el caso de tener constantes de inversión $K_{i,i+1}$ muy pequeñas, resultará que $|B_{i,i+1}| \gg 1$ y por tanto $\phi_{i,i+1} \ll \pi$; y supondrá que presentará impedancias muy pequeñas, siendo adecuada la eliminación de los circuitos resonantes paralelo del circuito equivalente de la línea de $\lambda/2$.

De forma que el filtro paso banda quedará como $N + 1$ susceptancias en paralelo intercaladas entre líneas de transmisión, figura 6.19. Siendo las longitudes eléctricas de las líneas iguales a:

$$\phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{2}{B_{j-1,j}} + \arctan \frac{2}{B_{j,j+1}} \right) \quad (\blacktriangleright 6.3.30)$$

donde $B_{j-1,j}$ y $B_{j,j+1}$ vendrán dadas por la expresión

$$|B_{ij}| = \frac{1 - K_{ij}^2}{K_{ij}} \quad (\blacktriangleright 6.3.31)$$

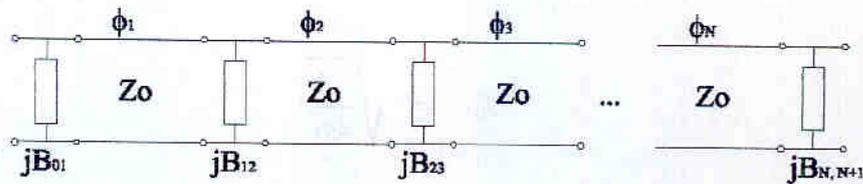


Figura 6.19: Filtro paso banda con susceptancias paralelo y LT.

Y teniendo en cuenta que el valor de la inductancia L del circuito resonante serie, viene dada por $L = \pi Z_0 / (2\omega_0)$ (normalizada sería $L = \pi / (2\omega_0)$), las expresiones de las constantes de inversión se pueden reescribir como:

$$K_{01} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_1}} \quad (\blacktriangleright 6.3.32)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.33)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.34)$$

$$K_{i,i+1} = \frac{\pi \Delta}{2 \sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.35)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.36)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.37)$$

$$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2 g_N g_{N+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.38)$$

En todos estos cálculos debe tenerse presente que tanto los K_{ij} como los B_{ij} son valores normalizados. De forma que una vez calculadas las susceptancias normalizadas se deberán desnormalizar multiplicando por Y_0 .

De forma dual, si se hubiese partido de la realización de los inversores mediante una reactancia en serie con dos líneas de transmisión idénticas se habrían obtenido las siguientes relaciones, figura 6.20:

$$\phi_j = \pi + \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{2}{X_{j-1,j}} + \arctan \frac{2}{X_{j,j+1}} \right) \quad (\blacktriangleright 6.3.39)$$

$$|X_{ij}| = \frac{1 - J_{ij}^2}{J_{ij}} \quad (\blacktriangleright 6.3.40)$$

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_1}} \quad (\blacktriangleright 6.3.41)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.42)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.43)$$

$$J_{i,i+1} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.44)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.45)$$

$$\cdot \quad (\blacktriangleright 6.3.46)$$

$$J_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{g_N g_{N+1}}} \quad (\blacktriangleright 6.3.47)$$

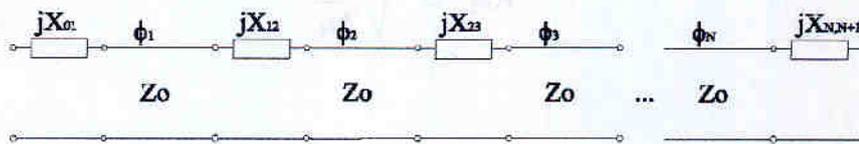


Figura 6.20: Filtro paso banda con reactancias serie y LT.

Conviene en estos momentos resumir las aproximaciones realizadas:

1. Los inversores no son ideales. En el mejor de los casos, si las susceptancias son inductivas, aunque se comportan como inversores a todas las frecuencias, sus constantes de inversión K_{ij} varían con ésta.
2. El circuito equivalente formado por L's y C's para una línea de $\lambda/2$ es de validez limitada a un ancho de banda máximo del 30-40 %, dependiendo de la exactitud deseada.
3. La aproximación anterior se degrada al ignorar los circuitos resonantes paralelo.
4. Todos los errores anteriores son acumulativos, y el efecto aumenta, evidentemente, con el orden del filtro.

El resultado es que su respuesta coincide con la teoría en las proximidades de la frecuencia central del diseño, ω_0 , y se desvía progresivamente de ella a medida que se aleja de ω_0 . No obstante, para órdenes moderados, $N \leq 7$, el diseño se comporta bien para anchos de hasta el 15 %, y en todo caso, las desviaciones mayores se producen a

frecuencias donde las atenuaciones previstas son altas y por tanto los errores menos importantes.

En todo caso, una vez fijados los parámetros del circuito de la figura 6.19, su análisis exacto se puede realizar de manera muy sencilla mediante ordenador, y de esta manera cuantificar las desviaciones para ver si son o no aceptables.

Ejemplo: Se desea diseñar un filtro paso banda haciendo uso de inversores. Las especificaciones del filtro son:

- Tipo filtro: paso banda.
- Tipo respuesta: Chebyshev.
- Banda de paso: $f_{P1} = 2,4628 \text{ GHz}$, $f_{P2} = 2,5378 \text{ GHz}$, $L_P = 0,5 \text{ dB}$.
- Banda eliminada: $f_{S1} = 2,4 \text{ GHz}$, $f_{S2} = 2,6 \text{ GHz}$, $L_S = 30 \text{ dB}$.
- Impedancia de referencia: $Z_0 = 50 \Omega$

Siguiendo los pasos para el diseño se calcularía en primer lugar el prototipo paso bajo, y para ello se necesita conocer el orden del filtro. La frecuencia central y el ancho de banda relativo serán:

$$f_o = \sqrt{f_{P1} f_{P2}} = 2,5 \text{ GHz}$$

$$\Delta = \frac{f_{P2} - f_{P1}}{f_o} = 0,03$$

Con estos valores y tomando $\omega'_P = 1$, se pueden calcular las pulsaciones de la banda eliminada del prototipo paso bajo como:

$$\omega'_{S1} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{f_{S1}}{f_o} - \frac{f_o}{f_{S1}} \right) = -2,7222$$

$$\omega'_{S2} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{f_{S2}}{f_o} - \frac{f_o}{f_{S2}} \right) = 2,6154$$

El signo negativo de ω'_{S1} no se considera, y resultará que de las dos pulsaciones la más restrictiva es $\omega'_{S2} = 2,6154$. (cumpliéndose a esta frecuencia con más razón se cumplirá a otra mayor). Para calcular el orden del filtro se acude a las gráficas correspondientes a un filtro de Chebyshev con rizado $0,5 \text{ dB}$, figura 6.21.

En esta gráfica el eje de abscisas corresponde con $|\omega'_S| - 1$, que para $\omega_{S2} = 2,6154$ supondrá $|\omega'_S| - 1 = 1,6154$. Situando este punto en la gráfica junto con un nivel de pérdidas de $L_S = 30 \text{ dB}$, se observa que el orden del filtro necesario es $N = 4$, pues

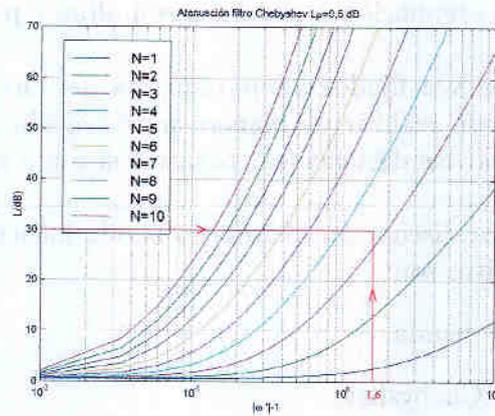


Figura 6.21: Pérdidas inserción filtro Chebyshev, rizado 0,5 dB

N	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
1	0,6986	1,0000									
2	1,4029	0,7071	1,9841								
3	1,5963	1,0967	1,5963	1,0000							
4	1,6703	1,1926	2,3661	0,8419	1,9841						
5	1,7058	1,2296	2,5408	1,2296	1,7058	1,0000					
6	1,7254	1,2479	2,6064	1,3137	2,4758	0,8696	1,9841				
7	1,7372	1,2583	2,6381	1,3444	2,6381	1,2583	1,7372	1,0000			
8	1,7451	1,2647	2,6564	1,3590	2,6964	1,3389	2,5093	0,8796	1,9841		
9	1,7504	1,2690	2,6678	1,3673	2,7239	1,3673	2,6678	1,2690	1,7504	1,0000	
10	1,7543	1,2721	2,6754	1,3725	2,7392	1,3806	2,7231	1,3485	2,5239	0,8842	1,9841

Tabla 6.2: Coeficientes g_i para un filtro Chebyshev con $L_P = 0,5$ dB, $\omega'_P = 1$ y $g_0 = 1$

con $N = 3$ las pérdidas de inserción estarían por debajo de 30 dB. Una vez obtenido el orden del filtro se acudiría a la tabla de g_i correspondiente a Chebyshev de rizado 0,5 dB, tabla 6.2, y se conseguirían los valores de los coeficientes g_i .

Resultando que para $N = 4$ serán:

$$g_1 = 1,6703$$

$$g_2 = 1,1926$$

$$g_3 = 2,3661$$

$$g_4 = 0,8419$$

$$g_5 = 1,9841$$

Estos coeficientes serían los valores de los condensadores y bobinas del prototipo paso bajo. Suponiendo que se escoge como primer elemento una bobina serie, se tendrán los valores:

$$L'_1 = 1,6703$$

$$C'_2 = 1,1926$$

$$L'_3 = 2,3661$$

$$C'_4 = 0,8419$$

Y g_5 se identificaría con la impedancia de carga. Impedancia y no admitancia puesto que el elemento anterior era condensador, identificado como admitancia g_4 . De haber partido del prototipo paso bajo que comienza con condensador paralelo se habría identificado el coeficiente g_5 con admitancia.

Si se realizase el filtro con circuitos resonantes serie y paralelo, los valores de los elementos, transformando en frecuencia y desnormalizando, serían:

$$L_1 = \frac{L'_1 Z_0}{\omega_o \Delta} = 177,22 \text{ nH} ; C_1 = \frac{\Delta}{Z_0 \omega_o L'_1} = 0,022868 \text{ pF}$$

$$L_2 = \frac{\Delta Z_0}{\omega_o C'_2} = 0,080071 \text{ nH} ; C_2 = \frac{C'_2}{Z_0 \omega_o \Delta} = 50,616 \text{ pF}$$

$$L_3 = \frac{L'_3 Z_0}{\omega_o \Delta} = 251,051 \text{ nH} ; C_3 = \frac{\Delta}{Z_0 \omega_o L'_3} = 0,016144 \text{ pF}$$

$$L_4 = \frac{\Delta Z_0}{\omega_o C'_4} = 0,11343 \text{ nH} ; C_4 = \frac{C'_4}{Z_0 \omega_o \Delta} = 35,731 \text{ pF}$$

El valor de la impedancia de carga sería $Z_L = g_5 Z_0 = 99,2050 \Omega$. Como, por otra parte, es habitual que tanto la impedancia de fuente como de carga sean iguales, $Z_S = Z_L = Z_0$, habrá que recurrir a añadir algún adaptador de impedancia que convierta Z_0 en la impedancia de carga deseada, Z_L . Una forma adecuada de conseguir esto es mediante un transformador ideal con una relación $1 : n$, tal que $n = \sqrt{Z_L/Z_0}$.

En el caso de realizar el filtro con inversores, los valores de las constantes de inversión J^1 vendrían dados por:

¹Se calculan los J y no los K al haber escogido en el prototipo como primer elemento una bobina serie. Esto permitirá utilizar el mismo valor de la impedancia de carga calculado con anterioridad

$$J_{01} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_1}} = 0,168$$

$$J_{12} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{g_1 g_2}} = 0,0334$$

$$J_{23} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{g_2 g_3}} = 0,0281$$

$$J_{34} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{\sqrt{g_3 g_4}} = 0,0334$$

$$J_{45} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_4 g_5}} = 0,168$$

Si se escoge la configuración de una reactancia en serie con dos tramos de línea para realizar los inversores, se tendrá que los valores de las reactancias vendrán dadas por:

$$|X_{01}| = \frac{1 - J_{01}^2}{J_{01}} = 5,7841$$

$$|X_{12}| = \frac{1 - J_{12}^2}{J_{12}} = 29,9023$$

$$|X_{23}| = \frac{1 - J_{23}^2}{J_{23}} = 35,6014$$

$$|X_{34}| = \frac{1 - J_{34}^2}{J_{34}} = 29,9023$$

$$|X_{45}| = \frac{1 - J_{45}^2}{J_{45}} = 5,7841$$

y el de las longitudes eléctricas de la líneas serán

$$\phi_1 = \pi - \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{2}{|X_{01}|} + \arctan \frac{2}{|X_{12}|} \right) = 2,9417 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = \pi - \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{2}{|X_{12}|} + \arctan \frac{2}{|X_{23}|} \right) = 3,0801 \text{ rad}$$

$$\phi_3 = \pi - \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{2}{|X_{23}|} + \arctan \frac{2}{|X_{34}|} \right) = 3,0801 \text{ rad}$$

$$\phi_4 = \pi - \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{2}{|X_{34}|} + \arctan \frac{2}{|X_{45}|} \right) = 2,9417 \text{ rad}$$

Si las reactancias serie se realizasen con condensadores, los valores de éstos serían:

$$C_{01} = \frac{1}{Z_0 \omega_o |X_{01}|} = 0,22013 \text{ pF}$$

$$C_{12} = \frac{1}{Z_0 \omega_o |X_{12}|} = 0,04258 \text{ pF}$$

$$C_{23} = \frac{1}{Z_0 \omega_o |X_{23}|} = 0,035764 \text{ pF}$$

$$C_{34} = \frac{1}{Z_0 \omega_o |X_{34}|} = 0,04258 \text{ pF}$$

$$C_{45} = \frac{1}{Z_0 \omega_o |X_{45}|} = 0,22013 \text{ pF}$$

Con estos valores se obtendría una respuesta del filtro como la mostrada en la figura 6.22, línea continua.

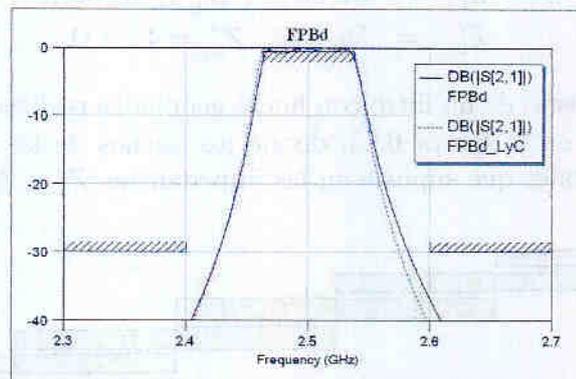


Figura 6.22: Parámetro S_{21} filtro ejemplo (continua: con inversores; discontinua: con L_s y C_s).

Se observa que debido a las aproximaciones realizadas la respuesta en frecuencia difiere ligeramente de la ideal, pero sigue siendo bastante aceptable. Nótese que en este caso el hecho que $g_{N+1} \neq 1$ no supone problema, y la impedancia de carga debe ser Z_0 , pues el último inversor, $J_{N,N+1}$, ya se encarga de compensar este hecho.

Si para la realización del inversor se hubiese escogido líneas acopladas, los valores de las impedancias par e impar de las líneas de transmisión acopladas habrían sido:

$$\begin{aligned}
 Z_{01}^e &= \sqrt{1 + J_{01}^2} + J_{01} = 1,1820 ; & Z_{01}^o &= \sqrt{1 + J_{01}^2} - J_{01} = 0,8460 \\
 Z_{02}^e &= \sqrt{1 + J_{12}^2} + J_{12} = 1,0339 ; & Z_{02}^o &= \sqrt{1 + J_{12}^2} - J_{12} = 0,9672 \\
 Z_{03}^e &= \sqrt{1 + J_{23}^2} + J_{23} = 1,0284 ; & Z_{03}^o &= \sqrt{1 + J_{23}^2} - J_{23} = 0,9723 \\
 Z_{04}^e &= \sqrt{1 + J_{34}^2} + J_{34} = 1,0339 ; & Z_{04}^o &= \sqrt{1 + J_{34}^2} - J_{34} = 0,9672 \\
 Z_{05}^e &= \sqrt{1 + J_{45}^2} + J_{45} = 1,1820 ; & Z_{05}^o &= \sqrt{1 + J_{45}^2} - J_{45} = 0,8460
 \end{aligned}$$

Dichos valores serían normalizados y habría que multiplicarlos por Z_0 para des-normalizarlos.

$$\begin{aligned}
 Z_{01}^e &= 59,1 \Omega ; & Z_{01}^o &= 42,3 \Omega \\
 Z_{02}^e &= 51,69 \Omega ; & Z_{02}^o &= 48,36 \Omega \\
 Z_{03}^e &= 51,42 \Omega ; & Z_{03}^o &= 48,615 \Omega \\
 Z_{04}^e &= 51,69 \Omega ; & Z_{04}^o &= 48,36 \Omega \\
 Z_{05}^e &= 59,1 \Omega ; & Z_{05}^o &= 42,3 \Omega
 \end{aligned}$$

Un posible aspecto de un filtro con líneas acopladas realizado en tecnología planar sería el mostrado en la figura 6.23, donde los anchos de las líneas y las distancias entre ellas serían tales que supusiesen las impedancias Z_0^e y Z_0^o calculadas.

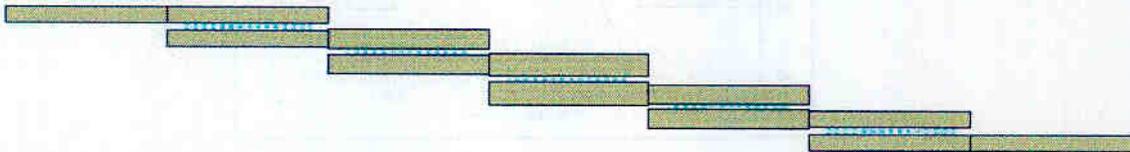
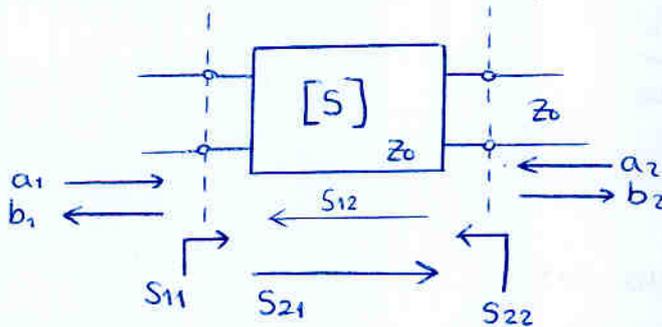
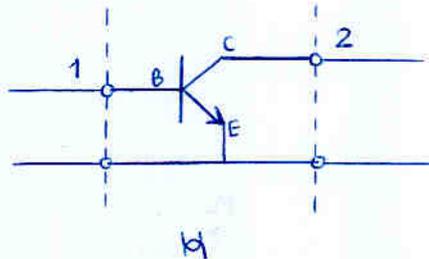


Figura 6.23: Filtro paso banda con líneas acopladas en microtira.

Tema 7. Circuitos activos

- 7.1 Introducción
- 7.2 Amplificadores con transistores
 - 7.2.1 Introducción
 - 7.2.2 Estabilidad
 - 7.2.3 Ruido
 - 7.2.4. Diseño unilateral
 - 7.2.5 Diseño bilateral
- 7.3 Amplificadores con resistencia negativa
- 7.4. Osciladores
 - 7.4.1 Con diodos
 - 7.4.2 Con transistores

1. Introducción



Parámetros S
a una cierta
frecuencia.

Es un circuito
activo y
no recíproco

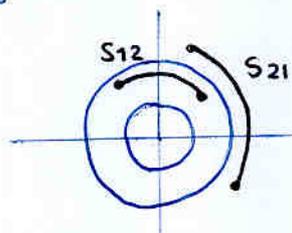
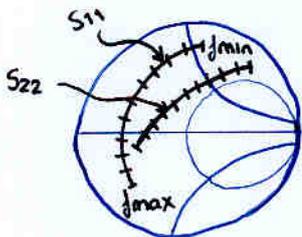
$$S_{21} \gg S_{12}$$

Caso ideal

$$\begin{cases} S_{11} = S_{22} = 0 \\ S_{12} = 0 \text{ (aislamiento)} \\ S_{21} = \text{ganancia} \end{cases}$$

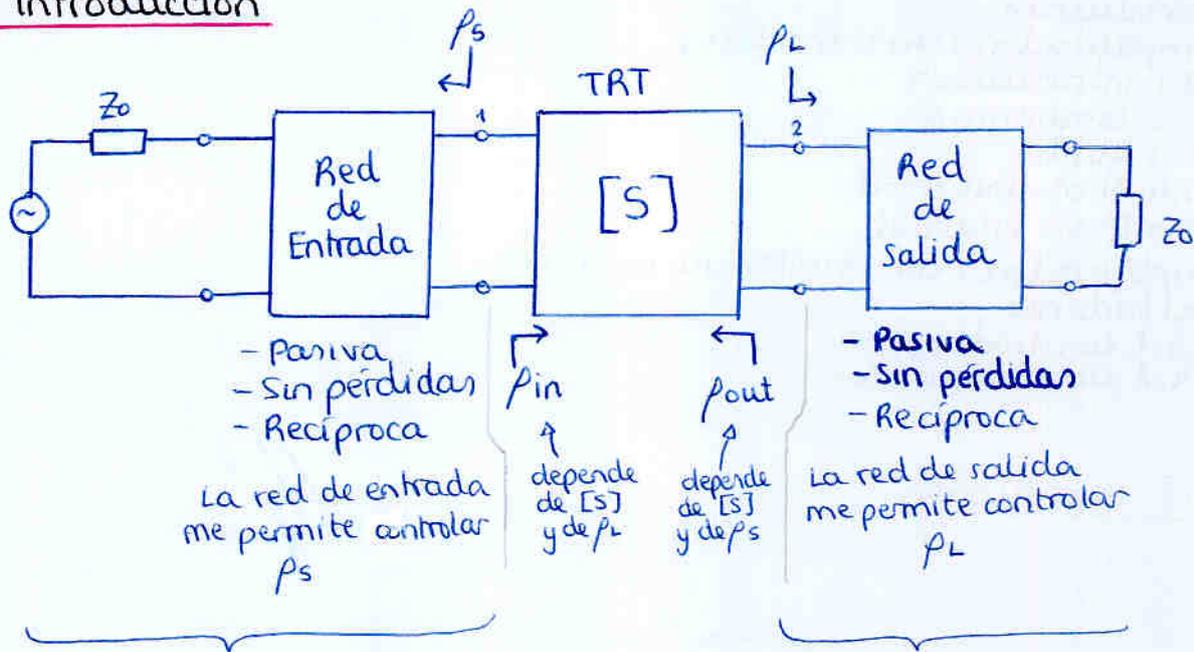
En la práctica S_{11} y S_{22} suelen ser muy grandes (más cerca de 1 que de 0)
Podemos representarlos en la carta de Smith para distintas frecuencias

S_{21} y S_{12} se suelen representar en polares



2. Amplificadores con transistores

2.1 Introducción



$$P_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} P_{avs}$$

$$P_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

a) Ganancia de transferencia G_T

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}} = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |P_s|^2) (1 - |P_L|^2)}{|(1 - S_{11}P_s)(1 - S_{22}P_L) - S_{21}S_{12}P_LP_s|^2}$$

depende de los 4 parámetros S , aunque sobre todo de S_{21}

b) Impedancia de entrada y salida

$$P_{in} = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} P_L}{1 - S_{22} P_L}$$

$$P_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} P_s}{1 - S_{11} P_s}$$

2.2 Inestabilidad

Cuando $|p_{in}|$ o $|p_{out}| > 1$
La inestabilidad depende
del transistor

Un claro ejemplo inestabilidad
es que $p_{in} > 1$. ¡Me devuelve
más potencia de la que meto!

➔ Dentro de la
Carta de Smith

$$\text{TRT} \begin{cases} - \text{Incondicionalmente Estable: } |p_{in}| < 1 \\ \quad \quad \quad |p_{out}| < 1 \quad \text{siempre, } \forall p_L, p_S \\ - \text{Condicionally Estable: } \exists p_L, p_S \Rightarrow \begin{cases} |p_{in}| > 1 \\ \text{y/o} \\ |p_{out}| > 1 \end{cases} \end{cases}$$

en la práctica son
casi todos condicionalmente
estables.

¿cómo puedo encontrar los p_L y p_S que lo hacen inestable?

