ETSI Telecomunicación

Matemáticas

Apuntes de Pak

Matemáticas

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 2º curso
Curso 2004/2005

Contenido

- Referencia rápida
- Apuntes de la asignatura.
- Exámenes resueltos de los profesores

Fecha de última actualización: 27 Agosto 2007

MATEMATICAS - Referencia Rápida

TEMA 1 - VARIABLE COMPLEJA

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\frac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$

$\frac{z-\bar{z}}{2} = \mathrm{Im}(z)$

$f_n \xrightarrow[\text{uniforme}]{u} f \implies f_n \xrightarrow[\text{puntual}]{p} f$

$f_n \xrightarrow{u} f$, f_n continuas $\implies f$ continua

Criterio M Weierstrass

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ conv $\Rightarrow \sum f_n$ conv uniform.

$|f_n| < M_n$

Derivadas parciales continuas en z_0 $\Rightarrow f$ diferenciable en z_0

CR: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ siendo $f(z) = u + iv$, $u(x,y)$, $v(x,y)$, $z = x + iy$

Teorema de Riemann

- se cumple CR en z_0
- f diferenciable en z_0

$\iff f$ derivable en z_0

Serie de Potencias radio de conv.

$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$

$R = \frac{1}{\alpha}$

$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

recuerda

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = l$

Funciones elementales

$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} \dots = \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$\mathrm{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots = \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\mathrm{sen}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ← partido 2i !!!

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$f(z)$ serie de pot $\Rightarrow$ $f(z)$ continua en $D(0;R)$, $f(z)$ derivable en $D(0;R)$

como R es la misma para $f(z)$ y $f'(z)$ siempre

$\Rightarrow f \in C^{\infty}(D(0;R))$ infinitamente derivable

$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ (por simple derivación)

$[\pi - \pi, \pi + \pi]$ (α)

$\arg_{\pi}(z) \in [0, 2\pi]$

$\log_{\alpha}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}_{\alpha}(z)$

Integración:

$\int_{\varphi} f(z)\,dz = \int_a^b f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$

$\left|\int_{\varphi} f(z)\,dz\right| \le \underbrace{L(\varphi)}_{\text{longitud}} \cdot \sup|f(z)|$

$\int_{C(z_0,r)} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$ si f tiene primitiva $\int_{\gamma} f = 0$

$\int_{C(z_0,r)} \sum_0^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,dz = 0$ (integral de una serie de potencias $n \ge 0$)

serie de potencias $f(z)$

$\int_{C(z_0,r)} \frac{\sum_0^{\infty} a_n (z-z_0)^n}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = a_k 2\pi i$ se puede despejar a_k

$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ y sustituirse aquí

Teorema de Cauchy y corolarios

$f: G \to \mathbb{C}$ estrellado, f derivable $\Longrightarrow \begin{cases} \int_{\gamma} f(z)\,dz = 0 & \gamma \text{ tray. cerrada derivable a trozos} \\ f \text{ tiene primitiva} \end{cases}$

$f: D(z_0;R) \to \mathbb{C}$, f derivable en D $\iff$ f es serie de potencias convergente en D

$\Longrightarrow f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz$

f en z_1 integrando en una circunferencia de fuera

$\Rightarrow \int_{C_1} f = \int_{C_2} f$

f derivable entre C_1 y C_2

algunas consecuencias:

$f \in C^1 \Rightarrow f \in C^{\infty}$

$f(z_0)$ = valor medio de f en la circunferencia $C(z_0;r)$

Teorema

$f: G \to \mathbb{C}$ estrellado, f continua $\Rightarrow$ ① ≡ ② ≡ ③

① f derivable

② $\int_{\Delta} f = 0$

③ f tiene primitiva

f entera $\equiv$ f derivable en todo $\mathbb{C}$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ entera} \\ \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ es constante

(ej. acotada)
crece menos que z

por tanto no existen f enteras acotadas no ctes.

T^a Fund del Algebra
$p(z)$ polinomio no cte $\Rightarrow$ $p(z)$ tiene ceros

Principio del módulo máximo

$f: G \to \mathbb{C}$, f derivable $\Rightarrow$ no existe ningun maximo local en $B \subset G$ ($|f|$ alcanza su maximo en la frontera)

Singularidades

$f: D'(z_0; R)$ derivable $\Longrightarrow$ f es serie de Laurent $\quad f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

singularidad

disco agujereado $D'(z_0;R)$

cumple la misma fórmula $\quad \boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi}$

Clasificación:

evitable: Serie Laurent sólo positiva (serie de potencias) ej $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

polo de orden $(-n_0)$: Serie Laurent se acaba hacia la izquierda en $n_0 < 0$

esencial: Serie Laurent llega a $-\infty$ ej $e^{1/z}$

Teorema del residuo:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_i) \operatorname{Ind}(\gamma, z_i)}$$

$\operatorname{Res}(f; z_i)$ es el coeficiente a_{-1}
$\ldots + a_{-1}(z-z_i)^{-1} + \ldots$

$\operatorname{ord}(f; z_i)$ orden donde empieza la serie de Laurent.

recuerda $\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{en particular } a_0 = f(z_0)}$

(dos resultados en verdad obvios)

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{ord}(f\cdot g; z_0) = \operatorname{ord}(f; z_0) + \operatorname{ord}(g; z_0) \\ \operatorname{ord}\left(\frac{1}{f}; z_0\right) = -\operatorname{ord}(f; z_0) \\ \operatorname{ord}(f+g; z_0) = \min[\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)] \\ \quad \text{a menos que sean iguales y se anule el término correspond.} \end{array}}$$

Para hallar residuo:

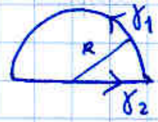
si ord ≥ 0 $\to$ res $= a_{-1} = 0$

si ord < 0 $\to$ multiplicar por $(z-z_0)^k$ para convertir en orden ≥ 0 $\quad$ ord $= -k$

hallar $a_{-1} = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$ derivar $k-1$ veces para poner el a_{-1} en el lugar del a_0; dividir por $(k-1)!$ para compensar las multiplicaciones al derivar

Teorema Calculo de Integrales reales

- f derivable salvo en z_i discontinuidades por encima del eje imaginario
- $|f(z)| \cdot |z^2| \leq M$ asegura que $\pi R \frac{M}{|z|^2} = \frac{\pi M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$



cuando $R \to \infty$
$\int_{\gamma_1} f \to 0$
$\int_{-\infty}^{\infty} f \to \int_{\gamma_2} f$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}(f; z_j)}$$

Lema de Jordan

- f derivable salvo en z_i
- $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0$

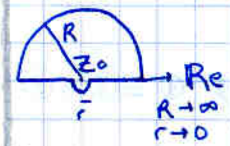
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} ax\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(x)\cdot e^{iaz}; z_k)$$

Proposición

- f derivable salvo en z_0
- z_0 polo de orden 1

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0} \int_\gamma f(z)\,dz = i\alpha \operatorname{res}(f; z_0)$$

Con el teorema mas proposición singularidad en z_0



$$\boxed{2\pi i \operatorname{res}(f; z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + i\pi \operatorname{res}(f; z_0)}$$

APLICACIONES:

Laplace: función armónica $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

f derivable $\Rightarrow$ $\boxed{f = u + iv}$ (u armónica, v armónica; armónicas conjugadas)

$u(x,y)$
$v(x,y)$
$z = x+iy$

$\underbrace{\log z}_{\text{derivable}} = \underbrace{\log|z| + i\arg z}_{\text{armónicas}}$

Cálculo de la conjugada armónica

$$\boxed{v(x,y) = \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(s,y_0)\,ds}$$

se puede sacar tb menos metodicamente aplicando CR y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Teorema

$G \xrightarrow[\text{continua}]{g} D \xrightarrow[\text{armónica}]{u} \mathbb{R}$, $\underbrace{\hphantom{G\to D\to\mathbb{R}}}_{u\circ g}$ $\Rightarrow$ $u\circ g$ es armónica

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ derivable} \Rightarrow u=\text{cte} \perp v=\text{cte} \\ f=u+iv \end{array}}$

Geometría en $\mathbb{C}$

f derivable, $f'(z_0)\neq 0$ $\Rightarrow$ f es conforme en z_0 $\equiv$ conserva ángulos

transf. elementales
- $a\cdot z \to$ homotecia y giro
- $z+b \to$ traslación
- $\frac{1}{z} \to$ inversión

Transformaciones Möbius

composición de las elementales

$$\boxed{\frac{az+b}{cz+d}=w}$$

$z \to w_1 = cz+d \to w_2 = \frac{1}{w_1} \to w = pw_2 + q$

$z \to$ homotecia giro traslación $\to$ inversión $\to$ homotecia giro traslación $\to w$

igualando:

$\boxed{p\cdot\frac{1}{cz+d}+q} = \frac{az+b}{cz+d}$

forma fácil de entender

$p = \frac{bc-ad}{c}$

$q = a/c$

Propiedades:
- transforma rectas, circunf. $\to$ rectas, circunf.
- conserva la razón doble:

$$\boxed{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}} = \frac{w_1-w_2}{w_1-w_4}\cdot\frac{w_3-w_4}{w_3-w_2}$$

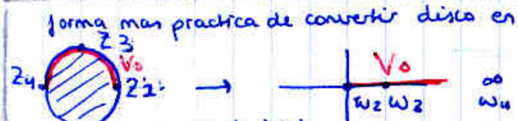
fijando z_2, z_3, z_4, y sus equivalentes w_2, w_3, w_4 podemos despejar w_1 (variable) en función de z_1 (variable)

Problema de Dirichlet

armónica $\xrightarrow[x]{} h(t)$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt}$$

forma más práctica de convertir disco en semiplano



$w = \frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1}$

para sacar $u(z)$ simplemente sustituye w

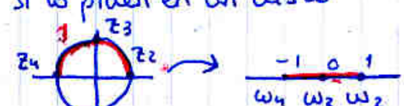
solución:

$$\boxed{u(w) = \frac{V_0}{\pi}\left(\pi - \arg_{\frac{\pi}{2}}(w)\right)}$$

no siempre hace falta usar la fórmula

recuerda $\arg_\alpha(z)$ es armónica

Si lo piden en un disco



$\frac{z-z_2}{z-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2} = \frac{w-w_2}{w-w_4}\cdot\frac{w_3-w_4}{w_3-w_2}$

$\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1} = \frac{w-1}{w+1}\cdot\frac{1}{-1}$

despejar $w = w(z)$

$w = \underbrace{\mathrm{Re}(w)}_{x} + i\,\underbrace{\mathrm{Im}(w)}_{y}$

aplicar la fórmula con esos x e y

Movimiento de fluidos

V velocidad $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$V = u+iv$, cumple CR $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ $\to$ $\overline{V} = u - iv$, cumple $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$ $\to$ derivable $\Rightarrow$ existe: $F' = \overline{V}$ (primitiva de $\overline{V}$) $\to$ $\boxed{V = \overline{F'}}$

F se llama potencial complejo de V

$$\boxed{F = \phi + i\psi \quad \perp \begin{array}{l}\phi=\text{cte} \Rightarrow \text{curvas equipotenciales}\\ \psi=\text{cte} \Rightarrow \text{líneas de flujo}\end{array}}$$

TEMA 2. ANALISIS DE FOURIER

Desigualdad Cauchy-Schwarz
$$|\langle u,v\rangle| \leq \|v\|\cdot\|u\|$$

$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2\rangle = 0$

Proyección de v sobre u: $\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u = v_u$

si u es unitario (ej: $u = e_1$): $\langle v, e_1\rangle e_1 = v_1$

Desigualdad de Bessel
$$\sum |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|_2^2$$

serie de Fourier: $x = \sum \langle x, x_i\rangle x_i$

entonces la desigualdad de Bessel se convierte en la igualdad de Parseval

Serie de Fourier: f integrable 2π-periódica ↳ discontinuidades medida cero
$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\,dt$$

* $\frac{2}{2\pi}$ ← long intervalo

luego si f es impar se puede $2\cdot\frac{2}{2\pi}\int_0^\pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi$ ... no confundir con $\frac{2}{a}\int_0^a$

2π-periódica

Igualdad de Parseval:
$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$$

$$\boxed{\sum(a_k^2 + b_k^2) \text{ converge}}$$

con exponenciales:
$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}$$
$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot e^{-ikt}\,dt$$

si f es par → solo tiene a_k (cos)
impar → solo tiene b_k (sen)

Convergencia puntual de S_n de Fourier

S_n sumas parciales de la serie

Jordan: f diferencia de monótonas crecientes en $[x-\delta, x+\delta]$

part: f es monotona en $[x-\delta, x]$ y $[x, x+\delta]$

Dini: $\exists f(x^+), \exists f(x^-)$
$\exists \int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

part: $\exists$ derivadas laterales $\boxed{\text{finitas}}$ * en x

$$\Rightarrow S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$
‖ si f es continua
$f(x)$

Convergencia uniforme de S_n de Fourier

- f continua +(2π per)
- f derivable a trozos
- * $\frac{df}{dt}$ continua a trozos (i.e. $\frac{\partial f}{\partial t}$ tiene DSF)

$$\Rightarrow S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{U} f(x)$$

* memorizar

Derivación

*
- f continua +(2π per)
- $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$ derivable a trozos

→ la serie de f se puede derivar término a término

$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum(a_k \cos + b_k \operatorname{sen})$

$\frac{\partial f}{\partial t} \sim \sum(A_k \cos + B_k \operatorname{sen})$, $A_0 = 0$

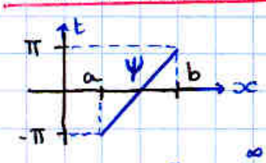
$$\boxed{A_k = k b_k \quad B_k = -k a_k}$$

Integración

- f continua ~~a trozos~~ * +(2π per)

⟹ la serie de f se puede integrar término a término

Cambio de intervalo



$$a_k = \boxed{\frac{2}{b-a}}\int_a^b f(x)\cos(k\psi(x))\,dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k\cos(k\psi(x)) + b_k \operatorname{sen}(k\psi(x))$$

Típico $[-\pi,\pi] \to [-l, l]$ $\quad \psi(x) = \frac{\pi x}{l}$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}$$
← $\frac{2}{2l}$

Series dobles de Fourier

$f(x,y) \to \mathbb{R}$

fijamos y: $f(x,y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum a_k(y)\cos kx + b_k(y)\operatorname{sen} kx$

siendo $a_k(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos kx\,dx$

truco: hacemos el DSF para los coeficientes

$$a_k(y) \sim \frac{c_0}{2} + \sum c_{km}\cos ky + d_{km}\operatorname{sen} ky$$

siendo $c_{km} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_k(y)\cdot\cos ky\,dy$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos kx\,dx\right]\cos ky\,dy$$

así con todos los coef.

Transformada de Fourier

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \underset{(J)}{\overset{(D)}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\alpha)\, e^{i\alpha t}\, d\alpha$$

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt$$

Convolución:

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot g(x-t)\,dt$$

$$\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]$$

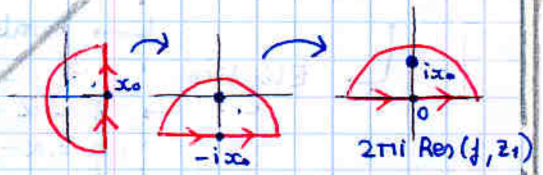
Propiedades:

Traslación: $f(t+t_0) \longrightarrow \boxed{e^{i\alpha t_0}} \cdot \mathcal{F}[f](\alpha)$

Homotecia: $f(k\cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{\frac{1}{|k|}} \mathcal{F}[f]\left(\boxed{\frac{\alpha}{k}}\right)$

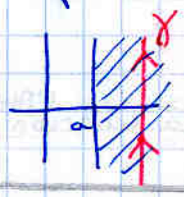
Derivación: $f^{(n)}(t) \longrightarrow \boxed{(i\alpha)^n}\, \mathcal{F}[f](\alpha)$

$\omega = -iz + ix_0$



Transformada de Laplace

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f](z)\, e^{zx}\, db \Big|_{z=a+ib} = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} \mathcal{L}[f](z) e^{zx}\, dz$$



$$\mathcal{L}[f](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-zx}\, dx$$

además:

$$\mathcal{L}[f](z) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[f\cdot e^{-ax}](b)$$

Propiedades

$$\mathcal{L}[f'](z) = z\mathcal{L}[f](z) - f(0)$$

TRUCO $\boxed{e^{at} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{z-a}}$

Aplicación de este tema a EDO

- **Series de Fourier**:

EDO: $L[y(x)] = f(x)$

$a_m y^{(m)}(x) + \ldots = f(x)$

podemos hacer $f(x) = \sum C_k e^{ikx}$

y obtener cada y_k $\quad L[y_k(x)] = C_k e^{ikx}$

conjeturando $y_k = M_k e^{ikx}$ (método de los coef. indeterminados)

la solución particular será $y_p = \sum y_k$

- **Transformada de Fourier**

ej $\quad 3y''' + y'' - 2y' = f(t)$

aplicando $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}[3y''' + y'' - 2y'] = \mathcal{F}[f(t)]$ $\quad \mathcal{F}[y'] = i\alpha\,\mathcal{F}[y]$

$[3(i\alpha)^3 + (i\alpha)^2 - 2(i\alpha)]\mathcal{F}[y] = \mathcal{F}[f(t)]$

$$\mathcal{F}[y] = \frac{\mathcal{F}[f(t)]}{3(i\alpha)^3 + (i\alpha)^2 - 2i\alpha}$$

y se obtiene mediante $\mathcal{F}^{-1}$

TEMA 3. ECUACIONES DERIVADAS PARCIALES

Ec ondas : $u_{tt} = \nabla^2 u \cdot c^2$ ej. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

Ec calor : $u_t = \nabla^2 u \cdot c^2$

Ec Laplace : $\nabla^2 u = 0$

Reducción a forma canónica

$u(x,y)$ incognita

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + \underbrace{Du_x + Eu_y + Fu}_{\text{parte lineal no presenta problemas}} = G$$

siendo A, B, C, D, E, F funciones de (x,y)

ecuación característica

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

→ Hiperbólico $B^2 - 4AC > 0$ → $\xi = K$, $\eta = K$ nuevas variables

→ Parabólico $= 0$ → ξ, tomamos η cualquier función independiente $\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$

→ Elíptico < 0 → $\xi = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$ dos soluciones complejas conjugadas

tomamos $\left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\}$ nuevas variables

despues sustituir ξ y η en la ec usando regla de la cadena
$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$
la ecuación queda en forma canónica

ej
$A = y^2$ $B = 0$ $C = -x^2$
$y' = \pm \frac{x}{y} \rightarrow y\,dy = x\,dx$
$\frac{y^2}{2} \pm \frac{x^2}{2} = K$
$\rightarrow \xi = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}$
$\eta = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$

Solución D'Alembert de la ecuación de ondas

$$\left\{\begin{matrix} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{matrix}\right\} \rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau$$

Separación de variables

suponer $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ → sustituir en la ec y dividir por XT

quedan cosas como $\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}$ lo igualamos a λ (valores propios) y solucionamos las EDO según λ. Normalment $\lambda < 0$ → $X_n, T_n \rightarrow u_n$; $\lambda = 0$ → $X_0, T_0 \rightarrow u_0$ $\}$ $u = u_0 + \sum u_n$ aplicamos C.I. y Fourier

Problema no homogéneo:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} + F(x)$

se hace un C.V. $v_{(x,t)} = u_{(x,t)} + W(x)$ → sustituir queda: $\left\{\begin{matrix} v_{tt} = c^2 v_{xx} - c^2 W'' + F(x) \\ v(0,t) - w(0) = A \\ v(l,t) - w(l) = B \end{matrix}\right.$

exigimos $c^2 W'' = F(x) \Rightarrow W + Kx + M$

exigimos $w(0) = -A$, $w(l) = -B$ $\Rightarrow W$ → $\left.\begin{matrix} v_{tt} = c^2 v_{xx} \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \end{matrix}\right\}$ resolvemos

Métodos transformados

Fijar una variable y aplicar la transformada respecto a la otra
ej fijar y y aplicar $\mathcal{F}_x$, de forma que hacemos desaparecer la x : por ejemplo

$$\boxed{\begin{matrix} \mathcal{F}_x[u_{xx}] = (i\alpha)^2 \mathcal{F}_x[u] \\ \mathcal{F}_x[u_{yy}] = \frac{d^2}{dy^2}\mathcal{F}_x[u] \end{matrix}}$$

llamamos $\mathcal{F}_x[u(x,y)](\omega) \equiv U_\omega(y)$ no hay x

se resuelve la EDO para $\mathcal{F}_x[u]$ y luego se hace la transformada inversa

La de Laplace igual pero recordando

$$\boxed{\begin{matrix} \mathcal{L}_x[u_x] = (z)\mathcal{L}_x[u] - u(0,y) \\ \mathcal{L}_x[u_{xx}] = z^2\mathcal{L}_x[u] - z\,u(0,y) - u_x(0,y) \\ \mathcal{L}_x[u_{yy}] = \frac{d^2}{dy^2}\mathcal{L}_x[u] \end{matrix}}$$

← C.I.

queda una EDO de $\mathcal{L}_x[u](z) \equiv L_z(y)$

hacerlo tb a las C.I.

ej $u(x,0) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_x[u(x,0)] = 0 \Rightarrow L_z(0) = 0$

$u_y(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} L_z(0) = 0$

Transformada seno : $S[f(x)](n) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx$ hallar $S[f'(x)](n)$ por partes

$C[f(x)](n) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx$

Función de Green (EDO)

cualquier EDO lineal con C.I. nulas

operador diferencial $P(D) = \left(a_n \frac{d^n}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0\right)$

cualquier EDO lineal: $P(D)\,y(x) = f(x)$

aplicando $\mathcal{L}$ a ambos lados:

$$\mathcal{L}[P(D)\,y(x)] = \mathcal{L}[f(x)]$$ } propiedad derivación siendo C.I. nulas

polinomio → $p(z)\,\mathcal{L}[y(x)] = \mathcal{L}[f(x)]$

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{p(z)}\mathcal{L}[f](z)$$

haciendo $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(z)}\mathcal{L}[f](z)\right]$ se puede llegar a:

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = (G * f)(x) \\ G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zx}}{p(z)}\,dz \end{gathered}}$$

Sistemas de Sturm-Liouville

$$\boxed{a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + [a_0(x) + \alpha]\,y = 0} \to \text{ej: } X'' - \lambda X = 0$$

↓

$$(py')' + (q + s\alpha)\,y = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} p &= e^{\int \frac{a_1}{a_2}} \\ q &= \frac{a_0}{a_2}\cdot p \\ s &= \frac{p}{a_2} \end{aligned}}$$

importante reconocer p y s

si $p>0$, $s>0$ ⇒ ecuación regular ⇒ $\langle y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}\rangle_s = 0$

⇒ $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$ valores propios

⇒ $(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots)$ son un SOG completo

$$\boxed{\langle f,g\rangle_s = \int f\cdot g\cdot s\,dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,y_{\alpha_k} \qquad a_k = \frac{\langle f, y_{\alpha_k}\rangle_s}{\langle y_{\alpha_k}, y_{\alpha_k}\rangle_s}}$$

es importante saber la s para esto

Normalmente esto es útil al final de un ejercicio de separación de variables donde no podemos decir que la suma final de n-soluciones sea una serie Fourier. Si una de las EDOS $X(x)$ ó $T(t)$ era un sistema S-L y tenía valores propios λ_n y soluciones X_n

hay q saber detectarlo ↗

podemos asegurar que son un SOG completo respecto de s, $s = \frac{p}{a_2}$ $p = e^{\int\frac{a_1}{a_2}}$

y podemos aplicar la típica última condición inicial

$$\sum X_n \alpha_n = f \to \alpha_n = \frac{\langle f, X_n\rangle_s}{\langle X_n, X_n\rangle_s}$$

TEMA 1. VARIABLE COMPLEJA

· Números complejos

$\mathbb{C}$ tienen ciertas características:
- Conjuntistas: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$
- Algebraicas: forma un <u>cuerpo</u>
  Tienen dos operaciones
  $\rightarrow (a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$
  $\rightarrow (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$
- Topológicas: $\underset{\text{distancia}}{d}((a,b),(c,d)) = \|(a,b) - (c,d)\|_2$

$$= \|(a-c,\ b-d)\|_2$$
$$= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

· **Estructura**

$$z = (a, b)$$

$b = \mathrm{Im}(z)$, $b \in \mathbb{R}$

$a = \mathrm{Re}(z)$

· **Conjugado**

$z = (a, b)$
$\overline{z} = (a, -b)$

· **Nomenclatura más operativa**

Convenio: si z está en eje real $(a,0)$ se considera real a

$(0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0)$
$(0,1)^2 = -1$

$$\boxed{\begin{array}{c}(0,1) = i \\ i^2 = -1\end{array}}$$

$z = (a,b)$
$\quad = (a,0) + b(0,1)$
$z = a + bi$

· **Formulitas vitales** con el conjugado

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$$

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$$

· **Producto**

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$

· No existe ordenación de los números complejos:
$z < \omega$ no tiene sentido

ejercicio:

Probar que

$$|z+1| > |z-1| \longleftrightarrow Re(z) > 0$$

$$|z+1| > |z-1|$$
$$\Updownarrow$$
$$|z+1|^2 > |z-1|^2$$
$$\Updownarrow \quad |z|^2 = z\cdot\bar{z}$$
$$(z+1)\cdot(\overline{z+1}) > (z-1)\cdot(\overline{z-1})$$
$$\Updownarrow$$
$$(z+1)\cdot(\bar{z}+1) > (z-1)\cdot(\bar{z}-1)$$
$$\Updownarrow$$
$$z\bar{z}+z+\bar{z}+1 > z\bar{z}-z-\bar{z}+1$$
$$\Updownarrow$$
$$z+\bar{z} > -z-\bar{z}$$
$$\Updownarrow$$
$$2(z+\bar{z}) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$z+\bar{z} > 0$$
$$\Updownarrow \quad Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$
$$2\,Re(z) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$Re(z) > 0$$

ejercicio

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} \underset{z\bar{z}=|z|^2}{=} \frac{(3+2i)(5+i)}{5^2+1^2} = \frac{13+13i}{26}$$

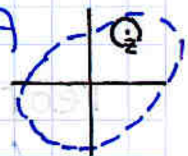
- Conjuntos que usaremos

Disco: $D(z_0; r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \}$

Disco cerrado: $\overline{D}(z_0; r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$

Circunferencia: $C(z_0; r) := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$

- Conjunto abierto:
  A se llama abierto cuando
  $\forall z \in A, \exists r > 0$ tal que $D(z; r) \subset A$
  (no contiene su frontera)



- Conjunto cerrado:
  Cuando su complementario $\complement A$ es abierto

- Conjunto acotado:
  Cuando está dentro de un disco.