Buscamos la frontera: $|p_{in}| = 1 \rightarrow p_L$
 $|p_{out}| = 1 \rightarrow p_S$

Es decir:

$$|p_{in}| = \left| s_{11} + \frac{s_{21} s_{12} p_L}{1 - s_{22} p_L} \right| = 1$$

Se puede demostrar que a partir de esta expresión
se llega a:

$$\left| p_L - \underbrace{\frac{(s_{22} - \Delta \cdot s_{11}^*)^*}{|s_{22}|^2 - |\Delta|^2}}_{C_L} \right| = \underbrace{\left| \frac{s_{21} s_{12}}{|s_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right|}_{r_L}$$

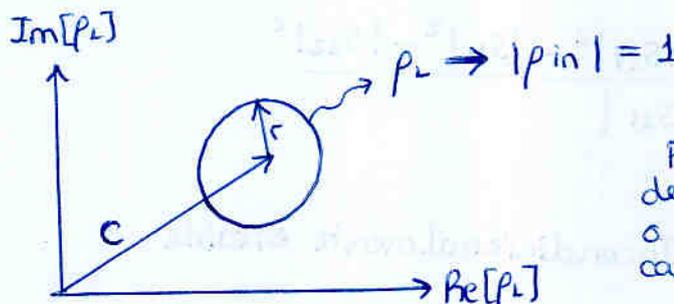
siendo

$\Delta = s_{11} s_{22} - s_{12} s_{21}$
el determinante
de la matriz S

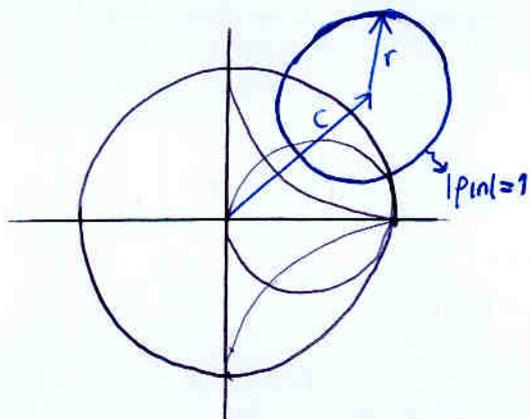
C_L
valor
complejo

r_L
constante
real y positiva

Es la ecuación de una circunferencia de centro C_L y radio r_L



Puede estar
dentro, fuera,
o cortar la
carta de smith



circulo de estabilidad de salida

Nos divide la carta de smith en 2 zonas.

- zona estable
- zona inestable

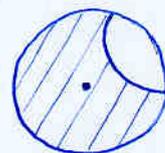
Truco para saberlo:

ponernos en el centro de la carta de Smith, donde $p_L = 0$

$$\text{si } p_L = 0 \Rightarrow p_{in} = S_{11}$$

$$\text{si } S_{11} < 1 \Rightarrow \text{esa es la zona estable}$$

$$\text{si } S_{11} > 1 \Rightarrow \text{esa es la zona inestable}$$

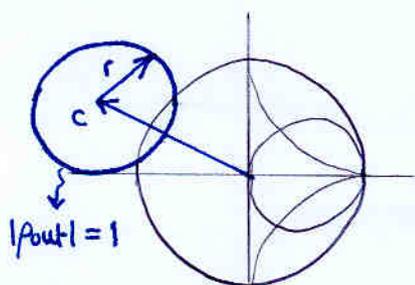


mismo análisis para el p_{out}



$$|p_{out}| = 1 \Rightarrow \text{Circulo de estabilidad de entrada } (p_s)$$

no liarse



$$C_s = \frac{(S_{11} - \Delta S_{22}^*)^*}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2}$$

$$r_s = \left| \frac{S_{12} S_{21}}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right|$$

$$\text{y en } p_s = 0 \Rightarrow p_{out} = S_{22}$$

Cuidado: esta zona de estabilidad es válida sólo para esta frecuencia (ya que S_{ij} depende de la frecuencia)

¿Como puedo saber a priori si un transistor es incondicionalmente estable o no? (me ahorraría el cálculo anterior si resulta que si)

Factor de estabilidad k

$$k = \frac{1 + |S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2 |S_{12} S_{21}|}$$

$$\text{si } \left. \begin{array}{l} k > 1 \\ |\Delta| < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Incondicionalmente estable}$$

Factor μ

mas moderno

$$\mu = \frac{1 - |S_{11}|^2}{|S_{22} - S_{11}^* \Delta| + |S_{21} S_{12}|}$$

$\mu > 1 \Rightarrow$ Incondicionalmente estable

Cuidado, comparar incluyendo el signo.
No hacer $|\mu| > 1$?

2.3 Ruido

El ruido del transistor sólo depende de ρ_s

Diseño del amplificador de bajo ruido

Hay 4 parámetros de ruido que necesito conocer; del catálogo del TAT.

↓
diseño de la red de entrada

Parámetros de ruido:

- Factor de ruido mínimo F_{min}
- Resistencia equivalente de ruido R_n
- Admitancia óptima de fuente $Y_{opt} = G_{opt} + j \cdot B_{opt}$ (o bien ρ_{opt})

$$F = F_{min} + \frac{R_n}{G_s} \left[|Y_s - Y_{opt}|^2 \right] \quad \triangle ! \text{ todo en lineal}$$

podemos sustituir; $Y_s = Y_0 \cdot \frac{1 - \rho_s}{1 + \rho_s}$; $Y_{opt} = Y_0 \cdot \frac{1 - \rho_{opt}}{1 + \rho_{opt}}$

$$F = F_{min} + 4r_n \frac{|\rho_{opt} - \rho_s|^2}{(1 - |\rho_s|^2) |1 + \rho_{opt}|^2}$$

$$r_n = \frac{R_n}{Z_0}$$

Voy a igualar F a una constante para despejar las zonas en las cuales con ρ_s logramos dicho valor constante

Parámetro de figura de ruido

$$N = \frac{F - F_{min}}{4r_n} |1 + \rho_{opt}|^2$$

es una constante (ya que F es constante que hemos elegido)

$$N = \frac{|\rho_{opt} - \rho_s|^2}{1 - |\rho_s|^2}$$

N en real ≥ 0

$$N = \frac{|p_{opt} - p_s|^2}{1 - |p_s|^2} \xrightarrow[\text{no inmediato}]{(\dots)} \underbrace{\frac{\sqrt{N(N+1) - |p_{opt}|^2}}{N+1}}_{r_F} = \underbrace{\left| p_s - \frac{p_{opt}}{N+1} \right|}_{CF}$$

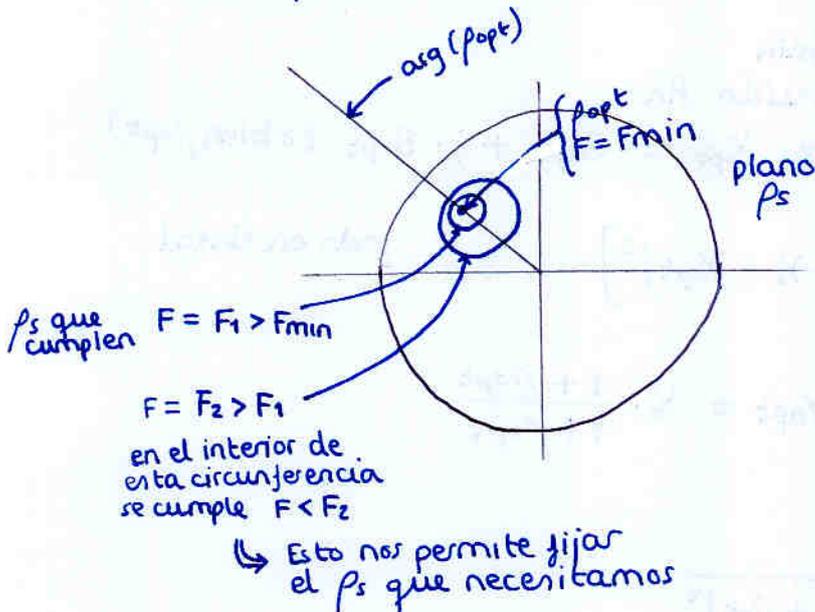
Círculos de ruido constante

$$\begin{cases} CF = \frac{p_{opt}}{N+1} \\ r_F = \frac{\sqrt{N(N+1) - |p_{opt}|^2}}{N+1} \end{cases}$$

Nota: si escogemos $F = F_{min}$, se obtiene

$$\left. \begin{matrix} N=0 \\ r_F=0 \\ CF=p_{opt} \end{matrix} \right\} \text{ es un punto en } p_{opt}$$

La fase de CF siempre será igual a la de p_{opt}
 El módulo de CF se acerca al centro según aumenta N
 (i.e. alejamos F de F_{min})



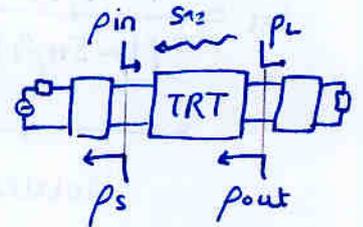
El centro de los círculos están todos situados en la línea de $\arg(p_{opt})$

Pero no son concéntricas, según aumento F , el centro se va acercando al origen y el radio va aumentando

Todo círculo para cierta F contiene todos los círculos de menor F (más cercana a F_{min})

2.4. Diseño unilateral (ganancia)

En un transistor ideal $S_{12} = 0 \Rightarrow$ Independizos p_s de p_{out}



Diseño unilateral $\rightarrow S_{12} \approx 0$ (lo suponemos)

máxima ganancia $\Rightarrow \begin{cases} p_{in} = p_s^* \\ p_{out} = p_L^* \end{cases}$ (adaptación compleja conjugada en plano p_{in})

$$p_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} p_L}{1 - S_{22} p_L} \stackrel{S_{12}=0}{=} S_{11} \Rightarrow$$

$$p_{out} = \dots \dots \dots \stackrel{S_{12}=0}{=} S_{22} \Rightarrow$$

maxima ganancia suponiendo $S_{12} = 0$

$$p_s = S_{11}^*$$

$$\uparrow$$

$$S_{12} = 0$$

$$\downarrow$$

$$p_L = S_{22}^*$$

(en realidad no ES la máxima ganancia)

Ganancia de transferencia unilateral G_{TU}

A partir de la expresión de la ganancia, aplicando $S_{12} = 0$, se obtiene:

$$G_{TU} = \underbrace{\frac{1 - |p_s|^2}{|1 - S_{11} p_s|^2}}_{G_1} \cdot \underbrace{|S_{21}|^2}_{G_0} \cdot \underbrace{\frac{1 - |p_L|^2}{|1 - S_{22} p_L|^2}}_{G_2}$$

$$G_{TU} = \underbrace{G_1(p_s)}_{\substack{\text{se controla} \\ \text{con la red} \\ \text{de entrada}}} \cdot G_0 \cdot \underbrace{G_2(p_L)}_{\substack{\text{se controla} \\ \text{con la red} \\ \text{de salida}}}$$

cuidado: no quiere decir que la ganancia de la etapa de entrada sea G_1 !!

$$p_s = S_{11}^*$$

$$p_L = S_{22}^*$$

$$G_{1max} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2}$$

$$G_{2max} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2}$$

$$G_{TUmax} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1}{1 - |S_{22}|^2}$$

No siempre tiene por qué interesar sólo la máxima ganancia; Podemos buscar un equilibrio entre ganancia y ruido

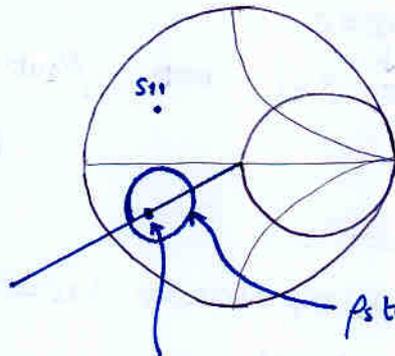
Conviene conocer las zonas donde $G_{TU} = cte$

$$G_1 = \frac{1 - |\rho_s|^2}{|1 - S_{11}\rho_s|^2} = \text{cte}$$

solución: circunferencia

$$\begin{cases} C_1 = \frac{G_1 \cdot S_{11}^*}{1 + G_1 |S_{11}|^2} \\ r_1 = \frac{\sqrt{1 - G_1(1 - |S_{11}|^2)}}{1 + G_1 |S_{11}|^2} \end{cases}$$

si exigimos $G_1 = G_{1\max}$
entonces $C_1 = S_{11}^*$
 $r_1 = 0$



El interior de la circunferencia
corresponde a una
ganancia mayor

$\rho_s = S_{11}^* \Rightarrow G_{1\max}$

$$G_2 = \text{cte}$$

$$\begin{cases} C_2 = \frac{G_2 \cdot S_{22}^*}{1 + G_2 |S_{22}|^2} \\ r_2 = \frac{\sqrt{1 - G_2(1 - |S_{22}|^2)}}{1 + G_2 |S_{22}|^2} \end{cases}$$

Intentemos cuantificar el error en la ganancia que aparece a causa de aproximar $S_{12} \approx 0$ (aproximación unilateral)

sustituimos lo obtenido en la expresión de G_T (sin sustituir $S_{12} \approx 0$)

$$\frac{G_T}{G_{Tu}} \leftarrow G_{Tu} = G_T |_{S_{12} \approx 0}$$

Factor de mérito unilateral (u)

$$u = \frac{|S_{11} S_{12} S_{21} S_{22}|}{|(1 - |S_{11}|^2)(1 - |S_{22}|^2)|}$$

$$\frac{1}{(1+u)^2} < \frac{G_T}{G_{Tu}} < \frac{1}{(1-u)^2}$$

Es aconsejable calcular este margen antes de decidir diseñar con el método unilateral

ejemplo: $u = 0.1$

$$-20 \log(1+u) = -0.83 \text{ dB}$$

$$-20 \log(1-u) = 0.91 \text{ dB}$$

$$-0.83 \text{ dB} < G_T(\text{dB}) - G_{Tu}(\text{dB}) < 0.91 \text{ dB}$$

el error cometido es menor a 1dB; podremos aplicar el sencillo método unilateral

problema MUY didáctico: Abril 2005: Problema 3 (no es éste)

ejemplo:

Diseñar amplificador de bajo ruido

TAT \rightarrow HXTR-6101

$$f = 4 \text{ GHz}$$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

catálogo

$$[S]_{Z_0} = \begin{bmatrix} 0.522 \angle 169^\circ & 0.049 \angle 23^\circ \\ 1.681 \angle 26^\circ & 0.839 \angle -69^\circ \end{bmatrix}$$

características de ruido del TRT a esa frec

$$\begin{cases} F_{\min}(\text{dB}) = 2.5 \text{ dB} \\ \rho_{\text{opt}} = 0.475 \angle 160^\circ \\ R_n = 3.5 \Omega \end{cases}$$

Empiezo comprobando la estabilidad

$$K = \frac{1 + |\Delta|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2 |S_{21} \cdot S_{12}|} = 1.07 > 1$$

$$|\Delta| = 0.391 < 1$$

incondicionalmente estable

• Hallar ρ_s

Ya que es incondicionalmente estable como el ρ_s que quiera

$$\text{mínimo ruido} \Rightarrow \rho_s = \rho_{opt} = 0'475 \angle 160^\circ$$

• Hallar ρ_L

Ya que el ruido no depende de ρ_L , maximizo la ganancia ¿Porque no?

$$\rho_L = S_{22}^* = 0'839 \angle 59^\circ$$

¿Cual sería la ganancia máxima? (Diseño unilateral)

i.e. si cogiéramos

$$\rho_s = S_{11}^* \\ \rho_L = S_{22}^*$$

$$G_{1max} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} = 1'37 = 1'38 \text{ dB}$$

$$G_0 = |S_{21}|^2 = 2'83 = 4'5 \text{ dB}$$

$$G_{2max} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = 3'38 = 5'29 \text{ dB}$$

$$G_{Tu(max)}(\text{dB}) = G_{1max}(\text{dB}) + G_0(\text{dB}) + G_{2max}(\text{dB}) \\ = 11'18 \text{ dB}$$

¿Cual será el error cometido?

$$\text{Factor de mérito: } u = 0'167 \\ \downarrow$$

$$-1'35 \text{ dB} < G_T(\text{dB}) - G_{Tu}(\text{dB}) < 1'59 \text{ dB}$$

¿Cual será la ganancia que tenemos?

No tenemos la máxima ya que $\rho_s = \rho_{opt} \neq S_{11}^*$

hemos diseñado para mínimo ruido, no para máxima ganancia.

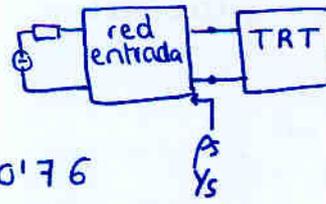
$$G_T(\rho_s = \rho_{opt}) = \frac{1 - |\rho_{opt}|^2}{1 - |S_{11} \rho_{opt}|^2} = 1 \text{ dB}$$

$$G_{Tu}(\text{dB}) = 1 + 4'51 + 5'29 = 10'8 \text{ dB}$$

Hemos perdido 1'1 dB por el hecho de haber diseñado con mínimo ruido.

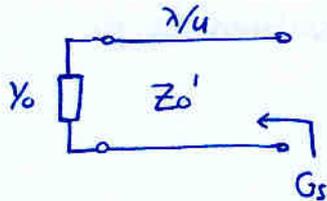
Diseño red de entrada

$$\rho_s = \rho_{opt} \Rightarrow Y_s = Y_0 \frac{1 - \rho_s}{1 + \rho_s}$$



$$\bar{Y}_s = \frac{Y_s}{Y_0} = \underbrace{2.55}_{\bar{G}_s} - j \underbrace{0.76}_{\bar{B}_s}$$

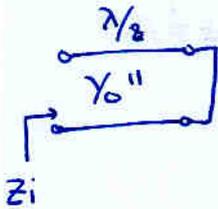
usamos linea $\lambda/4$ desde el generador para adaptar la parte real



$$Y_0' = \sqrt{G_s \cdot Y_0}$$

$$Z_0' = \frac{1}{Y_0'} = \frac{1}{\sqrt{G_s \cdot Y_0}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{G_s \cdot Y_0 \cdot Y_0}_{G_s}}} = 31.31$$

para la parte imaginaria usamos un stub en paralelo



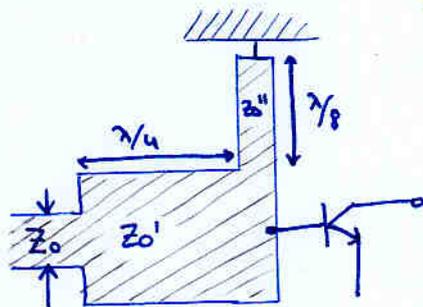
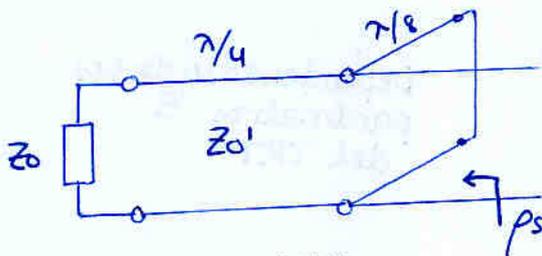
$$\begin{aligned} Z_i &= j Z_0'' \cdot \tan \beta l \\ &= j Z_0'' \tan \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} \\ &= j Z_0'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_i &= j Z_0'' \\ Y_i &= -j Y_0'' \end{aligned}$$

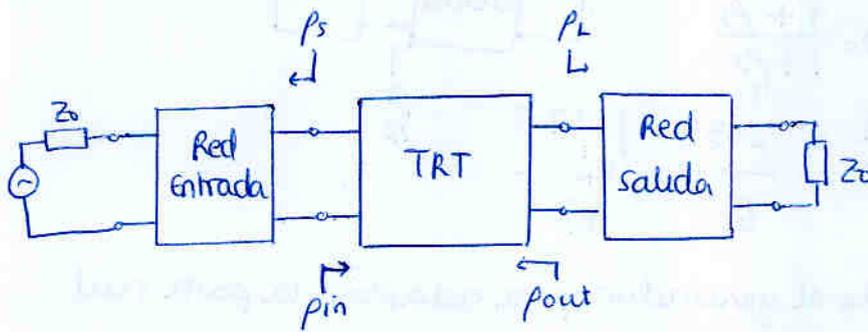
buscamos: $\bar{B}_s = -0.76 = -\frac{Y_0''}{Y_0}$

$$Z_0'' = \frac{1}{Y_0''} = 65.8 \Omega$$

El aspecto de la red de entrada:



2.5. Diseño bilateral



máxima ganancia

$$\begin{cases} P_{in} = P_s^* \\ P_{out} = P_L^* \end{cases}$$

sabemos que P_{in} depende no sólo de $[S]$ sino también de P_L

$$\begin{cases} P_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} P_L}{1 - S_{22} P_L} \\ P_{out} = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} P_s}{1 - S_{11} P_s} \end{cases}$$

aplicando la condición de máxima ganancia $\begin{cases} P_{in} = P_s^* \\ P_{out} = P_L^* \end{cases}$

$$\begin{cases} P_s^* = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} P_L}{1 - S_{22} P_L} \\ P_L^* = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} P_s}{1 - S_{11} P_s} \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones con solución analítica P_{sm} y P_{Lm}

↑
máxima ganancia

$$P_{sm} = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4|C_1|^2}}{2C_1}$$

$$P_{Lm} = \frac{B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4|C_2|^2}}{2C_2}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= 1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - |\Delta|^2 \\ B_2 &= 1 + |S_{22}|^2 - |S_{11}|^2 - |\Delta|^2 \\ C_1 &= S_{11} - \Delta \cdot S_{22}^* \\ C_2 &= S_{22} - \Delta \cdot S_{11}^* \end{aligned}$$

Dependen sólo de los parámetros S del TRT

Aunque estos cálculos son arreguibles; antes (sin calculadoras) hacían aproximaciones que hoy día son docentes (la unilateral)

si es Incondicionalmente Estable

$$G_{Tmax} = \left| \frac{S_{21}}{S_{12}} \right| \cdot \left| K \pm \sqrt{K^2 - 1} \right|$$

ejemplo:

TRT → HXTR-6101

$$f = 4 \text{ GHz}; Z_c = 50 \Omega \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{sm} = 0'856 \angle -154^\circ \\ \rho_{lm} = 0'951 \angle 72^\circ \end{array} \right.$$

↓

$$G_{Tmax} = 23'46 = 13'7 \text{ dB}$$

La G_{Tmax} no entra en el rango que obtuvimos con diseño unilateral, ya que aquel rango era para $\rho_s = S_{11}^*$ y $\rho_L = S_{22}^*$

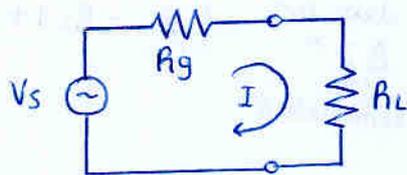
recuerda: en diseño unilateral, usamos
 $\rho_s = S_{11}^*$
 $= 0'522 \angle 169^\circ$

para ρ_L usábamos S_{22}^*
 $\rho_L = 0'84 \angle 69^\circ$

En diseño unilateral obtuvimos

$$G_{Tumax} = 11'18 \text{ dB}$$

3. Amplificadores de resistencia negativa



$$I = \frac{V_s}{R_g + R_L}$$

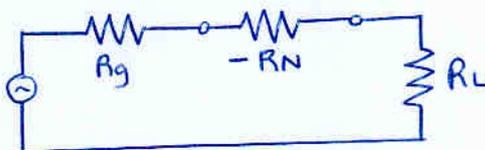
$$P_L = \frac{1}{2} V I^*$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{V_s}_{\frac{R_L}{R_L + R_g}} \cdot \underbrace{I^*}_{\frac{V_s^*}{R_g + R_L}}$$

$$= \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_g)^2}$$

Configuración básica

Si introducimos una resistencia $-R_N$



$$I' = \frac{V_s}{R_g + R_L - R_N}$$

se incrementa
I

Estabilidad

↓

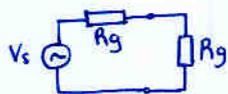
suma de resistencias de la malla sea positiva

$$R_g + R_L - R_N$$

Podemos interpretar $\frac{-R_N}{-R_N}$ como un amplificador con ganancia de transferencia

$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}}$$

$$P_{avs} = \frac{|V_s|^2}{8 R_g}$$



$$P_{avs} = \frac{1}{2} \cdot V \cdot I^* = \frac{1}{2} \cdot \left[V_s \cdot \frac{R_g}{2 \cdot R_g} \right] \cdot \left[\frac{V_s^*}{2 R_g} \right] = \frac{1}{8} \frac{|V_s|^2}{R_g}$$

$$P_L = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \left[V_s \frac{R_L}{R_g + R_L - R_N} \right] \cdot \left[\frac{V_s^*}{R_g + R_L - R_N} \right] = \frac{1}{2} \frac{|V_s|^2 R_L}{(R_g + R_L - R_N)^2}$$

$$G_T = \frac{\frac{1}{2} \frac{|V_s|^2 R_L}{(R_g + R_L - R_N)^2}}{\frac{|V_s|^2}{8 R_g}} =$$

$$G_T = \frac{4 R_g R_L}{(R_g + R_L - R_N)^2}$$

Definimos:

Resistencia positiva = resistencia positiva vista por el dispositivo $\frac{-R_N}{-R_N}$

resistencia positiva : $R = R_g + R_L$

delta:

$$\Delta = \frac{R_N - R}{R}$$

debe ser
 $\Delta < 0$
↑
estabilidad

$$R_N = R(1 + \Delta)$$

entonces queda:

$$G_T = \frac{4 R_g R_L}{\Delta^2 R^2}$$

si fijamos $\Delta = cte$ podemos maximizar G_T

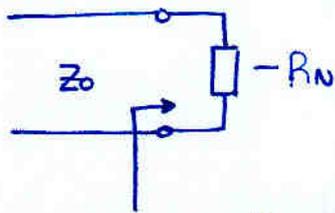
$$\frac{\partial G_T}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow$$

$$G_{Tmax} = \frac{1}{\Delta^2}$$

↑
 $R_g = R_L$

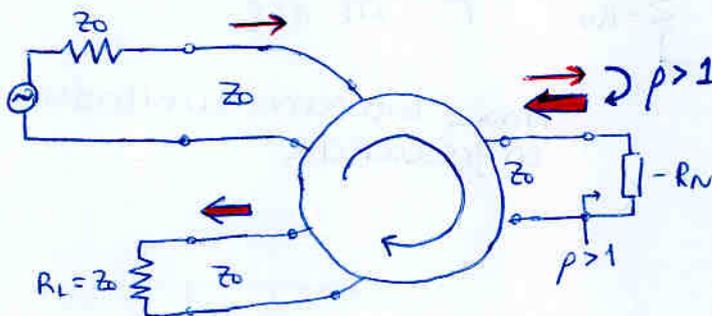
Configuración con circulator

¿qué factor de reflexión presenta una impedancia negativa?



$$\rho = \frac{-Z_N - Z_0}{-Z_N + Z_0} = \frac{-R_N - Z_0}{-R_N + Z_0} = \frac{R_N + Z_0}{R_N - Z_0} > 1 \quad \boxed{\rho > 1}$$

$\rho > 1$ puede jugar a nuestro favor:



$$\boxed{G_T = |\rho|^2}$$

$$= \frac{(Z_0 + R_N)^2}{(Z_0 - R_N)^2}$$

La resistencia positiva (la que ve el dispositivo $\boxed{-R_N}$) es:

$$R = Z_0$$

$$R_N = R(1 + \Delta) = Z_0(1 + \Delta)$$

$$G_T = \frac{(Z_0 + \overbrace{Z_0 + Z_0 \Delta}^{R_N})^2}{(Z_0 - Z_0 - Z_0 \Delta)^2} = \frac{(2 + \Delta)^2}{\Delta^2}$$

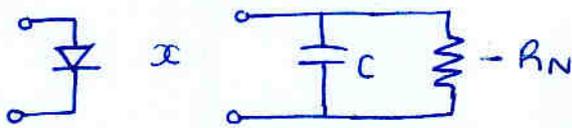
si $\Delta \ll 2$

$$G_T \approx \frac{4}{\Delta^2}$$

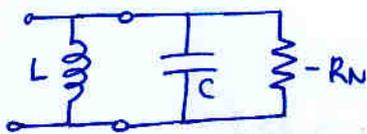
Esta configuración mejora 4 veces la ganancia obtenida antes

¿Cómo se consigue resistencia negativa?

Diodo trabajando en zona con pendiente negativa

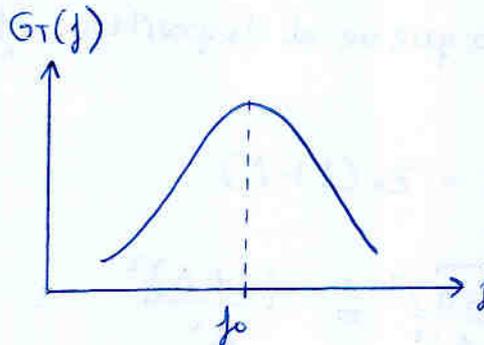
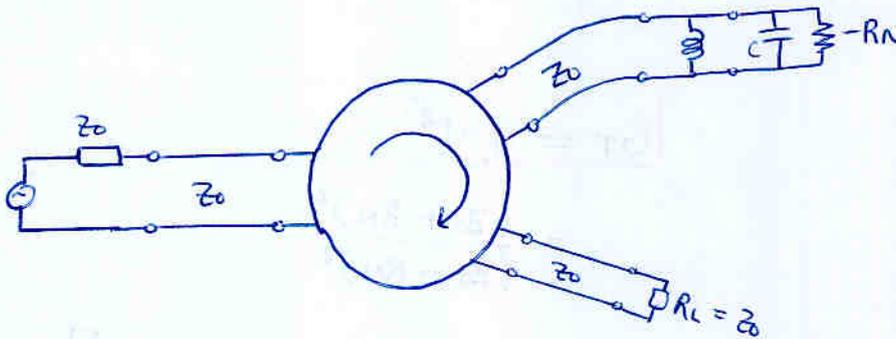


↓ Para contrarrestar el efecto del condensador ponemos una bobina en resonancia → Red de sintonía



$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ahora estaremos limitados en frecuencia



$$G_T(j) = G_{T0} \frac{1 + \left(\frac{2Q_N Q_E}{Q_N + Q_E} \delta \right)^2}{1 + \left(\frac{2Q_N Q_E}{Q_N - Q_E} \delta \right)^2}$$

$$G_{T0} = \left(\frac{z_0 + R_N}{z_0 - R_N} \right)^2$$

$$\delta = \frac{j - f_0}{f_0}$$

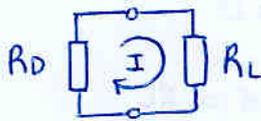
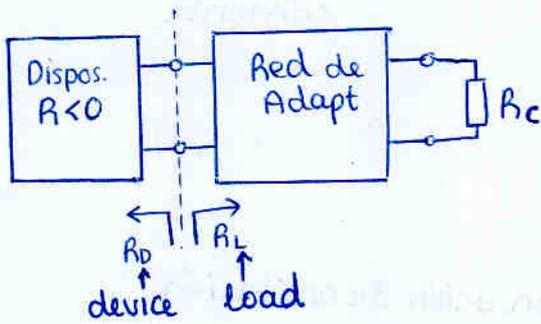
$$Q_N = \frac{R_N}{\omega C L} \leftarrow \text{factor de calidad con } R_N$$

$$Q_E = \frac{z_0}{\omega_0 L} \leftarrow \text{con la resistencia parásita}$$

4. Osciladores

4.1 Osciladores con diodos

se usan diodos : Gunn
: IMPATT



$$(Z_D + Z_L) I = 0$$

Condición de oscilación

$$Z_D + Z_L = 0$$

$$Z_D = -Z_L$$

$$Y = Y_0 \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

$$Z = Z_0 \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

$$\rho_D = \frac{Z_D - Z_0}{Z_D + Z_0} = \frac{-Z_L - Z_0}{-Z_L + Z_0} = \frac{Z_L + Z_0}{Z_L - Z_0} = \frac{1}{\rho_L}$$

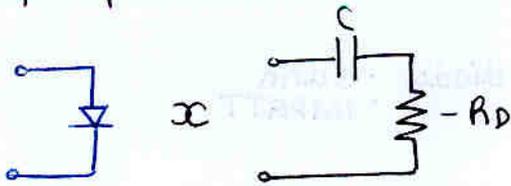
$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$



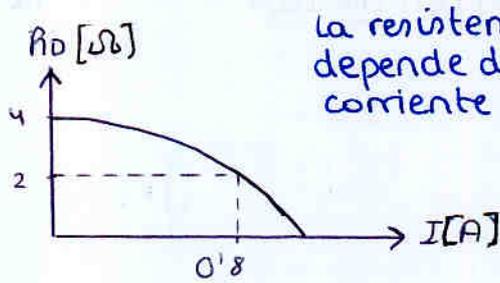
$$\rho_D \cdot \rho_L = 1 \quad \text{Condición de oscilación}$$

$$\begin{cases} Z_D(I, \omega) = -R_D(I, \omega) + jX_D(I, \omega) \\ Z_L(\omega) = R_L(\omega) + jX_L(\omega) \\ \quad \quad \quad \approx R_L + jX_L(\omega) \end{cases}$$

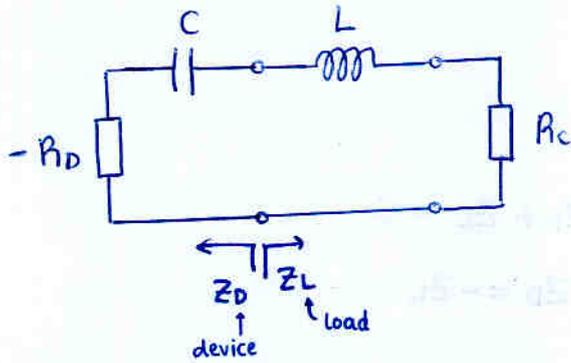
ejemplo:



$$R_D(I) = a - bI^2 = 4 - 3 \cdot 1 I^2$$



la resistencia depende de la corriente



Condición de oscilación

$$Z_D + Z_L = 0$$

- R_D compensará a R_C
- C compensará a L pero sólo a cierta frecuencia (la frecuencia de oscilación)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow X_C = -X_L$$

$$R_C = R_D$$

¿Cuál es el R_C que me consigue la máxima potencia?
Teniendo en cuenta que R_D depende de I

$$P_L = \frac{1}{2} R_C I^2 \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{cond.} \\ \text{osc.}}}{=} \frac{1}{2} R_D I^2 = \frac{1}{2} (a - bI^2) I^2$$

$$\frac{dP_L}{dI} = 0 \Rightarrow aI - 2bI^3 = 0$$

$$a - 2bI^2 = 0 \Rightarrow$$

$$I = \sqrt{\frac{a}{2b}} \Rightarrow P_{Lmax}$$

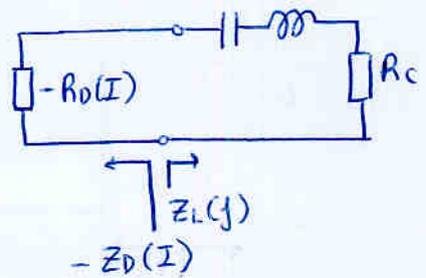
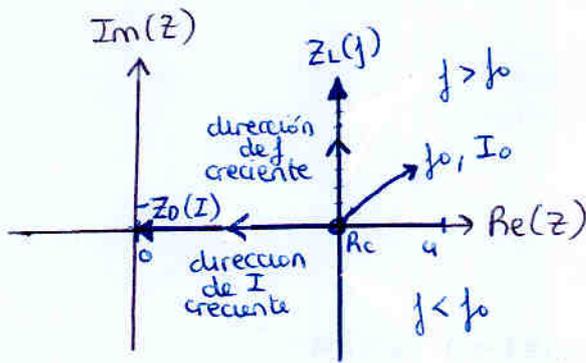
$$I = 0.8 \text{ A}$$

$$R_D = 2 \Omega$$

$$P_{Lmax} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0.8)^2 = 640 \text{ mW}$$

Para lograr $R_C = 2 \Omega$ a partir de 50Ω no tengo más que poner una línea $\lambda/4$ y calcular su Z_0 .

Si representamos $Z_L(f)$ junto a $-Z_D(I)$ en el plano complejo:

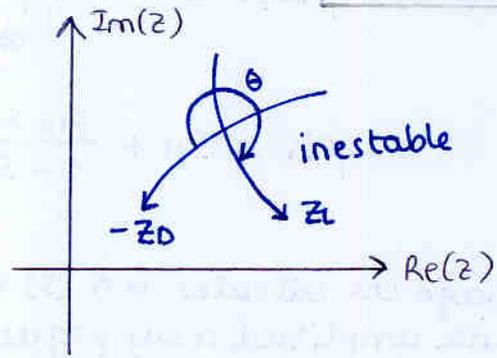
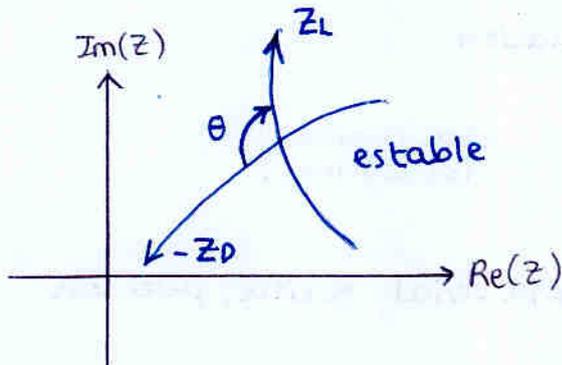


A partir del dibujo podemos ver si la oscilación es estable o inestable mirando el ángulo que forman las líneas

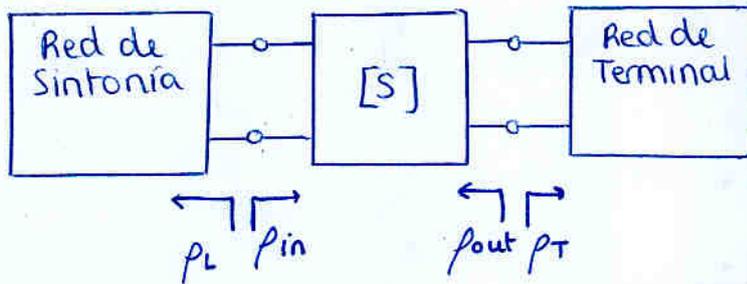
$\theta \equiv$ ángulo en sentido horario entre línea de dispositivo ($Z_D(I)$) en dirección de I creciente y línea de carga ($Z_L(f)$) en dirección de f creciente

$0 < \theta < 180^\circ \Rightarrow$ Oscilación estable

oscilación inestable: se puede dar, pero se acaba fácilmente (como un cono sobre su vértice) ∇



u.2 Oscilador con transistor



2 condiciones de oscilación

$$p_L \cdot p_{in} = 1 \Leftrightarrow Z_L + Z_{in} = 0$$

$$p_T \cdot p_{out} = 1 \Leftrightarrow Z_T + Z_{out} = 0$$

Nota:

En los catálogos del TRT, los parámetros S suelen ser de pequeña señal.

[S] → pequeña señal (zona lineal)
 [S] → gran señal (zona saturación) → difícil de obtener
 son los que interesan para un oscilador

elejimos p_T → tal que $|p_{in}| > 1 \Rightarrow$ de forma que $p_L \cdot p_{in} = 1$
cond. oscilación

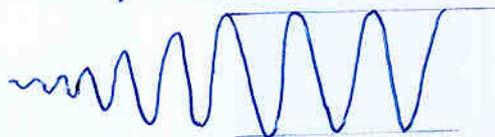
$$p_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} p_T}{1 - S_{22} p_T} \quad \text{¿qué parámetros [S] cogemos?}$$

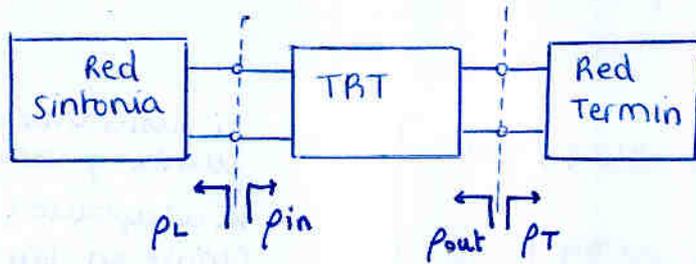
- si hago los cálculos con [S] en pequeña señal, oscila, pero con una amplitud muy pequeña
- si en lugar de hacer $-Z_D + Z_L = 0$
 hago $-Z_D + Z_L \ll 0$ (resistencia del dispositivo muy negativa)

criterio típico : $R_L = \frac{-R_{inps}}{3}$

entonces : $p_{inps} \Rightarrow Z_{inps} = R_{inps} + jX_{inps}$

R_{in} se va haciendo menos negativa según aumenta la amplitud de las oscilaciones





Escojo un plano u otro para forzar la condición de oscilación

$$\text{condición oscilación} \begin{cases} Z_{in} + Z_L = 0 \\ \rho_{in} \cdot \rho_L = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{out} + Z_T = 0 \\ \rho_{out} \cdot \rho_T = 1 \end{cases}$$

escogiendo el plano Z_{in}

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} = Z_D$$

$$\rho_{in} \cdot \rho_L = 1$$

$$\rho_L = \frac{1}{\rho_{in}}$$

$$Z_L = -Z_{in}$$

$$R_L + jX_L = -R_{in} - jX_{in}$$

Escogiendo cualquiera de los dos planos, si se cumple la condición en uno, se cumple tb. en el otro

si lo calculamos con [S] en pequeña señal \rightarrow oscilación en pequeña amplitud

criterio práctico:

$$R_L = -\frac{R_{in}}{3}$$



calculado en pequeña señal

se va incrementando la amplitud hasta que $-\frac{R_{in}}{3} \rightsquigarrow -R_{in}$ en gran señal

si se cumple en un plano, se cumple en el otro:

Dem:

$$\frac{1}{\rho_L} = \rho_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_T}{1 - S_{22} \rho_T} = \frac{S_{11} - S_{11} S_{22} \rho_T + S_{21} S_{12} \rho_T}{1 - S_{22} \rho_T}$$

$$= \frac{S_{11} - \Delta \rho_T}{1 - S_{22} \rho_T} \rightarrow \rho_T = \frac{1 - S_{11} \rho_L}{S_{22} - \Delta \rho_L}$$

$$\rho_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - S_{11} \rho_L} = \frac{S_{22} - \Delta \rho_L}{1 - S_{11} \rho_L}$$

$$\rho_T = \frac{1}{\rho_{out}}$$

Problema 1 de amplificadores

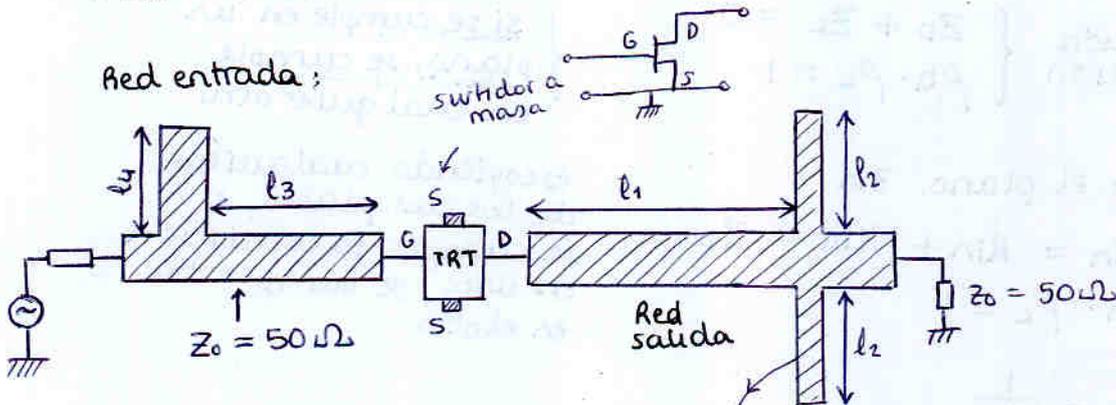
a 18 GHz

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.94 \angle -63^\circ & 0.073 \angle 45^\circ \\ 1.54 \angle 111^\circ & 0.79 \angle -40^\circ \end{bmatrix}$$

si pusieramos directamente fuente y carga de 50Ω la adaptación sería pésima (fíjate en $|S_{11}|$ y $|S_{22}|$!!)

$G_{Tu} = 16 \text{ dB}$

Red entrada:

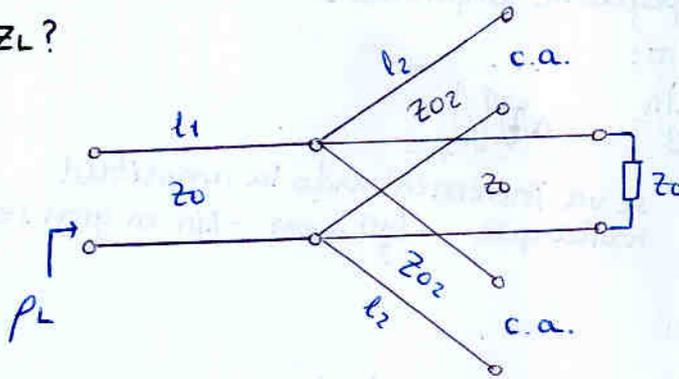


$$Z_0 = 50 \Omega \rightarrow \epsilon_{ref1} = 1.44$$

$$l_4 = 2.78 \text{ mm}$$

$$\begin{cases} Z_{02} = 80 \Omega & l_1 = 3.42 \text{ mm} \\ \epsilon_{ref2} = 1.32 & l_2 = 2.6 \text{ mm} \end{cases}$$

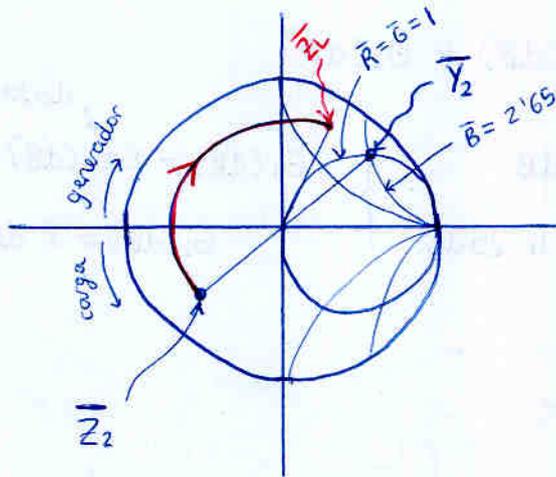
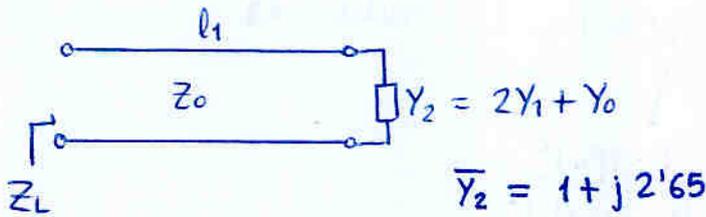
a) ¿ZL?



$$Y_L = j Y_{02} \cdot \text{tg} \beta_2 l_2 = j Y_{02} \cdot \text{tg} \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{ref2}} \cdot l_2 \right)$$

todos datos conocidos





$$\lambda_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{ref}}}} f = 13'89 \text{ mm}$$

$$l_1 = 0'246 \lambda_1$$

- ← Dibujamos \bar{Y}_2 en plano admitancias
 - ← Giramos 180° para tener \bar{Z}_2
 - ← movemos $0'246 \lambda_1$ hacia generador para tener \bar{Z}_L
- $\text{Re}(p) \leftarrow$
 \downarrow
 $\text{Im}(p)$

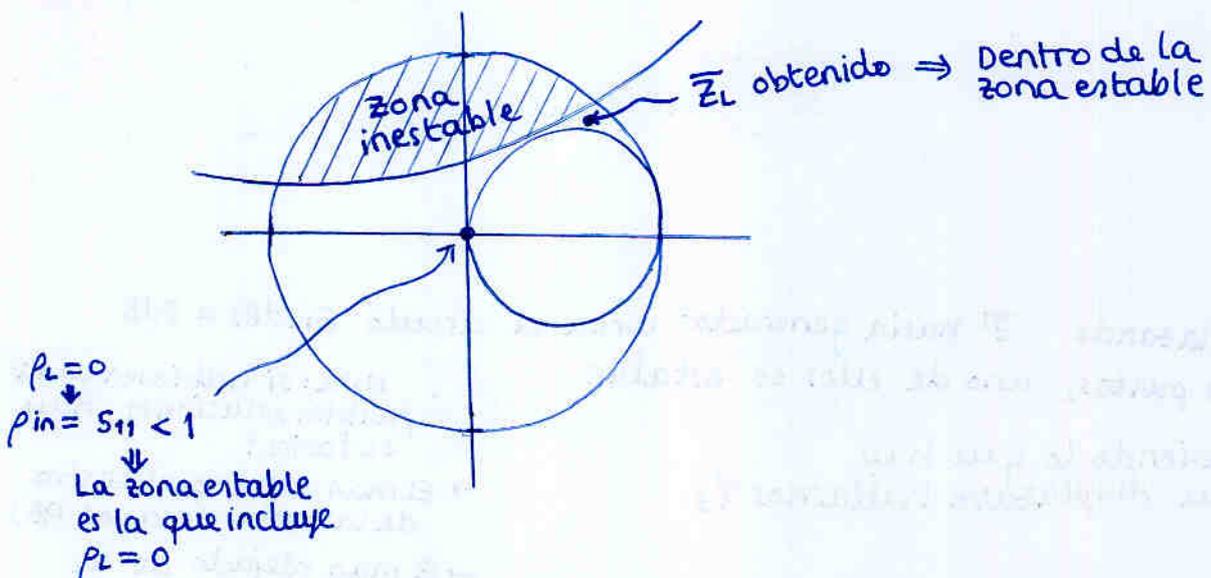
Circulo estabilidad de salida (plano p_L) $\Rightarrow |p_{in}| = 1$