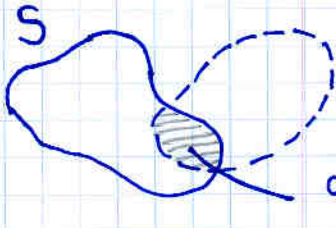
- Conjunto conexo
  Cuando no se puede escribir como unión disjunta de dos conjuntos abiertos relativos a S no vacíos

conexo

no conexo

- Dominio
  Un conjunto abierto y conexo

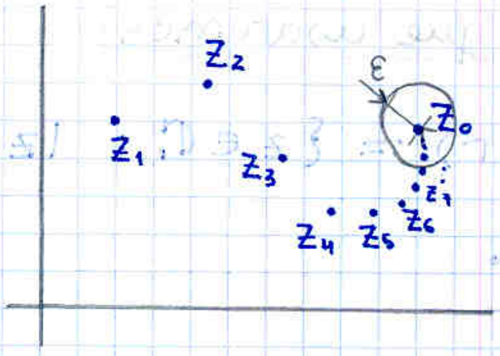
Abierto relativo de S



No se puede separar un conjunto en dos abiertos relativos

Sucesiones en $\mathbb{C}$

$(z_n)_{n=1}^{\infty}$



Convergencia:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \quad := \quad \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / \forall n\geq n_0, z_n \in D(z_0;\varepsilon)$$

ejemplo: $z_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\downarrow\, 0} i \qquad z_n \to 0+0i$

Teorema

$(z_n)_{n=1}^{\infty}$ converge $\Longrightarrow$ $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada

Demostración

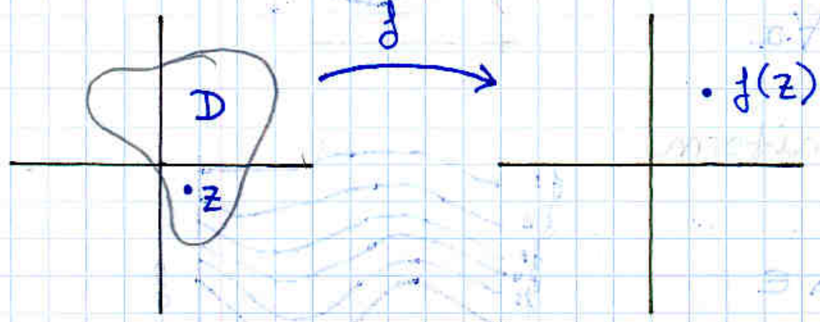
ejemplo

$z_n = \frac{1}{n} + ni$

no acotada $\Rightarrow$ no converge

Funciones complejas de variable compleja

$f: \underset{\substack{\text{(dominio)} \\ \text{en } \mathbb{C}}}{D} \longrightarrow \mathbb{C}$



Continuidad

- Def: f continua en $z_0 \in D$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

es decir: si $z_n \to z_0$ entonces $f(z_n) \to f(z_0)$

- Def: f continua en D

continua en todo $z_0 \in D$

Dado $z_0 \in D$ y $\varepsilon > 0 \Rightarrow \delta(z_0, \varepsilon)$

δ depende de ε y de z_0

- Def: f uniformemente continua en D

Dado $\varepsilon > 0 \Rightarrow \delta(\varepsilon) \quad \forall z_0$

δ no depende del z_0 que cojamos

- Teorema de Heine

$f: \underset{\substack{\text{cerrado} \\ \text{acotado}}}{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ f es uniformemente continua

f continua

ejemplos:

¿ $z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n \to z_0)$?

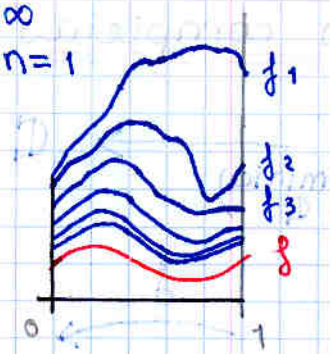
$f: z \to Re(z)$ si $\Rightarrow$ continua

$f: z \to \bar{z}$ si $\Rightarrow$ continua

$f: z \to |z|$ si pues $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$ composición de funciones continuas

Sucesiones de funciones

(Variable real) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

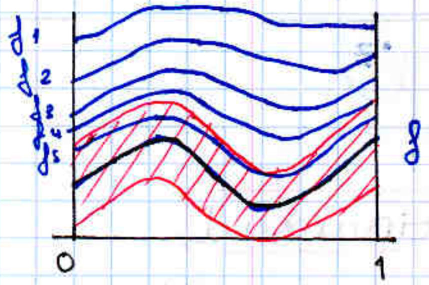


Convergencia. Tipos

- Convergencia puntual

$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x$

- Convergencia uniforme



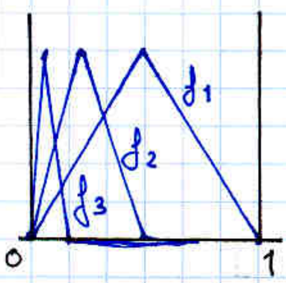
Dada ▨

$\exists n_0 / \forall n > n_0, f_n \in$ ▨

- Teorema

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Convergencia uniforme a } f & \Longrightarrow & \text{convergencia puntual a } f \\ f_n \xrightarrow{u} f & & f_n \xrightarrow{P} f \end{array}}$$

ejemplo



$f_n \xrightarrow{P} 0$

$f_n \not\xrightarrow{u} 0$

al saber que converge puntualmente a 0, no tiene sentido comprobar si converge uniformemente a algo distinto de ceo (a lo que no converge puntualmente)

$\neg q \to \neg p$

- Teorema

si (f_n) (todas las f_n continua) $\xrightarrow{u}$ (uniformemente) $f \Longrightarrow f$ es continua

No ocurre lo mismo con (f_n) (continuas) $\xrightarrow[\text{puntual}]{P} f \not\Longrightarrow f$ continua

ejemplo

$f_1(x) = x$

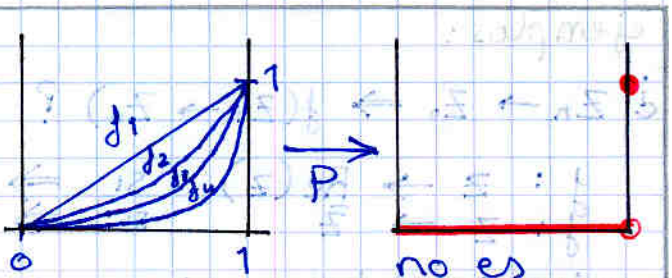
$f_2(x) = x^2$

$f_3(x) = x^3$

$\vdots$

$f_n(x) = x^n$

f_n son todas continuas. Es más, son las mejores funciones $f_n \in \mathcal{C}^\infty$



no es continua

Series

Una serie surge a partir de una sucesión

Caso $a_n \in \mathbb{R}$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

sumas parciales

Obtenemos así una nueva sucesión $(S_n)_{n=1}^{\infty}$
Esta nueva sucesión puede o no converger

$$(S_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Para saber si una serie converge no sirve con hacer la suma hasta un n grande.
Por ej. en $\sum \frac{1}{n}$ el error cometido será siempre ∞

Hay que utilizar criterios de convergencia (ver apuntes Cálculo Diferencial)

Caso números complejos

Todo exactamente igual, mismos criterios

EXCEPTO lo de si la serie es monótona creciente; no tiene sentido en los números complejos

Series de funciones

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \begin{aligned} S_1 &= f_1 \\ S_2 &= f_1 + f_2 \\ S_3 &= f_1 + f_2 + f_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(S_n)_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[\mathcal{U}]{P} S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

puntual (P), uniforme ($\mathcal{U}$)

Teorema: Criterio M de Weierstrass

Si existe M_n (sucesión de funciones constantes) tal que

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in D \qquad f_n : D \to \mathbb{C}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_N \text{ convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ converge uniformemente}$$

cada sumando está limitado por M_n indep. de z

Derivación de funciones de variable compleja

$f : \underset{\substack{\text{abierto}\\ \text{conexo}\\ \text{(dominio)}}}{D} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad z \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$ (igual que en números $\mathbb{R}$)

Normalmente con vectores (ej $\mathbb{R}^2$) no sirve. (no se puede dividir por vectores)
En este caso, aun siendo los números complejos similares a $\mathbb{R}^2$, la división sí ha sido introducida.

Notación

$$\boxed{f(z) = u(z) + i\,v(z)} \qquad z \in \mathbb{C},\; z = (x, y)$$

$f(x,y)$ $\quad z = x+iy$, $z = (x,y)$ $\quad u(x,y)$ $\quad v(x,y)$ $\quad$ parte real $\quad$ parte imaginaria

ejemplos

$f(z) = \bar{z} = x - iy \qquad u(z) = x = u(x,y)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v(z) = -y = u(x,y)$

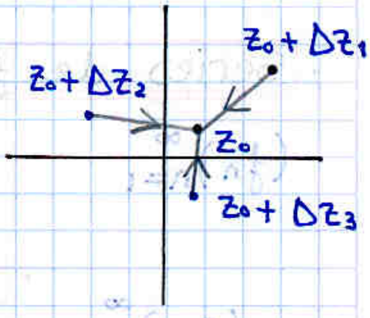
$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$u(x,y) = u(z) = x^2 - y^2$
$v(x,y) = v(z) = 2xy$

Condiciones para ser derivable

supongamos f es derivable en z_0

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$



El límite debe ser el mismo para cualquier Δz que tomemos.
Utilizemos dos casos particulare e igualemoslos; pero antes, vamos a desarrollar $f'(z_0)$ con la notación de arriba.

$$f'(z_0) = \lim \frac{[u((x_0,y_0)+(\Delta x,\Delta y)) - u(x_0,y_0)] + i[v((x_0,y_0)+(\Delta x,\Delta y)) - v(x_0,y_0)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

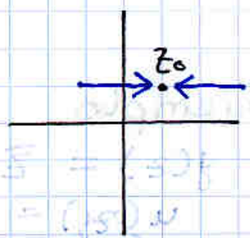
$z_0 = (x_0, y_0)$
$\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$
$f(z) = u(z) + i\,v(z)$

· caso $\Delta z = (\Delta x, 0)$ acercar el límite horizontalmente

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\underbrace{[u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)]}_{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)} + i \underbrace{[v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)]}_{\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}}{\Delta x}$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$



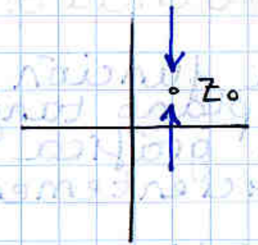
· caso $\Delta z = (0, \Delta y)$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)] + i[v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)]}{i\Delta y} \quad = (0, \Delta y)$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$f'(z_0) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$



Igualando la parte real y la parte imaginaria:

• **Ecuaciones de Cauchy-Riemann** (CR)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}}$$

las derivadas parciales evaluadas en $z_0 = (x_0, y_0)$
No lo he escrito por simplicidad

• **Teorema de Riemann**

Sea $f: D \to \mathbb{C}$

f es derivable en z_0 $\Longleftrightarrow$ se cumplen ecs. $CR(z_0)$
f es diferenciable en z_0 (x_0, y_0)

• **Teorema**

f tiene derivadas parciales continuas en $z_0 = (x_0, y_0)$ $\Longrightarrow$ f es diferenciable en z_0

ejemplo

$f(z) = z^2$ · derivadas parciales continuas $\Rightarrow$ diferenciable

$u(x,y) = x^2 - y^2$

$v(x,y) = 2xy$ · se cumple CR

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad \Rightarrow$ f es derivable

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ Ademas se cumple:

$$f'(z) = 2x + i2y = 2z$$

ejemplo

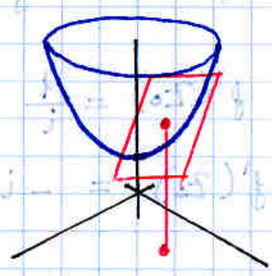
$f(z) = \bar{z} \equiv f(x,y) = x - iy$ no se cumple CR

$u(x,y) = x$

$v(x,y) = -y$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \quad \Rightarrow$ f no es derivable

· $\boxed{\text{Diferenciabilidad. Plano tangente}}$

Una función es diferenciable cuando el plano tangente se parece tanto a la gráfica como se desee suficientemente cerca del punto.



gráfica $\approx$ plano tangente

$$\underbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}_{\text{punto de la gráfica cercano a }(x_0,y_0)} \approx \underbrace{A\Delta x + B\Delta y}_{\text{plano que pasa por el origen}} + \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{para acercarlo a la función}}$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \underbrace{A\Delta x + B\Delta x}_{} + f(x_0,y_0) + \underbrace{h(\Delta x, \Delta y)\cdot \|(\Delta x, \Delta y)\|}_{}$$

en la ecuación del plano, A es la inclinación en x y B en la inclinación en y

el error que se comete. Producto de dos cosas muy pequeñas

Buscamos que la inclinación del plano sea la misma que la de la gráfica

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + f(x_0,y_0)}_{\text{la fórmula de Taylor de orden 1}} + h(\Delta x, \Delta y)\cdot\|(\Delta x, \Delta y)\|$$

→ $0 < r < R \equiv D(0; R)$?

→ $\log_0'(z) = \frac{1}{z} \equiv \int \frac{1}{z} dz = \log_0(z)$?!?

→ en función logaritmo: $|z| < 1$?

Series de Potencias

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$n < 0$ no es una serie de potencias (se llama serie de Laurent)

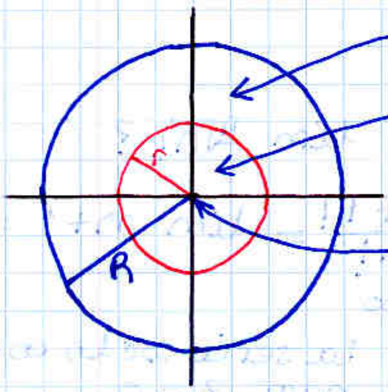
Funciones elementales como la exponencial o el seno, son series de potencias

Teorema

Dado $\sum a_n z^n$ existe $0 \leq R \leq +\infty$ tal que

1. Si $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolutamente
2. si $|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge
3. si $0 < r < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge uniformemente en $\overline{D}(0; r)$

R se llama radio de convergencia



la serie converge absolutamente

la serie converge uniformemente

en $z=0$, todas las series convergen incluso cuando $R=0$

Fórmula para R (Cauchy - Hadamard)

$$R = \frac{1}{\alpha} \qquad \alpha = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

puede ser difícil de

si $\alpha = 0 \Rightarrow R = +\infty$
si $\alpha = +\infty \Rightarrow R = 0$

Recuerda:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Longrightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = l$$

Definición Teórica:

$$R = \sup\left\{0 \leq r \text{ tales que } \sum a_n r^n \text{ converge absolutamente}\right\}$$

↖ supremo: la cota superior más pequeña de todas

¿Qué es el límite superior?
El mayor límite de cualquier SUBsucesión convergente o divergente a infinito.

ej: $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \dots$
subsucesión $1, 1, 1, 1 \dots \to 1$ $\quad \limsup = 1$
subsucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots \to 0$

ej: $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$ $\quad \limsup = +\infty$

ej: $-1, -2, -3, -4, \dots$ $\quad \limsup = -\infty$

Calculo del radio de convergencia: ejemplos

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ $\quad |a_n| = 1$
  $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$
  $\underline{R = 1}$

- $1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots$ $\quad a_0 = 0, \ a_1 = 1, \ a_2 = 0, \ a_3 = 1$ $\quad \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$
  $\underline{R = 1}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ $\quad |a_n| = n$
  $\lim \sqrt[n]{n}$?
  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Longrightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = l$
  $\lim \frac{n+1}{n} = 1 \Longrightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1$
  $\underline{R = 1}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ $\quad a_n = n!$ $\quad \lim \sqrt[n]{n!}$?
  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim n+1 = +\infty$
  $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$
  $\underline{R = 0}$ la serie sólo converge para $z = 0$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\quad a_n = \frac{1}{n!}$ $\quad \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$
  $\alpha = 0$
  $R = +\infty$

la serie converge en todo el plano complejo

De hecho $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} := e^z$

Demostración del teorema

$\sum a_n z^n \qquad R = \sup\{0 \leq r \text{ tales que } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge}\}$

supremo: cota superior más pequeña

① Tomemos $|z| < R$

$\exists\, |z| < r < R \;/\; \sum |a_n| r^n$ converge

$|\sum a_n r^n| \leq \sum |a_n||z|^n \leq \sum |a_n| r^n$

$\Rightarrow \sum |a_n||z|^n$ converge $\Rightarrow \sum a_n z^n$ conv. absolut.

② sea $|z| > R$

supongamos $\sum a_n z^n$ C $\Rightarrow a_n z^n \to 0$

$|a_n||z|^n \leq K$ (acotada)

sea $R < |z_0| < |z|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z_0|^n = \sum \underbrace{|a_n||z|^n}_{\leq K} \frac{|z_0|^n}{|z|^n} \leq K \sum \left|\underbrace{\frac{z_0}{z}}_{<1}\right|^n_{C}$$

$\Rightarrow \sum |a_n||z_0|^n$ es convergente

y sin embargo $|z_0| > R$, por lo que R no es el supremo.

CONTRADICCIÓN $\Rightarrow \sum a_n z^n$ no conv.

③ $0 < r < R$

$|z| \leq r$

$\sum a_n z^n$

$|a_n||z|^n \leq |a_n| r^n = M_n$

$\sum M_n = \sum |a_n| r^n$ converge

$\left.\begin{array}{l}\sum M_n \text{ converge} \\ |a_n||z|^n \leq M_n\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{criterio M de Weierstrass}} \sum a_n z^n$ conv. uniform.

Consecuencias del teorema. Derivación de $f(z)$

$f(z) = \sum a_n z^n$

Por un teorema anterior:

si $\cdot\ f_N = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n$ son todas continuas

y $\cdot\ (f_N) \xrightarrow[u]{} f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

entonces $\Rightarrow f$ es continua

a) $f(z)$ es continua en $D(0;R)$

y no sólo continua, se puede demostrar

b) $f(z)$ es DERIVABLE en $D(0;R)$

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Radio de convergencia de f'

$$\alpha = \limsup \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup \underbrace{\sqrt[n]{|n|}}_{1} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

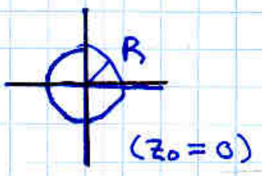
α es la misma para $f(z)$ y para $f'(z)$

f y todas sus derivadas sucesivas tienen el mismo R radio de convergencia

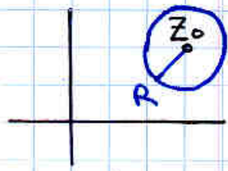
$f \in C^{\infty}(D(0;R))$

Series de potencias "centradas" en z_0

$\sum a_n z^n$



$\sum a_n (z-z_0)^n$



converge en $D(z_0; R)$

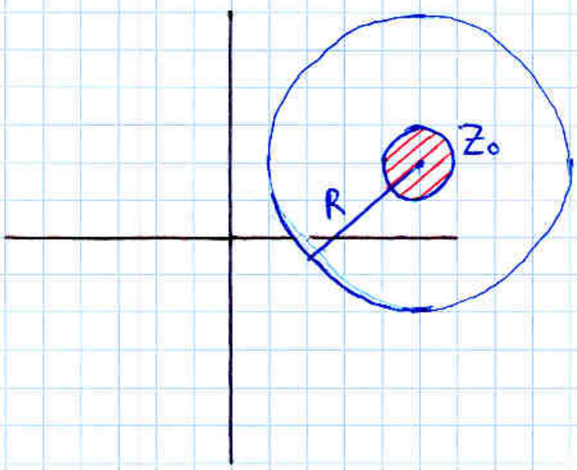
TODO lo anterior se aplica

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$$
$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \dots$$
$$f''(z) = 2a_2 + 3\cdot 2 a_3(z-z_0) + \dots$$
$$f'''(z) = 3\cdot 2 a_3 + 4\cdot 3\cdot 2 a_4(z-z_0) + \dots$$

Evaluando la función en $z = z_0 \Rightarrow (z-z_0) = 0$

$$f(z_0) = a_0$$
$$f'(z_0) = a_1$$
$$f''(z_0) = 2a_2$$
$$f'''(z_0) = 3!\, a_3$$

$$\boxed{f^n(z_0) = n!\, a_n \qquad a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}}$$



Conociendo la función en un trozo alrededor de z_0, por pequeño que sea, podemos obtener a_n y concer la función en todo.

$\boxed{\text{Funciones Elementales}}$

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

pura notación. No sabemos elevar e a z

$\exp'(z) = \exp(z)$ la única función q. tiene esa propiedad

DEM: $$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{sen}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Si sustituyes, se puede comprobar que:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \operatorname{sen} z$$

DEM:

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$e^{-iz} = 1 - iz - \frac{z^2}{2} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!}$$

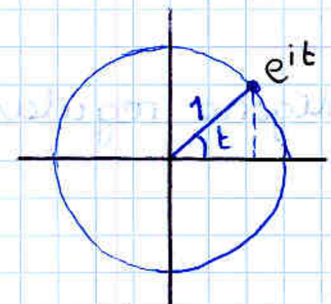
$$\Longrightarrow \boxed{e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z} \quad z \in \mathbb{C}$$

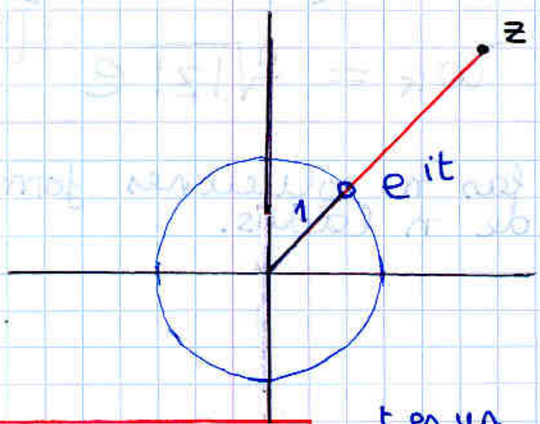
Ecuación de Euler

Caso muy útil $z = t \in \mathbb{R}$

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

la gran fórmula $e^{\pi i} = -1$





la exponencial es $2\pi i$ - periódica

$$e^z = e^{z + 2\pi i}$$

$$\boxed{z = |z|\, e^{it}}$$

t es un argumento de z.

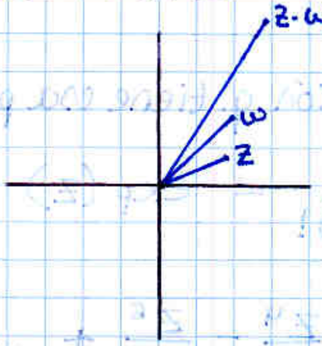
Interpretación geométrica de algunas operaciones en $\mathbb{C}$

→ Multiplicación:

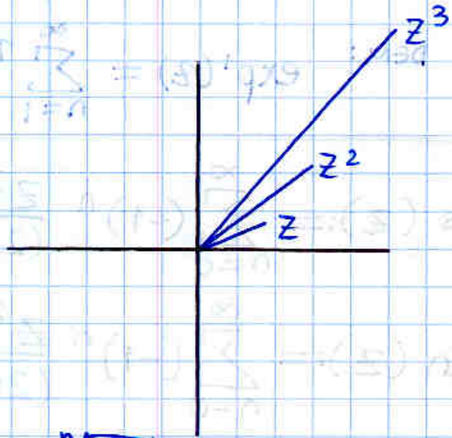
se puede comprobar con la definición

$z = |z| e^{i\theta}$
$\omega = |\omega| e^{i\alpha}$

$$z \cdot \omega = |z| \cdot |\omega| \cdot e^{i(\theta + \alpha)}$$



↳ Los módulos se multiplican
↳ Los argumentos se suman.



→ Raiz n-ésima

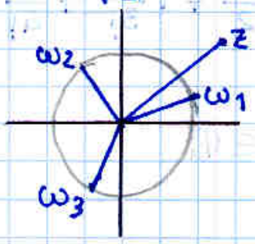
$$\sqrt[n]{z} = \omega \Rightarrow \omega^n = z$$

· Módulo: logicamente $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$

· Argumento: logicamente $\arg(\omega) = \frac{\arg(z)}{n}$

Pero z puede tener varios argumentos: θ, $\theta + 2\pi$, $\theta + 4\pi$ ...

ej $\sqrt[3]{z} = \omega$ $\quad |\omega| = \sqrt[3]{|z|}$



los argumentos de z son $\theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi$

los argumentos de los ω son $\frac{\theta}{3}, \frac{\theta + 2\pi}{3}, \frac{\theta + 4\pi}{3}$

$\frac{\theta + 6\pi}{3}$ ya sería el mismo que $\frac{\theta}{3} = \frac{\theta}{3} + 2\pi$

La raiz n-ésima tiene n soluciones

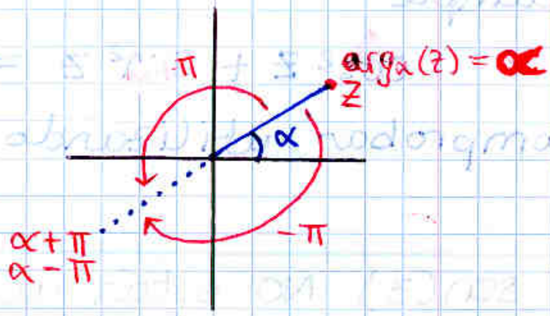
$$\boxed{\begin{gathered} \sqrt[n]{z} = \{\omega_1 \ldots \omega_n\} \\ \omega_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left[\frac{\theta + (k-1)2\pi}{n}\right]} \end{gathered}}$$

las n soluciones forman un polígono regular de n lados.