Dato: $C_L = |C_L| e^{j\phi_L}$ ← CUIDADO: estamos en el plano de p , no en el de \bar{Z}

$r_L =$

i.e. no hagamos $C = \text{Re}[C] + j \text{Im}[C]$ X

y usar circular de impedancia constante

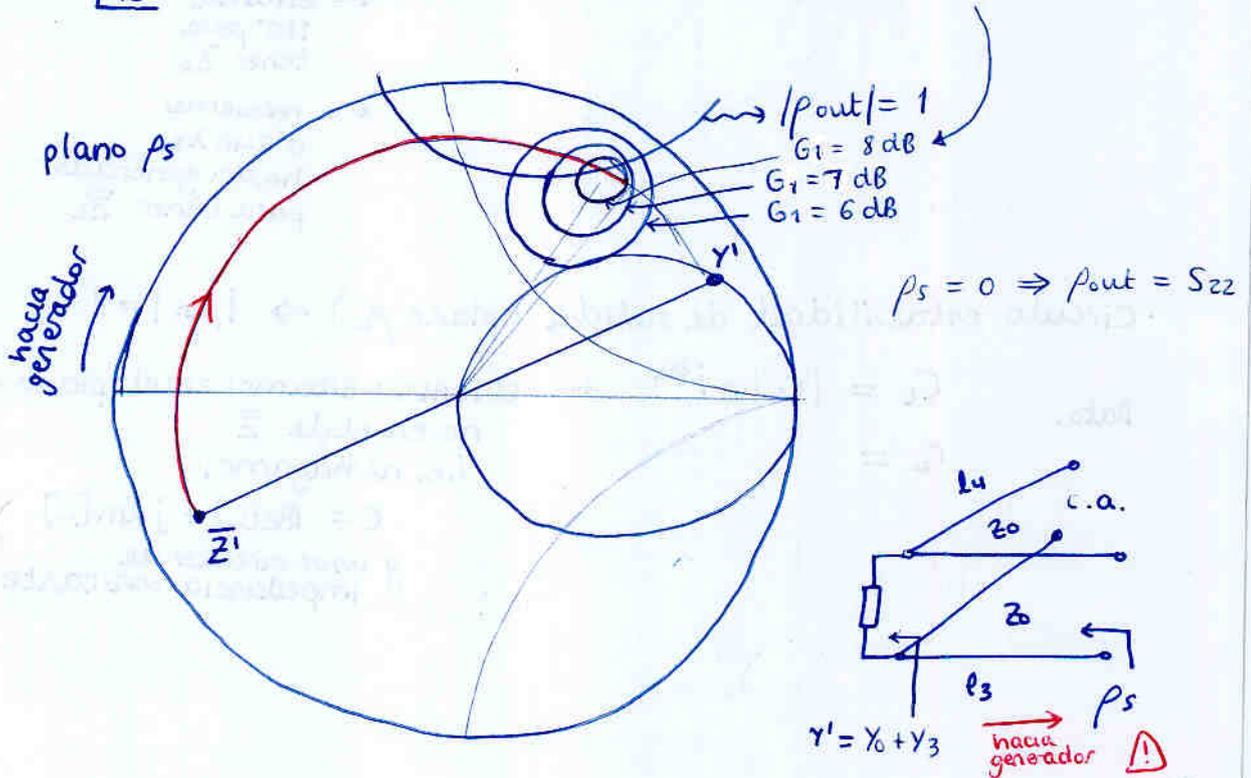


b) $G_{Tu} = G_1(\rho_s) \cdot G_0 \cdot G_2(\rho_L)$ Hallar l_3

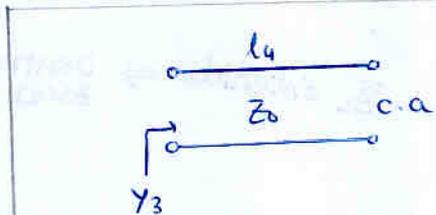
$$\frac{1-|\rho_s|^2}{|1-S_{11}\rho_s|^2} \quad |S_{21}|^2 \quad \frac{1-|\rho_L|^2}{|1-S_{22}\rho_L|^2}$$

$$G_{Tu}(\text{dB}) = G_1(\text{dB}) + G_0(\text{dB}) + G_2(\text{dB})$$

$$\left. \begin{aligned} G_0 &= 20 \log |S_{21}| = 3.75 \text{ dB} \\ \rho_L &= 0.8 \angle 40^\circ \Rightarrow G_2(\text{dB}) = 4.25 \text{ dB} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} G_1(\text{dB}) &= G_{Tu}(\text{dB}) - G_0(\text{dB}) - G_2(\text{dB}) \\ G_1(\text{dB}) &= 8 \text{ dB} \end{aligned}$$



Que no nos lie que el generador del circuito esta a la izquierda



Desplazando Z_1 hacia generador corta el círculo $G_1(\text{dB}) = 8 \text{ dB}$ en dos puntos, uno de ellos es estable.

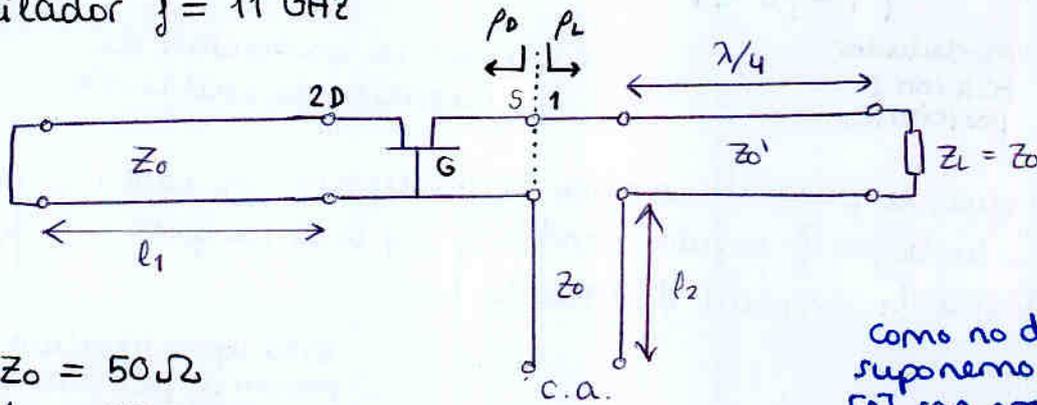
Sabiendo lo que hay que desplazarse hallamos l_3

Nota: si hubiesen varias posibles soluciones, hay 2 criterios:

- El mas cercano al centro de la carta (mayor AB)
- El mas alejado de la zona inestable

Problema 2 de osciladores

Oscilador $f = 11 \text{ GHz}$



$Z_0 = 50 \Omega$
 $l_1 = 3.74 \text{ mm}$
 $\epsilon_{\text{ref}} = 2$

Como no dicen nada, suponemos que estas [S] son gran señal

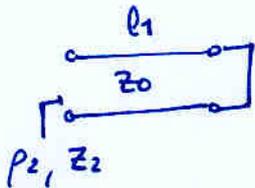
$$[S] = \begin{bmatrix} 0.203 \angle -168^\circ & 0.132 \angle 6^\circ \\ 1.083 \angle -53^\circ & 0.972 \angle -39^\circ \end{bmatrix}$$

a) l_2, Z_0' ?

cond. oscilación:

$$P_D \cdot P_L = 1$$

$$Z_D + Z_L = 0$$



$$Z_2 = j Z_0 \tan \beta l_1 = j Z_0 \tan \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{\text{ref}}} \cdot l_1 \right)$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{Z_2}{Z_0} = j 2.72$$

$$\rho_2 = \frac{\bar{Z}_2 - 1}{\bar{Z}_2 + 1} = 1 \angle 40.37^\circ$$

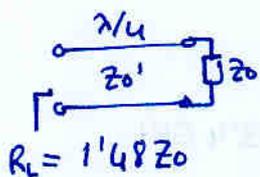
$$P_D = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_2}{1 - S_{22} \rho_2} = 3.72 \angle 34^\circ$$

$$\bar{Z}_D = \frac{1 + \rho_D}{1 - \rho_D} = -1.48 + j 0.48$$

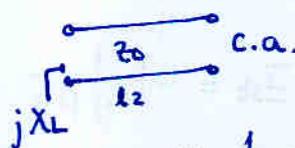
Condición de oscilación $\Rightarrow Z_L = -Z_D$

$$\bar{Z}_L = 1.48 - j 0.48$$

El stub nos dará la parte reactiva y se sumarán
la línea $\lambda/4$ nos dará la parte real } están en serie y se sumarán



$$Z_0' = \sqrt{Z_0 \cdot R_L} = Z_0 \cdot \sqrt{1.48} = 60.8 \Omega$$

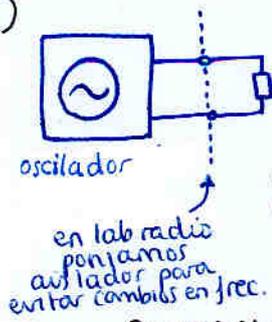


$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{\text{ref}}}$$

$$Z_{\text{in}} = -j Z_0' \tan \beta l_2 \rightarrow \bar{Z}_{\text{in}} = -j \frac{1}{\tan \beta l_2} + j 0.48 = +j \frac{1}{\tan \beta l_2}$$

$$\beta \cdot l_2 = \text{arctg} \left(\frac{1}{0.48} \right) \rightarrow l_2 = 3.45 \text{ mm}$$

b)



$$\bar{Y} = \begin{cases} 1 - j0'19 \\ 1 - j0'21 \end{cases}$$

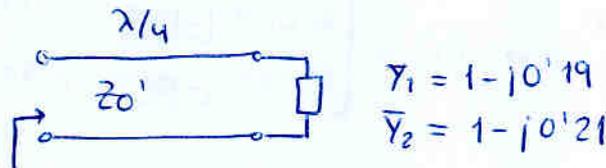
modulador
ASK con 2
posiciones

conectamos ésto como carga (en lugar de Z_0)

Calcular la variación de frecuencia de oscilación

Suponer que, a pesar de cambiar la frecuencia, ρ_2 casi no cambiará, la línea $\frac{\lambda}{4}$ seguirá siendo $\frac{\lambda}{4}$, y lo único que cambiará será la longitud eléctrica de l_2

Ésta aproximación es mentira, pero era una simplificación



$$Z_{in,2} = \frac{Z_0'}{Z_{1,2}}$$

$$Z_{in,2} = Z_0'^2 \cdot Y_{1,2}$$

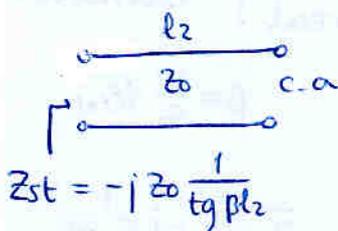
$$\bar{Z}_{in,2} = \frac{Z_0'^2}{Z_0} Y_{1,2} = \frac{Z_0'^2}{Z_0} \cdot \bar{Y}_{12} \cdot Y_0 = \frac{Z_0'^2}{Z_0^2} \bar{Y}_{12}$$

$$\bar{Z}_{in1} = 1'48 - j0'28$$

$$\bar{Z}_{in2} = 1'48 - j0'31$$

la parte real no ha variado; se seguirá cumpliendo la condición de oscilación para la parte real; no para la parte imaginaria.

$$\bar{X}_D = 0'48 \Rightarrow \bar{X}_L = -0'48 = \bar{X}_{in,2} + \bar{X}_{stub}$$



$$Z_{st} = -j Z_0 \frac{1}{\tan \beta l_2}$$

$$\bar{Z}_{st} = -j \frac{1}{\tan \beta l_2}$$

2 casos: $+0'48 = +j0'28 + j \frac{1}{\tan \beta l_2} \rightarrow \beta \rightarrow f_1 = 13'4 \text{ GHz}$

$-0'48 = -j0'31 + j \frac{1}{\tan \beta l_2} \rightarrow \beta \rightarrow f_2 = 13'7 \text{ GHz}$

Problema 2 Amplificador

Bajo ruido

$$f = 11 \text{ GHz}$$

$$G_{Tu} > 10 \text{ dB}$$

Polarización del TAT máxima ganancia

$$[S] = \begin{pmatrix} 0'574 \angle 90^\circ & 0'145 \angle 18^\circ \\ 1'433 \angle -63^\circ & 0'765 \angle -174^\circ \end{pmatrix}$$

Se da información gráfica (que no tendrías porque ya que se puede obtener de $[S]$)

- Círculo estabilidad de entrada y salida
- Círculos de G_1 constante

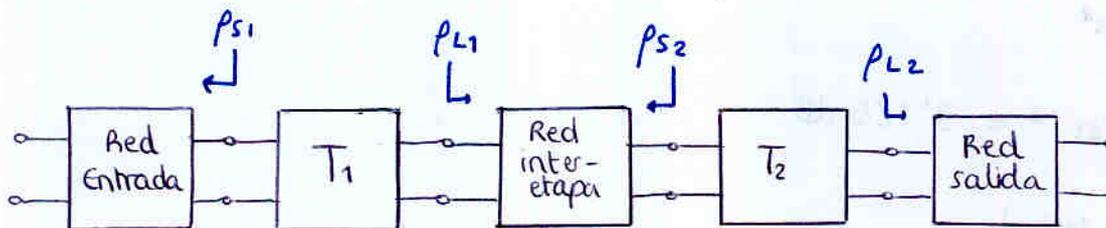
Polarización del TAT que minimiza el ruido

$$[S] = \begin{pmatrix} 0'594 \angle 107^\circ & 0'104 \angle -16'4^\circ \\ 1'190 \angle -60^\circ & 0'6 \angle 173^\circ \end{pmatrix}$$

$$F_{\min} = 3'4 \text{ dB}$$

(incondicionalmente estable) $k > 1$
 $|\Delta| < 1$

- Círculos de factor de ruido constante y posición para el factor de ruido óptimo (círculo de radio cero)
- Círculos de G_1 constante



a) ¿Polarización T_1 y T_2 ?

$T_1 \rightarrow$ polarización mínimo ruido (Friis parece razonable)

$T_2 \rightarrow$ polarización máxima ganancia

Por tanto:

$$\rho_{S1} = \rho_{opt} = \frac{Z_{opt} - Z_0}{Z_{opt} + Z_0}$$

$$\bar{Z}_{opt} = 0'25 - j0'125$$

de la carta de smith con F_{\min}

como ρ_{L1} no afecta al ruido, tomo máxima ganancia (usando diseño unilateral para aproximar)

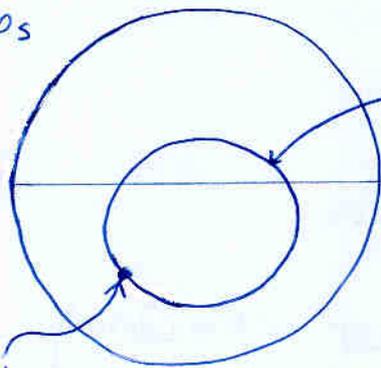
$$\rho_{L1} = S_{22}^* = 0'6 \angle -173^\circ$$

$$\rho_{S2} = S_{11}^* = 0'574 \angle -90^\circ$$

$$\rho_{L2} = S_{22}^* = 0'765 \angle 174^\circ$$

veamos si se cumple la ganancia

Plano ρ_s



Primera etapa:

$$G_2 = G_{2max} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = 1.56 = 1.94 \text{ dB}$$

$$\rho_{L1} = S_{22}^*$$

$$G_0 = |S_{21}|^2 = 1.437 \text{ dB}$$

segunda etapa:

$$G_1 = G_{1max} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} = 1.49 = 1.73 \text{ dB}$$

$$\rho_{L2} = S_{11}^*$$

$$G_2 = G_{2max} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2} = 2.41 = 3.82 \text{ dB}$$

$$\rho_{L2} = S_{22}^*$$

$$G_0 = |S_{21}|^2 = 3.125 \text{ dB}$$

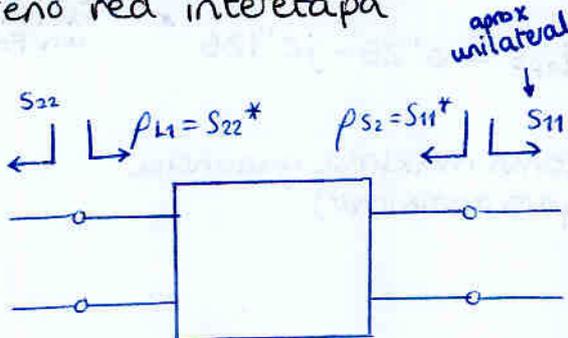
Ganancia total

La suma en dB de todos

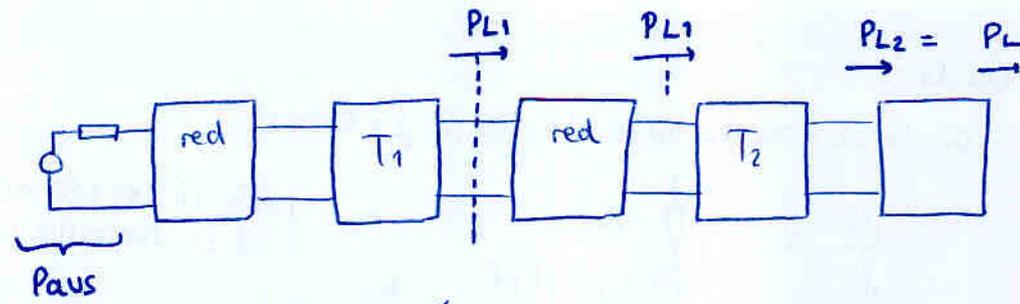
GTU

$$= -1 + 1.437 + 1.94 + 1.73 + 3.125 + 3.82 = 11.05 \text{ dB} > 10 \text{ dB}$$

Diseño red interetapa



Diseñándola en un sentido, se diseña automáticamente en el otro



se puede ver como un generador

$$G_{TU} = \frac{P_L}{P_{AUS}}$$

$$P_{L1} = P_{AUS} \cdot G_{TU1}$$

$$P_{L2} = P_{L1} \cdot G_{TU2}$$

entonces

$$G_{TU} = \frac{P_{L2}}{P_{AUS}} = \frac{P_{L1} \cdot G_{TU2}}{P_{AUS}} = \frac{P_{AUS} \cdot G_{TU1} \cdot G_{TU2}}{P_{AUS}} = G_{TU1} \cdot G_{TU2}$$

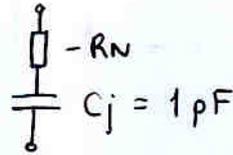
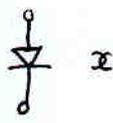
$$G_{TU} = G_{TU1} \cdot G_{TU2}$$

Gracias a haber utilizado diseño unilateral (el método exacto es un sistema muy grande con una grande solución)

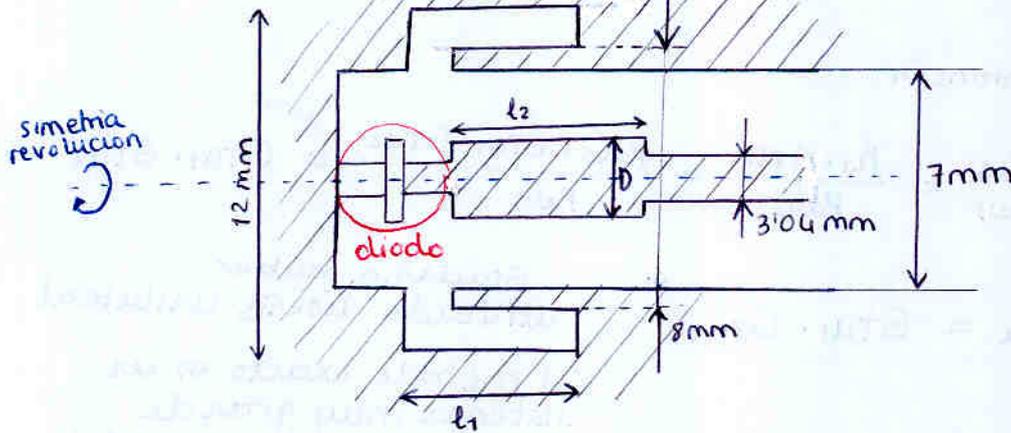
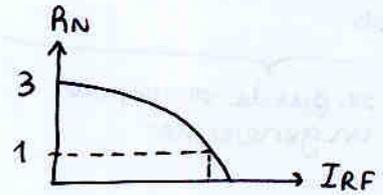
Problema 1 Oscilador

Desde el pto. de vista de RF a $f = 5\text{GHz}$

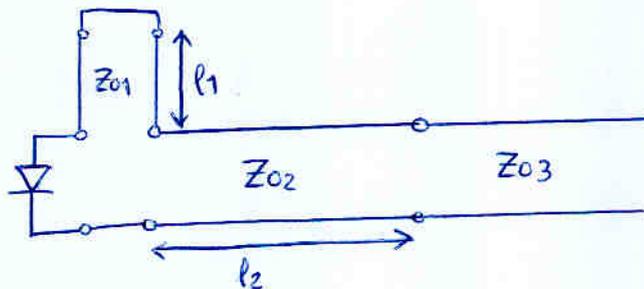
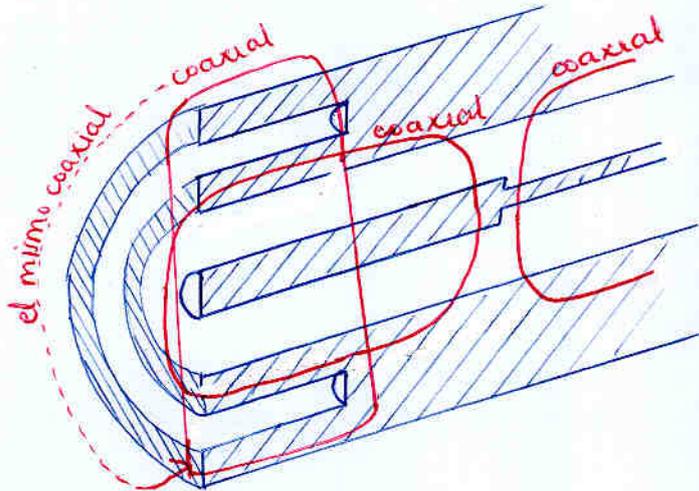
Polarizado con cierta continua la que sea



$$R_N = \begin{cases} 3\Omega & \text{si } I_{RF} < 20\text{mA} \\ 1\Omega & \text{si } I_{RF} = 450\text{mA} \end{cases}$$



simetría revolución



$$Z_{01} = 60 \ln \frac{12}{8} = 24.33\Omega$$

$$Z_{02} = 60 \ln \frac{7}{D(\text{mm})}$$

$$Z_{03} = 60 \ln \frac{7}{3.04} = 50\Omega$$

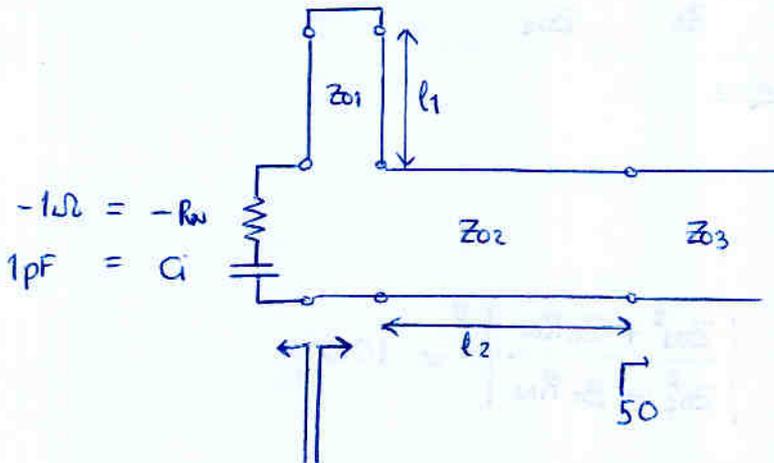
a) ¿D, l₁ y l₂? para que

oscilador: P_{out} ≈ 100 mW

$$P_{out} = \frac{1}{2} R_N \cdot I_{RF}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0.45^2 = 101 \text{ mW} \approx 100 \text{ mW}$$