Función argumento

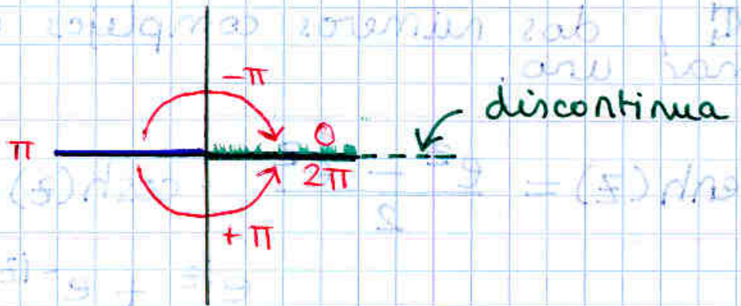
$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\arg_\alpha(z) \in \;]\alpha-\pi, \alpha+\pi[$$



el mas común es $\alpha = \pi$

$$\boxed{\arg_{\pi}(z) \in \;]0, 2\pi[}$$



La función $\arg_\alpha(z)$ siempre es discontinua en una línea.

Logaritmo

No se puede definir como la inversa de la expon. puesto que la exponencial es periódica en $\mathbb{C}$

$$\boxed{\log_\alpha(z) := \log|z| + i\,\mathrm{Arg}_\alpha(z)}$$

$$\log_0(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$$

con la definición de la serie de potencias se puede comprobar

$$\log_0'(z) = \frac{1}{z}$$

Analogía de funciones en $\mathbb{C}$ con funciones en $\mathbb{R}$.

No hay que llevarla más allá de decir que son iguales en el eje real.

En algunos casos sí que hay alguna analogía, por ej se cumple

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$$

se puede comprobar utilizando la definición

Pero:

Cos (z) y sen(z) NO están acotados

en $\mathbb{R}$ $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \iff \begin{matrix} |\cos x| \le 1 \\ |\operatorname{sen} x| \le 1 \end{matrix}$

en $\mathbb{C}$, dos números complejos enormes pueden sumar uno.

$$\boxed{\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^z}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

si hacemos $z = x + iy$

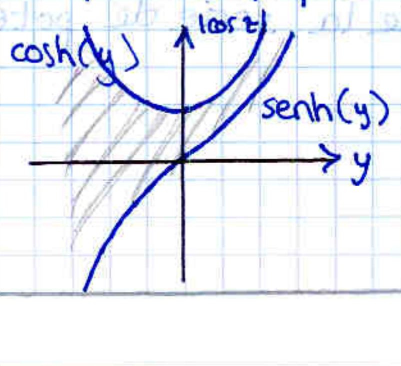
$$\cos(z) = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} e^{y}}{2}$$

$$|\cos(z)| \le \frac{\overset{1}{|e^{ix}|} \cdot |e^{-y}| + \overset{1}{|e^{-ix}|} \cdot |e^{y}|}{2} \le \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

$$\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \le |\cos(z)| \le \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

$$\operatorname{senh}(y) \le |\cos(z)| \le \cosh(y)$$

parte imaginaria de z

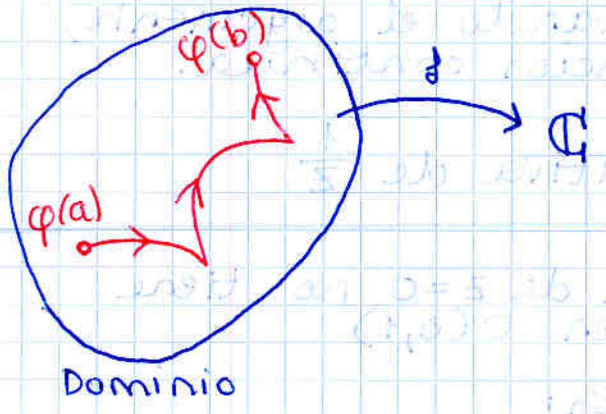


$\Rightarrow$ cos (z) NO ESTÁ acotado

Integración

Tenemos una función $f: D \to \mathbb{C}$

Que queremos integrar a lo largo de una curva $\varphi(t)$ en $\mathbb{C}$



Curva $\varphi(t)$

$[a,b] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$

$t \longrightarrow \varphi(t)$

- continua
- derivable a trozos

$$\boxed{\int_\varphi f(z)\,dz \equiv \int_a^b f[\varphi(t)]\cdot \varphi'(t)\,dt}$$

$dz \to \varphi'(t)\,dt$

$f(z) \to f[\varphi(t)]$

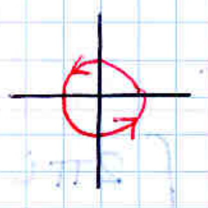
Muy similar a las integrales de línea;

Evaluamos f en cada tramo diferencial de la curva $\varphi(t)$ y los sumamos

ejemplo:

$f(z) = z^2$

$\varphi \equiv C(0;1)$



calcular $\int_\varphi z^2\,dz$

Parametrizar la curva $\varphi(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$

$\varphi'(t) = i e^{it}$

$$\int_\varphi z^2\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\cdot i e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,(e^{it})^3\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{3it}\,dt = i\left[\frac{e^{3it}}{3i}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{3it}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\,[1-1] = 0 \;/\!/$$

Lógicamente, en una curva cerrada, si el integrando tiene primitiva, al evaluarla en el último y el primer punto y restarlos, al ser el mismo punto, da cero.

En el próximo ejemplo integramos $\frac{1}{z}$, que no tiene primitiva.
¿Cómo que no? ¿i y $\log z$?!

El $\log z$ se define utilizando el argumento, el argumento no es función continua.

$\ln z$ no es primitiva de $\frac{1}{z}$

ejemplo

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z}\, dz$$

El problema de $z=0$ no tiene relevancia en $C(0,1)$

parametrización:

$\varphi(t) = e^{it}$ $\quad \varphi'(t) = ie^{it}$ $\quad t \in [0,2\pi]$

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i$$

En efecto, no es cero

Sabiendo que

z^n tiene primitiva $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ $\quad \forall n \neq -1$

Podemos escribir

$$\boxed{\int_{C(0,1)} z^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}}$$

Sabiendo integrar esto, sabremos integrar series de potencias

Generalizando;

$$\boxed{\int_{C(z_0;r)} (z-z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}}$$

· Integral de una serie de potencias:

$$\int_{C(z_0,r)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \, dz \underset{\substack{0<r<R \\ \text{conv} \\ \text{uniforme}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(z_0,r)} a_n (z-z_0)^n \, dz = 0$$

Es lógico, puesto que una serie de potencias tiene primitiva.

· Integral de una serie de potencias dividido $(z-z_0)^{k+1}$

siendo $f(z)$ una serie de potencias $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$

$$\int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \quad k \geq 0 \text{ fijo}$$

NOTA: $z - z_0 = \text{cte} = r$

$$= \int_{C(z_0;r)} \sum a_n (z-z_0)^{n-k-1} \, dz$$

que vale 0 siempre excepto en $n-k-1 = -1$: $n = k$ donde vale $2\pi i$

$$\int_{C(z_0;r)} \frac{\boxed{\sum a_n (z-z_0)^n}^{\,f(z)}}{(z-z_0)^{k+1}} = a_k \, 2\pi i$$

si de ahí despejamos a_k obtenemos otra fórmula útil para conocer los coeficientes a_k. además de la que ya sabíamos.
En una hay que integrar (mucho más estable) y en la otra derivar

$$\boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz}$$

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}$$

uniendo ambas

$$f^{k}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz$$

Corolario:

$$|f(z)| \leq M_r \text{ para } |z - z_0| = r \implies |a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$$

Dem: $|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int \cdots \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(2\pi r \sup \left| \frac{f(z)}{\underbrace{(z-z_0)}_{r}{}^{n+1}} \right| \right)$ longitud por el valor máximo

$$|a_n| \leq \frac{\sup|f(z)|}{r^n}$$

Teorema de Cauchy

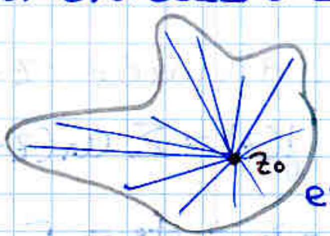
Definición previa: conjunto estrellado

S estrellado respecto a z_0 $\equiv \forall z \in S,\ [z_0, z] \subset S$

segmento recto que no se sale del conjunto

S es estrellado $\equiv$ es estrellado respecto a algun punto

ej



estrellado

no estrellado

Teorema de Cauchy:

Sea $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ (G conjunto estrellado)

f es derivable $\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0} & \gamma: \text{trayect. cerrada y derivable a trozos} \\ f \text{ tiene primitiva} \end{cases}$

- Corolario A

f es derivable en la zona sombreada (se puede pasar de C_1 a C_2 sin tocar ninguna singularidad) $\Longrightarrow \displaystyle\int_{C_1} f = \int_{C_2} f$

- Corolario B (Fórmula integral de Cauchy)

$f: D(z_0; R) \to \mathbb{C}$
f derivable en D
$z_1 \in D(z_0; r) \quad r < R$

$\Longrightarrow f(z_1) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C(z_0; r)} \frac{f(z)}{(z - z_1)}\, dz$

el valor de f en cualquier z_1 se puede obtener integrando una circunferencia de fuera.

- Corolario C

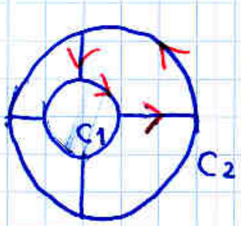
$f: D(z_0; R) \to \mathbb{C}$
f derivable en D

$\Longleftrightarrow$ f es una serie de potencias convergente en $D(z_0; R)$

Demostración de los corolarios

No se incluye la demostración del propio teorema de Cauchy, pues, aunque hay quien piensa que es "preciosa", es complicada y no ganaríamos nada con ello.

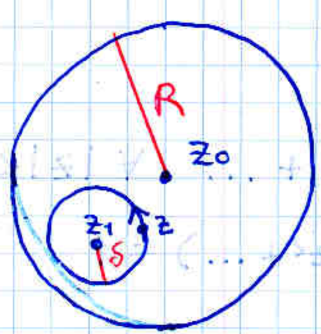
Dem: Corolario A



La integral en cada circuito es, por el teorema de Cauchy, igual a cero. Al sumar los 4 circuitos (los trozos que unen C_1 y C_2 se cancelan entre sí) queda:

$$\int_{C_1} - \int_{C_2} = 0 \Rightarrow \int_{C_1} = \int_{C_2}$$

Dem: Corolario B



$$\int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{z-z_1} \overset{\substack{\text{corolario A} \\ \text{Tª Cauchy}}}{=} \int_{C(z_1,\delta)} \frac{f(z)}{z-z_1}$$

$$\int_{C(z_1,\delta)} \frac{f(z_1)}{z-z_1}\,dz = f(z_1)\int_{C(z_1,\delta)} \frac{dz}{z-z_1} = f(z_1)2\pi i$$

$$\int_{C(z_1,\delta)} \frac{f(z)}{z-z_1} - 2\pi i f(z_1) = \int_{C(z_1;\delta)} \frac{f(z)}{z-z_1}\,dz - \int_{C(z_1;\delta)} \frac{f(z_1)}{z-z_1}\,dz$$

$$= \int_{C(z_1;\delta)} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}\,dz = \int_{C(z_0;\delta)} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} - \underbrace{f'(z_1)}_{\substack{\text{es una cte.} \\ \text{Al integrar} \\ \text{será cero.}}}\,dz$$

> f es derivable en z
>
> $$f'(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}$$
>
> cogiendo un δ pequeño, conseguimos $z \to z_1$
>
> $$\left| \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} - f'(z_1) \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$
>
> si es menor que cualquier $\varepsilon > 0$, entonces vale cero

$$= 0$$

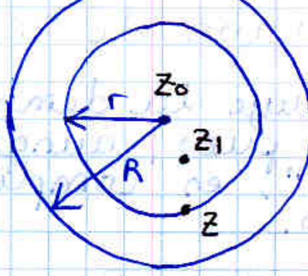
$$\Rightarrow \int_{C(z_1;\delta)} \frac{f(z)}{z-z_1} = \int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{z-z_1} = 2\pi i f(z_1)$$

Despejando $f(z_1)$ se obtiene lo que se quería demostrar

Dem: corolario C

del corolario B:

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz$$



$$\frac{|z_1 - z_0|}{|z - z_0|} < 1$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z - z_0)\underbrace{\left[1 - \underbrace{\frac{z_1 - z_0}{z - z_0}}_{<1}\right]}_{<1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0}\right)}\, dz$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sabiendo:} \\ \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad \forall\, |z| < 1 \\ \text{DEM: } (1-z)(1 + z + z^2 + \dots) \overset{\cdot}{=} 1 \end{array}}$$

sale fuera de la integral

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}}_{\text{cte pasa dentro}} \int \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^k \right) dz$$

cte. sale fuera de la integral

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \frac{(z_1 - z_0)^k}{(z - z_0)^k} \right) dz$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \right) dz}_{\text{fórmula para } a_k} \cdot (z_1 - z_0)^k$$

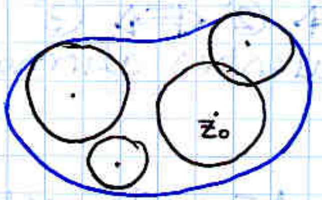
$$f(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k \equiv \text{serie de potencias}$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Consecuencias interesantes de los corolarios

- Consecuencia Corolario C

$f: \underset{\text{dominio}}{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ f es una serie de potencias en $D(z_0; R)$ $\forall z_0$
f derivable



$\Rightarrow$ f es localmente una serie de potencias
localmente ≡ en cada entorno

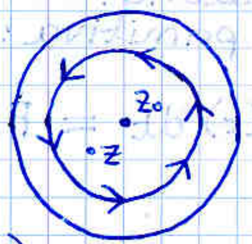
Sabemos que las series de potencias son clase C^∞

$\boxed{f \in C_1 \Longrightarrow f \in C^\infty}$ si una función es derivable, entonces lo es infinitas veces.

- Consecuencia Corolario B (fórmula de Cauchy)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(z_0; r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

conocida f en una circunferencia, la conocemos en cualquier punto interior.



Si particularizamos $z = z_0$ (el centro)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(z_0; r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \, d\xi$$

calculamos la integral: Parametrización
$\varphi(t) = z_0 + re^{it}$
$\varphi'(t) = rie^{it}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{\cancel{re^{it}}} \cdot \cancel{r}\cancel{i}\cancel{e^{it}} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \, dt$$

$\boxed{f(z_0) = \text{Valor medio en la circunferencia } C(z_0; r) \ \forall r}$

El valor de f en un punto es igual a la media de los valores de f en las circunferencias centradas en ese punto.

· **Teorema**

Sea $f : \underset{\substack{\text{dominio} \\ \text{estrellado}}}{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua

Entonces, basta con que se cumpla una de las 3 condiciones siguientes para que se cumplan todas

$$① \equiv ② \equiv ③$$

Es decir; las siguientes afirmaciones son equivalentes

① f derivable

② $\int_\Delta f = 0$ $\quad \Delta \equiv$ cualquier triangulo $\subset G$

③ f tiene primitiva

Demostración

① $\Longrightarrow$ ② directamente por teorema de cauchy

② $\Longrightarrow$ ③

Recordatorio:

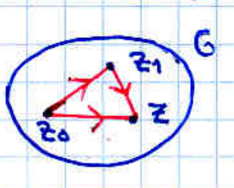
primitiva: $\exists F \,/\, F'(x) = f(x)$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x) \xrightarrow[\text{Tª fundamental del Cálculo. Regla de Barrow (Newton fue su discípulo)}]{} F'(x) = f(x)$$

Por tanto $F(z) = \int_{[z_0 \to z]} f(\xi)\,d\xi$

y por Tª fund Cálculo se cumple $F'(z_0) = f(z_0)$

Pero se cumple $\forall z$? $F'(z) = f(z)$? derivable en z_1



$$\int_{[z_0 \to z]} f(\xi)\,d\xi = \overbrace{\int_{[z_0 \to z_1]} f(\xi)\,d\xi}^{cte} + \overbrace{\int_{[z_1 \to z]} f(\xi)\,d\xi}^{}$$

sólo es cierto si $\int_\nabla f = 0 \equiv ②$

si ② $\Longrightarrow$ $F(z)$ es derivable en z_1 $\Longrightarrow$ tiene primitiva

③ $\Longrightarrow$ ① f tiene primitiva $\Rightarrow$ f es derivada de una función

$$f = F'$$

si F es derivable, es derivable infinitas veces

$$\rightarrow \quad F'' = f'$$

Funciones Enteras

se llama f entera $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable (definida en todo el plano complejo)

$\boxed{f \text{ entera} \Longrightarrow f \text{ serie de potencias, radio de conv } R = \infty}$

→ **Teorema (Liouville)**

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ entera} \\ \lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0 \end{array} \Longrightarrow f \text{ es constante}}$$

Caso típico de $\lim \frac{f(z)}{z} = 0$ cuando $|f|$ acotada.
Es decir: no existen funciones derivables acotadas en todo el plano complejo; excepto las constantes.

Demostración

$f(z) = \sum a_n z^n$ $\quad \lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0 \equiv \forall \varepsilon > 0 / \exists R > 0 / r \geq R \Rightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| < \varepsilon$

cogemos $r = \max\{R, 1\}$

$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \varepsilon \underset{|z|=r}{\Longrightarrow} |f(z)| < \varepsilon r$

llamando $M_r = |f(z)|$

sabemos que $|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$ de un resultado anterior

$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \leq \frac{\varepsilon r}{r^n} = \frac{\varepsilon}{r^{n-1}} < \varepsilon \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$\Longrightarrow |a_n| = 0$ para $n = 1, 2, 3$

→ **Teorema Fundamental del Álgebra**

$$\boxed{\begin{array}{l} P(z) \text{ polinomio} \\ \text{no constante} \end{array} \Longrightarrow P(z) \text{ tiene ceros}}$$

Demostración: por reducción al absurdo

supongamos $P(z)$ polinomio NO constante, $P(z) \neq 0 \;\; \forall z$ (no tiene ceros)

$f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es entera (puesto que $P(z)$ no tiene ceros)

$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{z\,p(z)} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0 \xRightarrow{\text{T}^{\text{a}} \text{ Liouville}} f \text{ constante} \xRightarrow{p(z) = \frac{1}{f(z)}} P(z) \text{ cte}$

$|z\,p(z)| = |a_0 z + a_1 z^2 + \ldots|$

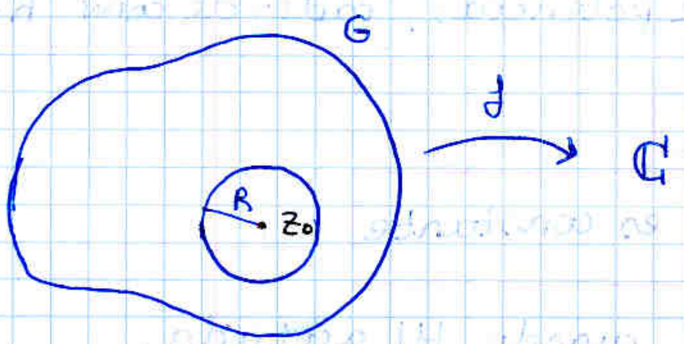
contradicción //

$\Longrightarrow P(z) \neq 0$ es falso

Principio del Módulo máximo

Sea $f: \underset{\text{dominio}}{G} \longrightarrow \mathbb{C}$

f derivable, f no constante



sea $z_0 \in G$

sea $D(z_0; R) \subset G$

$$\boxed{\Longrightarrow \exists\, z \in C(z_0; R) \,/\, |f(z)| > |f(z_0)|}$$

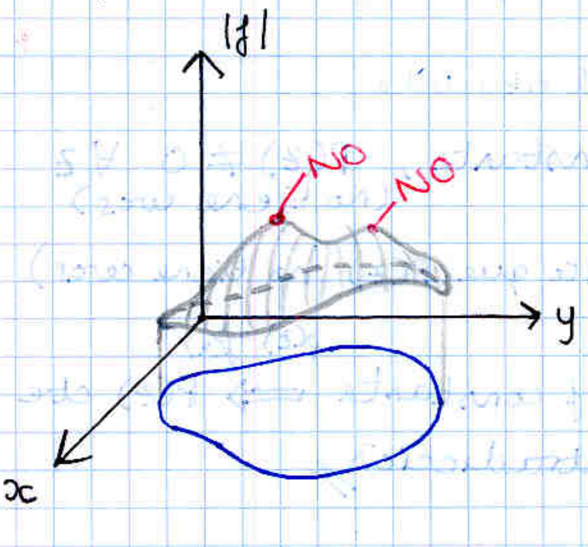
Para cualquier disco, siempre hay un punto en la circunferencia donde $|f|$ vale mas que en el centro

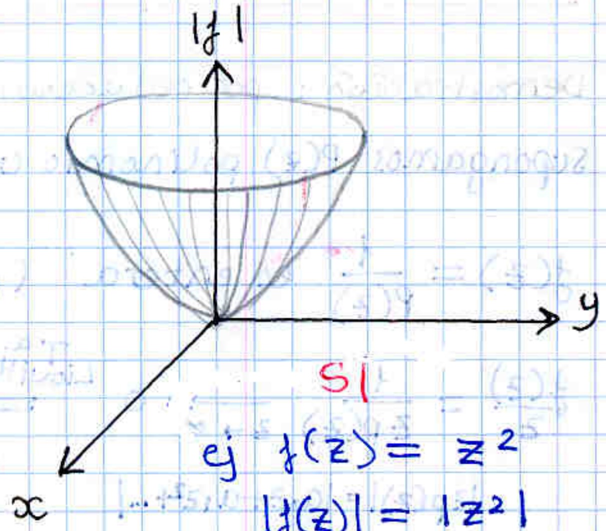
$$\boxed{\Longrightarrow \text{No existe ningun maximo local}}$$

una formulación equivalente es

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\, B \subset G \text{ cerrado acotado, } |f| \text{ alcanza el máximo} \\ \text{de } B \text{ en la frontera de } B\end{array}}$$

ejemplos:





ej $f(z) = z^2$

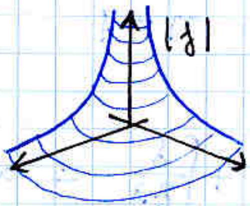
$|f(z)| = |z^2|$

1-29

Singularidades

Singularidades aisladas: En un punto hay singularidad, pero en el resto no.
Es el único tipo de singularidades que estudiaremos.

ej $f(z) = 1/z$



sabemos q si f derivable en $D(z_0; R) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

¿Que ocurrire si f es derivable en $D(z_0; R)$ excepto en el centro (una singularidad)? ej $f(z) = 1/z$

Teorema (Laurent)

$f: D'(z_0; R) \xrightarrow[\text{derivable}]{} \mathbb{C}$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

NOTACIÓN
$D'(z_0; R) \equiv D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$
disco agujereado

además: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0; r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$

la misma fórmula

Dem: cuando no había singularidad se integraba una circunferencia. Ahora se integra en 2

Clasificación de singularidades (segun serie de Laurent)

- singularidad evitable: $a_n = 0$ si $n < 0$ ej: $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
- polo de orden $(-n_0)$: La serie de Laurent se acaba hacia la izquierda a partir de un $n_0 < 0$

$\exists n_0 < 0, \ a_{n_0} \neq 0, \ a_n = 0 \ \forall n < n_0$

ej: $\frac{1}{z}$ polo de orden 1 en 0
ej: $\frac{1}{z^2}$ polo de orden 2 en 0
ej: $\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} - \frac{5}{z^5}$ polo de orden 5 en 0

- singularidad esencial: La serie de Laurent no se acaba nunca hacia la izquierda

$\forall n_0 < 0, \exists n_1 < n_0 / a_{n_1} \neq 0$

ej: $e^{1/z}$

$e^w = \sum \frac{w^n}{n!}$

$e^{1/z} = \sum \frac{z^{-n}}{n!}$

Integración a lo largo de $C(z_0; r)$ con sing. en z_0

Para simplificar; tomamos $z_0 = 0$

sabemos que
$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

$$\int_\gamma \frac{\alpha}{z^n} = \begin{cases} \alpha 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

Por tanto
$$\int_\gamma \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2} + \frac{\delta}{z^3} = \underbrace{\int_\gamma \frac{\alpha}{z}}_{\alpha 2\pi i} + \underbrace{\int_\gamma \frac{\beta}{z^2}}_{=0} + \underbrace{\int \frac{\delta}{z^3}}_{=0} = \alpha 2\pi i$$

Lo único que hay que calcular / tener en cuenta es el coeficiente que afecta a z^{-1}

α se llama residuo de la función en z_0

$\alpha = \text{Res}(f, z_0)$

Tomando una función derivable en $C'(z_0; R)$ y aplicando Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
$$= \dots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + \underbrace{a_{-1}}_{\text{Res}(f, z_0)}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

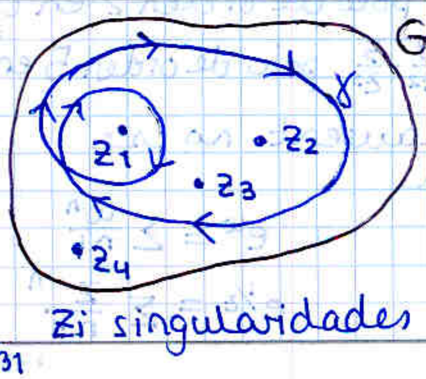
Teorema (del residuo)

Si tenemos una curva cerrada que rodea varias singularidades z_i, cada una la rodea $\text{Ind}(\gamma, z_i)$ veces

Entonces la integral se puede calcular

$\text{Ind}(\gamma, z_i)$ = nº de vueltas que da la curva α al punto z_i

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \text{Res}(f, z_i) \cdot \text{Ind}(\gamma, z_i)}$$



z_i singularidades

ejemplo:
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f, z_1)\cdot 2 + \text{Res}(f, z_2) + \text{Res}(f, z_3)\right]$$

APLICACIONES

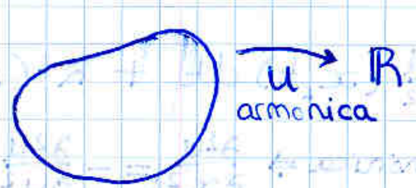
· Funciones armónicas

· Ecuación de Laplace: $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

u es armónica si es solución de (L)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0} \quad (L)$$

Problema de Dirichlet



Conocemos $u(x,y)$ en la frontera.
Queremos averiguarla en el interior.

Teorema

Sea $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable (cumple ecs. CR)
$f = u + iv$

$\Longrightarrow$ u, v son armónicas conjugadas

Dem:

$$\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \xrightarrow{\text{volver a derivar}} \begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{array} \xrightarrow[\text{expresiones}]{\text{sumar ambas}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Recordatorio: Integral Indefinida y Tª Fund. Cálculo

$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + K$ es en realidad una abreviatura de 'andar por casa'

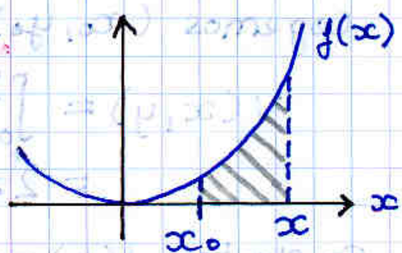
En realidad representa: $\int_{x_0}^{x} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{x_0}^{x} = \frac{x^3}{3} \underbrace{\boxed{-\frac{x_0^3}{3}}}_{+K}$

Lo que Realmente dice el Tª Fundamental del Cálculo es:

$$F(x) = \int_{\underbrace{x_0}_{\text{cte arbitraria}}}^{x} f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(t)$$

No importa cual sea la constante. F(x) será UNA primitiva de f(x)



Cálculo de la conjugada armónica

Conocemos $u(x,y)$ función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica
Buscamos $v(x,y)$ función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica conjugada.

Sabiendo que u y v son la parte real e imaginaria de una función $\mathbb{C}$ derivable, podemos escribir C.R.

CR
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow \boxed{v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt + K(x)} \quad (1)$$

x se comporta como parámetro

$$\longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dt + K'(x)$$

CR
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \longrightarrow -\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dt + K'(x)$$

u armónica $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{y_0}^{y} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,t)\,dt + K'(x)$$

$$= \left[-\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\right]_{y_0}^{y} + K'(x)$$

$$\cancel{-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)} = \cancel{-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)} + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0) + K'(x)$$

$$\longrightarrow K'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0)$$

$$\longrightarrow K(x) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}(s,y_0)\,ds$$

sustituyendo en (1)

$$\boxed{v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s,\underbrace{y_0}_{\text{cte}})\,ds}$$

ejemplo:
$u(x,y) = x^2 - y^2$ armónica

Cogemos $(x_0,y_0) = (0,0)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$$v(x,y) = \int_0^y 2x\,dt - \int_0^x -2\overset{0}{y_0}\,ds$$

$= 2xy$ armónica conjugada

En efecto $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{\substack{u(x,y)\\ \text{armónica}}} + i\,\underbrace{(2xy)}_{\substack{v(x,y)\\ \text{armónica}}}$

Planteamiento para resolver problema de Dirichlet

Tratamos de resolver el problema de Dirichlet (hallar $u(x,y)$ armónica en el interior de una superficie de la cual conocemos el valor en la frontera) para una circunferencia unidad.

Teorema

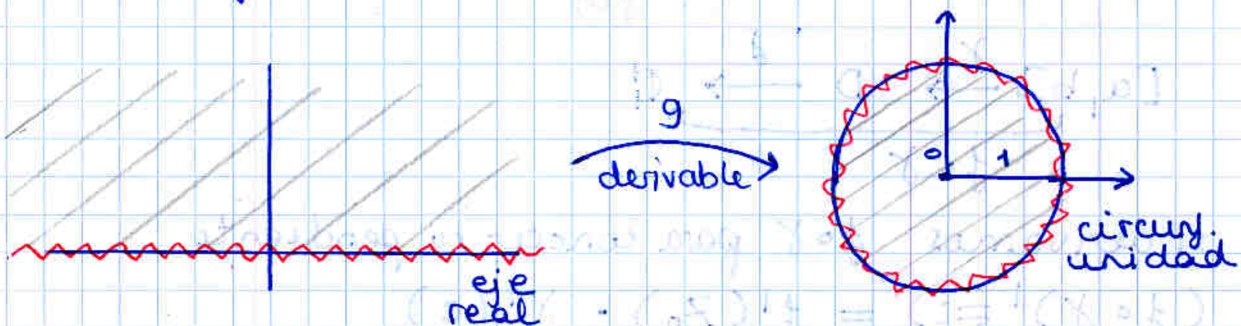
Sea
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g", "\text{derivable}"'] \arrow[rr, bend right, "u \circ g"'] & D \subset \mathbb{R}^2 \arrow[r, "u", "\text{armónica}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$
(dominio)

$\Longrightarrow$ $u \circ g$ es armónica

DEM por regla de la cadena
$u \circ g$ derivable
$\mathrm{Re}(u \circ g)$ armónica

Es decir; si a una función armónica le cambiamos el dominio con una función derivable, sigue siendo armónica.

Utilizamos este teorema para resolver el problema de Dirichlet en el semiplano complejo en lugar de en la circunferencia unidad.



Para hacer esto necesitamos:

1. ¿Cómo transformar recintos planos en otros?
2. ¿Cómo resolver el problema de Dirichlet en un semiplano?

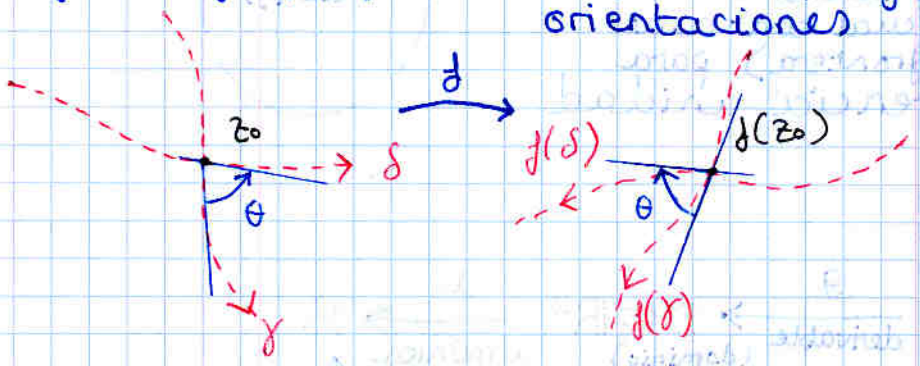
Empecemos con 1 viendo geometría en $\mathbb{C}$

Geometría en $\mathbb{C}$

Transformaciones conformes

Sea $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

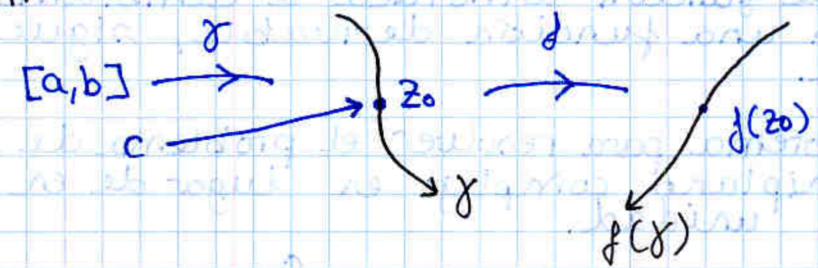
f es conforme en $z_0 \equiv$ conserva los ángulos y sus orientaciones



Teorema

f derivable en z_0
$f'(z_0) \neq 0$ $\Longrightarrow$ f es conforme en z_0

Dem:



$$\underbrace{[a,b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{f} \mathbb{C}}_{f \circ \gamma}$$

si derivamos $f \circ \gamma$ para conocer su pendiente

$$\underbrace{(f \circ \gamma)'(c)}_{\text{pendiente tras la transformación } f} = f'(z_0) \cdot \underbrace{\gamma'(c)}_{\text{pendiente original}}$$

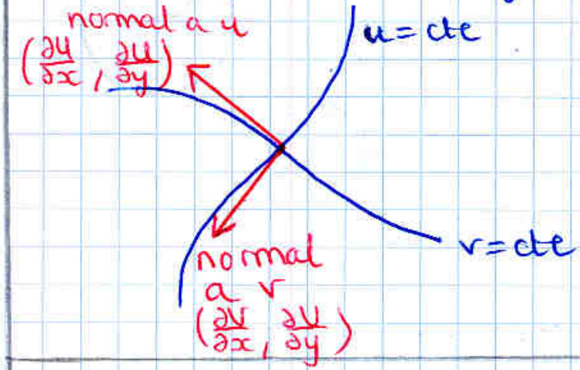
$f'(z_0)$: nº complejo constante
- módulo
- argumento

La tangente se gira un ángulo $\operatorname{Arg}(f'(z_0))$ respecto a la original.
Se cumple para cualquier curva

Proposición

Sea $f: D \to \mathbb{C}$ derivable, $f = u + iv$ $\Longrightarrow$ Las curvas $u = c$, $v = c$ $(c = \text{cte})$ se cortan en ángulo recto

Dem:
Para una curva $u(x,y) = \text{cte}$, el vector normal viene dado por $\nabla u(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$



$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \perp \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

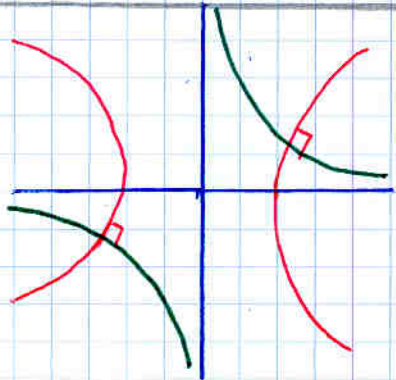
para verlo no hay más que hacer producto escalar y utilizar Cauchy-Rieman. El producto da cero.

ejemplo:

$f(z) = z^2$

$\rightarrow u(x,y) = x^2 + y^2$

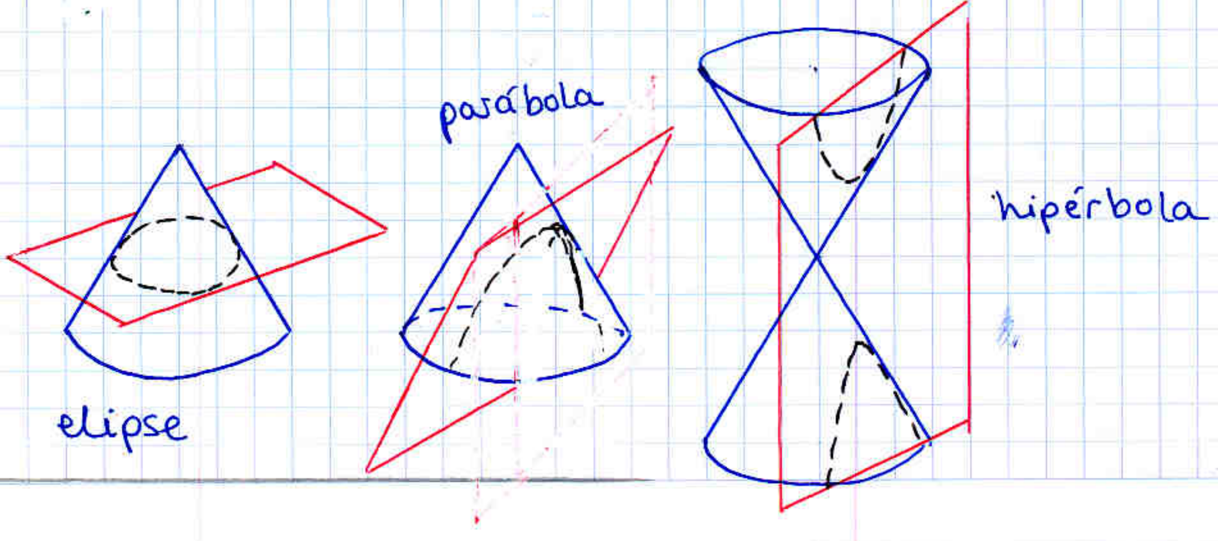
$\rightarrow v(x,y) = 2yx$



Recordatorio / Curiosidad

Las curvas que definen todos los movimientos de un cuerpo en el espacio son las cónicas.
Las estudió Apollonio de Perga hace 2500 años

Todas se obtienen haciendo secciones de conos



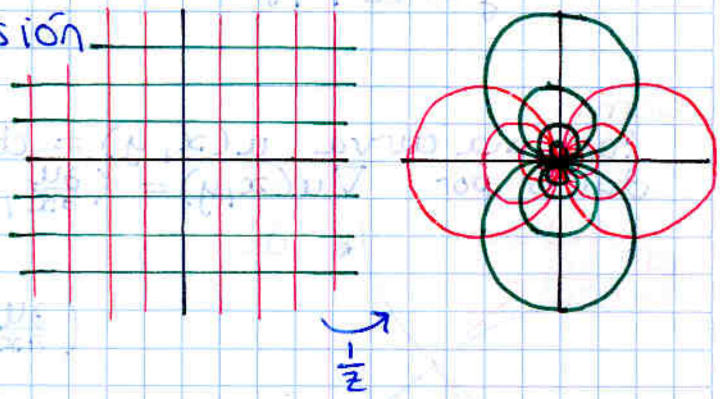
Algunas transformaciones conformes

$f(z) = a \cdot z$ homotecia y giro ($a \in \mathbb{C}$)

$f(z) = z + b$ traslación

$f(z) = \frac{1}{z}$ inversión

$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$



1-37

Transformaciones de Möbius / ó transformaciones fraccionales lineales

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C} \qquad ad-bc \neq 0$$

si $ad-bc=0$

$\Rightarrow a = \frac{bc}{d} \Rightarrow \frac{bcz+db}{dcz+dd} \Rightarrow \frac{b(cz+d)}{d(cz+d)} = \frac{b}{d}$ cte

Propiedades

$$\mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$$

$$\mathbb{C} \setminus \{a/c\} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$$

- f no está definida en $-d/c$ (denominador se anula)
- f tiene inversa (es una biyección)
- La inversa también es una transformación de Möbius

Dem:

$$f(z) = \omega = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow f^{-1}(\omega) = z = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a}$$

Teorema

Toda transformación de Möbius es una composición de las elementales.

$$z \rightarrow \omega_1 = cz+d \longrightarrow \omega_2 = \frac{1}{\omega_1} \longrightarrow \omega = p\omega_2 + q$$

igualando $p \cdot \frac{1}{cz+d} + q = \frac{az+b}{cz+d}$

$$\boxed{p = \frac{bc-ad}{c} \qquad q = a/c}$$

$$\omega = \frac{bc-ad}{c}\omega_2 + \frac{a}{c}$$

Propiedades

① Toda transf. Möbius conserva la razón doble

Dados $\begin{matrix} z_1, z_2 \\ z_3, z_4 \end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix} \omega_1, \omega_2 \\ \omega_3, \omega_4 \end{matrix}$

$$\boxed{\boxed{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4} \cdot \frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1-\omega_4} \cdot \frac{\omega_3-\omega_4}{\omega_3-\omega_2}}$$

② Toda transf. Möbius convierte:

$\left\{ \begin{matrix} \text{rectas y} \\ \text{circunferencias} \end{matrix} \right\}$ en $\left\{ \begin{matrix} \text{rectas y} \\ \text{circunferencias} \end{matrix} \right\}$

Dem:

① Se comprueba sin más que sustituir (trabajo pesado)

② Está claro que giros, traslaciones y homotecias lo cumplen, veamos las inversiones

$|z - z_0| = R$ ec. circunferencia

$|z - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2 \Rightarrow$

$z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0 - R^2 = 0$

$A z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0 - R^2 = 0$ $\quad A = 1 \to$ circunferencia, $A = 0 \to$ recta

$w = \frac{1}{z}$

$A \frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} - z_0 \frac{1}{\bar{w}} - \bar{z}_0 \frac{1}{w} + z_0\bar{z}_0\frac{1}{w\bar{w}} - R^2 = 0$ $\Big\rangle \times\ w\bar{w}$

$A - z_0 w - \bar{z}_0 \bar{w} + (z_0\bar{z}_0 - R^2) w\bar{w} = 0$

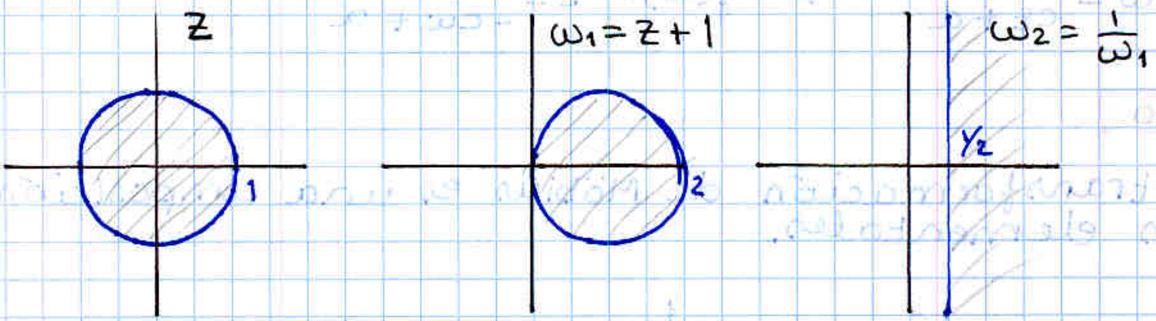
es una recta o circunferencia según sea $(z_0\bar{z}_0 - R^2)$

ejemplo: Transformación de Möbius

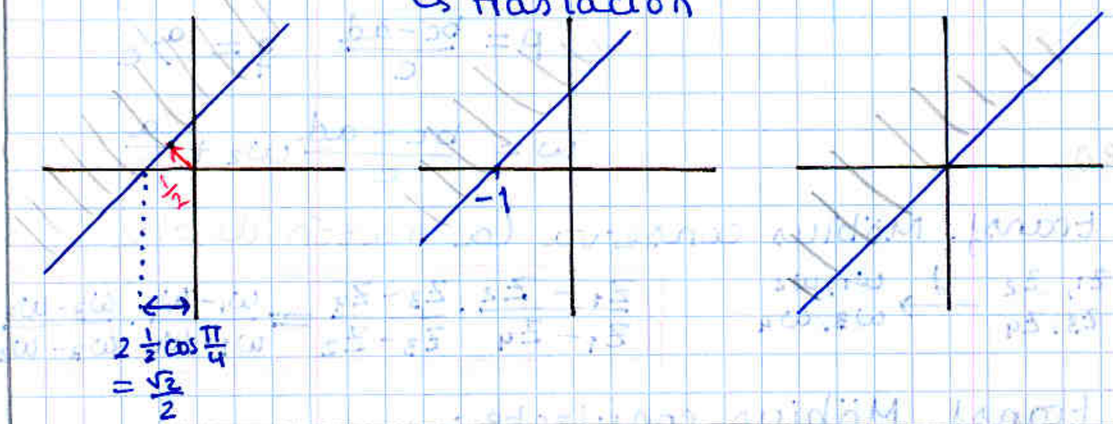
$f(z) = \dfrac{z+i}{z+1} = \dfrac{az+b}{cz+d} \rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=i \\ c=1 \\ d=1 \end{array}$ $\quad ad - bc = 1 - i \neq 0$

$\left(w = \frac{bc-ad}{c} w_2 + \frac{a}{c}\right)$

$z \longrightarrow w_1 = z+1 \longrightarrow w_2 = \frac{1}{w_1} \longrightarrow w = \frac{-1+i}{1} w_2 + 1$

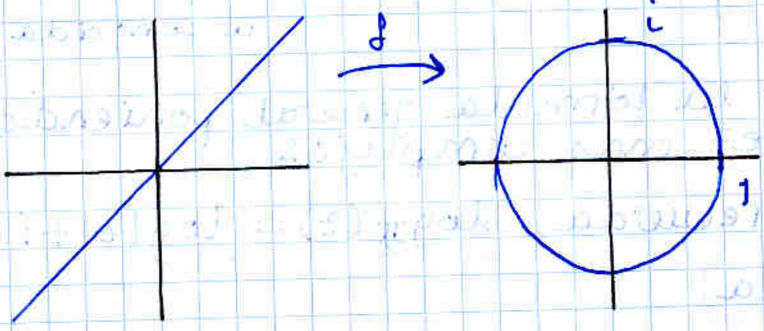


$w = (-1+i)w_2 + 1$ $\rightarrow$ giro $\arg(-1+i) = 3\pi/4$
↳ homotecia $|-1+i| = \sqrt{2}$
↳ traslación

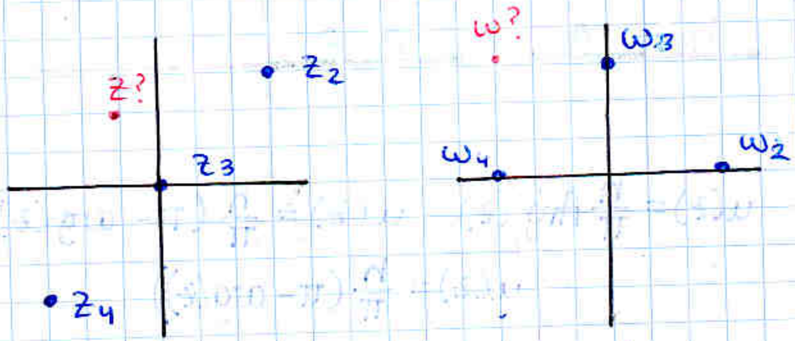


Utilidad propiedades 1 y 2

Supóngase que buscamos una transformación que haga:



Utilizamos la razón doble



z y w libres

Utilizando la propiedad 2 sabemos que w_1, w_2, w_3 deben formar una circunferencia

$$\frac{z - z_2}{z - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_2}{w - w_4} \cdot \frac{w_3 - w_4}{w_3 - w_2}$$

despejamos w en función de z y ya tenemos la transformación que buscábamos.

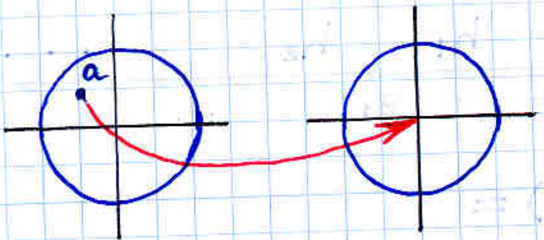
Caso particular importante: función $\varphi_a(z)$

no definida en $z = \frac{1}{\bar{a}} = \frac{a}{|a|^2}$

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \qquad |a| < 1$$

$$\varphi_a[\bar{D}(0,1)] = \bar{D}(0,1)$$

$$\varphi_a(a) = 0$$

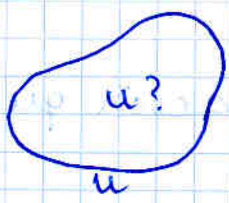


Teorema

$f : \bar{D}(0;1) \longrightarrow \bar{D}(0;1) \Longrightarrow f = \text{giro ó } \varphi_a$

derivable
inyectiva
sobreyectiva

Problema de Dirichlet



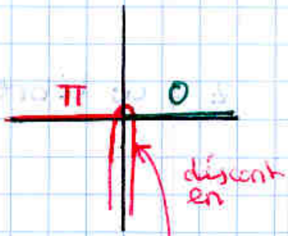
u conocida en la frontera
¿u dentro?
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (u armónica)

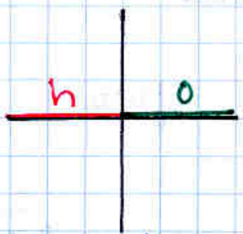
Caso particular

Vamos a deducir la fórmula general poniendo ejemplos cada vez más complejos

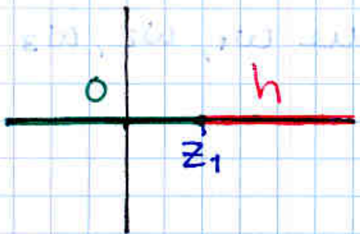
Antes de empezar; recuerda $\underbrace{\log_{\frac{\pi}{2}}(z)}_{\text{derivable compleja}} = \underbrace{\log|z|}_{\text{armónica}} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}_{\frac{\pi}{2}}(z)}_{\text{armónica}}$

$\boxed{\mathrm{Arg}_{\frac{\pi}{2}}(z) \text{ es armónica}}$





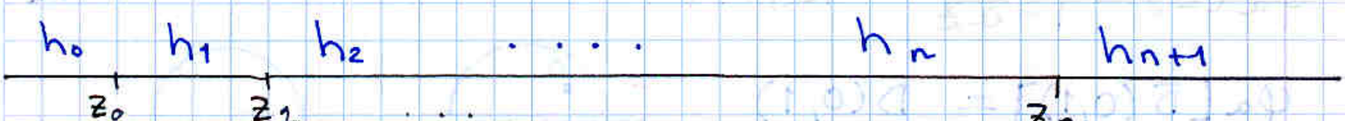
$u(z) = \mathrm{Arg}_{\frac{\pi}{2}}(z)$ $\qquad u(z) = \frac{h}{\pi}\mathrm{Arg}(z)$ $\qquad u(z) = \frac{h}{\pi}(\pi - \arg(z))$



$u(z) = \frac{h}{\pi}(\pi - \arg(z - z_1))$

$u(z) = \frac{h_0}{\pi}\arg(z - z_0) + \frac{h_1}{\pi}\arg\underbrace{\left(\frac{z-z_2}{z-z_1}\right)} + \frac{h_2}{\pi}(\pi - \arg(z-z_2$

si es $+ \Rightarrow \arg = 0$
si es $- \Rightarrow \arg = \pi$



$u(z) =$

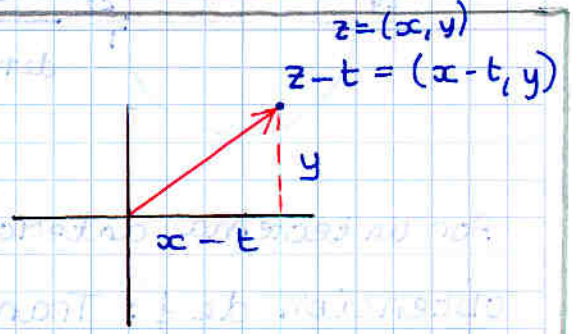
$$\frac{h_0}{\pi}\arg(z - z_0) + \underbrace{\frac{h_1}{\pi}\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_0}\right) + \ldots + \frac{h_n}{\pi}\arg\left(\frac{z-z_n}{z-z_{n-1}}\right)}_{\text{expresiones muy similares}} + \frac{h_{n+1}}{\pi}\left(\pi - \arg(z - z_n)\right)$$

las expresiones de los extremos son las únicas "diferentes"