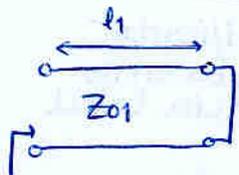
$$R_N = 1 \Omega$$

$$I_{RF} = 450 \text{ mA}$$

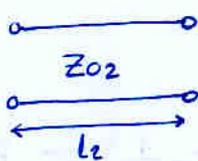


-1Ω
1pF

1Ω → con l₂ ajustamos 1Ω
-1pF → con l₁ ajustamos 1pF



$$Z_{in} = j Z_{01} \tan \beta l_1 = -\frac{1}{j\omega C} \Rightarrow l_1 = 8.77 \text{ mm}$$



queremos $l_2 = \frac{\lambda}{4} = 15 \text{ mm}$

↑ aprox a λ_g , usamos la del aire

$$R_N = \frac{Z_{02}^2}{Z_0} \Rightarrow Z_{02} = 7.07 \Omega$$

$$60 \ln \frac{7}{D(\text{mm})} = 7.07 \Omega$$

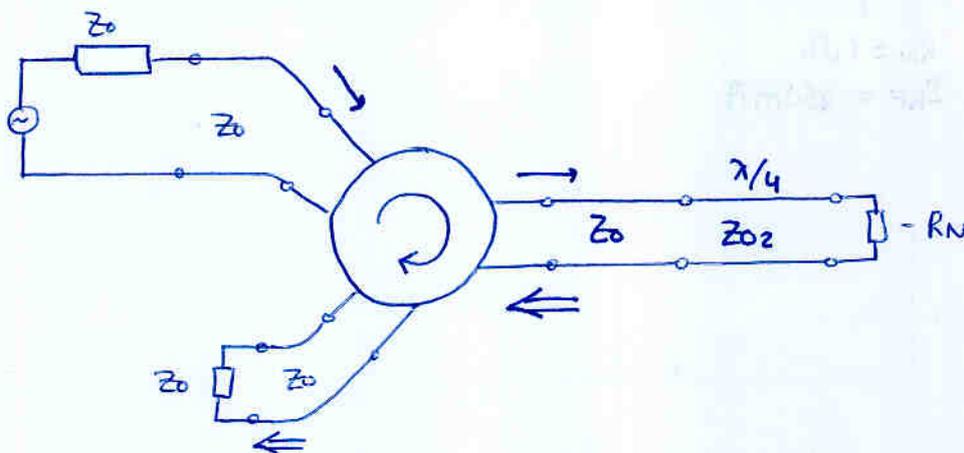
$$\downarrow$$

$$D(\text{mm}) = 6.22 \text{ mm}$$

Usándolo como amplificador: en pequeña señal
 b) d, l_1, l_2 ? para $G_T = 20 \text{ dB}$ ($P_{out} < -10 \text{ dBm}$)

l_1 y l_2 no tienen porque cambiar $l_1 = 8.77 \text{ mm}$
 $l_2 = \lambda/4 = 15 \text{ mm}$

Tenemos (cancelando el condensador y el stub entre si)



$$G = |p|^2 = \left| \frac{-\frac{Z_{02}}{R_N} - Z_0}{-\frac{Z_{02}^2}{R_N} + Z_0} \right|^2 = \left| \frac{Z_{02}^2 + Z_0 R_N}{Z_{02}^2 - Z_0 R_N} \right|^2 = 100$$

$R_N = 3 \Omega$
 (pequeña señal)

se tiene $Z_{02} = \begin{cases} 13.54 \Omega \\ 11.07 \Omega \end{cases}$

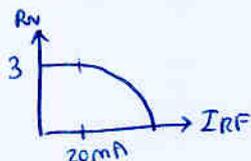
Dos posibles soluciones.
 Para que el amplificador sea estable queremos que la resistencia total sea positiva

$13.54 \Omega \rightarrow \frac{Z_{02}^2}{R_N} > 50 \Omega \Rightarrow$ Inestable

$11.07 \Omega \rightarrow \frac{Z_{02}^2}{R_N} < 50 \Omega \Rightarrow$ Estable

Potencia añadida $P_a = P_{out} - P_{in} = P_{out} \left(1 - \frac{P_{in}}{P_{out}}\right) = P_{out} \left(1 - \frac{1}{G}\right) \approx P_{out}$

$P_a = \frac{1}{2} R_N I_{RF}^2 = -10 \text{ dBm} \Rightarrow I_{RF} < 20 \text{ mA} \Rightarrow$ En efecto se cumple $R_N = 3 \Omega$



c) Amplificador en gran señal

$$P_{out} = 20 \text{ dBm} = 100 \text{ mW} \approx \frac{1}{2} R_N I_{RF}^2$$

$$\begin{cases} R_N = 1 \Omega \\ I_{RF} = 450 \text{ mA} \end{cases}$$

$$G_T = |p|^2 = \left| \frac{Z_{o2}^2 + Z_o R_N}{Z_{o2}^2 - Z_o R_N} \right|^2 = \left| \frac{11'07^2 + 50 \cdot 1}{11'07^2 - 50 \cdot 1} \right|^2 = 5'6 = 7'5 \text{ dB}$$

$$G_T = 7'5 \text{ dB}$$

Menos que en pequeña señal \rightarrow Debido al efecto de saturación

Pero cuidado, al que puso éste problema se le escapó un detalle:
comprobar la estabilidad

$$\frac{Z_{o2}^2}{R_N} > 50 \Omega \Rightarrow \text{Inestable}$$

Problema 3. Junio 2003

$$f = 10 \text{ GHz}$$

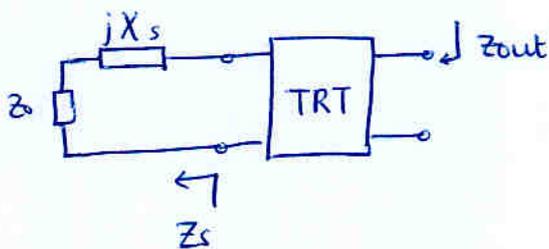
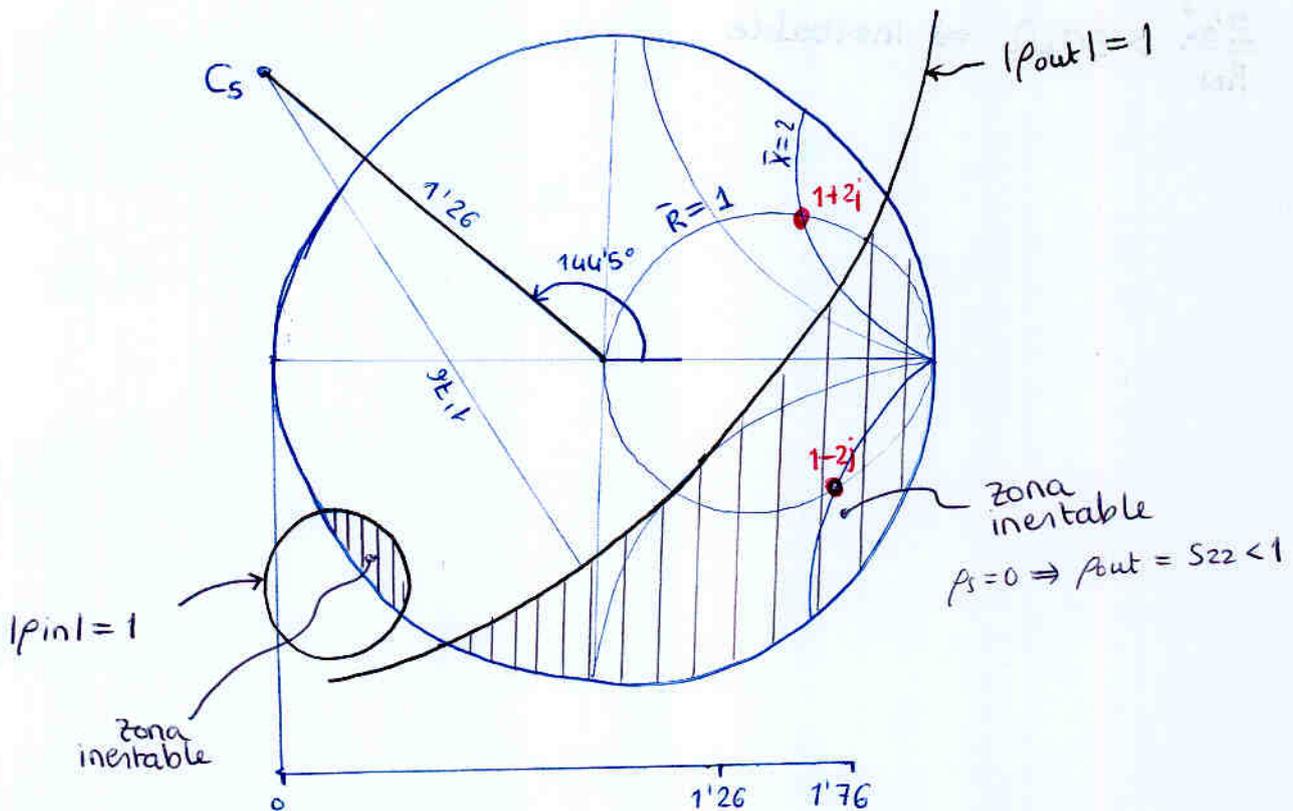
$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.35 \angle 160^\circ & 0.06 \angle 110^\circ \\ 3 \angle 75^\circ & 0.92 \angle 165^\circ \end{bmatrix}$$

a) ¿zonas inestables?

$$C_s = \frac{(S_{11} - \Delta \cdot S_{22}^*)^*}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} = 1.26 \angle 144.5^\circ$$

$$r_s = \left| \frac{S_{12} \cdot S_{21}}{|S_{11}|^2 - |\Delta|^2} \right| = 1.758$$



$$|X_s| = 100 \Omega$$

$$\bar{Z}_s = 1 + j \frac{X_s}{Z_0} = 1 \pm 2j$$

Oscilador \rightarrow escogemos el inestable

$$\bar{Z}_s = 1 - 2j$$

$$\downarrow$$

$$P_s = 0.707 \angle -45^\circ$$

$$p_{out} = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} \rho_s}{1 - S_{11} \rho_s}$$

$$= 1.03 \angle 163.5^\circ \Rightarrow \bar{Z}_{out} = \frac{1 + \rho_{out}}{1 - \rho_{out}}$$

$$\bar{Z}_{out} = -0.015 + j0.145$$

$$Z_{out} = -0.76 + j7.235 \Omega$$

c) ¿Z_L?

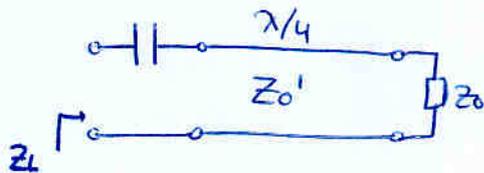
condición de oscilación

$$Z_{out} + Z_L = 0$$

$$\rho_{out} \cdot \rho_L = 1$$

$$Z_L = -Z_{out}$$

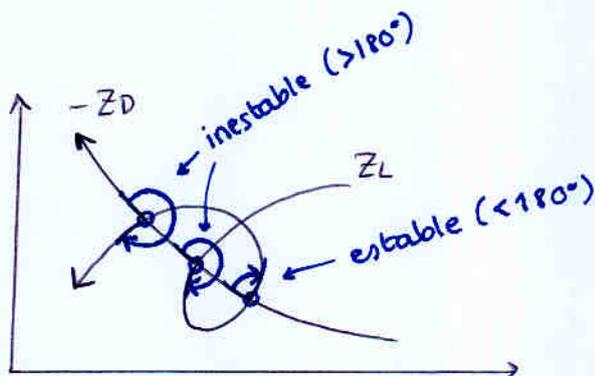
$$Z_L = 0.76 - j7.235 \Omega$$



Parte real: $Z_0' = \sqrt{Z_0 \cdot R_L} = 0.16 \Omega$

Parte imag: $C = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{2\pi f \cdot 7.235} = 2.2 \text{ nF}$

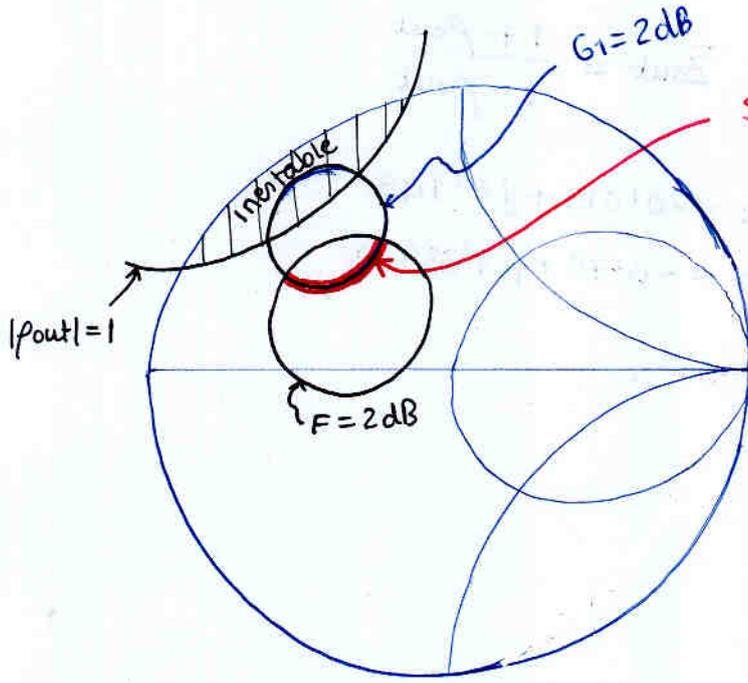
d)



Desde rama de dispositivo creciente hasta rama creciente de carga en sentido horario

Problema 1 Libro Problemas

$G_1 = 2\text{dB}$
 $F < 2\text{dB}$



Soluciones (infinitas)

critero:

- esté más cerca del centro
- esté más lejos de la zona inestable

ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = r^2$$

algunas veces se
 encuentran soluciones
 reales y otras
 complejas conjugadas



Problema 2

- a)
- No pueden existir modos TM con $m=n$ porque $E_z(x, y)$ se anularía
 - Si que pueden existir modos TE con $m=n$ y además el campo se simplificaría pues podrían sumarse ambos términos
 - TM no puede tener m o $n=0$ ya que si los tuviera en cada término al menos un seno se anularía
 - TE sí puede tener m ó $n=0$ ya que el coseno no se anula en cero.
 - Los modos TM_{nm} y TM_{mn} son degenerados, pues se obtiene con ambos el mismo número de onda de corte; lo mismo ocurre para TE_{mn} y TE_{nm}

⇓

MAL: para que dos modos sean degenerados deben realmente SER dos modos diferentes, es decir, con distintas distribuciones de campo, pero resulta que en realidad TE_{mn} y TE_{nm} son el mismo modo, y lo mismo ocurre con TM_{mn} y TM_{nm} , por tanto NO son modos degenerados

- En la guía de onda sí son degenerados los modos TE_{mn} y TM_{mn} , pues tienen la misma frecuencia de corte

Conclusión:

$$TM_{m,n} : m, n = 1, 2, 3, \dots \quad m > n$$

$$TE_{m,n} : m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad m \geq n \quad \text{excepto } m=n=0$$

- b) El TM más bajo es el TM_{21} con $k_c = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{5} \frac{\pi}{a}$

$$k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\Rightarrow f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{5}}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

El TE más bajo es el TE_{10} con $k_c = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a}$

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

El modo fundamental de la guía triangular es el TE_{10}

$$\text{con } f_c = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\epsilon_r}}$$

c) TM_{mn}

condiciones de contorno

$$E_z|_{y=0} = 0 \quad (\text{se anula un seno})$$

$$E_z|_{x=0} = 0 \quad (\text{se anula el otro seno})$$

$$E_z|_{x=y} = E_0 \left[\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) - \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] = 0$$

TE_{mn}

condiciones de contorno

$$-\frac{\partial H_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = -H_0 \left[-\frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}_0 - \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}_0 \right] = 0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} \Big|_{x=0} = H_0 \left[-\frac{m\pi}{a} \underbrace{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \frac{n\pi}{a} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}_0 \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] = 0$$

• en la tercera pared

$$\hat{n} = \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \quad x=y$$

ⓘ

$$\frac{\partial H_z}{\partial \hat{n}} = \vec{\nabla} H_z \cdot \hat{n} = \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \hat{y} \right] \cdot \hat{n}$$

$$= \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{H_0}{\sqrt{2}} \left[-\frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right]$$

$$- \frac{H_0}{\sqrt{2}} \left[-\frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right]$$

Particularizando en $x=y$

$$= \frac{H_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right. \\ \left. - \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) - \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] = 0 //$$

d) TM_{m,n} $H_z(x,y) = 0$

$$E_z(x,y,z) = E_z(x,y) \cdot [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}]$$

$$\vec{E}_t = -\frac{1}{k_c^2} [\gamma \nabla_t E_z]$$

$$E_t(x,y,z) = E_t(x,y) \cdot [E_0^+ e^{-j\beta z} - E_0^- e^{+j\beta z}]$$

$$\vec{H}_t = \begin{cases} H_y = \frac{E_x}{Z_{TM}} \\ H_x = -\frac{E_y}{Z_{TM}} \end{cases} \quad \vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} [-j\omega \epsilon \nabla_t \times E_z \hat{z}]$$

$$H_t(x,y,z) = H_t(x,y) \cdot [E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}]$$

Conductor en $z=0 \Rightarrow E_t|_{z=0} = E_0^+ - E_0^- = 0 \Rightarrow E_0^- = E_0^+$

$$E_z(x,y,z) = E_z(x,y) \cdot 2E_0^+ \cos(\beta z)$$

$$E_t(x,y,z) = E_t(x,y) \cdot 2jE_0^+ \sin(\beta z)$$

$$H_t(x,y,z) = H_t(x,y) \cdot 2E_0^+ \cos(\beta z)$$

Conductor en $z=d \Rightarrow E_t|_{z=d} = \sin(\beta d) = 0$

(i) $\beta d = p\pi \rightarrow \beta_p = \frac{p\pi}{d}$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 + (j\beta)^2 = k^2 - \beta^2$$

$$k = \sqrt{k_c^2 + \beta^2} = 2\pi f \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$2\pi f \sqrt{\mu \epsilon} = \sqrt{k_c^2 + \beta_p^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

$$f_{p_{mn}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}$$

$$E_z(x,y,z) = 2E_0^+ \left[\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots$$

TE_{m,n}

$$H_z(x, y, z) = H_x(x, y) \cdot [H_0^+ e^{-i\beta z} + H_0^- e^{+i\beta z}]$$

$$\vec{H}_t = -\frac{1}{k_c^2} \nabla_t H_z$$

$$H_t(x, y, z) = H_t(x, y) [H_0^+ e^{-i\beta z} - H_0^- e^{+i\beta z}]$$

$$E_t \begin{cases} E_x = Z_{TE} H_{ty} \\ E_y = -Z_{TE} H_{tx} \end{cases} \quad \vec{E}_t = -\frac{1}{k_c^2} [j\omega\mu \nabla_t \times H_z \hat{z}]$$

$$E_t(x, y, z) = E_t(x, y) [H_0^+ e^{-i\beta z} + H_0^- e^{+i\beta z}]$$

Conductor en $z=0$

$$E_t|_{z=0} = H_0^+ + H_0^- = 0 \Rightarrow H_0^- = -H_0^+$$

$$H_z(x, y, z) = H_x(x, y) 2j \sin(\beta z) \cdot H_0^+$$

$$H_t(x, y, z) = H_t(x, y) 2 \cos(\beta z) H_0^+$$

$$E_t(x, y, z) = E_t(x, y) \cdot 2j \sin(\beta z) \cdot H_0^+$$

conductor en $z=d$ $E_t|_{z=d} \propto \sin(\beta d) = 0$

$$\beta d = p\pi \rightarrow \beta_p = \frac{p\pi}{d} \left. \begin{array}{l} k = \sqrt{k_c^2 + \beta^2} \end{array} \right\} f_c = \frac{\sqrt{k_c^2 + \beta^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$H_z(x, y, z) = 2j H_0^+ \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)$$

con $p = 1, 2, 3, \dots$

e) Para los modos TM

$$f_{TM_{mnp}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \begin{array}{l} m, n = 1, 2, 3, \dots \quad m > n \\ p = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

la frec reson. menor es

$$f_{TM_{210}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{5}}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Para los modos TE

$$f_{TE_{mnp}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \begin{array}{l} m, n = 0, 1, 2, \dots \quad m \geq n \text{ salvo } m=n=0 \\ p = 1, 2, \dots \end{array}$$

La frec de resonancia menor $f_{TE_{101}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$

Para que $f_{TE_{101}} < f_{TM_{210}}$ se debe cumplir

$$\sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} < \sqrt{5}$$

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 < 4$$

$$\boxed{a < 2d}$$

El modo resonante TE_{101} : expresiones completas

$$\begin{array}{l} H_z(x, y, z) = H_0 \left[\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right] \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)}_{(-2j)} \\ E_z(x, y, z) = 0 \end{array}$$

$$\left[\vec{H}_t = -\frac{1}{kc^2} \cdot \gamma \nabla_t H_z = -\frac{1}{kc^2} \gamma \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \hat{y} \right] \right]$$

$$H_x(x, y, z) = + \frac{\gamma}{kc^2} 2 H_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$H_y(x, y, z) = + \frac{\gamma}{kc^2} 2 H_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$



CUIDADO: La variación axial no entra dentro de la fórmula. La variación axial ya la hemos sacado para cada componente en el apartado anterior

y como $kc^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$

$$kc^2 = k^2 + \gamma^2 \rightarrow \gamma = \sqrt{kc^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2\right]} = \sqrt{-\left(\frac{\pi}{d}\right)^2} = j \frac{\pi}{d}$$

$$\boxed{\text{forma más fácil}} \\ \gamma = j\beta = j \frac{\pi}{d}$$

$$H_x(x, y, z) = j 2 H_0 \cdot \left(\frac{a}{d}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$H_y(x, y, z) = j 2 H_0 \cdot \left(\frac{a}{d}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

Ahora $E_x = Z_{TE} H_{zy}$
 $E_y = -Z_{TE} H_x$

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{k_c^2 - k^2}} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{k_c^2 - (\beta^2 + kc^2)}} = \frac{j\omega\mu}{j\beta} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu d}{\pi}$$

$$= \omega\sqrt{\mu\epsilon} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{d}{\pi} = k \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{d}{\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{d}{\pi} \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{d}{\pi} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{d}{a} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}$$

$$E_x = 2H_0^+ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$E_y = -2H_0^+ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

Problema 3

$$a) \quad G_T = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_S|^2) (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_S)(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12}S_{21}\Gamma_S\Gamma_L|^2}$$

Aproximación unilateral $S_{12} = 0$

$$G_{TU} = \frac{(1 - |\Gamma_S|^2)}{(1 - |S_{11}\Gamma_S|^2)^2} |S_{21}|^2 \cdot \frac{(1 - |\Gamma_L|^2)}{(1 - |S_{22}\Gamma_L|^2)^2}$$

La ganancia máxima ocurre cuando hay adaptación conjugada

$$\Gamma_S = S_{11}^* = 0.67 \angle -156^\circ$$

$$\Gamma_L = S_{22}^* = 0.92 \angle -153^\circ$$

$$G_{Tmax} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2} \cdot |S_{21}|^2 \cdot \frac{1}{1 - |S_{22}|^2}$$

$$= 1.8146 \cdot 6.5536 \cdot 6.5104$$

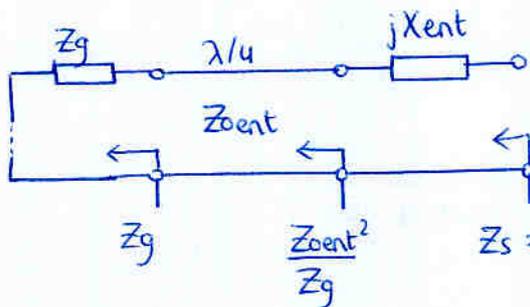
$$= 77.42$$

$\downarrow 10 \log$

$$G_{Tmax} = 18.9 \text{ dB}$$

b) se desea una impedancia de fuente de

$$Z_S = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_S}{1 - \Gamma_S} = 10.31 - j10.19 \Omega$$



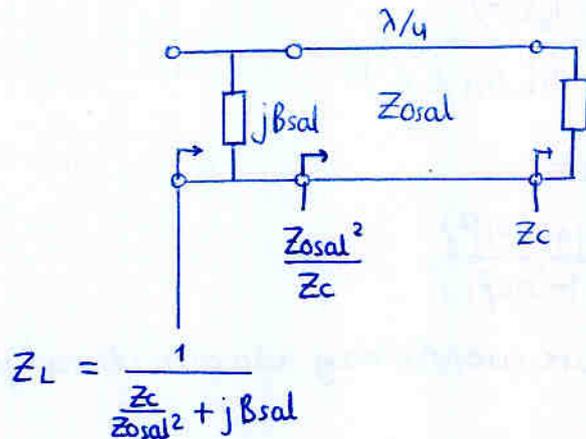
$$Z_S = \frac{Z_{oent}^2}{Z_g} + jX_{ent} = 10.31 - j10.19$$

$$Z_{oent} = \sqrt{10.31 \cdot Z_g} = 22.7 \Omega$$

$$X_{ent} = -10.19 \Omega$$

c) Se desea una impedancia de carga de :

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} = 2'20 - j11'98 \Omega$$



$$Z_L = \frac{1}{\frac{Z_c}{Z_{osal}^2} + jB_{sal}}$$

$$Y_L = \frac{Y_{osal}^2}{Y_c} + jB_{sal} = Y_0 \frac{1 - \rho_L}{1 + \rho_L} = 0'01484 + j0'08073$$

$$Y_{osal} = \sqrt{0'01484 \cdot Y_c} = 0'01723 \rightarrow Z_{osal} = 58'05 \Omega$$

$$B_{sal} = 0'08073 \Omega$$

d) Para los valores que maximizar G_{TU}

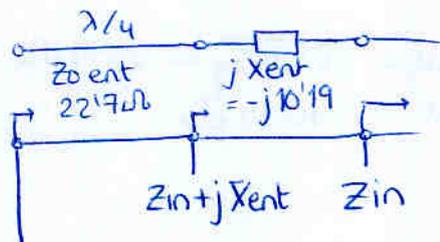
$$\rho_{in} = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} \rho_L}{1 - S_{22} \rho_L} = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} S_{22}^*}{1 - |S_{22}|^2}$$

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0'92 \angle -153^\circ = S_{22}^*$$

por tanto

$$\rho_{in} = 0'7963 \angle -162'4^\circ$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \rho_{in}}{1 - \rho_{in}} = 5'8032 - j7'6264 \Omega$$



$$Z_{in\text{ampl}} = \frac{Z_{oent}^2}{Z_{in} + jX_{ent}} = 8'517 + j26'148 \Omega$$

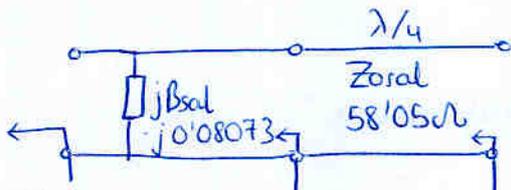
$$\boxed{\rho_{in\text{ampl}} = \frac{Z_{in\text{ampl}} - Z_0}{Z_{in\text{ampl}} + Z_0} = 0'7651 \angle 123'7^\circ}$$

En cuanto a la salida

$$P_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} P_s}{1 - S_{11} P_s} \stackrel{A=S_{11}^*}{=} S_{22} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} \cdot S_{11}^*}{1 - |S_{11}|^2}$$

$$P_{out} = 0'9113 \angle 159'8^\circ$$

$$Z_{out} \quad Y_{out} = Y_0 \cdot \frac{1 - P_{out}}{1 + P_{out}} = 0'02817 - j0'10472$$

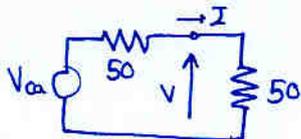


$$Z_{out\,amp} = \frac{Z_{0al}^2}{\frac{1}{Y_{out} + j\beta s_{al}}} = 94'924 - j80'847 \Omega$$

$$P_{out\,amp} = \frac{Z_{out\,amp} - Z_0}{Z_{out\,amp} + Z_0} = 0'557 \angle -31'79^\circ$$

e) $Z_g = 50 \Omega$
 $V_{ca} = 10 V$

P_{avs} : la que entrega a una carga adaptada



$$P_{avs} = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{V_{ca}}{2}\right) \cdot \left(\frac{V_{ca}^*}{2 R_g}\right) = \frac{1}{8} \frac{|V_{ca}|^2}{R_g}$$

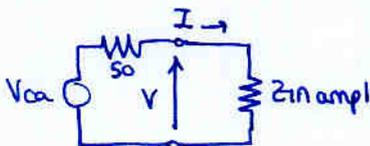
$$P_{avs} = 0'25 W$$

más en general

$$P_{avs} = \frac{1}{8} \frac{|V_{ca}|^2}{\text{Re}\{Z_g\}}$$

Potencia entregada por el generador

En lugar de atacara a una impedancia conjugada está atacando a una impedancia $Z_{in\,amp} = 8'517 + j26'148 \Omega$



$$P_{entg} = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \cdot \left(V_{ca} \cdot \frac{Z_{in\,amp}}{Z_g + Z_{in\,amp}}\right) \cdot \left(\frac{V_{ca} \frac{Z_{in\,amp}}{Z_g + Z_{in\,amp}}}{Z_{in\,amp}}\right)^*$$

$$= -0'01248 + j5'7241 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2} \text{Re}(V I^*) = 0'09147 W$$

Está mal pero no sé porqué

$$P_{entg} =$$

$$P_{\text{entamp}} = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |\Gamma_{\text{in}}|^2)$$

$$= \frac{|V_s|^2}{8Z_0} \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - \Gamma_s \Gamma_{\text{in}}|^2} (1 - |\Gamma_{\text{in}}|^2)$$

ver teoría
III-8.2

en este caso $\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = 0$

$$= \frac{|V_s|^2}{8Z_0} \cdot \frac{1 - |\Gamma_{\text{in}}|^2}{1} = 0'103 \text{ W}$$

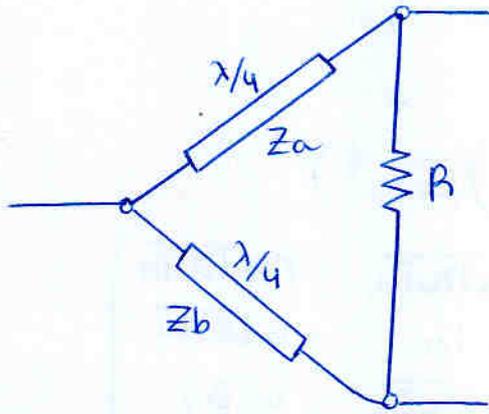
Potencia entregada a la carga:

por definición de "ganancia de transferencia"

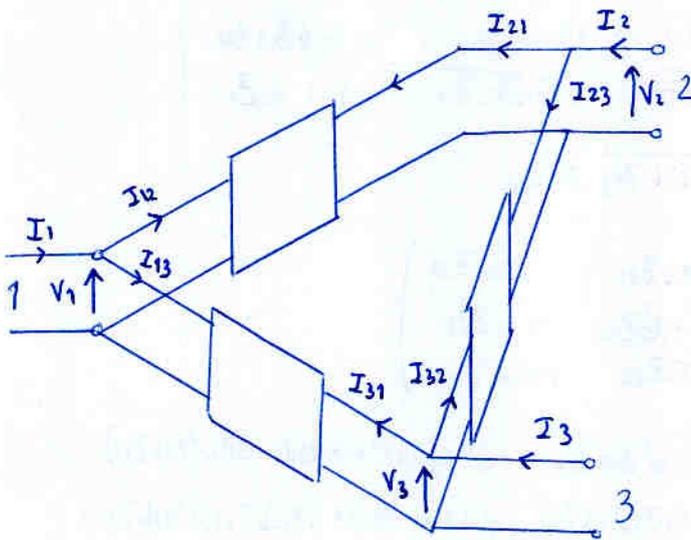
$$G_T = \frac{P_L}{P_{\text{avs}}}$$

$$P_L = P_{\text{avs}} \cdot G_T$$

Problema 1



H



Son 3 sistemas muy simples:

$$\begin{pmatrix} I_{12} \\ I_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12a} \\ Y_{12a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} I_{12} &= V_2 Y_{12a} \\ I_{21} &= V_1 Y_{12a} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12b} \\ Y_{12b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} I_{13} &= V_3 Y_{12b} \\ I_{31} &= V_1 Y_{12b} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} I_{23} \\ I_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & -G \\ -G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} I_{23} &= G V_2 - G V_3 \\ I_{32} &= -G V_2 + G V_3 \end{aligned}$$

entonces no hay más que hacer:

$$\begin{pmatrix} I_1 = I_{12} + I_{13} \\ I_2 = I_{21} + I_{23} \\ I_3 = I_{31} + I_{32} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 = Y_{12a} V_2 + Y_{12b} V_3 \\ I_2 = Y_{12a} V_1 + G V_2 - G V_3 \\ I_3 = Y_{12b} V_1 - G V_2 + G V_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & Y_{12a} & Y_{12b} \\ Y_{12a} & G & -G \\ Y_{12b} & -G & G \end{pmatrix}}_{[Y]} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} Y_{12} = Y_{21} &= \pm j J \\ &= \frac{\pm j}{Z_0} \\ &= \pm j Y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned}$$

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{1}{R} = G$$

$$Y_{22} = G$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = -G$$

$$Y_{12} = -G$$

$$Y = \begin{pmatrix} G & -G \\ -G & G \end{pmatrix}$$

Sabemos que $Y_{in} = Y_0 \frac{1-\rho}{1+\rho}$ $\rho = \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}} = \frac{1 - \bar{Y}_{in}}{1 + \bar{Y}_{in}}$

regla mnemotécnica

$$S = (I - \bar{Y})(I + \bar{Y})^{-1}$$

$$\bar{Y}_{ij} = Y_{ij} \sqrt{Z_{0i} Z_{0j}}$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12a} \sqrt{Z_{02} Z_{01}} & Y_{12b} \sqrt{Z_{03} Z_{01}} \\ Y_{12a} \sqrt{Z_{01} Z_{02}} & G \cdot Z_{02} & -G \sqrt{Z_{03} Z_{02}} \\ Y_{12b} \sqrt{Z_{01} Z_{03}} & -G \sqrt{Z_{02} Z_{03}} & G \cdot Z_{03} \end{pmatrix}$$

$$I - \bar{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -Y_{12a} \sqrt{Z_{02} Z_{01}} & -Y_{12b} \sqrt{Z_{03} Z_{01}} \\ -Y_{12a} \sqrt{Z_{01} Z_{02}} & 1 - G Z_{02} & +G \sqrt{Z_{03} Z_{02}} \\ -Y_{12b} \sqrt{Z_{01} Z_{03}} & +G \sqrt{Z_{02} Z_{03}} & 1 - G Z_{03} \end{pmatrix}$$

Por simplificar notación, haré $\sqrt{Z_{0i} \cdot Z_{0j}} \equiv Z_{ij}$

$$I + \bar{Y} = \begin{pmatrix} 1 & Y_{12a} Z_{21} & Y_{12b} Z_{31} \\ Y_{12a} Z_{12} & 1 + G Z_{02} & -G Z_{32} \\ Y_{12b} Z_{13} & -G Z_{23} & 1 + G \cdot Z_{03} \end{pmatrix}$$

$$(I + \bar{Y})^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} (1 + G Z_{02})(1 + G Z_{03}) - G^2 Z_{23} Z_{32} & -(Y_{12a} Z_{12})(1 + G Z_{03}) - G Z_{32}(Y_{12b} Z_{13}) \\ -Y_{12a} Z_{21}(1 + G Z_{03}) - G Z_{23} Y_{12b} Z_{31} & (1 + G \cdot Z_{03}) - (Y_{12b} Z_{31})(Y_{12b} Z_{13}) \\ (Y_{12a} Z_{21})(1 + G Z_{03}) + G Z_{23} Y_{12b} Z_{31} & + G Z_{32} + Y_{12b} Y_{12a} Z_{31} Z_{13} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (1 + G Z_{02})(1 + G Z_{03}) - Y_{12a} Z_{21} [(Y_{12a} Z_{12})(1 + G Z_{03}) + G Z_{32} Y_{12b} Z_{13}] + Y_{12b} Z_{31} [(Y_{12a} Z_{12})(-G Z_{23}) - (1 + G Z_{02})(Y_{12b} Z_{13})]$$

$$\left. \begin{matrix} Y_{12a} Z_{12} (1 + G Z_{03}) + G Z_{32} Y_{12b} Z_{13} \\ + G Z_{23} + (Y_{12a} Z_{21} Y_{12b} Z_{13}) \\ (1 + G Z_{02}) - Y_{12a} Y_{12a} Z_{12} Z_{21} \end{matrix} \right\} t$$

$$\Delta \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & -Y_{12a} Z_{21} & -Y_{12b} Z_{31} \\ -Y_{12a} Z_{12} & 1 - G Z_{02} & G Z_{32} \\ -Y_{12b} Z_{13} & G Z_{23} & 1 - G Z_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+GZ_{02})(1+GZ_{03}) - G^2 Z_{23} Z_{32} & -Y_{12a} Z_{21}(1+GZ_{03}) - GZ_{23} Y_{12b} Z_{31} & (Y_{12a} Z_{21})(1+GZ_{03}) + GZ_{23} Y_{12b} Z_{31} \\ -(Y_{12a} Z_{12})(1+GZ_{03}) - GZ_{32}(Y_{12b} Z_{13}) & + (1+GZ_{03}) - (Y_{12b} Z_{31})(Y_{12b} Z_{13}) & GZ_{32} + Y_{12b} Y_{12a} Z_{31} Z_{13} \\ Y_{12a} Z_{12}(1+GZ_{03}) + GZ_{32} Y_{12b} Z_{13} & + GZ_{23} + (Y_{12a} Z_{21} Y_{12b} Z_{13}) & (1+GZ_{02}) - Y_{12a} Y_{12} Z_{12} Z_{21} \end{pmatrix}$$

$$S_{11} = \frac{\Delta S_{11}}{\Delta} = \frac{(1+GZ_{02})(1+GZ_{03}) - G^2 Z_{23} Z_{32} + Y_{12a} Z_{21} [(Y_{12a} Z_{12})(1+GZ_{03}) + GZ_{32}(Y_{12b} Z_{13})] - Y_{12b} Z_{31} [Y_{12a} Z_{12}(1+GZ_{03}) + GZ_{32} Y_{12b} Z_{13}]}{(1+GZ_{02})(1+GZ_{03}) - Y_{12a} Z_{21} [Y_{12a} Z_{12}(1+GZ_{03}) + GZ_{32} Y_{12b} Z_{13}] + Y_{12b} Z_{31} [Y_{12a} Z_{12}(-GZ_{23}) - (1+GZ_{02})(Y_{12b} Z_{13})]}$$

vale, reconozco que no he tomado el camino fácil.....

1. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

2. $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$

3. $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

4. $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$

$$\frac{d}{dx} x^{-n} = -n x^{-n-1} = -n x^{-(n+1)} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

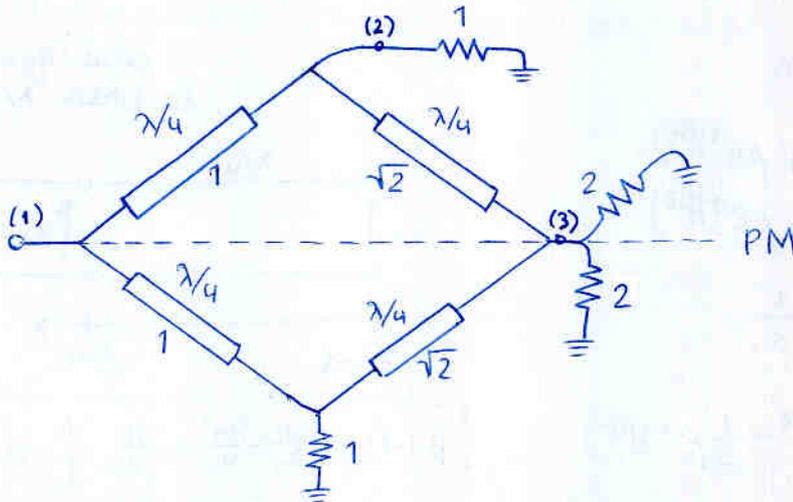
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$	$\frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$
$\frac{1}{x^4} = x^{-4}$	$\frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$	$\frac{1}{x^5} = x^{-5}$	$\frac{d}{dx} x^{-5} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

Problema 2

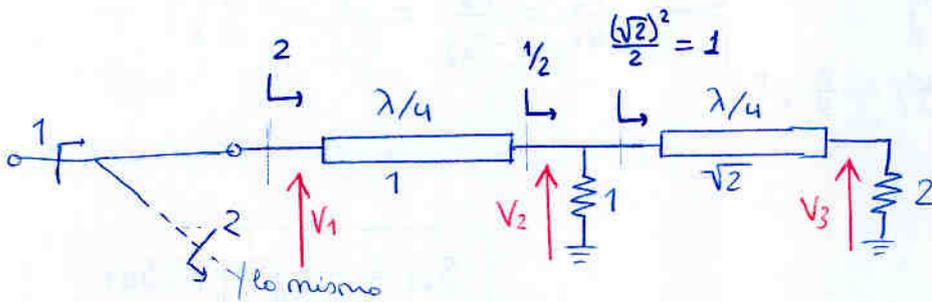
a) se trata de una red pasiva, lineal y sin ferritas, por lo que se puede afirmar que es recíproca y por tanto su matriz S simétrica

b) S_{11} , S_{21} , S_{31} y S_{41}

Cargar los accesos 2, 3 y 4

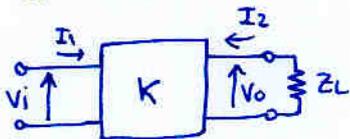


Por estar excitando en un punto del plano de simetría todas las tensiones y corrientes son simétricas y se comporta como una pared magnética



$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = 0$$

La matriz de un inversor



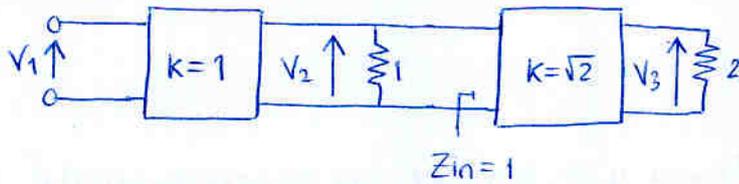
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & Y_{01} \\ Y_{10} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{siendo } Y_{01} = \pm j J = \pm j \frac{1}{K}$$

$$I_1 = Y_{01} V_{out}$$

$$I_2 = Y_{10} V_{in}$$

$$I_2 = -\frac{V_{out}}{Z_L}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -Z_L Y_{10} = \frac{Z_L}{\pm j K}$$



$$S_{21} = \frac{V_2}{V_1} (1 + S_{11})$$

$$S_{31} = \frac{V_3}{V_1} (1 + S_{11}) = \frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdot (1 + S_{11})$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{\pm jk} = \frac{1/2}{\pm j} = \mp \frac{1}{2}j$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{Z_L}{\pm jk} = \frac{2}{\pm j\sqrt{2}} = \mp \sqrt{2}j$$

Comprobación

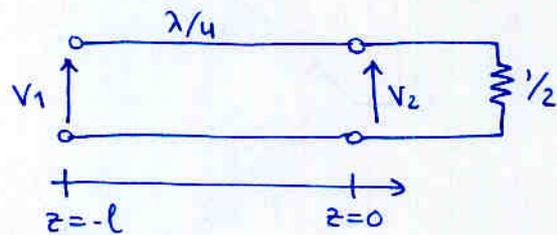
$$\begin{cases} V(z) = v^+(e^{-j\beta z} + \rho e^{+j\beta z}) \\ I(z) = \frac{v^+}{Z_0}(e^{-j\beta z} - \rho e^{+j\beta z}) \end{cases}$$

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -\frac{1}{3}$$

$$V(z) = v^+(e^{-j\beta z} - \frac{1}{3}e^{+j\beta z})$$

$$V_1 = V(z=-l) = v^+(+j + \frac{1}{3}j) = +\frac{4}{3}v^+j$$

$$V_2 = V(z=0) = v^+(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}v^+$$



¿qué signo tiene para la línea $\lambda/4$?

$$\beta \cdot z = \frac{2\pi}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} \quad | \quad e^{j\beta z} = -j$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2/3}{4/3j} = \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}j$$

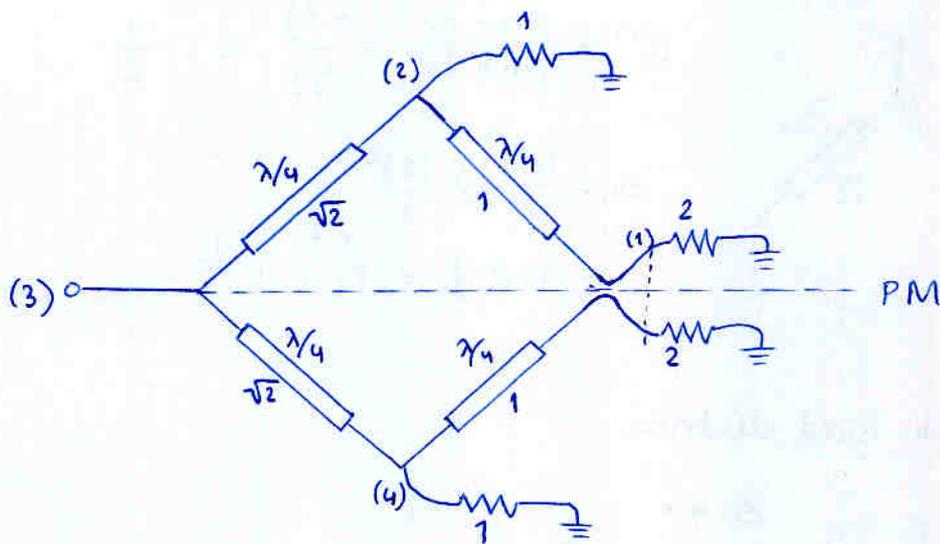
$$S_{21} = -\frac{1}{2}j$$

$$S_{31} = \left(-\frac{1}{2}j\right) \left(-\sqrt{2}j\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}j^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{21} = -\frac{1}{2}j = S_{41}$$

$$S_{31} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) S_{33} , S_{23} y S_{43} cargar accesos (1), (2) y (4)



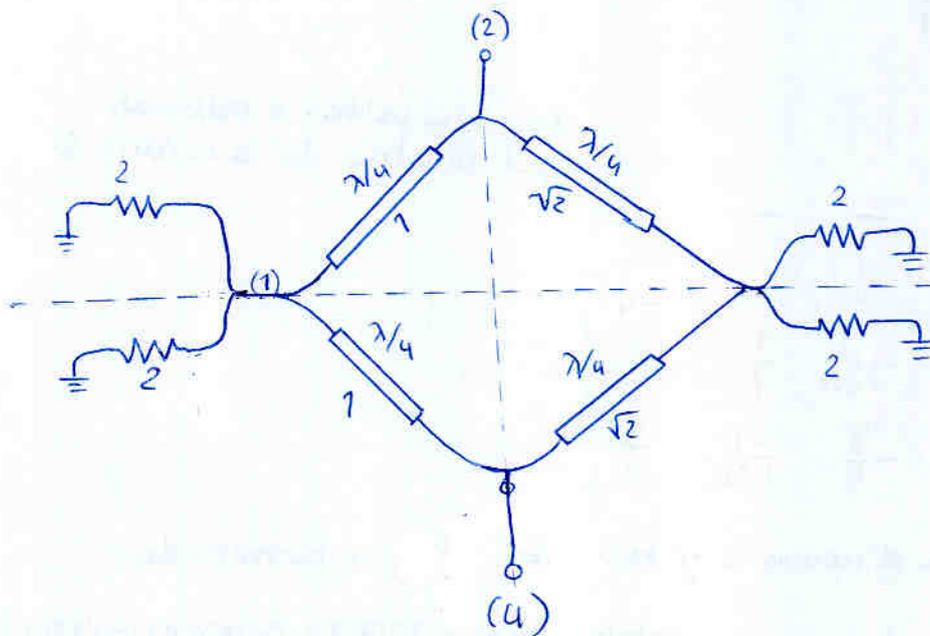
casi idéntico al apdo anterior (.....)

$$S_{43} = S_{23} = -j \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad S_{33} = \frac{1}{2}$$

$$S_{13} = S_{31} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

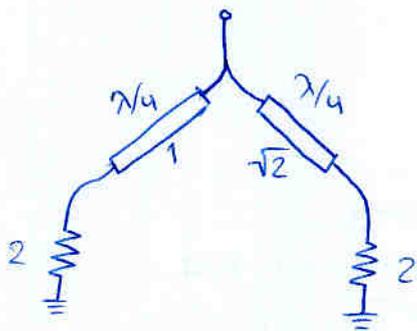
d) S_{22} , S_{42} y S_{44} $\begin{pmatrix} S_{22} & S_{24} \\ S_{42} & S_{44} \end{pmatrix}$ si se renombraran (2) - (1) podemos aplicar simetría

S_{22} y S_{42} : cargar accesos (1), (3) y (4)



Red simétrica de 2 puertos

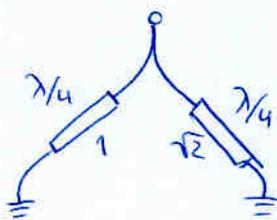
excitación par \rightarrow Pared magnética



$$S^{(e)} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$Z_{in} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \parallel \frac{(1)^2}{2} = 1 \parallel \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

excitación impar \rightarrow Pared eléctrica



$$Z_{in} = \infty$$

$$S^{(o)} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = 1$$

$$\begin{pmatrix} S_{22} & S_{24} \\ S_{42} & S_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S^{(e)} + S^{(o)} & S^{(e)} - S^{(o)} \\ S^{(e)} - S^{(o)} & S^{(e)} + S^{(o)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_{22} = \frac{1}{4}$$

$$S_{24} = S_{42} = -\frac{3}{4}$$

$$S_{44} = \frac{1}{4}$$

Los que faltan se rellenan por simetría de la matriz S

$$e) \quad S = \begin{pmatrix} 0 & - & - & - \\ -\frac{1}{2}j & \frac{1}{4} & - & - \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -j\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & - \\ -\frac{1}{2}j & -\frac{3}{4} & -j\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Usando como entrada el acceso 1 y teniendo 2, 3 y 4 terminados

$$P_{S2} = |-\frac{1}{2}j|^2 \cdot P_{in1} = \frac{1}{4} P_{in1}$$

$$P_{S3} = |-\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 \cdot P_{in1} = \frac{1}{2} P_{in1}$$

$$P_{S4} = |-\frac{1}{2}j|^2 \cdot P_{in1} = \frac{1}{4} P_{in1}$$

Ventaja: reparte TODA la potencia entrante
Inconvenientes: el reparto no es equitativo

- sólo sirve a la frecuencia en que $t = \lambda/4$
- los accesos de salida no están desacoplados entre sí.