Utilizando el hecho de que las expresiones son similares, y teniendo en cuenta $z_1, z_2, \dots z_n$ son números reales por estar en el eje real

Definimos:

$$\boxed{g(t) = \operatorname{Arg}_{\frac{\pi}{2}}(z - t)} \qquad t \in \mathbb{R}$$



$$g(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-t}\right)$$

$$g'(t) = \frac{\left(\frac{y}{x-t}\right)'}{1 + \left(\frac{y}{x-t}\right)^2} = \frac{y(x-t)^{-2}}{1 + y^2(x-t)^{-2}}$$

$$\boxed{g'(t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}}$$

sustituyendo en la anterior fórmula para $u(z)$

$$\begin{array}{ccccccccc} h_0 & & h_1 & & h_2 & \cdots & h_n & & h_{n+1} \\ & z_0 & & z_1 & & \cdots & & z_n & \\ & t_0 & & t_1 & & & & t_n & \end{array}$$

$u(z) =$

$$\frac{h_0}{\pi} g(t_0) + \frac{h_1}{\pi}\underbrace{\left(g(t_1) - g(t_0)\right)}_{\approx g'(\theta_1)(t_1 - t_0)} + \dots + \frac{h_n}{\pi}\underbrace{\left(g(t_n) - g(t_{n-1})\right)}_{\approx g'(\theta_n)(t_n - t_{n-1})} + \frac{h_{n+1}}{\pi}\left(\pi - g(t_n)\right)$$

punto intermedio

Cuando $u(z)$ en la frontera es continua, $(t_n - t_{n-1}) \to 0$

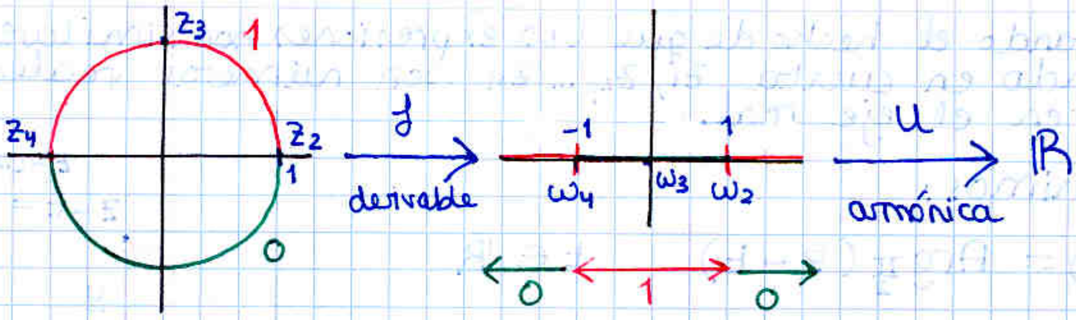
$$\frac{h_n}{\pi}\left(g(t_n) - g(t_{n-1})\right) = \frac{h(\theta_K)}{\pi} g'(\theta_K) \cdot \Delta t_K$$

suponiendo que <u>en los infinitos tiende a cero</u> (para olvidarnos del primer y último términos)

$$u(z) = \sum \frac{h(\theta_K)}{\pi} g'(\theta_K) \Delta t_K$$

$$\boxed{u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \, dt}$$

Ejercicio / Problema (rápido y descuidado)



Por un teorema anterior $u \circ f$ es armónica

---

obtención de f: Transformación de Möbius

$$\frac{z-z_2}{z-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}=\frac{\omega-\omega_2}{\omega-\omega_4}\cdot\frac{\omega_3-\omega_4}{\omega_3-\omega_2}$$

$$\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1}=\frac{\omega-1}{\omega+1}\cdot\frac{1}{-1}$$

despejamos ω, $(z-1)(i+1)(\omega+1)(-1)=(\omega-1)(z+1)(i-1)$

$$\omega\left[-(z-1)(i+1)-(z+1)(i-1)\right]=(z-1)(i+1)-(z+1)(i-1)$$

$$\omega=\frac{(z-1)(i+1)-(z+1)(i-1)}{-(z-1)(i+1)-(z+1)(i-1)}$$

De aquí podemos obtener $\omega(z)=(\underset{\substack{\uparrow\\ Re\{\omega\}}}{\omega_1(z)},\ \underset{\substack{\uparrow\\ Im\{\omega\}}}{\omega_2(z)})$

$$v(\omega)=v(\omega_1(z),\omega_2(z))=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\underset{h}{1}\cdot\frac{\omega_2(z)\,dt}{(\omega_1(z)-t)^2+\omega_2(z)^2}$$

en el resto vale cero

$$\boxed{v(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\omega_2(z)\,dt}{(\omega_1(z)-t)^2+(\omega_2(z))^2}}$$

y ya tenemos la función armónica $v=u\circ f$

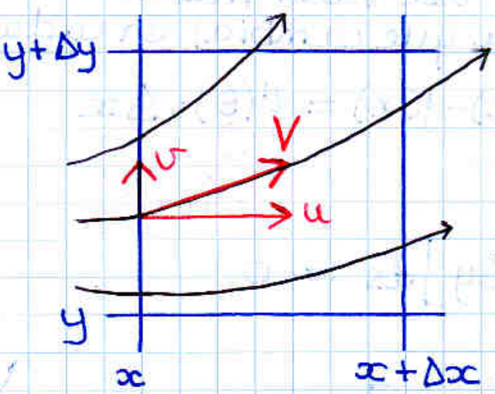
que toma valores en la circunferencia $(x,y)\longrightarrow\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^2$

utilizamos $z=(\underset{\substack{\uparrow\\ Re}}{x},\underset{\substack{\uparrow\\ Im}}{y})$

$(\mathbb{C}=\mathbb{R})$

Más aplicaciones

1. Movimiento de fluidos



V : velocidad: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$V(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Ahorrándonos demostraciones;

Utilizando que el flujo que sale menos el que entra es cero se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

Utilizando que la circulación a lo largo del rectángulo es 0, se obtiene:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Son casi las ecs de Cauchy-Riemann (de hecho son las ecs de CR para el conjugado)

$\Rightarrow \overline{V} = (u, -v)$ es derivable compleja

$\Longrightarrow \exists F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,/\, F' = \overline{V} \qquad (3)$

$\boxed{V = \overline{F'} \qquad F \text{ se llama potencial complejo de } V}$

Además: $F(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$

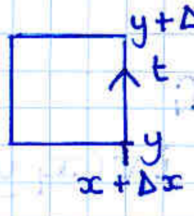
$F = \phi + i\psi$ $\phi = cte \to$ curvas equipotenciales
$\psi = cte \to$ líneas de flujo   (4)

Y tras este gran resumen, llega el momento de demostrar (1), (2), (3) y (4)

Dem (1) FLUJO = integral de la componente normal

• El flujo que sale menos el que entra es cero.

$$\left(\int_y^{y+\Delta y} u(x+\Delta x,t)\,dt - \int_y^{y+\Delta y} u(x,t)\,dt\right) + \left(\int_x^{x+\Delta x} u(s,y+\Delta y)\,ds - \int_x^{x+\Delta x} v(s,y)\,ds\right) = 0$$



Utilizando el T^a del valor medio (a la coordenada que cambia) en cada integral

$$f(x+\Delta x)-f(x) = f'(\theta)\cdot \Delta x$$

algún punto intermedio

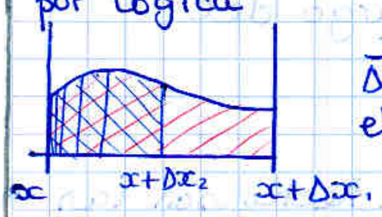
$$\left(\int_y^{y+\Delta y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\theta,t)\,\Delta x\right]dt + \int_x^{x+\Delta x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(s,\eta)\,\Delta y\right]ds = 0$$

dividir por $\Delta x \Delta y$

$$\frac{1}{\Delta y}\int_y^{y+\Delta y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\theta,t)\right]dt + \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(s,\eta)\right]ds = 0$$

tomando el límite $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$

por lógica



$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx$ es el área que conforme $\Delta x \to 0$ tiende a $f(x)$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = 0}$$

Dem (2) CIRCULACIÓN = integral de la componente tangencial

• La circulación a lo largo del rectángulo es 0

$$\left(\int_x^{x+\Delta x} u(s,y)\,ds + \int_y^{y+\Delta y} v(x+\Delta x,t)\,dt + \int_{x+\Delta x}^{x} u(s,y+\Delta y)\,ds + \int_{y+\Delta y}^{y} v(x,t)\,dt = 0\right.$$

$$= \int_y^{y+\Delta y}\left[v(x+\Delta x,t)-v(x,t)\right]dt - \int_x^{x+\Delta x}\left[u(s,y+\Delta y)-u(s,y)\right]ds = 0$$

$$= \Delta x\int_y^{y+\Delta y}\frac{\partial V}{\partial x}(\theta,t)\,dt - \Delta y\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial u}{\partial y}(s,\eta)\,ds = 0$$

y por el mismo método de antes: $\boxed{\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0}$

Dem (3)

Hemos obtenido $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-V)}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-V)}{\partial x}\end{array}\right\}$ ecs. de CR para $\overline{V} = (u,-V)$

$\Rightarrow \overline{V}$ es derivable $\Rightarrow$ es derivale ∞ veces $\Rightarrow \exists F /\ F' = \overline{V}$

$\Rightarrow \boxed{V = \overline{F'}}$

Dem (4) F función 'potencial complejo' derivable

$$F(z) = \phi + i\psi \Rightarrow F' = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \overset{C.R}{=} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$V = \overline{F'} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \nabla\phi(x,y)$$

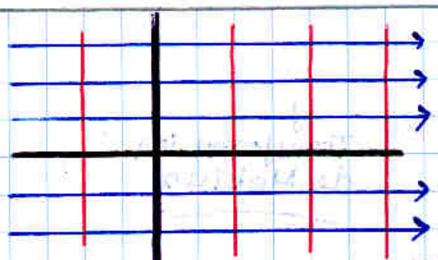
T^a anterior
F derivable
$\Rightarrow F = (\phi + i\psi)$
$\phi = c \perp \psi = c$
$c = cte$

$V = \nabla\phi(x,y) \Rightarrow \boxed{\phi = cte \text{ líneas equipotenciales}} \rightarrow \psi = cte$ líneas de flujo ejemplo: $F(z) = z = (x, y)$

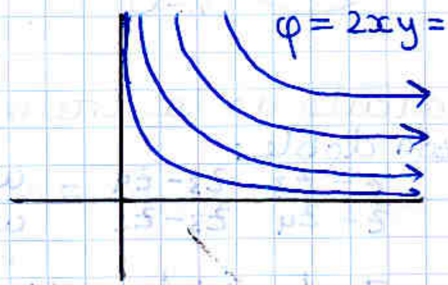
$\phi(x,y) = x$

$\psi(x,y) = y$

$V = \overline{F'} = \overline{1} = (1,0)$



ejemplo: $F(z) = z^2 = (\underbrace{x^2 - y^2}_{\phi(x,y)}, \underbrace{2xy}_{\psi(x,y)})$



$V = \overline{F'} = \overline{2z} = 2\overline{z}$

$|V| = 2|z|$ menos velocidad cerca del origen

ejemplo: $F(z) = k \log_0(z)$

$F(z) = k[\log|z| + i\,\mathrm{Arg}_0(z)]$

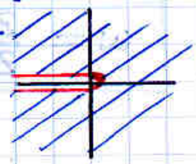
$\phi(x,y) = k \log|z|$

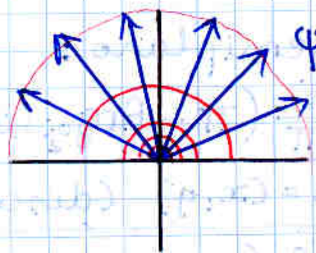
$\psi(x,y) = k\,\mathrm{Arg}_0(z)$

$V = \overline{F'} = \overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\overline{z}}$

$|V| = \frac{k}{|z|}$

la discontinuidad en el eje x negativo es un problema puramente matemático, no físico. Para evitarlo basta con tomar otro logaritmo.





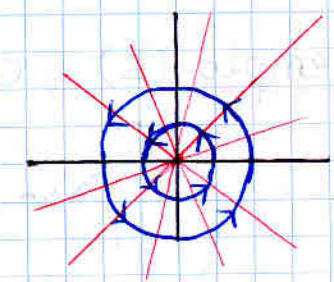
ejemplo: $F(z) = ik \log_0(z)$

$= ik[\log|z| + i\,\arg_0(z)]$

$= \underbrace{-k \arg_0(z)} + i\,\underbrace{k \log|z|}$

$\phi(x,y) = -k \arg_0(z)$

$\psi(x,y) = k \log|z|$

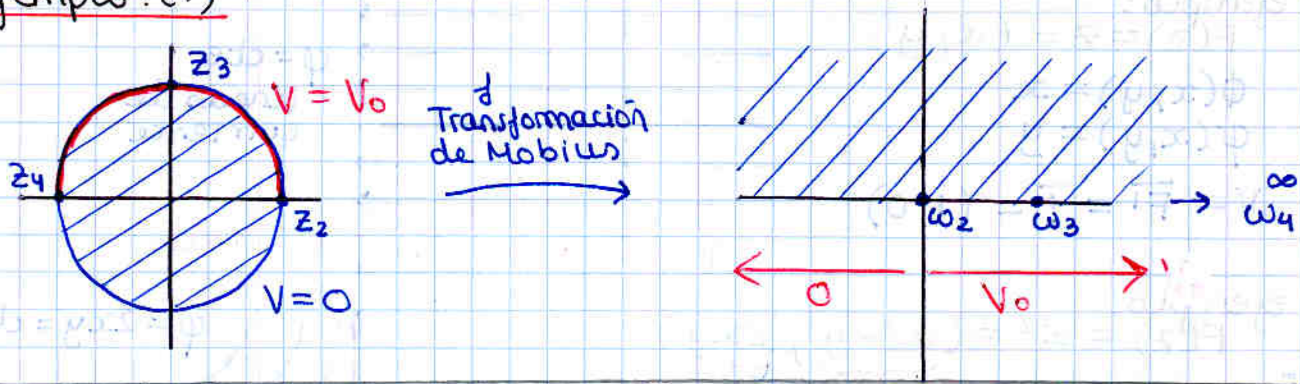


Todos estos ejemplos modelizan el movimiento de fluidos (cumplen flujo sale - flujo entra = 0 y circulación = 0)

el ejemplo 3 podría modelizar una explosión

Electrostática (problema de Dirichlet)

ejemplo: (1)



Cálculo de la transformación:

razón doble:

$$\frac{z-z_2}{z-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}=\frac{\omega-\omega_2}{\omega-\omega_4}\cdot\frac{\omega_3-\omega_4}{\omega_3-\omega_2}$$

$$\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1}=\frac{\omega-0}{\cancel{(\omega-\infty)}}\cdot\frac{\cancel{(1-\infty)}}{1}=\frac{\omega}{1}$$

$$\boxed{\omega=\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1}}$$

¿lado interior del disco?

$$\omega(0)=\frac{-i-1}{i-1}=\frac{(-i-1)(-i-1)}{2}=\frac{1-1+2i}{2}=i$$

$\rightarrow$ el interior del disco se convierte en la parte superior.

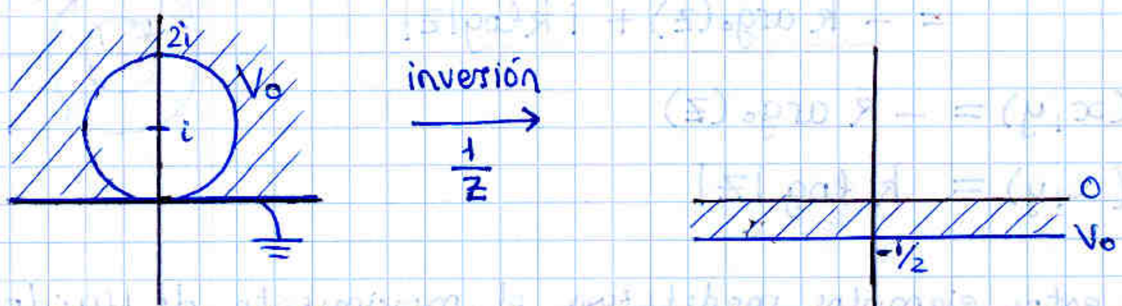
solución en semiplano:

$$u(\omega)=\frac{V_0}{\pi}\left(\pi-\mathrm{Arg}_{\frac{\pi}{2}}(\omega)\right)$$

solución en $z=(x,y)$ (disco original)

$$\boxed{u(z)=\frac{V_0}{\pi}\left(\pi-\mathrm{Arg}_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1}\right)\right)}$$

ejemplo (2) Cilindro a potencial V_0 apoyado sobre tierra



obviamente U que cambie proporcionalmente desde 0 hasta V_0 será función armónica

$$u(\omega)=u(\omega_1,\omega_2)=\frac{\omega_2}{-1/2}V_0 \quad \left(\underset{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial \omega_1}}+\underset{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial \omega_2}}=0\right)$$

$$\omega=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{(x,-y)}{x^2+y^2}\longrightarrow \omega_2=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y)=\frac{\left(-y/(x^2+y^2)\right)}{-1/2}V_0}$$

1-47

Cálculo de Residuos. Series de Laurent

$\text{res}(f, z_K) \equiv$ el coeficiente a_{-1} del término $(z-z_K)^{-1}$ de la serie de Laurent de f en z_K

Para calcularlo, debemos saber el orden.

$\text{ord}(f, z_K) \equiv$ orden donde empieza la serie de Laurent
$=$ orden del primer $(z-z_k)^n$ con $a_n \neq 0$

ej

$$e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} = 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \dots$$

$\text{ord}(f, 0) = 0 \qquad 1 = a_0(\omega - 0)^0$ (primer término)
$\text{res}(f, 0) = 0 \qquad$ (coef. de $(\omega-0)^{-1}$

Nota util: valor de a_0 para serie de Taylor

Una serie de Taylor es como la de Laurent pero con $n \geq 0$
Serie de Taylor de $f(z)$ en z_0

$$\boxed{f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots}$$

Por simple sustitución ($z - z_0 = 0$ si $z = z_0$)

$$\boxed{a_0 = f(z_0)}$$

es decir, a_0 es el valor de la función en el centro.

puede ser util para saber si el orden de una función es 0

ej. orden de $(z-3)$ en 3
(sustituyendo $z=3$, $a_0 = (3-3) = 0 \to \text{ord}(z-3; 3) \neq 0$)
obviamente $\text{ord}(z-3; 3) = 1 \quad ((z-3) \equiv a_1(z-3)^1)$

orden de $(z-3)$ en 1
sustituyendo $z=1$, $a_0 = -2 \neq 0 \to \text{ord}(z-3; 1) = 0$

Recuerda: serie de Taylor

$$f(z) = \underbrace{f(z_0)}_{a_0} + \underbrace{f'(z_0)}_{a_1}(z-z_0) + \underbrace{\frac{f''(z_0)}{2!}}_{a_2}(z-z_0)^2 + \dots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Algunos resultados sobre orden

$$\text{ord}(f \cdot g ; z_0) = \text{ord}(f ; z_0) + \text{ord}(g ; z_0)$$
$$\text{ord}\left(\frac{1}{f} ; z_0\right) = -\text{ord}(f ; z_0)$$
$$\text{ord}(f + g ; z_0) = \min\{\text{ord}(f ; z_0), \text{ord}(g ; z_0)\}$$
si no son iguales
(si fueran iguales podría anularse el término correspondiente

Dem. (1) $f(z) = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots$
$g(z) = b_m(z-z_0)^m + b_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots$

$$f(z) \cdot g(z) = a_n b_m (z-z_0)^{\underline{\underline{n+m}}} + \dots$$

Dem (2) $\text{ord}(1 ; z_0) = \text{ord}\left(f \cdot \frac{1}{f} ; z_0\right) = \text{ord}(f ; z_0) + \text{ord}\left(\frac{1}{f} ; z_0\right) = 0$

Procedimiento para calcular el residuo

Depende de cada caso, pero en general;
se pide $\text{res}(f ; z_0)$

→ si se sabe serie de Laurent $f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) \dots$

↳ directamente $\boxed{\text{res}(f ; z_0) = a_{-1}}$

→ si no se sabe, se calcula $\text{ord}(f ; z_0)$ ayudándose de los resultados sobre orden.

→ si $\text{ord}(f ; z_0) \geq 0$ $\quad f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$

↳ $\boxed{\text{res}(f ; z_0) = 0 = a_{-1}}$

→ si $\text{ord}(f ; z_0) = -k < 0$

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

se hace $f(z) \cdot (z-z_0)^k = h(z)$ ← lo convertimos en serie de Taylor

$$h(z) = \underbrace{a_{-k} + \dots}_{k-1 \text{ términos}} + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + a_1(z-z_0)^{k+1} + \dots$$

⟶ si $-k = -1$ → $h(z) = a_{-1} + \dots$
$\boxed{a_{-1} = h(z_0) = \text{res}(f ; z_0)}$

↳ si $-k < -1$: se deriva $k-1$ veces para eliminar los $k-1$ términos que van antes de a_{-1} y que a_{-1} sea el primero
↳

$$h^{(k-1)}(z) = \underbrace{a_{-1} \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot (1)}_{\text{primer término } = h^{(k-1)}(z_0)} + \dots$$

← con números es mucho más sencillo

de ahí se puede despejar a_{-1}

podría haber puesto esta fórmula ya conocida justo después de hacer $h(z)$

$$\boxed{a_{-1} = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \text{res}(f ; z_0)}$$

siendo $h(z) = f(z)(z-z_0)^k$
$\text{ord}(f, z_0) = -k$

1-49

ejemplo $f(z) = \frac{1}{z^2(z^3+1)}$ calcular $\text{res}(f;0)$

no conocemos la serie de Laurent; calculemos el orden:

$\text{ord}(f;0) = -\text{ord}(z^2(z^3+1);0) = -\text{ord}(z^2;1) - \text{ord}(z^3+1\ ;0)$

$\text{ord}(z^2;1) = 2$
$\text{ord}(1+z^3;1) = 0$

$\text{ord}(f;0) = -2$

Por lo tanto

$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z^1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

hacemos $h(z) = f(z)\cdot z^2 = \frac{1}{z^3+1}$

$h(z) = a_{-2} + a_{-1} z + a_0 z^2 + a_1 z^3 + a_2 z^4 + \dots$

derivamos $h(z)$

$h'(z) = \frac{-3z^2}{(z^3+1)^2}$

$h'(z) = a_{-1} + 2a_0 z + 3a_1 z^2 + 4a_2 z^3 + \dots$

sustituyendo $z=0$

$h'(0) = a_{-1} = \boxed{\text{res}(f;0) = 0}$

ejemplo: $f(z) = 1 + \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

Sabemos que $\text{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

$\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$

$1 + \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$

$a_{-1} \equiv$ coeficiente de $\frac{1}{z} = 1$

$\boxed{\text{res}(f;0) = 1}$

Además, $\text{ord}(f;0) = -\infty \Rightarrow$ singularidad esencial ejemplo $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^3+1)}$ calcular $\mathrm{res}(f; -1)$

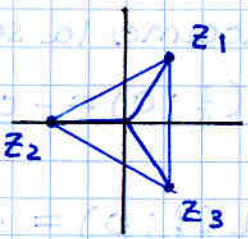
En este ejemplo hay que ser 'astuto' para calcular el orden.

NOTA PREVIA

$f(z)$ tiene singularidades en:

$z = 0$ ya calculado el residuo

$z^3+1=0$
$z = \sqrt[3]{-1}$



$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$
$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{3}}$
$z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$$\boxed{(z^3+1) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

Cálculo del orden

$\mathrm{ord}(f; -1) = -\mathrm{ord}(z^2; -1) - \mathrm{ord}(z^3+1; -1)$

CUIDADO: z^2 y z^3+1 no estan expresados como serie de Taylor EN -1

$\mathrm{ord}(z^2; -1)$:

Taylor en -1: $z^2 = a_0 + a_1(z+1) + a_2(z+1)^2 + \dots$

a_0 = valor de la función en el centro (-1)

$a_0 = 1 \Rightarrow \mathrm{ord}(z^2; -1) = 0$

$\mathrm{ord}(z^3+1; -1)$ $\quad z_2 = -1$

$= \mathrm{ord}((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3); z_2)$

$= \underbrace{\mathrm{ord}(z-z_1; z_2)}_{a_0 = z_2 - z_1 \neq 0,\ \mathrm{ord}=0} + \underbrace{\mathrm{ord}(z-z_2; z_2)}_{z-z_2 \text{ si es Taylor en } z_2,\ \mathrm{ord}=1} + \underbrace{\mathrm{ord}(z-z_3; z_2)}_{a_0 = z_2 - z_3 \neq 0,\ \mathrm{ord}=0}$

$= 1$

$\mathrm{ord}(f; -1) = -1 \overset{z_2=-1}{=} \mathrm{ord}(f; z_2)$

Sabemos $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{(z-z_2)} + a_0 + a_1(z-z_2) + a_2(z-z_2)^2 + \dots$

hacemos $h(z) = f(z)\cdot(z-z_2)$

$= \dfrac{1}{z^2(z^3-1)}\cdot(z-z_2) = \dfrac{\cancel{(z-z_2)}}{z^2(z-z_1)\cancel{(z-z_2)}(z-z_3)}$

$= \dfrac{1}{z^2(z-z_1)(z-z_3)}$

$h(z) = f(z)\cdot(z-z_2)$

$h(z) = a_{-1} + a_0(z-z_2) + a_1(z-z_2)^2 + a_2(z-z_2)^3 + \dots$

luego $a_{-1} = h(z_2)$ = valor en el centro $= \mathrm{res}(f; z_2)$

$\mathrm{res} = h(z_2) = \dfrac{1}{z_2^2(z_2-z_1)(z_2-z_3)}$ $\quad \begin{cases} z_2^2 = 1 \\ z_2 - z_1 = -1 - e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_2 - z_3 = -1 - e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_2 = -1 \\ z_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$

$= \dfrac{1}{(1+e^{i\frac{\pi}{3}})(1+e^{-\frac{\pi}{3}i})} = \dfrac{1}{1+\underbrace{e^{-\frac{\pi}{3}i}+e^{\frac{\pi}{3}i}}_{2\mathrm{Re}\{e^{\frac{\pi}{3}i}\}}+e^0} = \dfrac{1}{2+2\mathrm{Re}\{e^{-\frac{\pi}{3}i}\}} = \dfrac{1}{2+1}$

$\mathrm{Re}\{e^{\frac{\pi}{3}i}\} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\mathrm{res}(f; z_2) = 1/3}$$

ejemplo $f(z) = \frac{1}{e^{z^2}-1}$ calcular $\mathrm{res}(f;0)$

$$\mathrm{ord}(f;0) = -\,\mathrm{ord}(e^{z^2}-1;0)$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots$$

$$e^{z^2} - 1 = z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots$$

$$\mathrm{ord}(e^{z^2}-1) = 2$$

$$\mathrm{ord}(f;0) = -2$$

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

$$h(z) = f(z)\cdot z^2 = \frac{z^2}{e^{z^2}-1}$$

$$h(z) = a_{-2} + a_{-1}z + a_0 z^2 + a_1 z^3 + a_2 z^4 + \dots$$

$$h'(z) = \frac{2z(e^{z^2}-1) - z^2\, 2z e^{z^2}}{(e^{z^2}-1)^2}$$

$$h'(z) = a_{-1} + 2a_0 z + 3a_1 z^2 + 4a_2 z^3 + \dots$$

$$a_{-1} = \mathrm{res}(f;0) = h'(0)$$

problema: $h'(0) = \left(\frac{0}{0}\right)$

sabemos que h es derivable (es una serie de potencias) por lo tanto tiene derivada en cero (calcular por límite)

$$h'(0) = \lim_{z\to 0} h'(z) = \lim_{x\to 0} h'(x) \quad \text{(aplicar L'Hopital)}$$

al saber que tiene límite, el límite será el mismo independientemente de como nos acerquemos; nos acercamos por el eje real.