Problema 1

a) Divisor de pot. no balanceado.
3 accesos, pasiva, sin pérdidas y recíproca

$$IL = 5 \text{ dB}$$

$$S_{11} = 0$$

S_{21} y S_{31} son imaginarios puros negativos

S_{22} real y positivo

$$S = \begin{pmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} \\ S_{21} & S_{22} & S_{32} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

↑
3 accesos
recíproca

pasiva
sin pérdidas } → Unitariedad

$$|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1 \quad (1)$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \quad (2)$$

$$|S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \quad (3)$$

$$S_{21}S_{22}^* + S_{31}S_{32}^* = 0 \quad (4)$$

$$S_{21}S_{32}^* + S_{31}S_{33}^* = 0 \quad (5)$$

$$S_{21}S_{31}^* + S_{22}S_{32}^* + S_{32}S_{33}^* = 0 \quad (6)$$

$$IL = 5 \text{ dB} \rightarrow |S_{21}| = 10^{-5/20} = 0.5623$$

$$\text{usando (2): } |S_{31}| = \sqrt{1 - |S_{21}|^2} = 0.8269$$

Como se dice que son imaginarios puros negativos

$$S_{21} = -j0.5623$$

$$S_{31} = -j0.8269$$

Como S_{22} es real y positivo, de (4)

$$\left. \begin{aligned} S_{21} \cdot S_{22} + S_{31} S_{32}^* &= 0 \\ \text{de (2)} \quad |S_{22}| = S_{22} &= \sqrt{1 - |S_{21}|^2 - |S_{32}|^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} S_{22} &= \sqrt{1 - |S_{21}|^2 - \left| -S_{22} \frac{S_{21}}{S_{31}} \right|^2} \\ |S_{22}|^2 &= 1 - |S_{21}|^2 - |S_{22}|^2 \left| \frac{S_{21}}{S_{31}} \right|^2 \end{aligned}$$

por tanto

$$S_{22}^2 = \frac{1 - |S_{21}|^2}{1 + \left| \frac{S_{21}}{S_{31}} \right|^2} = 0.4676 \rightarrow S_{22} = 0.6838 \quad (\text{sabemos que es real y positivo})$$

$$S_{32}^* = -S_{22}^* \frac{S_{21}}{S_{31}} = -0'6838 \cdot \frac{-j \cdot 0'5623}{-j \cdot 0'8269} = -0'4650$$

$$S_{33}^* = -S_{32}^* \frac{S_{21}}{S_{31}} = \dots = 0'3162$$

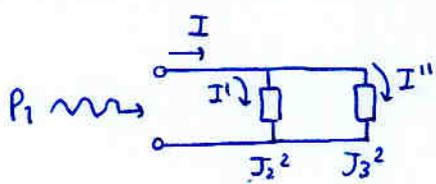
Por tanto:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -j0'5623 & -j0'8269 \\ -j0'5623 & 0'6838 & -0'4650 \\ -j0'8269 & -0'4650 & 0'3162 \end{pmatrix}$$

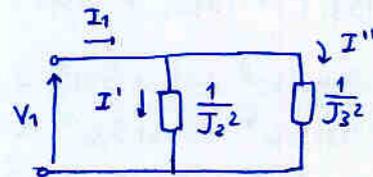
b) Para la figura 1:

$$Z_{in} = \left[\frac{J_2^2}{Z_0} \parallel \frac{J_3^2}{Z_0} \right] \times J \text{ es } \frac{1}{K}$$

$$Y_{in} = \frac{J_2^2}{Y_0} + \frac{J_3^2}{Y_0} = Y_0 \quad \text{adaptación} \quad J_2^2 + J_3^2 = 1$$



con impedancias



la pot al acceso 2:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} V_2 \cdot I'^* \\ &= \frac{1}{2} V_2 \cdot \left(I_1 \cdot \frac{1/J_3^2}{1/J_3^2 + 1/J_2^2} \right)^* \\ &= P_1 \cdot \frac{1/J_3^2}{1/J_3^2 + 1/J_2^2} = P_1 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{J_3}{J_2}\right)^2} \end{aligned}$$

queremos que

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{J_3}{J_2}\right)^2} = 10^{-\frac{5dB}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{1 + \frac{J_3^2}{1 - J_3^2}} = 1 - J_3^2 = J_2^2$$

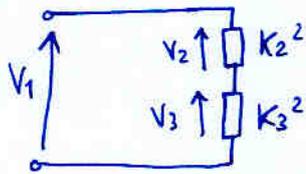
$$P_2 = P_1 \cdot J_2^2$$

$$J_2 = 10^{-5/20} = 0'5623$$

$$J_3 = \sqrt{1 - J_2^2} = 0'8269$$

Para la figura 2:

$$Z_{in} = \frac{K_2^2}{Z_0} + \frac{K_3^2}{Z_0} = Z_0 \rightarrow K_2^2 + K_3^2 = 1$$



$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{V_1^2}{Z_0} = \frac{1}{2} V_1^2$$

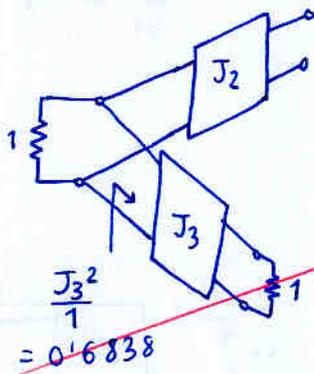
$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{V_2^2}{(K_2^2)} = \frac{1}{2} \left[V_1 \cdot \frac{K_2^2}{(K_2^2 + K_3^2)} \right]^2 \cdot \frac{1}{K_2^2} = P_1 K_2^2$$

$$P_3 = P_1 K_3^2$$

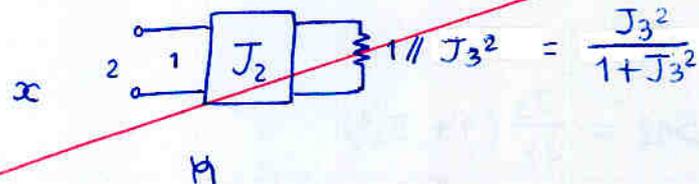
$$K_1^2 = 10^{-\frac{5}{10}} \rightarrow K_1 = 10^{-5/20} = 0.5623$$

$$K_2 = \sqrt{1 - K_1^2} = 0.8269$$

c) • $S_{22} = \frac{b_2}{a_2} \Big|_{a_1=a_3=0}$

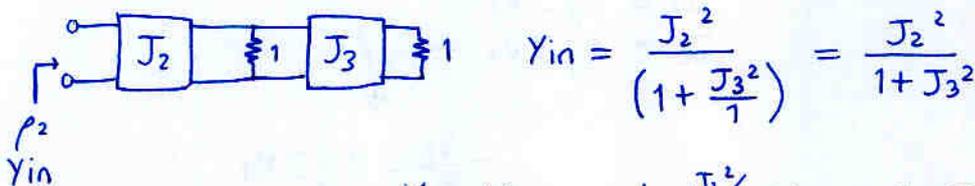


J_3 es la cte de inversión de ADMITANCIA



$$\frac{J_2^2}{\left(\frac{J_3^2}{1+J_3^2}\right)} = (1+J_3^2) \left(\frac{J_2}{J_3}\right)^2$$

$$\rho_2 = \frac{0.7786 - 1}{0.7786 + 1} = -0.1245$$



$$Y_{in} = \frac{J_2^2}{\left(1 + \frac{J_3^2}{1}\right)} = \frac{J_2^2}{1 + J_3^2}$$

$$S_{22} = \rho_2 = \frac{Y_0 - Y_{in}}{Y_0 + Y_{in}} = \frac{1 - \frac{J_2^2}{1+J_3^2}}{1 + \frac{J_2^2}{1+J_3^2}} = \frac{1 + J_3^2 - J_2^2}{1 + J_3^2 + J_2^2} = \frac{2J_3^2}{2} = J_3^2$$

$$S_{22} = J_3^2$$

• S_{33} ; de forma idéntica

$$S_{33} = J_2^2$$

$$S_{32} = \frac{V_3}{V_2} (1 + S_{22}) \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}}$$

$$= \frac{V_3}{V_2} (1 + S_{22})$$

$$S_{32} = \frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot (1 + S_{22}) = \frac{(V_3/V_1)}{(V_2/V_1)} (1 + S_{22})$$

Ya que $P_1 = \frac{1}{2} \frac{V_1^2}{Z_{in}}$
(hay adapt.)

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{V_2^2}{Z_{02}} = \frac{1}{2} V_1^2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = P_1 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2$$

Esto sería con todos los accesos terminados, lo cual no es el caso

como sabemos la relación de potencias

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 10^{-5/10} \rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 10^{-5/20} = J_2$$

Como vemos que no hay pérdidas

$$P_2 + P_3 = P_1 \rightarrow \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 1 - J_2^2$$

$$\frac{V_3}{V_1} = J_3$$

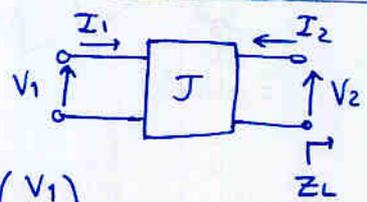
entonces:

$$S_{32} = \frac{J_3}{J_2} (1 + J_3^2)$$

Recuerda

Inversor:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm jJ \\ \pm jJ & 0 \end{bmatrix}$$



$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V} \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm jJ \\ \pm jJ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

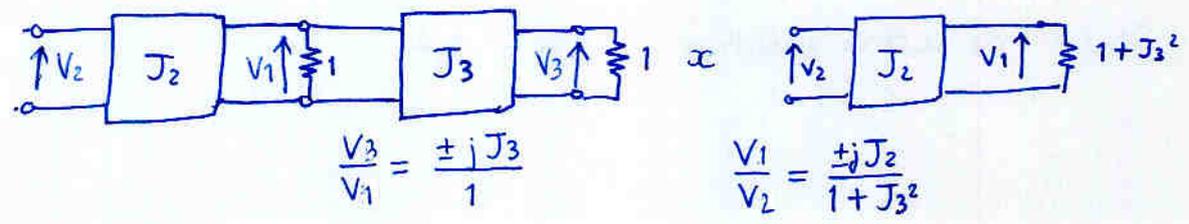
$$I_1 = \pm jJ V_2$$

$$I_2 = \pm jJ V_1$$

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_L}$$

$$-\frac{V_2}{Z_L} = \pm jJ V_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \pm j Z_L J = \frac{\pm jJ}{Y_L}$$

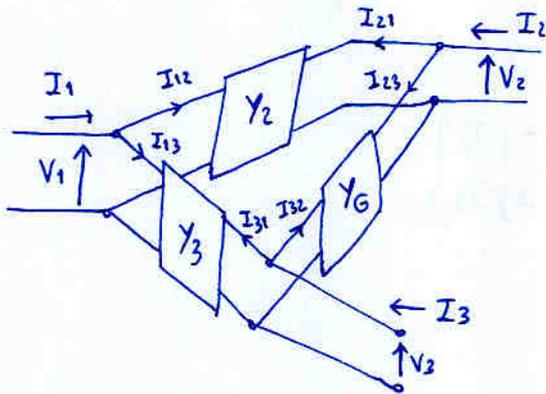


Por tanto

$$\frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \pm j J_3 \cdot \left(\frac{\pm j J_2}{1 + J_3^2} \right) = - \frac{J_2 J_3}{(1 + J_3)^2}$$

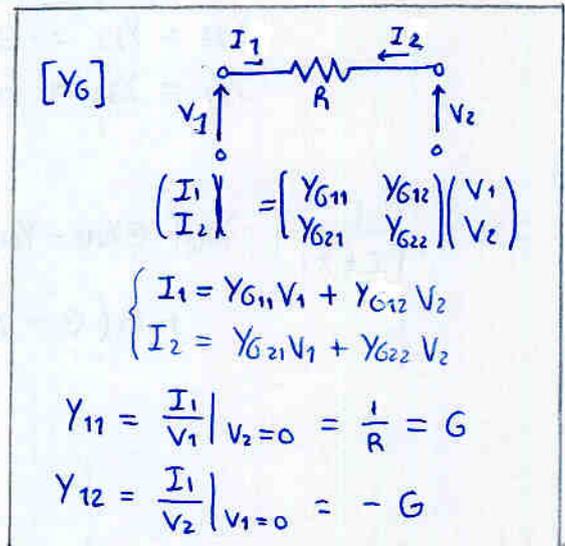
$$S_{32} = \frac{V_3}{V_2} \cdot (1 + S_{22}) = - J_2 J_3$$

d)



$$[Y_2] = \begin{pmatrix} 0 & \pm j J_2 \\ \pm j J_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[Y_3] = \begin{pmatrix} 0 & \pm j J_3 \\ \pm j J_3 & 0 \end{pmatrix}$$



Por tanto tenemos estos 3 sistemas:

$$\begin{pmatrix} I_{12} \\ I_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm j J_2 \\ \pm j J_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm j J_3 \\ \pm j J_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{23} \\ I_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & -G \\ -G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{12} = \pm j J_2 V_2 \\ I_{21} = \pm j J_2 V_1 \\ I_{13} = \pm j J_3 V_3 \\ I_{31} = \pm j J_3 V_1 \\ I_{23} = G V_2 - G V_3 \\ I_{32} = -G V_2 + G V_3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Sabiendo:

$$I_1 = I_{12} + I_{13} = Y_{012} V_2 + Y_{013} V_3$$

$$I_2 = I_{21} + I_{23} = Y_{012} V_1 + G V_2 - G V_3$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = Y_{013} V_1 - G V_2 + G V_3$$



$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Y_{012} & Y_{013} \\ Y_{012} & G & -G \\ Y_{013} & -G & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

[Y]

A partir de $[Y]$ obtenemos S_{32} con la fórmula del enunciado e igualamos a cero

$$S_{32} = \frac{1}{|I+Y|} \left(-Y_{21}(Y_{21}Y_{32} - Y_{31}(1+Y_{22})) - (1-Y_{22})((1+Y_{11})Y_{32} - Y_{31}Y_{21}) - Y_{32}((1+Y_{11})(1+Y_{22}) - Y_{21}^2) \right)$$

siendo

$$Y_{11} = 0$$

$$Y_{12} = Y_{21} = Y_{012} (= \pm j J_2)$$

$$Y_{13} = Y_{31} = Y_{013} (= \pm j J_3)$$

$$Y_{23} = Y_{32} = -G$$

$$Y_{22} = Y_{33} = G$$

$$S_{32} = \frac{1}{|I+Y|} \left(-Y_{012}(-GY_{012} - Y_{013}(1+G)) - (1-G)(-G - Y_{013}Y_{012}) + G(G - Y_{012}^2) \right)$$

Problema 2

a) Guía circular

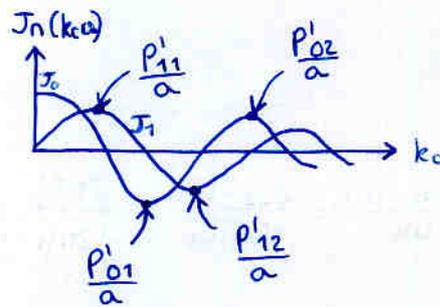
TE: $\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \Rightarrow H_z = (A J_n(k_c \rho) + B N_n(k_c \rho)) (C \cos(n\phi) + D \sin(n\phi))$

\uparrow singular en origen \uparrow $n = n$ por ser 2π -periódico

c.c. $E_{tang}|_{cond} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial n}|_{cond} = 0$

en este caso $\frac{\partial H_z}{\partial \rho}|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow$

$$k_c = \frac{P'_{nl}}{a}$$



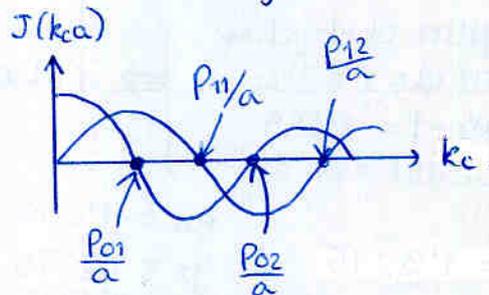
$$k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu \epsilon} \rightarrow f_{cTE_{nl}} = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{P'_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

TM $\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \Rightarrow E_z = (A J_n(k_c \rho) + B N_n(k_c \rho)) (C \cos(n\phi) + D \sin(n\phi))$

\uparrow singular en origen \uparrow $n = n$

c.c. $E_{tang}|_{cond} = 0 \Rightarrow E_z|_{\rho=a} = 0$

$$k_c = \frac{P_{nl}}{a}$$



$$k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu \epsilon} \rightarrow f_{cTM_{nl}} = \frac{k_c}{2\pi \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{P_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

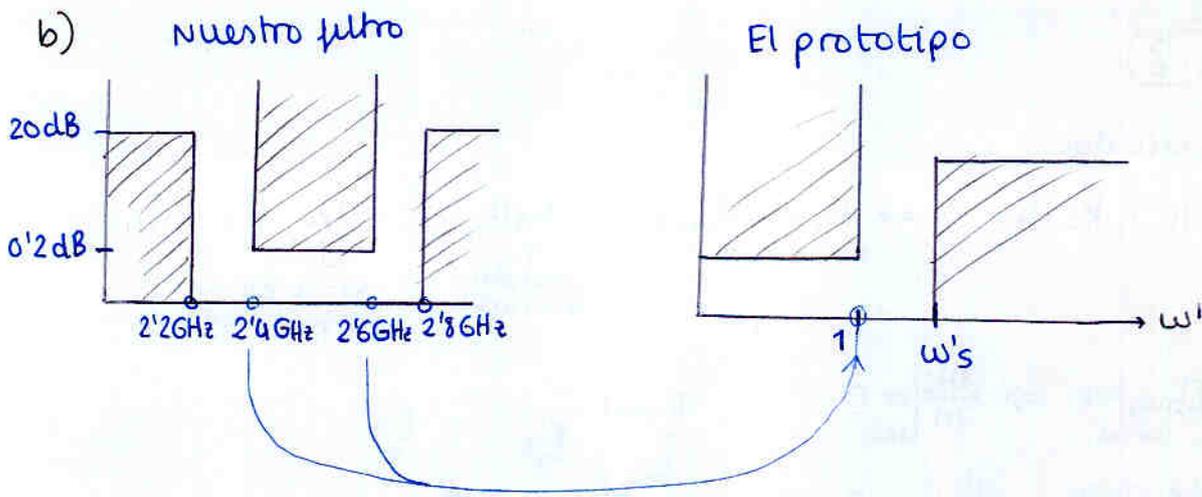
El modo fundamental será el que tenga menor frecuencia de corte

$$\min(P_{nl}, P'_{nl}) = P'_{11} \rightarrow \text{modo fundamental: TE}_{11}$$

$$f_{cTE_{11}} = \frac{1.8412}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}} \rightarrow a = \frac{1.8412}{2\pi f_c \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c \cdot 1.8412}{2\pi f_c}$$

para $f_c = 2.2 \cdot 10^9$ Hz
 $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

$$\Rightarrow a = 0.0400 \rightarrow a = 4.00 \text{ cm}$$



$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} = \frac{2\pi(f_2 - f_1)}{2\pi \sqrt{f_1 f_2}} = \frac{\sqrt{39}}{78} \approx 0.08006$$

tomamos $W = 0.08$

$$\omega_0 = 2\pi \sqrt{f_1 f_2} = 15.70 \cdot 10^9 \text{ rad/s} \rightarrow f_0 = 2.498 \text{ GHz}$$

$$\omega'_s = \min \left(\underbrace{\left| \frac{1}{W} \left(\frac{\omega_a}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_a} \right) \right|}_{-3.18}, \underbrace{\left| \frac{1}{W} \left(\frac{\omega_b}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_b} \right) \right|}_{2.859} \right) = 2.859 \text{ rad/s}$$

↑
Tomamos el caso peor

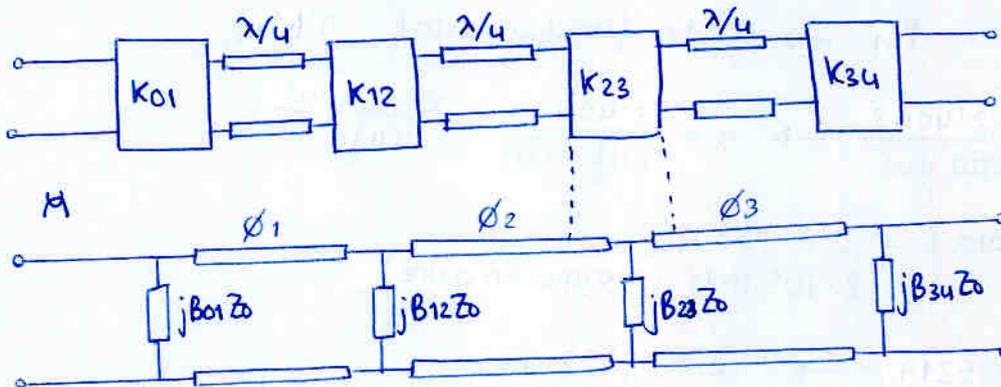
Gráfica: - filtro Chebychev
 - rizado $r = 0.2$
 - $\omega'_s - 1 = 1.859$
 - $LA(\text{dB}) = 20 \text{ dB}$

} \Rightarrow orden necesario $N = 3$

De la tabla para $n = 3$

$$\begin{cases} g_0 = 1.000 \leftarrow g_0 \text{ siempre es } 1 \\ g_1 = 1.2275 \\ g_2 = 1.1525 \\ g_3 = 1.2275 \\ g_4 = 1.0000 \end{cases}$$

El filtro quedaría (las fórmulas de la k ya han tenido en cuenta la transformación a paso banda)



$$\phi_i = \pi + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{B_{i-1,i}}\right) + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{B_{i,i+1}}\right)$$

c) Necesitaremos λ_g para poder hacer $\phi_i = \beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot l$

Todas estas fórmulas se deducen sin más que recordar:

$$l = \frac{\lambda_g \cdot \phi_i}{2\pi} \quad (\text{en lógico: si } \phi_i = 2\pi \rightarrow l = \lambda_g)$$

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

$$= k^2 + (j\beta)^2$$

$$= k^2 - \beta^2 \Rightarrow$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$k = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$k_c = 2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\downarrow$$

$$= \sqrt{(2\pi f \sqrt{\mu\epsilon})^2 - (2\pi f_c \sqrt{\mu\epsilon})^2}$$

$$= \sqrt{(2\pi f \sqrt{\mu\epsilon})^2 \left[1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]}$$

$$= (2\pi f \sqrt{\mu\epsilon}) \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_g} \quad \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por tanto se tiene