Método alternativo más ingenioso

$$h(z) = \frac{z^2}{z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots} = a_{-2} + a_{-1}z + a_0 z^2 + a_1 z^3 + \dots$$

despejando el 1: $\Longrightarrow$ $1 = \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right)\cdot\left(a_{-2} + a_{-1}z + a_0 z^2 + \dots\right)$

$$1 = \underbrace{a_{-2}}_{1} + \underbrace{a_{-1}}_{0}z + z^2\left(a_0 + \frac{a_{-2}}{2!}\right) + \dots$$

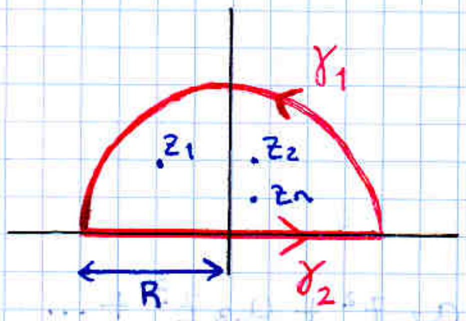
$$\boxed{\mathrm{res}(f;0) = 0}$$

Cálculo de integrales reales

Se trata de calcular $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Para ello se utiliza una función de variable compleja que en el eje real coincida con f.

Se integra sobre una trayectoria cerrada



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

cuando se hace $R \to \infty$

si se cumple que $|f(z)||z^2| \le M$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \to 0 \qquad \int_{\gamma_1} f \le L(\gamma_1)\cdot|f(z)| = \pi R \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{\pi M}{R^2} \to 0$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}(f, z_i)$$

siendo z_i las singul. de f por encima del eje real

Por tanto

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}(f, z_j) = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Teorema

- f derivable salvo en $z_1 \dots z_n$ (nº finito)

  $z_1 \dots z_n$ no están en $\mathbb{R}$

  son singularidades con $\mathrm{Im}(z) > 0$

- $|f(z)|\cdot|z^2| \le M$ cuando $\mathrm{Im}\, z > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}(f, z_j)}$$

La condición $|f(z)|\cdot|z^2| \le M$ asegura que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \le \underbrace{L(\gamma_1)}_{\pi R} \cdot \underbrace{|f(z)|}_{\text{una cota de } f} \le \pi R \frac{M}{|z^2|} = \pi R \frac{M}{R^2} = \frac{\pi M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Lema de Jordan

Un caso particular del T^a anterior, pero condiciones más relajadas.

sea f derivable compleja salvo $z_1 \dots z_n$ (singularidades en $\mathrm{Im}>0$) (no están en $\mathbb{R}$)

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$$

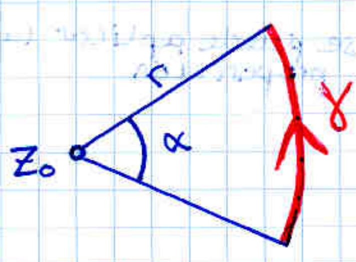
$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,ax\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}(g\,;\,z_k) \qquad g = f(x)\cdot e^{iaz}}$$

Es muy util en series de Fourier

Proposición

Sea f derivable salvo en z_0

sea z_0 un polo de orden 1



$$\Rightarrow \boxed{\lim_{r\to 0}\int_\gamma f(z)\,dz = i\cdot \mathrm{res}(f\,;\,z_0)\cdot\alpha}$$

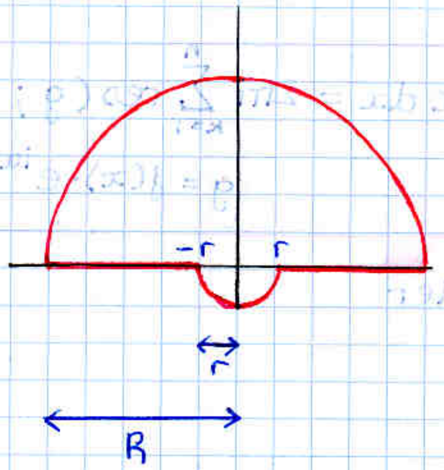
ejemplo

Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

Las singularidades no deben estar en el eje real, aunque sean evitables.

Haremos lo siguiente ... $f(z) = \frac{1}{z}$

única singularidad de $g(z) = f(z)e^{iz}$ es $z=0$



$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_\frown g + \int_{--} g + \int_\smile g$$

lim $R\to\infty$

lim $r\to 0$

proposición anterior

$$2\pi i \operatorname{res}(g;0) = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx + i\pi \operatorname{res}(g;0)$$

$$g(x) = \frac{1}{x}e^{ix}$$

Calcular $\operatorname{res}(g;0)$ $\qquad g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$

$$\operatorname{ord}(g;0) = \operatorname{ord}(e^{iz};0) - \operatorname{ord}(z;0) = 0 - 1 = -1$$

$z=0$ es un polo de orden 1 $\rightarrow$ se puede aplicar la proposición

$$zg(z) = a_{-1} + a_0 z + a_1 z^2 + \dots$$

$$a_{-1} = zg(0) = e^{i0} = 1$$

$$\operatorname{res}(g;0) = 1$$

$$2\pi i \operatorname{res}(g;0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx + i\pi \operatorname{res}(g;0)$$

$$2\pi i = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx + i\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \pi i$$

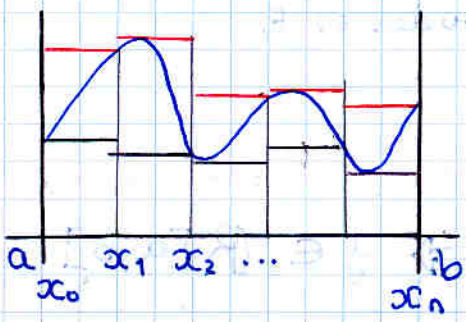
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}e^{ix}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\cos x\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\operatorname{sen} x\,dx = i\pi$$

igualando parte real e imaginaria:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi}$$

TEMA 2. ANÁLISIS DE FOURIER

Integración: Teoría de Riemann-Stieltjes



$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$

normalmente $\alpha(x) = x$

$$S(P, f, \alpha) = \sum_1^n S_k [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)]$$

$$s(P, f, \alpha) = \sum_1^n s_k [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)]$$

$$S_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$s_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b] \Rightarrow \inf S(P, f, \alpha) = \sup s(P, f, \alpha) = \boxed{\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)}$$

una partición con n suficientemente grande

La función α sirve para ponderar las zonas de f. Cuanto más pendiente tenga α en una zona, más peso.

Cogiendo $\alpha(x) = x$, se obtiene el área bajo f

Integrabilidad

El propio Riemann no supo decidir qué funciones se podían integrar y cuáles no.

Teorema (H. Lebergue)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{f \in \mathcal{R}[a,b]}_{f \text{ integrable en } [a,b]} \Longleftrightarrow$$

$D = \{\text{conjunto de } x \text{ donde } f \text{ es discontinua}\}$

D tiene medida cero

Def: medida cero

$D \subset \mathbb{R}$ tiene medida cero $\equiv \forall \varepsilon > 0, \exists (I_n)_{n=1}^{\infty}$ — I_n intervalos que cubren al conjunto de discontinuidades

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

y su longitud es tan pequeña como se quiera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$$

ej
$D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow$ medida cero

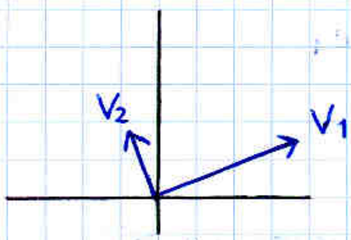
ej
$D = \{x_1, x_2, \dots\}\ \infty \rightarrow$ si D es numerable podemos tomar
$\ell(I_1) = \frac{\varepsilon}{2}$ $\ell(I_2) = \frac{\varepsilon}{4}$ $\ell(I_3) = \frac{\varepsilon}{8}$ ...
la suma de longitudes es ε

Caso particular:

si $f[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es discontinua en una sucesión (finita o infinita) de puntos $\Longrightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$

ejemplo:	ejemplo
 f es integrable	$f(\text{racional}) = 1$ $f(\text{irracional}) = 0$ $\quad f:[0,1]$ tiene ∞ discontinuidades, no numerables. f no es integrable

Ortogonalidad



$$\boxed{V_1 \perp V_2 \iff \langle V_1, V_2 \rangle = 0}$$

¿Que es $\langle V_1, V_2 \rangle$?
Producto Escalar:
Cualquier cosa que verifique:

$$\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$$
$$\langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle$$
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$$
$$\langle v, w \rangle = 0, \ \forall w \implies v = 0$$
$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$$

En el caso de los complejos: hay que hacer un pequeño ajuste

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$$

Y la linealidad sólo se cumple en la primera variable (para tener linealidad en la segunda se tiene en cuenta el conjugado

Producto escalar Euclídeo:

$$\boxed{\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k}$$

en $\mathbb{C}$ $\langle v, w \rangle = \sum v_k \overline{w_k}$

proporciona una forma de medir distancias

$$\| v \|_2 = (\langle v, v \rangle)^{1/2} = \left(\sum v_k^2\right)^{1/2}$$

Otros productos escalares:

$$\boxed{\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx}$$

en $\mathbb{C}$ $\langle f, g \rangle = \int f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx$

En este caso, $f(x) \perp g(x) \equiv \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = 0$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

la desigualdad más importante de las matemáticas.

Se cumple para todo producto escalar

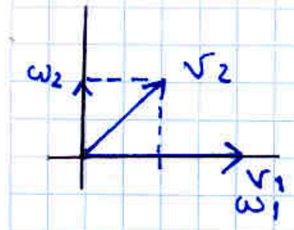
$$\boxed{|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|}$$

ej. producto escalar euclídeo

$$\sum v_k w_k \leq \left(\sum v_k^2\right)^{1/2} \left(\sum w_k^2\right)^{1/2}$$

anécdota:
Schwarz 'la ultima vez dije que mi forma de escribir esta teoría la podía entender incluso un oficial prusiano. Tras sus quejas y la llamada que me hizo el Tzar, tengo que rectificar: probablemente un oficial prusiano no lo entendería.

Ortogonalización de Gram Schmidt



$$\omega_1 = v_1$$

$$\omega_2 = v_2 - \underbrace{\frac{\langle v_2, \omega_1 \rangle}{\langle \omega_1, \omega_1 \rangle} \omega_1}_{\text{la proyección de } v_2 \text{ sobre } \omega_1}$$

$$\omega_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \omega_1 \rangle}{\langle \omega_1, \omega_1 \rangle} \omega_1 - \frac{\langle v_3, \omega_2 \rangle}{\langle \omega_2, \omega_2 \rangle} \omega_2$$

Ventaja de vectores ortogonales

Los cálculos son mucho más fáciles

ej: $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal

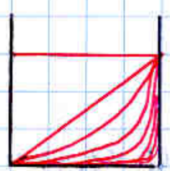
$\langle v, e_1 \rangle = v_1$
$\langle v, e_2 \rangle = v_2$
$\langle v, e_3 \rangle = v_3$

ortonormal = ortogonal y vectores de norma 1

funciones ortogonales

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) = 0$$

ej $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ en $[0,1]$ NO son ortogonales



Si se ortogonalizan con Gram Schmidt, se obtienen los polinomios de Legendre

Familias ortogonales (ortonormales) de funciones

- Sistema trigonométrico

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{2\pi}}, \dots \right\}$$ es S.O.N. en $[-\pi, \pi]$

ej. $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos mx}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \cdot \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}\, dx$$

truco para integrar funciones trigonométricas: $\rightarrow$ pasar a exponenciales

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+m)x} + e^{i(n-m)x} + e^{i(m-n)x}\, dx$$

$$\boxed{\int e^{i(n+m)x} = \begin{cases} \dfrac{e^{i(n+m)x}}{i(n+m)} & \text{si } n \neq -m \\ 0 & \text{si } n = -m \end{cases}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

- Sistema exponencial

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$$ es S.O.N. en $[-\pi, \pi]$

ej $$\langle e^{inx}, e^{inx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, \overline{e^{inx}}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx$$ ← recuerda!

$$= 2\pi$$

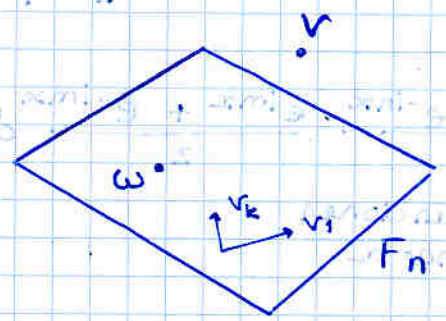
$$\rightarrow \left\langle \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = 1$$

Sistemas ortonormales y aproximaciones

sea $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ S.O.N.

$F_n = \text{lin}(v_1, v_2, v_3, \dots) \equiv$ envoltura lineal (todas las combinaciones lineales posibles)

¿cuál es el vector de F_n más próximo a v?



sea $\omega \in F_n$ $\quad \boxed{\omega = \sum a_k v_k}$

Hay que minimizar

$$\|v-\omega\|_2^2 = \langle v-\omega, v-\omega\rangle = \langle v - \sum a_k v_k, v - \sum a_k v_k\rangle$$

$$= \langle v,v\rangle - \sum \overline{a_k}\langle v, v_k\rangle - \sum a_k \langle v_k, v\rangle + \underbrace{\sum a_k \overline{a_k}}$$

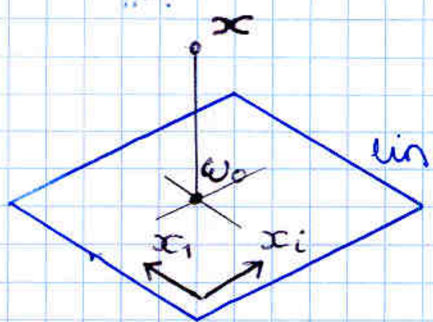
resultado de $\langle \sum a_k v_k \cdot \sum a_k v_k\rangle$
1 para v's iguales
0 para v's distintas (o son perpendiculares)

$$= \langle v, v\rangle - \underbrace{\sum \langle v, v_k\rangle\langle v_k, v\rangle + \sum |a_k - \langle v, v_k\rangle|\,|\overline{a_k} - \langle v, v_k\rangle|}_{\text{se van}}$$

$$= \|v\|_2^2 - \sum |\langle v, v_k\rangle|^2 + \sum |a_k - \langle v, v_k\rangle|^2$$

Proposición:

$$\omega = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots = \sum_1^n a_i x_i$$



$\text{lin}(x_1, x_2, \dots)$

$$\boxed{\|x - \omega_0\|_2^2 = \|x\|_2^2 - \sum |\langle x, x_i\rangle|^2 + \sum |a_i - \langle x, x_i\rangle|^2}$$

$\|x - \omega_0\|^2$ es mínimo cuando $\quad a_i = \langle x, x_i\rangle$

$$\omega_0 = \sum \langle x, x_i\rangle x_i$$

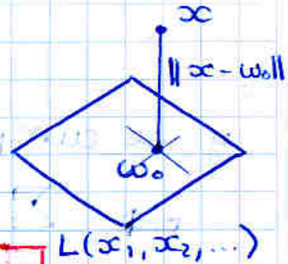
tomando $a_i = \langle x, x_i \rangle$ queda

$$\| x - w_0 \|_2^2 = \| x \|_2^2 - \sum |\langle x, x_i \rangle|^2$$

sabiendo que (por def de norma) $\| x - w_0 \|_2^2 \geq 0$
se obtiene $\sum |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \| x \|^2$

Para $w_0 \in L(x_1, x_2, \ldots)$ más cercano a x

se cumple $w_0 = \sum \underbrace{\langle x, x_i \rangle}_{\text{coeficientes de } w_0 \text{ en el SON}} x_i$



y además:

Desigualdad de Bessel $\sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \| x \|_2^2$

llamando $a_i = \langle x, x_i \rangle$ $a_i \equiv$ coeficientes de w_0

$\sum_1^n |a_i|^2$ converge (por estar acotada)
$\Rightarrow \{a_i\} \to 0$

Teorema

La desigualdad de Bessel es una igualdad si y sólamente si:

$$x = \sum_1^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i \quad \text{Serie de Fourier}$$

se obtiene entonces

Igualdad de Parseval $\sum |\langle x, x_i \rangle|^2 = \| x \|^2$

Explicación:
La distancia entre x y w_0 se va haciendo menor conforme $\text{lin}(x_1, \ldots, x_n)$ va ganando dimensiones y va llenando todo el espacio

- Caso SON sin suficientes vectores para llenar el espacio $\| x - w_0 \|^2$ nunca es cero

- Caso S.O.N completo. Hay suficientes vectores como para llenar todo el espacio: el subespacio $L(x_1, \ldots, x_n)$ logra "comerse" a x.

$\Rightarrow x = \sum \langle x, x_i \rangle x_i \Rightarrow$ se cumple PARSEVAL $\to \| x - w_0 \|^2 = 0$

$x = \sum a_i x_i$ $\quad \sum |a_i|^2 = \| x \|^2$

Serie de Fourier

Mediante un SON completo se logra expresar cualquier **x** tomando los **coeficientes** a_i del SON adecuados ($a_i = \langle x, x_i \rangle$) de forma que se logra:

$$x = \sum \langle x, x_i \rangle x_i$$

$$x = \sum \underbrace{a_i}_{\text{coeficientes de Fourier}} \; \underbrace{x_i}_{\text{vectores de la base ortonormal perteneciente al SON completo}}$$

y se cumple

$$\Rightarrow \sum |\langle x, x_i \rangle|^2 = \|x\|^2$$ igualdad de Parseval

$$\sum |a_i|^2 = \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{la serie } \sum |a_i|^2 \text{ converge}}$$

Si esto no se cumple $\Rightarrow$ no es Serie de Fourier

Normalmente, el S.O.N. completo se logra obtener con una base de infinitos vectores ortonormales

La gran utilidad de la serie de Fourier es cuando interpretamos los vectores como funciones en $[a,b]$

$$\vec{x} = f(x) \qquad x \in [a,b]$$

$$\vec{x}_i = g_i(x) \qquad \text{S.O.N. completo: } \{g_1(x), g_2(x), \dots\}$$

$$a_i = \langle f, g_i \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g_i(x)\, dx$$

$$f(x) = \sum a_i \cdot g_i(x)$$

Caso particular que usaremos siempre

Interpretación de los vectores y el producto escalar
$$\begin{cases} \text{funciones integrables en } [-\pi,\pi] \\ \langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \\ \|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle \end{cases}$$

S.O.N. trigonométrico completo:
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$$

Tal que

$$f(x) \sim \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + \dots$$

Calculando:

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\left\langle f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$$

$$\left\langle f, \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}\right\rangle = \qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x\,dx$$

sustituyendo:

$$f(x) \sim \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\right) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt\right)\cos x + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} t\,dt\right)\operatorname{sen} x + \dots$$

y ahora, haciendo una 'chapucilla' con la nomenclatura a fin de que quede una expresión sencilla [pero haciendo que los a_i ya no sean exactamente los coeficientes del SON (se los divide por $\sqrt{\pi}$)]

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2\cos 2x + b_2\operatorname{sen} 2x + \dots$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen} kx)$$

siendo:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\,dt$$

Expresión típica para la serie de Fourier

$$\left\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \right) \right\|_2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

se acerca más a f cuantos más coeficientes cojamos

Identidad de Parseval en caso particular:

$$\sum |\langle x, x_k \rangle| = \|x\|^2$$

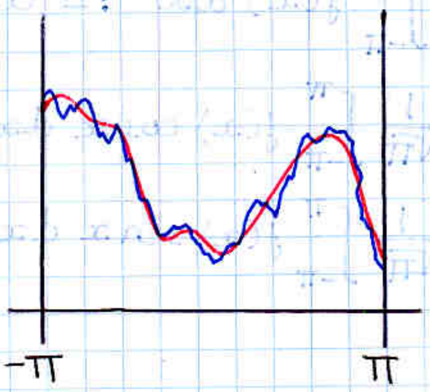
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t\,dt \right)^2 + \dots = \|f\|^2$$

$$\frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi a_1^2 + \pi b_1^2 + \pi a_2^2 + \dots = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$$

$$\boxed{\frac{1}{2} a_0^2 + \sum (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt}$$

Comportamiento de series de Fourier

Toda función integrable es igual a una suma infinita de senos y cosenos



La aproximación se parecerá mas a f cuanto mayor N cojamos

Cabe preguntarse:

¿la aproximación de Fourier...

... converge puntualmente a f?

... converge uniformemente a f?

¿En qué casos sí? ¿En qué casos no?

Veámoslo; pero antes conviene ver lo que es el núcleo de Dirichlet

Núcleo de Dirichlet

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\right) + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt\right)\cos x + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} t\,dt\right)\operatorname{sen} x + \dots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos 2(t-x) + \dots\right] dt$$

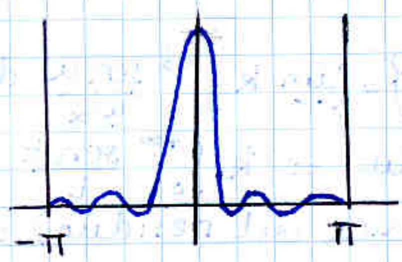
tomando sólo los n primeros términos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\,dt$$

↑ sumas parciales de la serie de Fourier (S_n)

↑ núcleo de Dirichlet (D_n)

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum \cos(kt) = \frac{\operatorname{sen}((n+1/2)t)}{2\operatorname{sen}(t/2)}$$



c.v. $t - x = u$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)D_n(u)\,du \overset{(?)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt$$

c.v. $u = -t$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]D_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right]D_n(t)\,dt$$

Proposición

$$\boxed{S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,D_n(t)\,dt}$$

donde: $\boxed{D_n(t) = \dfrac{\operatorname{sen}[(n+1/2)t]}{2\operatorname{sen}(t/2)}}$ → si $t/2$ es múltiplo de π, $D_n(t) = n + 1/2$ (haciendo lím)

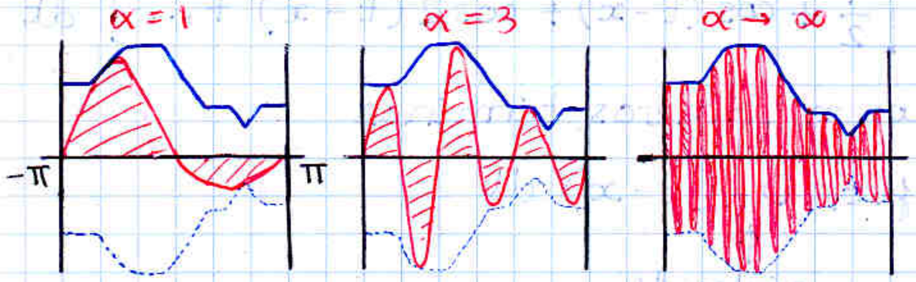
Convergencia a F de series de Fourier

Para poder estudiarla, conozcamos antes un par de cosas

Lema de Riemann-Leberge

g integrable en [a,b]

$$\Longrightarrow \int_a^b g(t)\,\text{sen}\,\alpha t\,dt \xrightarrow{\alpha\to\infty} 0$$



tiende a restarse y sumarse caras simétricas.
El area tiende a cero

Integrales de Dirichlet

$$\boxed{\int_0^{\delta} g(t)\cdot\frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt \xrightarrow[\alpha\to\infty]{?} ?}$$

caso $g(t) = cte = k$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\delta} k\,\frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt = \{\alpha t = u\} = \lim_{\alpha\to\infty} k\int_0^{\alpha\delta}\frac{\text{sen}\,u}{u/\alpha}\,\frac{du}{\alpha} = \lim_{k\to\infty} k\int_0^{\alpha\delta}\frac{\text{sen}\,u}{u}\,du$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} k\int_0^{\alpha\delta}\frac{\text{sen}\,u}{u}\,du = k\int_0^{+\infty}\frac{\text{sen}\,t}{t}$$

$$= (\text{utilizando técnica del residuo}) = k\,\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} g(t)\,\frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{g=cte} k$$

caso $g(t) \neq cte$

Bajo algunas condiciones (en la actualidad aun no se sabe ninguna condicion necesaria y suficiente para que esto ocurra) cuando δ es suficientemente pequeño, en el intervalo $\int_0^{\delta}$ la función g es practicamente cte

con $\delta\downarrow\downarrow \rightarrow g \simeq cte = g(0+)$

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} g(t)\,\frac{\text{sen}\,\alpha t}{t}\,dt \xrightarrow[(*)]{\alpha\to+\infty} g(0+)}$$

Aún no se conoce una condición necesaria y suficiente para que se cumpla (*).
En los problemas de ingeniería, nos basta con 2 condiciones suficientes.

Condición de Jordan

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} g(t)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{t}\,dt \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{(*)} g(0^+)}$$

g es diferencia de dos funciones monótonas crecientes en $[0,\delta]$.

$\Rightarrow$ g verifica $(*)$

Casos particulares:

$g = g_1 - g_2$

si $g_1 = 0 \to g = -g_2 \to$ $\boxed{\text{monótona decreciente}}$

si $g_2 = 0 \to g = g_1 \to$ $\boxed{\text{monótona creciente}}$

Condición de Dini

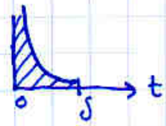
1. $\exists\, g(0+)$
2. $\exists \displaystyle\int_0^{\delta} \frac{g(t)-g(0+)}{t}\,dt$

$\Rightarrow$ g verifica $(*)$

Casos particulares

1. $\boxed{|g(t)-g(0^+)| \leq Mt^p \qquad p>0}$

$\Rightarrow \dfrac{|g(t)-g(0+)|}{t} \leq Mt^{p-1} \quad p-1>-1 \Rightarrow$ integral es conv.



2. $\boxed{g \text{ tiene derivada a la derecha en cero}}$

$\dfrac{g(t)-g(0+)}{t} \leq |g'(0+)+\varepsilon| = \text{cte} \to$ integral es conv.

Ahora ya podemos estudiar la convergencia puntual.

Convergencia puntual de series de Fourier

serie de Fourier $\quad f$ integrable en $[-\pi,\pi]$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Las sumas parciales de la serie son

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Queremos estudiar si $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{p} f(x)$

Fijamos $x \in [-\pi,\pi]$ $\qquad \lim_{n\to\infty} S_n(x) \underset{?}{=} f(x)$

$$S_n(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ya} \\ \text{(demostrado)}}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen} t/2}}_{D_n(t)}$$

tiene problema en $t=0$

separamos la integral en dos para aislar el problema

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} D_n(t)\, dt$$

$$+ \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[\underbrace{\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\cdot 2\operatorname{sen} t/2}}_{\text{integrable en } [\delta,\pi]} \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})t\right]dt}_{\substack{n\to+\infty \\ \text{Lema de Riemann-Leberge}}} \to 0$$

$0 \quad \delta \quad \pi$

Cuando $n\to\infty$, nos olvidamos del intervalo $[\delta,\pi]$ (ya que $\to 0$) y nos centramos sólo en $[0,\delta]$, donde está el problema

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{t}\right)dt$$

lo he sumado y restado esto.

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\underbrace{\underbrace{\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\left(\frac{1}{2\operatorname{sen} t/2} - \frac{1}{t}\right)}_{\text{integrable }\left(\frac{1}{2\operatorname{sen} t/2}\simeq\frac{1}{t}\right)} \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})t\, dt}_{\text{Lema de Riemann Leberge}} \to 0$$

De nuevo separo el problema en 2 y la parte que no interesa tiende a cero

queda:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt$$

que es justamente de donde Dirichlet comenzó su estudio de las integrales de Dirichlet. Siendo;

$$g(t) = \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2} \qquad g(0+) = \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$$

Ahora podemos aplicar las condiciones de Jordan y Dini para $g(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$

- f integrable:

Jordan:
f es diferencia de monótonas crecientes en $[x-\delta, x+\delta]$ $\Longrightarrow$

Caso particular:
- f es monótona en $[x-\delta, x]$ y en $[x, x+\delta]$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}}$$

Dini:
$\exists f(x+)$, $\exists f(x-)$
$\exists \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt$ $\Longrightarrow$

caso particular:
- $\exists$ derivadas laterales finitas en x $\Longrightarrow$

Cuadro con todo lo que hay que saber de conv. puntual

Es decir,
si f es integrable y cumple alguna de las condiciones de la izquierda, entonces
en cada punto x, la serie de Fourier tiende a:

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

a esto se le llama la semisuma

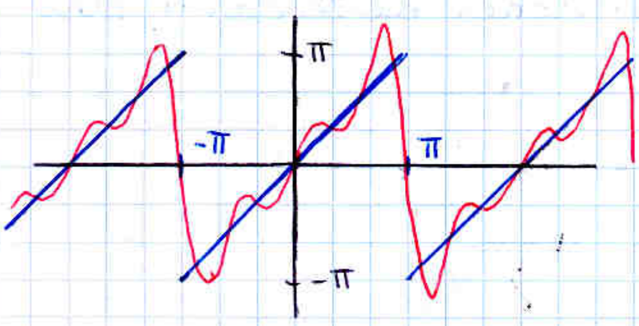
Además, si f es continua

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

(def continua: $f(x+) = f(x-) = f(x)$

ejemplo:

$f(x) = x \to 2\pi$-periódica

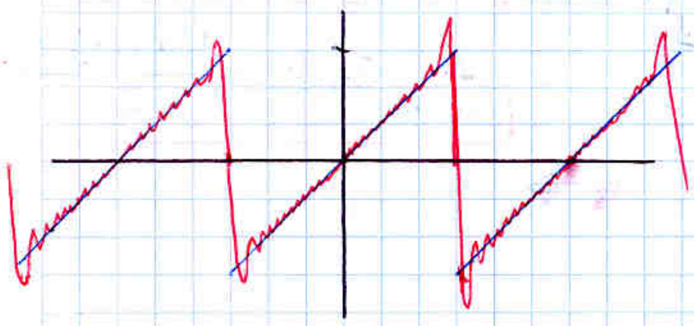


f integrable
$f(x)$ $\exists$ derivadas laterales finitas $\forall x$

$\Downarrow$ Dini

$S_n(x) \to f(x)$

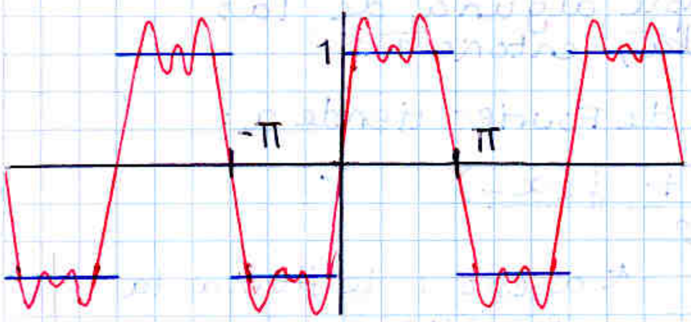
$S_n(\pi) \to \frac{(\pi)+(-\pi)}{2} = 0$



Fenómeno de Gibbs:
En las discontinuidades aparece un rizado cuya altura no cambia al aumentar N.
se debe a la forma de D_n

ejemplo:

$f(x) = 1$ en $[0,\pi]$
↳ extensión impar
↳ extensión 2π periódica



f integrable
(continua a trozos, derivable a trozos)

$\Downarrow$ Dini

f monótona en cualquier intervalo

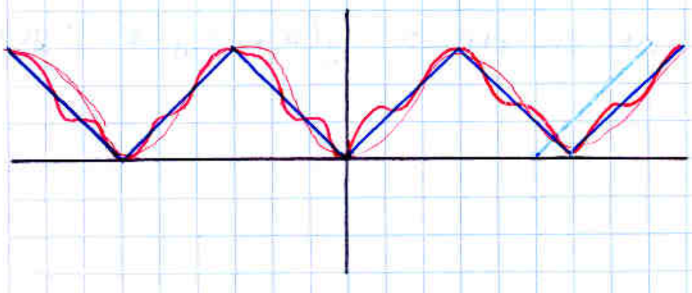
$\Downarrow$ Jordan

$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$

$\to f(x)$
$\to 0 \quad x = \pi$

ejemplo:

$f(x) = x$ en $[0,\pi]$
↳ extensión par
↳ 2π-periódica



· f continua
· en cada punto $\exists$ derivada lateral

$\Downarrow$ Dini

· f es monótona en un intervalo alrededor de cada punto.

$\Downarrow$ Jordan

$S_n(x) \rightrightarrows f(x)$

Convergencia uniforme de series de Fourier

Teorema:

Sea f 2π-periódica
- f continua
- f derivable a trozos
- f' (derivada) continua a trozos, i.e. tiene DSF

$\Longrightarrow S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Demostración:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$f' \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)$$ f' tiene DSF (continua a trozos)

Recuerda: criterio M de Weierstrass

$|g_n(x)| \le M_n$, $\sum M_n$ conv. $\Longrightarrow \sum g_n(x)$ conv. uniformemente

Basta encontrar una cota de $a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$ que converga

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx|$$

Recuerda: Desigualdad Cauchy-Schwarz

$$\langle v, w \rangle \le \|v\| \cdot \|w\|$$

$$= \sum \langle (a_k, b_k), (\cos kx, \operatorname{sen} kx) \rangle \le \sum (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$$

Calculos auxiliares

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \qquad A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt \, dt$

(partes) $A_k = \frac{1}{\pi}\Big[\underbrace{\cos kt \cdot f(t)}_{=0}\Big]_{-\pi}^{\pi} + k \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt}_{b_k}$

cos kt y f(t) son 2π-periódica. Valen igual en π y en $-\pi$

$$\boxed{\begin{aligned} A_k &= k \cdot b_k \\ B_k &= -k \cdot a_k \end{aligned}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_k^2}{k^2} + \frac{A_k^2}{k^2}\right)^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(A_k^2 + B_k^2) = \Big\langle \underbrace{\sum_1^{\infty} \frac{1}{k}, \sum_1^{\infty} (A_k^2 + B_k^2)}_{\text{dos vectores } \infty} \Big\rangle$$

(Cauchy Schwarz) $\le \left(\sum \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum A_k^2 + B_k^2\right)^{1/2} < \infty$

f' tiene DSF y por tanto cumple igualdad de Parseval, y $\sum (A_i)^2$ converge

Criterio M

$\Longrightarrow S_n(x) \xrightarrow{u} f$

Resumen:

f integrable, 2π- periódica

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$\| S_n - f \| \to 0$$

x fijo: $\quad S_n(x) \xrightarrow[\substack{\text{Jordan} \\ \text{(monotona)}}]{\substack{\text{(derivadas lat finit)} \\ \text{Dini}}} \dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$

$S_n \xrightarrow{u} f \qquad$ f continua, derivable a trozos
f' continua a trozos

Operaciones válidas sobre series de Fourier

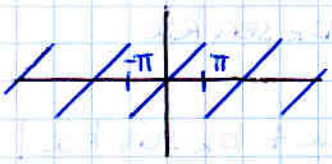
¿se puede integrar / derivar una serie de Fourier para obtener la función integrada / derivada?

Integrar casi siempre, derivar casi nunca

ejemplo

$f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$
extensión 2π - periódica

$$x = f(x) \sim 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots\right)$$



$$1 = f'(x) \overset{?}{\sim} 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots)$$

Esto no es una serie de Fourier.
No verifica la desigualdad de Bessel

Una función tan sencilla no hemos podido derivarla

Teorema (derivación)

f continua 2π - periódica
$\exists f'$, derivable a trozos
$\Rightarrow$ La serie de Fourier de f se puede derivar término a término para obtener la de f'

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$f' \sim \sum_1^\infty (-k a_k \operatorname{sen} kx + k b_k \cos kx)$$

$$f' \sim \frac{A_0}{2} + \sum_1^\infty (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_k &= k b_k \\ B_k &= -k a_k \end{aligned}} \qquad A_0 = 0$$

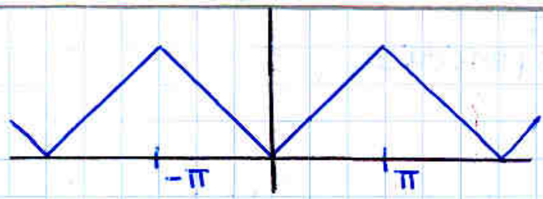
Además, como f' es derivable a trozos cumple:

$$S_{n_{f'}} \xrightarrow{\text{(Dini)}} \frac{f'(x+) + f'(x-)}{2}$$

ejemplo:

$f(x) = x \quad x \in [0, \pi]$

↳ extensión par
↳ 2π- periódica



Cálculo coeficientes serie de Fourier

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

Al ser par, sólo tiene componentes 'cos'

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx$$

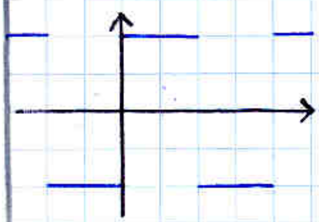
$$\int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos kx \, dx & v = \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \end{matrix} \right\}$$

$$(\text{partes}) = x \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \, dx$$

$$= \frac{1}{k^2} \left[\cos kx \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ -\frac{2}{k^2} & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{3^2 \pi} \cos 3x - \frac{4}{5^2 \pi} \cos 5x - \dots$$

$\exists f'$ derivable a trozos $\Rightarrow$ se puede derivar



$$f'(x) \sim \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} 3x + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen} 5x + \dots$$

Vemos que se cumple $\quad A_k = k b_k$
$\quad B_k = -k a_k$

Teorema (integración)

f 2π - periódica, continua a trozos $\Rightarrow$ la serie de Fourier se puede integrar término a término

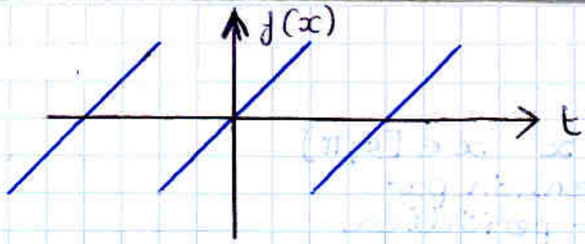
son condiciones muy flojas.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx \sim \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum \left(a_k \left[\frac{\operatorname{sen} kx}{x} \right]_a^b + b_k \left[\frac{-\cos kx}{x} \right]_a^b \right)$$

ejemplo:

$f(x) = x$
↳ 2π periódica



Cálculo de los coeficientes:
$f(x)$ es par $\Rightarrow$ sólo senos

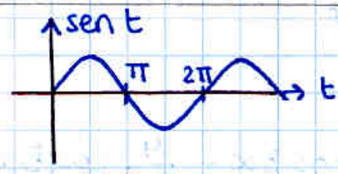
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \text{sen}\, kt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\, \text{sen}\, kt\, dt$$

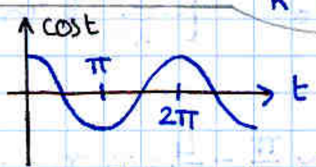
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\, \text{sen}\, kt\, dt$$

por partes: $u = t$
$dv = \text{sen}\, kt\, dt$
$v = -\frac{\cos kt}{k}$
$du = dt$

$$\int_0^{\pi} t\, \text{sen}\, kt\, dt = -\frac{t}{k}\cos kt\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos kt}{k}\right)dt$$

$$= -\frac{t}{k}\cos kt\Big|_0^{\pi} + \frac{\text{sen}\, kt}{k^2}\Big|_0^{\pi}$$





$\text{sen}\, k\pi = 0$
$\text{sen}\, 0 = 0$

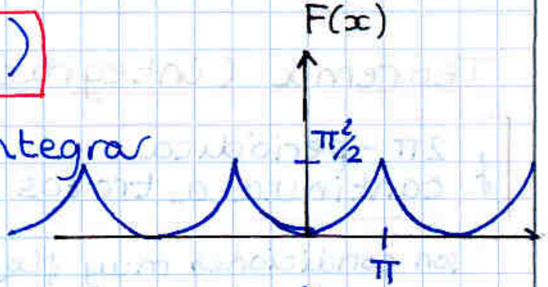
$\cos k\pi = (-1)^k$
$\cos 0 = 1$

$$= \begin{cases} \pi/k & k \text{ impar} \\ -\pi/k & k \text{ par} \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} 2/k & k \text{ impar} \\ -2/k & k \text{ par} \end{cases}$$

$$f \sim \frac{2}{1}\text{sen}\, x - \frac{2}{2}\text{sen}\, 2x + \frac{2}{3}\text{sen}\, 3x - \dots$$

$$\boxed{f(x) \sim 2\left(\text{sen}\, x - \frac{\text{sen}\, 2x}{2} + \frac{\text{sen}\, 3x}{3} - \dots\right)}$$



f continua a trozos $\Rightarrow$ podemos integrar

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^x f(t)\, dt \sim 2\left\{\int_0^x \text{sen}\, x - \int_0^x \frac{\text{sen}\, 2x}{2} + \int_0^x \frac{\text{sen}\, 3x}{3} - \dots\right\}$$

$$= 2\left\{(-\cos x + \cos 0) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 0}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 0}{3}\right)\right\}$$

$$= (-2)\left\{\cos xt - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right\} + 2\left\{1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots\right\}$$

para $x = \pi$ (curiosidad)

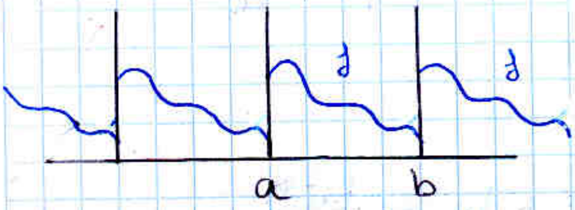
$$\frac{\pi^2}{2} = (-2)\left\{-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \dots\right\} + 2\left\{1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots\right\} = 4\left\{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right\}$$

Se obtienen expresiones extraordinaria utilizando Fourier

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2}}$$

la suma de los inversa de impares al cuadrado da $\pi^2/8$

Cambio de intervalo

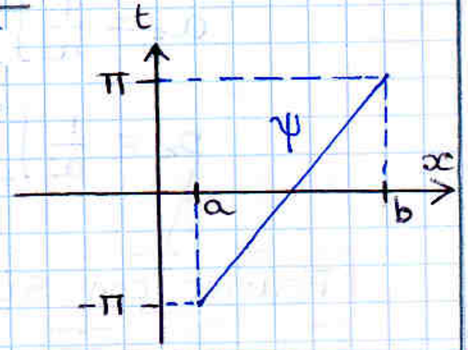


$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f es $(b-a)$ periódica

$$\overset{t}{[-\pi,\pi]} \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \overset{x}{[a,b]} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$f \circ \varphi$



$$t = \psi(x) = \frac{x-a}{b-a} 2\pi - \pi$$

$x - a \Rightarrow \begin{matrix} x = a \to 0 \\ x = b \to b - a \end{matrix}$

$(*)$ $\frac{x-a}{b-a} \Rightarrow \begin{matrix} x = a \to 0 \\ x = b \to 1 \end{matrix}$

$\left(\frac{x-a}{b-a}\right) 2\pi \Rightarrow \begin{matrix} x = a \to 0 \\ x = b \to 2\pi \end{matrix}$

$\left(\frac{x-a}{b-a}\right) 2\pi - \pi \Rightarrow \begin{matrix} x = a \to -\pi \\ x = b \to \pi \end{matrix}$

$$f(x) = (f \circ \varphi)(t)$$

$f \circ \varphi$ es 2π- periódica

$$f(x) = (f \circ \varphi)(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt)$$
$$t = \psi(x)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos k\underline{\psi(x)} + b_k \operatorname{sen} k\underline{\psi(x)}$$

coeficientes:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \circ \varphi)(t) \cos kt \, dt$$

c.v. $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^b (f \circ \varphi)(\psi(x)) \cos(k\psi(x)) \cdot \overbrace{\psi'(x)\, dx}^{dt}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}} \int_a^b f(x) \cos(k\psi(x)) \frac{2\cancel{\pi}}{b-a} dx$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$(b-a)$ periódica

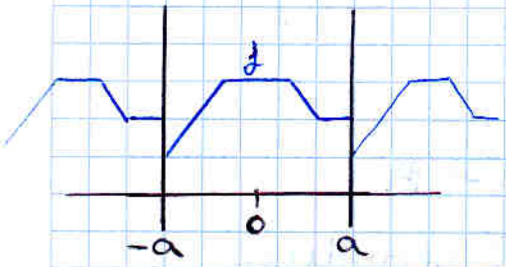
$$\overset{x}{[a,b]} \xrightarrow[\varphi]{} \overset{t}{[-\pi,\pi]}$$

$$t = \psi(x) \underset{(*)}{=} \frac{x-a}{b-a} 2\pi - \pi$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos(k\underline{\psi(x)}) + b_k \operatorname{sen}(k\underline{\psi(x)})$$

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos(k\underline{\psi(x)})\, dx$$

Caso particular



$$[\pi,\pi] \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} [-a,a]$$

$$\psi = \frac{\pi x}{a}$$

f $2a$-periódica

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{a} + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{a}$$

$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{a}\,dx$$

Fourier con S.O.N. de exponenciales

$$\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{\substack{k=-\infty \\ k\in\mathbb{Z}}}^{\infty}$$ S.O.N. completo, 2π-periódica

Recuerda, con complejos:
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\overline{g(t)}\,dt$$

Aplicando la definición de serie de Fourier

Sea $f(x)$ 2π-periódica

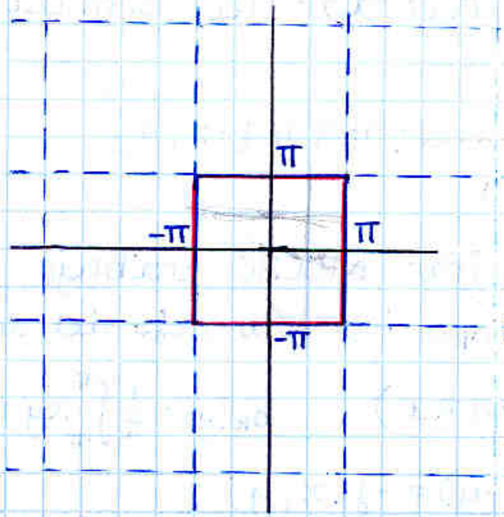
$$\boxed{f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \frac{e^{\frac{ikt}{\sqrt{2\pi}}}}{\sqrt{2\pi}}}$$

y por definición de coeficientes de Fourier:

$$C_k = \left\langle f, \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle$$

$$\boxed{C_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot e^{-ikt}\,dt}$$

Series dobles de Fourier



No es más que extender el concepto a dos dimensiones

$f: [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

2π - periódica

$f(x,y) = f(x+2\pi, y) = f(x, y+2\pi)$

- f continua "a trozos"
  trozos = subrectángulos
- f continuamente diferenciable a trozos.