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

siendo $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2'498 \cdot 10^9} \leftarrow f_0 = \sqrt{f_1 f_2} !!!$

$$= 0'1201 \text{ m}$$

$$= \frac{0'1201}{\sqrt{1 - \left(\frac{2'2}{2'498}\right)^2}} = 0'2536 \text{ m}$$

entonces $l = \frac{\lambda_g \cdot \phi_i}{2\pi}$

$$\phi_1 = 2'727 \text{ rad} \rightarrow l_1 = \frac{\lambda_g \cdot \phi_1}{2\pi} =$$

$$\phi_2 = 2'931 \text{ rad} \rightarrow l_2 = \frac{\lambda_g \cdot \phi_2}{2\pi} =$$

$$\phi_3 = 2'727 \text{ rad} \rightarrow l_3 = \frac{\lambda_g \cdot \phi_3}{2\pi} =$$

en cuanto a las admitancias: $\bar{B} = B Z_0$ (truco para acordarse; \bar{B} es adimensional: $\Omega^{-1} \cdot \Omega$)

$$B = \bar{B} / Z_0$$

CUIDADO $Z_0 \neq 50 \Omega$
 Z_0 será Z_{TE11}

$$\bar{B}_{01} = -2'805 \rightarrow B_{01} = \bar{B}_{01} / Z_0 = -0'0561 \text{ X}$$

$$\bar{B}_{12} = -9'355 \rightarrow B_{12} = \bar{B}_{12} / Z_0 = -0'1871 \text{ X}$$

al ser bobinas, la admitancia: $jB = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{1}{j\omega L} = jB \rightarrow L = \frac{-1}{B \omega}$

$$B_{01} = -0'0561 \rightarrow L_{01} = 1'135 \text{ nH X}$$

$$B_{12} = -0'1871 \rightarrow L_{12} = 0'340 \text{ nH X}$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\pi \sqrt{f_1 f_2}}$$

$$= 15'7 \cdot 10^9$$

Calculémoslo pues,

$$\left(\begin{array}{l} K_{01} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_1}} = 0'3200 \\ K_{12} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{\sqrt{g_1 g_2}} = 0'1057 \\ K_{23} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{\sqrt{g_2 g_3}} = 0'1057 \\ K_{34} = \sqrt{\frac{\pi W}{2g_3 g_4}} = 0'3200 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |\bar{B}_{01}| = \frac{1-K_{01}^2}{K_{01}} = 2'805 \\ |\bar{B}_{12}| = \frac{1-K_{12}^2}{K_{12}} = 9'355 \\ |\bar{B}_{23}| = \frac{1-K_{23}^2}{K_{23}} = 9'355 \\ |\bar{B}_{34}| = \frac{1-K_{34}^2}{K_{34}} = 2'805 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \phi_{01} \\ \phi_{12} \\ \phi_{23} \\ \phi_{34} \end{array} \right)$$

$$\phi_1 = \pi + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{B_{01}}\right) + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{B_{12}}\right) = \cancel{3'557} \text{ rad}$$

$$\phi_2 = \pi + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{B_{12}}\right) + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{B_{23}}\right) = \cancel{3'352} \text{ rad}$$

$$\phi_3 = \pi + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{B_{23}}\right) + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2}{B_{34}}\right) = \cancel{3'557} \text{ rad}$$

$B_{01} \neq 2'805 \times$
 $B_{01} = -2'805 \checkmark$

Está mal, debería salir menor que π , ya que los inversores con bobinas paralelo tienen líneas 'negativas' a los lados que restan; lo que pasa es que las B 's deberían tener un menos ya que en realidad, la admitancia $jB = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$ $B < 0$, lo que habíamos calculado era $|B|$, nos faltaba ver que era negativo; sustituyéndolo bien:

$$\phi_1 = 2'727 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = 2'931 \text{ rad}$$

$$\phi_3 = 2'727 \text{ rad}$$

Recuerda: $Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$

$$= \frac{j\omega\mu}{j\beta} = \frac{j\omega\mu}{jk\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}$$

$$= \frac{j\omega\mu}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}}$$

$$Z_0 = Z_{TE} = \frac{120\pi}{\sqrt{1-(\frac{2.12}{2.498})^2}} = 795.9 \Omega$$

entonces $B = \frac{\bar{B}}{Z_0}$

$$\bar{B}_{01} = -2.805 \implies B_{01} =$$

$$\bar{B}_{12} = -9.355 \implies B_{12} =$$

Ademas $B_{23} = B_{12} \implies L_{23} = L_{12}$

$B_{34} = B_{01} \implies L_{34} = L_{01}$

Y finalmente:

$$L_i \longrightarrow \frac{L_i}{a} \xrightarrow{\text{grafica}} \frac{\Gamma_i}{a} \longrightarrow \Gamma_i$$

↑
a = 0.04m

truco: en TEM (1) $Z_{TEM} = \eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\eta}{j\omega\epsilon}$

↓ $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ ↓ en TEM $\gamma = jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$

para TE, tenemos Hz, por tanto cogemos la ecuación que contiene a μ

$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$ pero esta vez $\gamma = j\beta = jk\sqrt{1-(\frac{f_c}{f})^2}$

para TM $Z_{TM} = \frac{\eta}{j\omega\epsilon}$

$$\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2} = 2\pi\sqrt{f_1f_2} = 15.7 \cdot 10^7$$

$$L = -\frac{1}{B\omega}$$

$$\implies L_{01} =$$

$$\implies L_{12} =$$

d) Retardo de grupo

$$\begin{aligned}\beta &= k \sqrt{1 - \left(\frac{vc}{f}\right)^2} \\ &= \omega \cdot \sqrt{\mu\epsilon} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2} \\ &= \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2}\end{aligned}$$

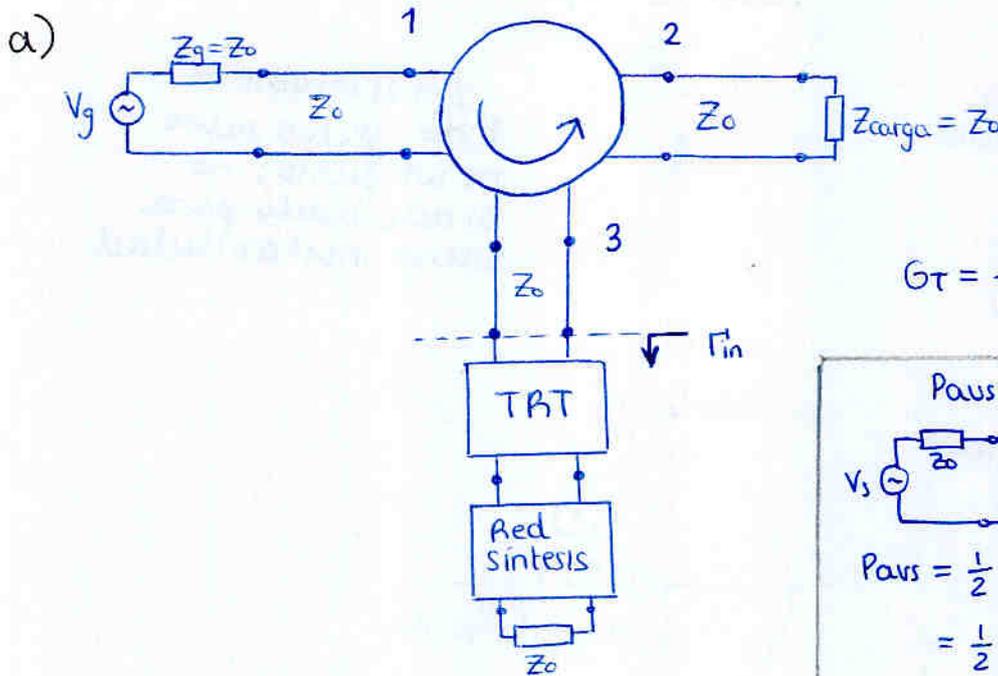
$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{d\omega} &= \frac{d(\omega)}{d\omega} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2} \right) + \frac{\omega}{c} \cdot \frac{d}{d\omega} \left(\left(1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2\right)^{1/2} \right) \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2} + \frac{\omega}{c} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\omega c^2}{\omega^3} \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2\right)^{-1/2} \right) \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{vc}{f}\right)^2} + \frac{\omega c^2}{c \omega^2 \sqrt{1 - \left(\frac{vc}{f}\right)^2}} = \frac{\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2\right] + \omega c^2}{c \omega^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega c}{\omega}\right)^2}}}$$

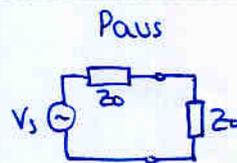
$$\boxed{v_g = \frac{1}{d\beta/d\omega|_{\omega=\omega_0}} = c \cdot \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega c}{\omega_0}\right)^2}}_{0.4737} = \frac{d}{t}}$$

$$t = \frac{d}{0.4737c} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{0.4737c} =$$

Problema 3



$$G_T = \frac{P_L}{P_{avs}}$$



$$P_{avs} = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \left(V_s \frac{Z_0}{2Z_0} \right) \left(\frac{V_s}{2Z_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{V_s^2}{8}$$

$$= \frac{1}{2} |a_1|^2 \quad \text{est\u00e1 adaptado}$$

$$G_T = |\Gamma_{in}|^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 = \frac{1}{2} |a_3|^2 = \frac{1}{2} |b_3 \cdot \Gamma_{in}|^2$$

$$= \frac{1}{2} |b_3|^2 \cdot |\Gamma_{in}|^2 = \frac{1}{2} |a_1|^2 \cdot |\Gamma_{in}|^2$$

b)

	Δ	K	μ
Transistor 1	$0'548 \angle -5'592^\circ$	1'016	1'010 $\Rightarrow \mu > 1 \rightarrow$ I.E.
Transistor 2	$0'65 \angle 180^\circ$	$-\infty$	0'769
Transistor 3	$2'70 \angle -33'7$	0'4175	-0'697
Transistor 4	0'03	∞	$\Rightarrow \left. \begin{matrix} K < 1 \\ K > 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow$ I.E.

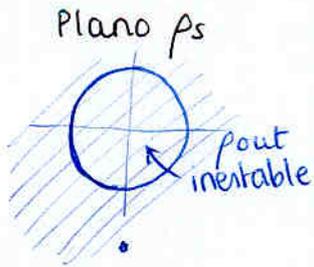
Nosotros queremos transistor inestable para que $|\Gamma_{in}| > 1$
 Por tanto el 1 y el 4 no nos sirven

	Circulo de entrada: Estabilidad de Fuente			Circulo de salida: Estabilidad de carga		
	C_s	P_s	$ p_{out} _{si P_s=0}$	C_L	P_L	$ p_{in} _{si P_L=0}$
TRT 2	-2i	0	$1'30 > 1$	$0'7692 \angle -90$	0	$0'5 < 1$
TRT 3	$1'3469 \angle 109'38$	$1'4118$	$0'90 < 1$	$0'9277 \angle 38'44$	0'2307	$2'5 > 1$

\uparrow
 si $P_s = 0 \Rightarrow |p_{out}| = |S_{22}|$

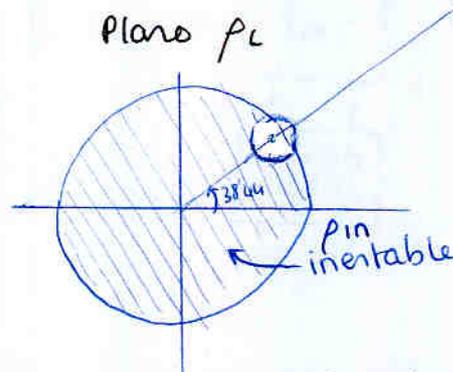
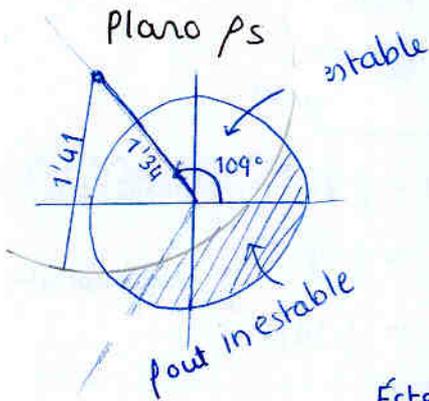
\uparrow
 si $P_L = 0, |p_{in}| = |S_{11}|$

Transistor 2 :



pin es estable en todo $|p_L| < 0$ salvo en un punto; no es adecuado para obtener inestabilidad

Transistor 3 :



Este es el transistor con el cual podemos lograr una pin inestable eligiendo adecuadamente el valor de p_L con la red de síntesis.

CARTA DE SMITH DE IMPEDANCIAS O ADMITANCIAS

NOMBRE	APELLIDOS	FECHA
--------	-----------	-------

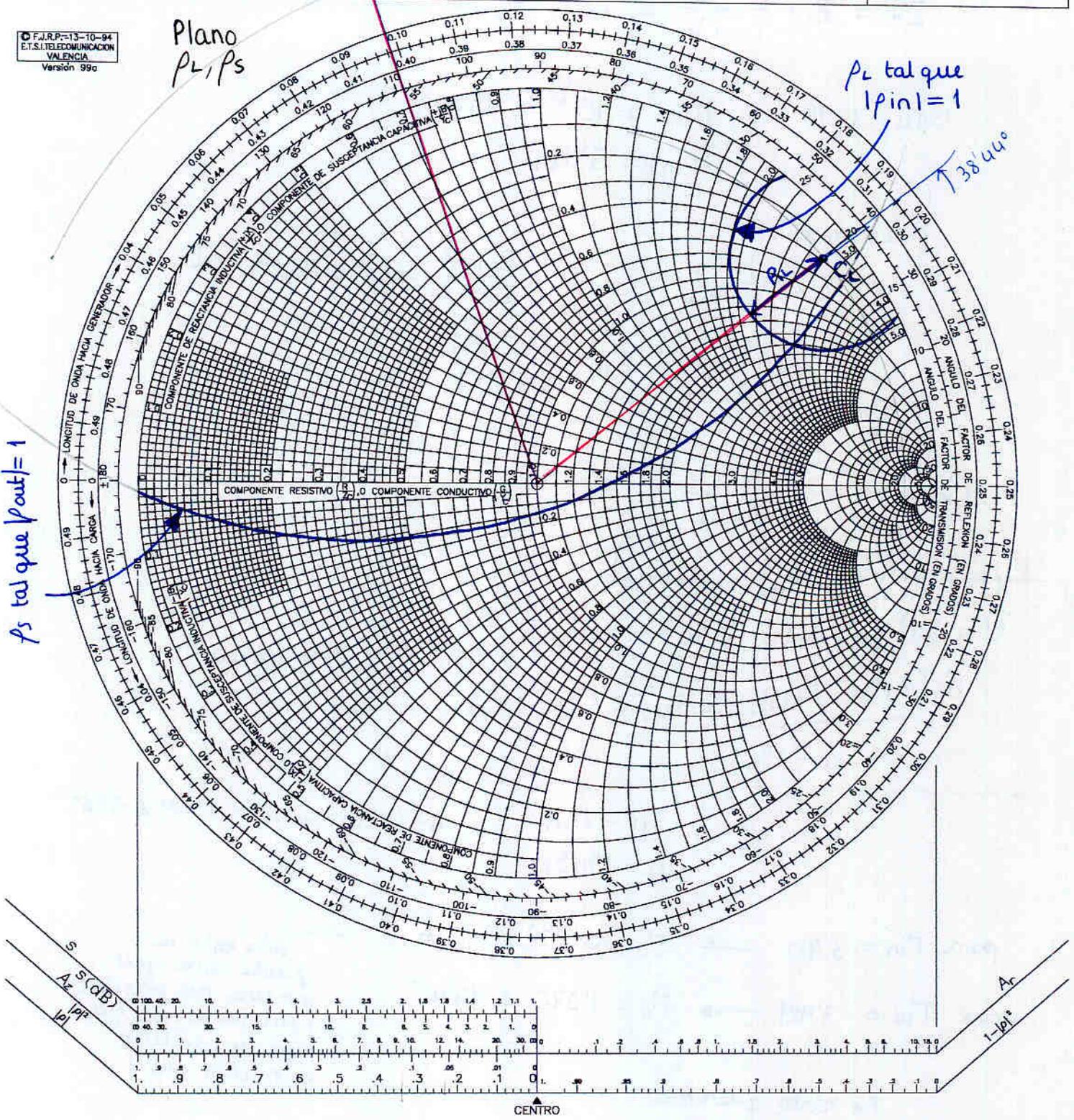
F.J.R.P-13-10-94
E.T.S.I. TELECOMUNICACION
VALENCIA
Versión 99a

Plano
 P_L, P_S

P_L tal que
 $|\rho_{in}| = 1$

38440

P_S tal que $|\rho_{out}| = 1$



- | | | | |
|--------------|--|-------|---------------------------|
| s | Relación de onda estacionaria | Z_c | Impedancia característica |
| A_z | Atenuación de adaptación (Return loss) | Y_c | Admitancia característica |
| ρ | Factor de reflexión | R | Resistencia |
| A_r | Atenuación de reflexión | X | Reactancia |
| $1- \rho ^2$ | Factor de transmisión | G | Conductancia |
| | | B | Susceptancia |

$$c) \Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

$$Z_{in} = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}} = \frac{S_{11} + \Gamma_L (S_{12} S_{21} - S_{22} S_{11})}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

$$G_{Tu} = 12 \text{ dB} \rightarrow |\Gamma_{in}|^2 = 10^{\frac{12}{10}} = 15.849$$

$$|\Gamma_{in}| = 3.981$$

puesto que

$$Z_{in} = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_{in}}{1 - \Gamma_{in}} \quad \Gamma_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \text{ será también real}$$

$$\text{por tanto } \Gamma_{in} = \begin{cases} -3.981 \\ 3.981 \end{cases}$$

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

$$(1 - S_{22} \Gamma_L)(\Gamma_{in} - S_{11}) = S_{12} S_{21} \Gamma_L$$

$$(\Gamma_{in} - S_{11}) + \Gamma_L (S_{11} S_{22} - \Gamma_{in} S_{22}) = S_{12} S_{21} \Gamma_L$$

$$\Gamma_L \underbrace{(S_{11} S_{22} - \Gamma_{in} S_{22} - S_{12} S_{21})}_{\Delta - \Gamma_{in} S_{22}} = (S_{11} - \Gamma_{in})$$

despejando

$$\Gamma_L = \frac{S_{11} - \Gamma_{in}}{\Delta - \Gamma_{in} S_{22}}$$

$$\Delta = (S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}) = 2.704 \angle -33.69^\circ$$

$$\text{para } \Gamma_{in} = 3.981 \rightarrow \Gamma_L = 0.738 \angle -48.38^\circ$$

$$\text{para } \Gamma_{in} = -3.981 \rightarrow \Gamma_L = 1.076 \angle 14.42^\circ$$

← solo este se puede conseguir con una red pasiva y sin pérdidas ya que su módulo es menor que 1.

Por tanto, queremos

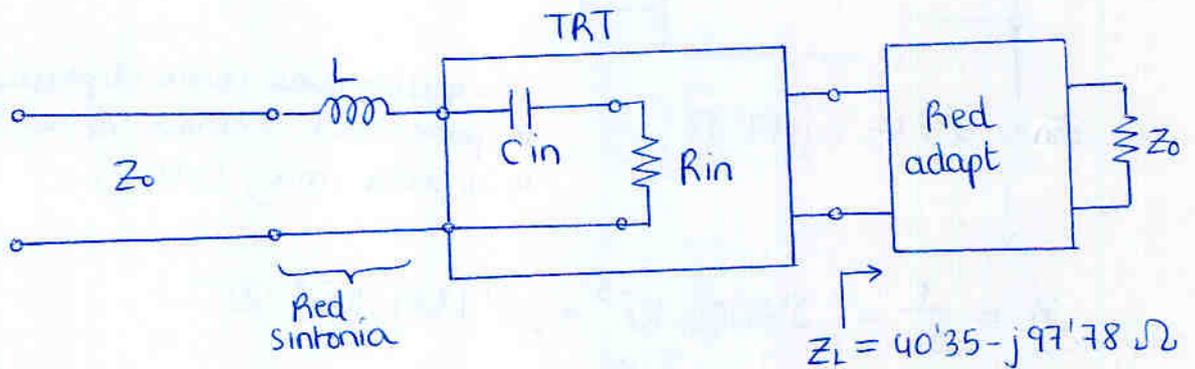
$$Z_L = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} = Z_0 \cdot (0.8069 - j1.9556)$$

$$Z_L = 40.35 - j97.78 \Omega$$

d) $\Gamma_{in} = 3'981 \rightarrow Z_{in} = Z_0 \frac{1+\Gamma_{in}}{1-\Gamma_{in}} = -83'55 \Omega$

Pero en realidad

$$Z_{in} = -R_{in} - j \frac{1}{\omega C_{in}} \quad \begin{matrix} R_{in} = 83'55 \Omega \\ C_{in} = 50 \text{ pF} \end{matrix}$$



Queremos que L y Cin se anulen a la frecuencia de trabajo $f_0 = 3 \text{ GHz}$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{C(2\pi f_0)^2} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-12} (2\pi \cdot 3 \cdot 10^9)^2}$$

$$L = 56'29 \text{ pH}$$

e) $F = F_{min} + 4 \cdot \frac{R_N}{Z_0} \frac{|\Gamma_{opt} - \Gamma_s|^2}{|1 + \Gamma_{opt}|^2 (1 - |\Gamma_s|)^2}$

$$F_{min} = 3 \text{ dB} = 2$$

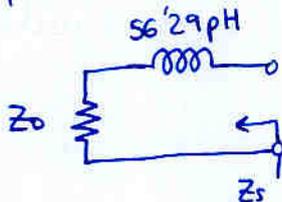
$$R_N = 83'55 \Omega$$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$\Gamma_{opt} = 0'35 \angle 120^\circ$$

sólo falta Γ_s

Γ_s es lo que el trt "ve" hacia el generador



$$\begin{aligned} Z_s &= Z_0 + j\omega L \\ &= 50 + j \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 56'29 \cdot 10^{-12} \\ &= 50 + j1'061 \end{aligned}$$

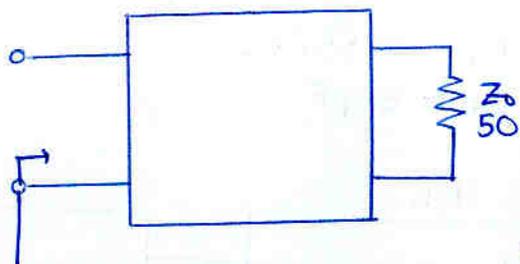
$$\Gamma_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = 0'0106 \angle 89'39^\circ$$

no es Z_{in}

sustituyendo en F

$$F = (\dots) = 2'30 \xrightarrow{10 \log} 3'62 \text{ dB}$$

me invento un apartado más:
Diseñar la red de adaptación de Z_L

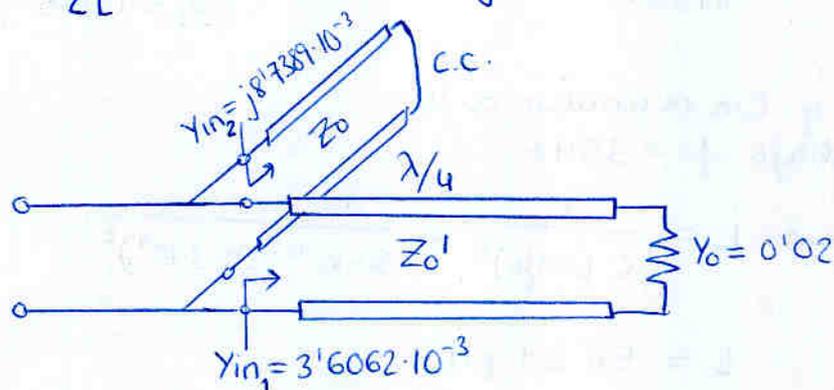


$$Z_L = 40'35 - j97'78$$



$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = 3'6062 \cdot 10^{-3} + j8'7389 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$$

Lo quiero poner como el paralelo de la parte real (línea $\lambda/4$ con Z_0) y la parte imag (stub)



$$Y_{in1} = \frac{(j)^2}{Y_0} = \frac{(\frac{1}{k})^2}{Y_0} = \frac{(\frac{1}{Z_0'})^2}{Y_0} = 3'6062 \cdot 10^{-3}$$

$$Z_0' = \frac{1}{\sqrt{3'6062 \cdot 10^{-3} \cdot Y_0}} = 117'7 \Omega$$

$$Y_{in2} = \frac{1}{jZ_0 \operatorname{tg}(\beta l)} = j8'7389 \cdot 10^{-3}$$

$$\operatorname{tg}(\beta l) = \frac{1}{-Z_0 \cdot 8'7389 \cdot 10^{-3}} = -2'289$$

$$\beta l = \operatorname{arctg}(-2'289) = -1'159 \pm n\pi$$

$$n=1$$

$$\beta l = 1'983$$

$$l = \lambda_g \frac{1'983}{2\pi} = 0'3156 \lambda_g$$

sólo necesitamos λ_g (en la guía) $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\beta c/\omega)^2}}$