~ $\boxed{\text{Fijamos } y}$ $\quad x \to f(x,y)$
2π periódica

$$f(x,y) \sim \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k(y)\cos kx + b_k(y) \operatorname{sen} kx$$

los coeficientes dependen de y. Podemos escribir la serie de Fourier de los coeficientes

$$a_k(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cos kx \, dx$$

$$a_k(y) \sim \frac{C_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{km}\cos(my) + d_{km} \operatorname{sen}(my)$$

donde

$$C_{km} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_k(y)\cos(my)\,dy$$ sustituyendo la expresión de a_k

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\cos kx\right]\cos my \; dx\,dy$$

$$C_{km} = \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\cos kx \cos my \; dx\,dy$$

$$d_{km} = \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y)\cos kx \operatorname{sen} my \; dy\,dx$$

igualment, con la serie de Fourier de b_k, obtenemos sus coeficientes e_{km} y f_{km} de igual modo.

$$e_{km} = \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y) \operatorname{sen} kx \cos my \; dx\,dy$$

$$f_{km} = \frac{1}{\pi^2}\iint_Q f(x,y) \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} my \; dx\,dy$$

Asi ya se podrian sustituir $a_k(y)$ y $b_k(y)$ (que ahora están escritos en función de $c_{km}, d_{km}, e_{km}, f_{km}$) en la serie de Fourier para $f(x,y)$

En la practica no hay que recordar las fórmulas, sino el proceso a seguir.

ejemplo: $f(x,y) = x \cdot y$ en $Q[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$

$\hookrightarrow$ 2π-periódica

Pensar un poco nos puede ahorrar MUCHO trabajo

fijamos y | $x \to xy$ es impar $\Rightarrow$ sólo coefs del seno

$$f(x,y) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(y)\,\text{sen}(kx) \qquad b_k(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xy\,\text{sen}\,kx\,dx$$

además: f impar $\Rightarrow$ $f(x,-y) = -f(x,y)$

$$\sum b_k(-y)\,\text{sen}(kx) = -\sum b_k(y)\,\text{sen}(kx)$$

$$\Rightarrow b_k(-y) = -b_k(y)$$

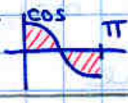
$\Rightarrow$ b_k es impar! $\Rightarrow$ sólo coefs del seno

$$b_k(y) \sim \sum_{m=1}^{\infty} f_{km}\,\text{sen}(my)$$

$$f_{km} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\Big(\underbrace{\int_0^{\pi} x\overset{y \text{ es cte}}{y}\,\text{sen}\,kx\,dx}_{b_k}\Big)\,\text{sen}\,my\,dy$$

$$\int_0^{\pi} x\,\text{sen}\,kx\,dx \overset{(\text{partes})}{=} -\frac{x}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx}_{0}$$

$$= -\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1}$$



$$f_{km} = \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{k}\right)(-1)^{k+1}\int_0^{\pi}\text{sen}(my)\cdot y\,dy$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{k}\right)(-1)^{k+1}\cdot\left(-\frac{\pi}{m}\right)(-1)^{m+1}$$

$$\boxed{f_{km} = \frac{4}{mk}(-1)^{m+k}} \quad (1)$$

$$b_k(y) \sim \sum_{m=1}^{\infty} f_{km}\,\text{sen}(my) \quad (2)$$

$$f(x,y) = x\cdot y \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(y)\cdot\text{sen}(kx) \quad (3)$$

sust ((1) en (2)) en (3)

$$\boxed{f(x,y) = x\cdot y \sim \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{mk}(-1)^{k+m}\,\text{sen}(kx)\,\text{sen}(my)}$$

Aplicación a ecuaciones diferenciales ordinarias

$$L[y(x)] = a_m y^{(m)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

Sol. de la homogénea $L[y(x)] = 0 \Rightarrow \{y_1(x), y_2(x), \dots y_m(x)\}$

sol. general $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_m y_m(x)$

Sol. particular: la parte más difícil

$\rightarrow$ Sabemos resolverlo para $L[y(x)] = C_k e^{ikx}$

conjeturamos
$$y_k(x) = M_k e^{ikx}$$
$$y'_k(x) = M_k\, ik\, e^{ikx}$$
$$\vdots$$
$$y_k^{(m)}(x) = M_k (ik)^m e^{ikx}$$

sustituyendo en la ec.

$$a_m M_k (ik)^m e^{ikx} + \dots + a_0 M_k e^{ikx} = C_k e^{ikx}$$
$$= M_k e^{ikx}\left[a_m (ik)^m + \dots + a_0\right] = C_k e^{ikx}$$

$$\boxed{M_k = \frac{C_k}{a_m (ik)^m + \dots + a_0}}$$

el denominador no se anula si $p(t) = a_m t^m + \dots + a_0$ no tiene raíces en el eje imaginario (en ik)

$$y_{p_k}(x) = M_k e^{ikx}$$

$\rightarrow$ Por Fourier, la mayoría de $f(x)$ admiten DSF:
(periódicas)

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik}$$

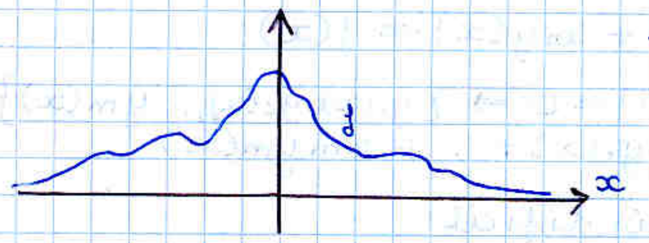
Así que lo que hemos hecho antes era resolver un sumando.
Si los resolvemos todos y 'sumamos' el resultado

$$\boxed{y_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_k e^{ikx}}$$

Normalmente $\sum M_k$ converge, pues $\sum |C_k|^2$ converge

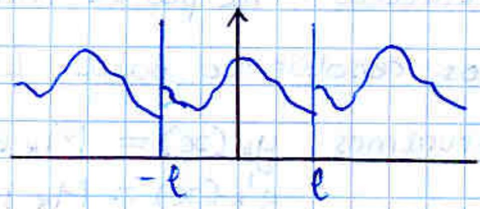
lo ideal es $a_m (ik)^m + \dots + a_0 \not\rightarrow 0$

Transformadas de Fourier



Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- absolutamente integrable (área finita)

Hacemos $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$
2ℓ - periódica



Al hacerse periódica:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{\ell} \\ a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi t}{\ell}\, dt \qquad b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{\ell}\, dt \end{array}\right]$$

es decir:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi t}{\ell}\,dt\right]\cos\frac{k\pi x}{\ell} + \left[\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi t}{\ell}\,dt\right]\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

aplicando: $\cos(y - x) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\left\{\cos\frac{k\pi}{\ell}(t-x)\right\}dt}$$

Si ahora hacemos tender $\ell \to +\infty$

$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt \to 0$ (pues $f(t)$ es abs. integrable $\Rightarrow \int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt < \infty$)

$$f(x) \sim \lim_{\ell \to +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \underbrace{\frac{k\pi}{\ell}}_{\alpha_k} (t-x)\, dt$$

Definimos:

$$\alpha_k := \frac{k\pi}{\ell} \Rightarrow \Delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{\ell}$$

$$F(\alpha) := \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \alpha(t-x)\, dt$$

$$f(x) \sim \lim_{\ell \to +\infty} \sum_{1}^{\infty} F(\alpha_k)\,\Delta\alpha_k \qquad \Delta\alpha_k = \frac{\pi}{\ell} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$$

$$f(x) \sim \lim_{l \to \infty} \sum_{1}^{\infty} F(\alpha_k)\, \Delta\alpha_k \qquad \Delta\alpha_k \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

la serie (se puede demostrar) converge a:

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} F(\alpha)\, d\alpha$$

sustituyendo $F(\alpha)$ con $l \to \infty$

$f(x)$ con $l \to +\infty$ es una señal de periodo ∞
↳ señal no periódica

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x)\, dt \right] d\alpha$$

$$\boxed{\text{Teorema (de la integral de Fourier, versión coseno)}}$$

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutamente integrable

Supongamos alguna de las dos condiciones:

(J) f es monótona en $[x-\delta, x]$ y en $[x, x+\delta]$

(D) $\exists\, f(x+)$, $\int_0^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}\, dt$ finita

$\exists\, f(x_-)$ $\int_0^{\delta} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}\, dt$ finita

(exactamente las mismas condiciones que serie de Fourier)

$$\text{(J)} \atop \text{(D)} \Rightarrow \boxed{\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x)\, dt \right]}_{\text{transformada coseno}} d\alpha}$$

Transformada de Fourier versión exponenciales complejas

$f \in \mathcal{R}^+(\mathbb{R})$

f verifica (D) o (J)

$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} =:$

Nomenclatura:
- Absolutamente integrable $\equiv f \in \mathcal{R}^+(\mathbb{R})$
- continuas que se anulan en el ∞ $\equiv f \in C_0(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{e^{i\alpha(t-x)}+e^{-i\alpha(t-x)}}{2}\,dt\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\,d\alpha + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\,d\alpha}_{\text{C.V. } \beta=-\alpha}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{+i\beta(t-x)}(+dt\,d\beta)$$

como β es una variable auxiliar, se intepreta exactamente igual que α

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt\right]e^{-i\alpha x}d\alpha$$

por cuestión de gustos,
tomando $\alpha=-\alpha$ (variable auxiliar) (para coincidir nomenclatura con SL)
y separando $\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (decisión salomónica) (*)

queda:

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \underset{(J)}{\overset{(D)}{=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt\right]}_{\mathcal{F}[f](\alpha)}e^{i\alpha x}\,d\alpha$$

transformada de Fourier

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[f](\alpha)\,e^{i\alpha t}\,d\alpha$$

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt$$

(*) en asignatura sistemas lin. I (no separa el $\frac{1}{2\pi}$)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(\omega)e^{i\omega t}d\omega = TF^{-1}[X(\omega)]$$

$$X(\omega) = \int x(t)e^{-i\omega t} = TF[x(t)]$$

Transformada de Fourier como Transformada Integral

En definitiva la transformada de Fourier representa

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}[f](\alpha) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$$

igual (=) si f es continua

Es decir, podemos convertir una función f a otra (con la que se podrá trabajar mejor para ciertas cosas) utilizando $\mathcal{F}$ (transf. de Fourier).
Y luego podemos volver a la f original (o casi) con $\mathcal{F}^{-1}$ (trans. de Fourier inversa)

La transformada de Fourier es sólo una de las diversas transformadas llamadas "transformadas integrales"

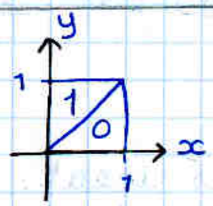
$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{T}[f](y) = \int_I \underbrace{k(x,y)}_{\text{núcleo de la transform.}} f(x)\,dx$$

integral con parámetro y

las transformadas integrales mejoran el comportamiento de las funciones

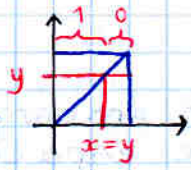
ejemplo $\mathcal{T}[f](y) = \int_0^1 k(x,y)\, f(x)\,dx$

Siendo el núcleo $k(x,y) = \begin{cases} 1 & y \geq x \\ 0 & y < x \end{cases}$



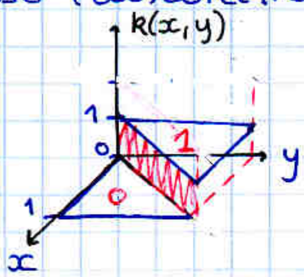
Veamos que efecto tiene $\mathcal{T}$ sobre f

$$\mathcal{T}[f](y) = \int_0^y 1 \cdot f(x)\,dx + \int_y^1 0 \cdot f(x)\,dx$$
$$= \int_0^y f(x)\,dx$$
$$\equiv \text{primitiva de } f$$



A pesar de ser un núcleo tan desastroso (discontinuo)

$$\mathcal{C}[0,1] \xrightarrow[\text{primitiva}]{\mathcal{T}} \mathcal{C}^1[0,1] \qquad \mathcal{C}^1[0,1] \xrightarrow{\text{derivada}} \mathcal{C}[0,1]$$



convierte función continua en función continuamente diferenciable

Caso de Fourier

núcleo $k(x,\alpha) = e^{-i\alpha t}$

$$\mathcal{R}^*(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{F}} C_0(\mathbb{R})$$

$\mathcal{R}^*(\mathbb{R})$: funciones absolutamente integrables

$C_0(\mathbb{R})$: funciones continuas que se anulan en el infinito

$\mathcal{F}$ es lineal : fácil de demostrar con linealidad de integrales

$\mathcal{F}$ es continua : cambios pequeños en $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ (mide lo grande que es f)

causa cambios pequeños en $\|f\|_\infty = \sup|g(x)|$ (el punto más alto)

Dem:

$$|\mathcal{F}[f](x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\underbrace{|e^{-i\alpha t}|}_{1}\,dt}_{\|f\|_1}$$

$$\|F[f]\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$$

$\mathcal{F}$ es lineal:

$$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$$

$$\mathcal{F}[kf] = k\,\mathcal{F}[f]$$

Sin embargo la transformación lineal actúa entre espacios infinitodimensionales, por lo que no se puede expresar como una matriz.

Propiedades de Transformada de Fourier

- Traslaciones

$$\boxed{f(t+t_0) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} e^{i\alpha t_0}\,\mathcal{F}[f](\alpha)}$$

Dem:

$$g(t) = f(t+t_0)$$
$$\mathcal{F}[g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t+t_0)e^{-i\alpha t}dt$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} t+t_0 = s \\ t = s-t_0 \end{array} \right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{-i\alpha(s-t_0)}$$

- Homotecias

$$\boxed{f(k\cdot t) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \frac{1}{|K|}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\alpha}{k}\right)}$$

Dem:

$$\mathcal{F}[f(kt)]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(kt)\,e^{-i\alpha t}\,dt$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} kt = s \\ s = t/k \end{array} \right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(s)\,e^{-i\alpha\frac{s}{k}}\,ds$$

- Derivación

$$\boxed{f^{(n)}(t) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} (i\alpha)^n\,\mathcal{F}[f](\alpha)}$$

Condiciones: f derivable

$f \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$

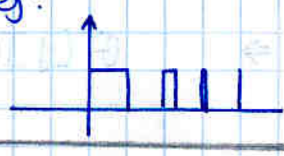
$i=1,2,\dots,n-1$ $\quad f^{(i)} \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R})$

$f(+\infty) = f(-\infty) = 0$

NOTA

$f \in \mathcal{R}^* \nRightarrow f(+\infty) = 0$

ej:



Dem:

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\alpha t}dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{-i\alpha t} & du = (-i\alpha)e^{-i\alpha t}dt \\ dv = f'(t)\,dt & v = f \end{array} \right\}$$

POR PARTES

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha t}f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0\ (f(\pm\infty)=0)} + (i\alpha)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}dt}_{\mathcal{F}[f](\alpha)}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[f'](\alpha) = (i\alpha)\,\mathcal{F}[f](\alpha)}$$

$$\mathcal{F}[f''](\alpha) = (i\alpha)\,\mathcal{F}[f'](\alpha) = (i\alpha)^2\,\mathcal{F}[f](\alpha)$$

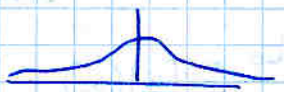
$f, f', f'', f''', \dots, f^{n-1}$ se anulan en $\pm\infty$

por inducción

$$\boxed{\mathcal{F}[f^n](\alpha) = (i\alpha)^n\,\mathcal{F}[f](\alpha)}$$

Consecuencia curiosa

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{(i\alpha)^n} \underbrace{\mathcal{F}[f^{(n)}](\alpha)}_{C_0(\mathbb{R}) \equiv \text{se anula en } \infty}$$



$i, -1, -i, 1, i, \ldots$

al dividir una función $C_0(\mathbb{R})$ por $(i\alpha)^n = i^n \alpha^n$ hace que se vaya pegando más y más al eje

$\Rightarrow \mathcal{F}[f](\alpha)$ se pega más al eje cuanto mayor sea n

$\Rightarrow$ Cuanto más veces se pueda derivar una función, mas pegada al eje es su transformada

Aplicación a la solución de EDO lineales

$$a_m f^{(m)}(t) + a_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \ldots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = \phi(t)$$

→ solución homogénea → polinomio característico

→ Solución particular

Utilizamos la transformada de Fourier con la limitación de que $\exists\ \mathcal{F}[\phi](\alpha)$

Haciendo la transformada de Fourier a ambos lados:

$$a_m (i\alpha)^m \mathcal{F}[f](\alpha) + \ldots + a_1 (i\alpha)\mathcal{F}[f](\alpha) + a_0 \mathcal{F}[f](\alpha) = \mathcal{F}[\phi](\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}[f](\alpha) \cdot \{ a_m (i\alpha)^m + \ldots + a_1 (i\alpha)^1 + a_0 (i\alpha) \} = \mathcal{F}[\phi](\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{\mathcal{F}[\phi](x)}{a_m (i\alpha)^m + \ldots + a_0}}$$

biendefinida salvo en puntos α donde se anula el polinomio

Sabiendo la transformada de Fourier de una solución particular, podemos obtener la solución particular haciendo la transformada inversa de Fourier.

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}[\phi](x)}{a_m (i\alpha)^m + \ldots + a_0} \right]}$$

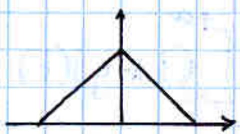
Funciones $\mathcal{S}$

- funciones infinitamente derivables
- decrecimiento rápido $\equiv$ aún multiplicándolas por t^p siguen estando acotadas

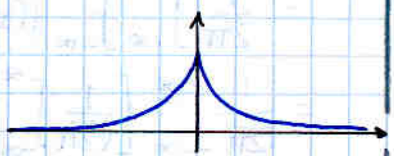
$$t^p f^{(q)}(t) \leq C_{pq} \quad \forall t$$

ejemplos:

- funciones que 'se acaban'



- función $\frac{1}{e^{|x|}}$ ya que $\frac{t^p}{e^{|x|}} \to 0 \quad \forall p$

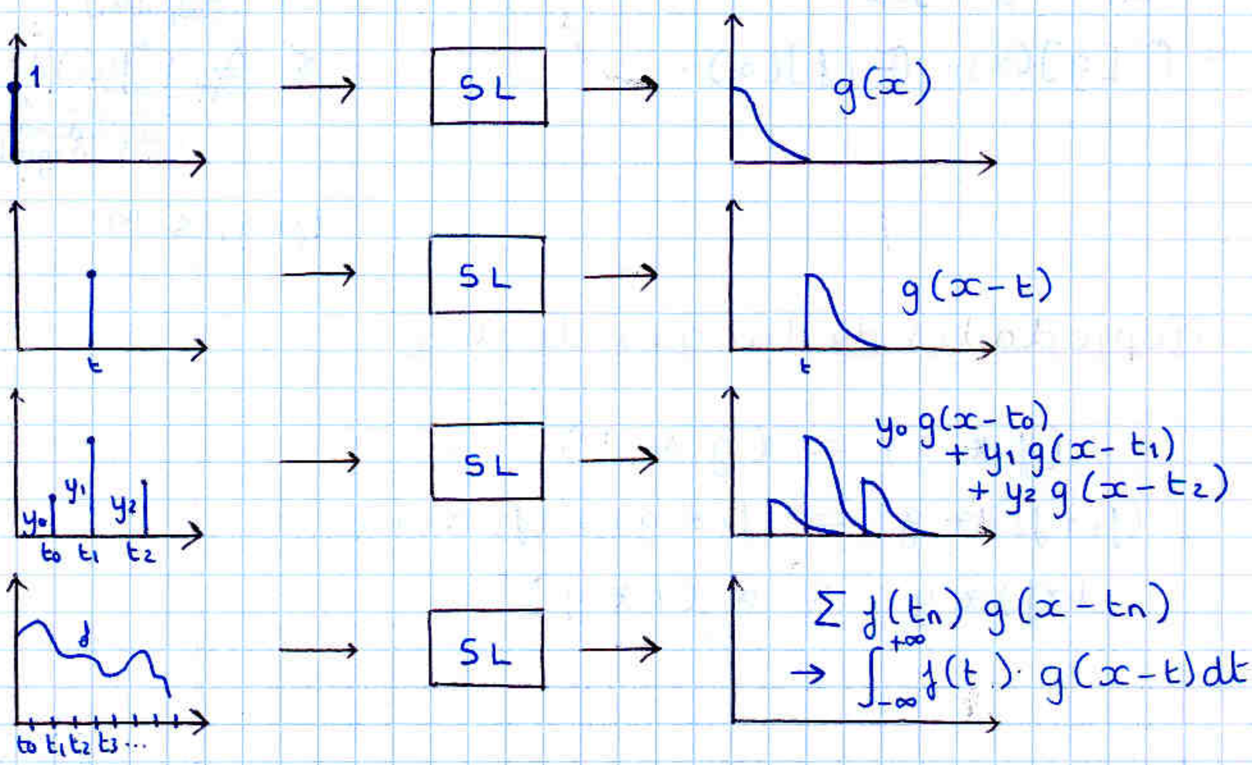


Se cumple:

$$\boxed{\mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{S}}$$

Convolución

Supongamos el siguiente sistema lineal



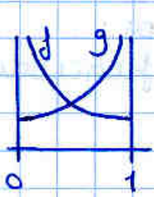
$$\boxed{(f * g)(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{no aparece en asignatura S.L.}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x-t)\, dt}$$

Transformada y convolución

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}) \end{array}\right\}$$ y alguna de las dos acotada → para evitar cosas como

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ en $[0,1)$

$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en $[0,1]$



ambas integrables

$\frac{1}{t^p}$ integrable si $p<1$

$$(f*g)(t) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x+t}}\, dt$$

$$(f*g)(1) = \int_0^1 \frac{1}{t}\, dt$$

no integrable!

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[f*g](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds\; e^{-i\alpha t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\, e^{-i\alpha t}\, dt \right]}_{t-s=u \quad t=u+s \quad dt=du} f(s)\, ds$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-i\alpha u}\, du\; e^{-i\alpha s}$$

$$\mathcal{F}[g](\alpha) \cdot e^{-i\alpha s}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathcal{F}[g](\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, e^{-i\alpha s}\, ds$$

$$= \mathcal{F}[g](\alpha) \cdot \mathcal{F}[f](\alpha)$$

si una de las dos es acotada:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|f(t)|}_{\substack{\text{integrable} \\ (f \text{ y } g \text{ son integrables})}} \cdot \underbrace{|g(x-t)|}_{\substack{\leq K \\ (\text{acotada})}}\, dt$$

$$\leq \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt}_{\text{se puede hacer} \to f \text{ integrable}}$$

$$|f*g| \leq M$$

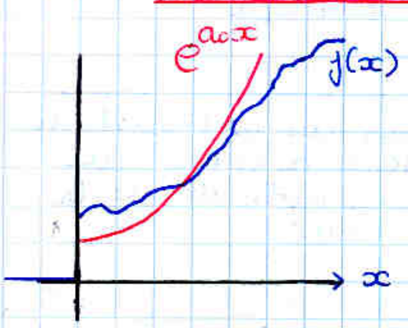
Propiedades de la convolución

$$(f*g) = (g*f)$$

$$(f_1+f_2)*g = (f_1*g) + (f_2*g)$$

$$(\alpha f)*g = \alpha\,(f*g)$$

Transformada de Laplace



Concepto: La T^a de Laplace es un caso particular de la de Fourier, pero para funciones que crecen.
El crecimiento debe tener un 'control', debe crecer menos que $e^{a_0 x}$
(si al principio f está por encima, no pasa nada, basta con multiplicar $e^{a_0 x}$ por una c para que quede debajo)

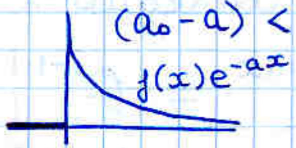
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \begin{cases} \boxed{f(x) \leq Ce^{a_0 x}} \\ f(x) = 0 \quad \forall x < 0 \end{cases}$$

además, para evitar problemas en los cálculos.

Idea:
La transf. de Fourier sólo se puede aplicar a funciones abs. integrables, es decir el área bajo ellas converge, por lo cual deben tender a cero más rápido que $\frac{1}{x}$ $\left[\text{recuerda } \int_a^\infty \frac{1}{x^p} \text{ converge si } p>1\right]$
Nuestra f no cumple eso 'ni de lejos', pero sabemos que nuestra f es menor que $Ce^{a_0 x}$.
Si la dividimos por e^{ax} con $\boxed{a > a_0}$, el resultado SI que es integrable.

$$\left|\frac{f(x)}{e^{ax}}\right| \leq \frac{Ce^{a_0 x}}{e^{ax}} = Ce^{(a_0 - a)x}$$

$(a_0 - a) < 0$ pues $a > a_0$



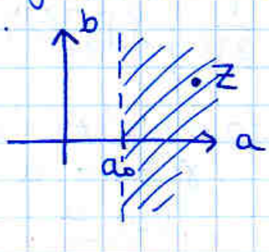
Por lo tanto, se puede aplicar la transformada de Fourier

$$\boxed{\int_0^\infty f(x)e^{-ax}\,dx \ \text{se puede hacer}_{\text{si } a>a_0} \Rightarrow \exists \text{ Transf. de Fourier}}$$

$$\mathcal{F}\left[f(x)e^{-ax}\right](b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[f(x)\,e^{-ax}\right] e^{-ibx}\,dx$$

b es la variable equivalente a la pulsación (α ó ω) en la transf. Fourier.

Aquí la cosa se hace compleja. La expresión de arriba depende de a y de b ($a > a_0$), es decir, está definida en un plano.



Si le damos a este plano la interpretación de un plano complejo $z = a + bi$
$a = \mathrm{Re}\{z\} > a_0$
$b = \mathrm{Im}\{z\}$

queda:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x)\,e^{-x(a+bi)}\,dx$$

$$\mathcal{F}\left[f(x)e^{-ax}\right](b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^\infty f(x)\,e^{-xz}\,dx}_{\text{lo llamamos } \mathcal{L}[f](z)} \qquad (*)$$

Transformada de Laplace: Definición

$$\boxed{\mathcal{L}[f](z) = \int_{-\infty/0}^{+\infty} f(x)\, e^{-xz}\, dx}$$

el resultado es una función de variable compleja

↳ da igual, pues $f(x)=0\ \forall x<0$

y, despejando de $(*)$

$$\boxed{\mathcal{L}[f](z) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[f(x)e^{-ax}](b)}$$

vemos que la transf. de Laplace no es mas que un caso particular de la de Fourier.

En definitiva, nos queda:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}[f]: \underset{z=(a,b)}{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$$

$f(x)=0\ \forall x<0$ $\quad \xleftarrow{¿\mathcal{L}^{-1}?}$

f puede crecer, siempre y cuando crezca menos que $Ce^{a_0 x}$

$f(x) \le Ce^{a_0 x}$

Y en realidad, lo que estamos haciendo es aplicar la transf de Fourier a $f(x)\cdot e^{-ax}\cdot\sqrt{2\pi}$

$$\sqrt{2\pi}\cdot f(x)\cdot e^{-ax} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}[\sqrt{2\pi} f(x) e^{-ax}](b) = \mathcal{L}[f](a,b) = \mathcal{L}[f](z)$$

absolutamente integrable

depende de a y b, es decir de z

Asi que para conseguir $\mathcal{L}^{-1}$ no hay mas que hacer

$$\sqrt{2\pi}\, f(x)\, e^{-ax} = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[\sqrt{2\pi} f(x) e^{-ax}]\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{L}[f]\right]$$

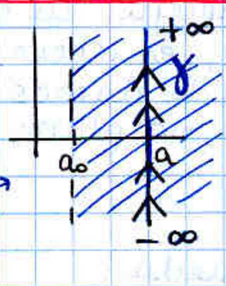
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f](\underset{z=(a,b)}{z})\, e^{ixb}\, db$$

esta vez, por def de $\mathcal{F}^{-1}$, si que hay que ir de $-\infty$ a $+\infty$

despejando $f(x)$:

$$\boxed{\text{Inversión de Laplace} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[f](z)\, e^{zx}\, db}$$

que en realidad es una integral de variable compleja como las ya estudiadas, que se obtiene con el siguiente camino γ: →



$$= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \mathcal{L}[f](z)\, e^{zx}\, dz$$

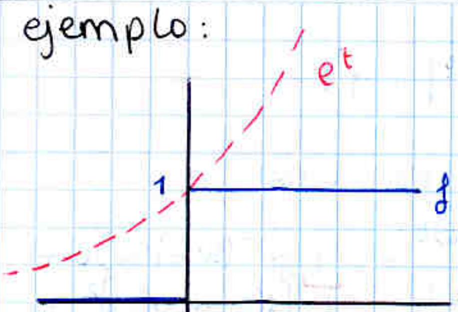
parametrizar γ

$\gamma(b) = a + ib$

$\gamma'(b) = i\, db$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[f](z)\, e^{zx}\, i\, db}$$

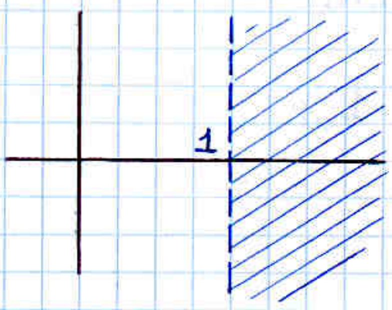
ejemplo:



$$|f(t)| \leq e^t$$

Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\, dt = \left[\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{z}$$



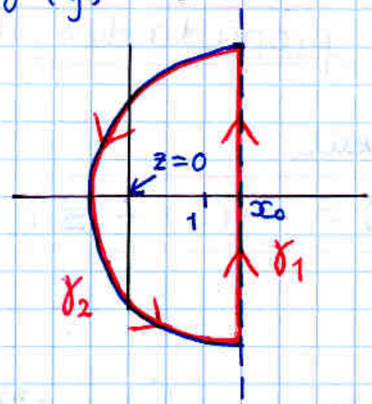
Transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(f)](z) = 1$$

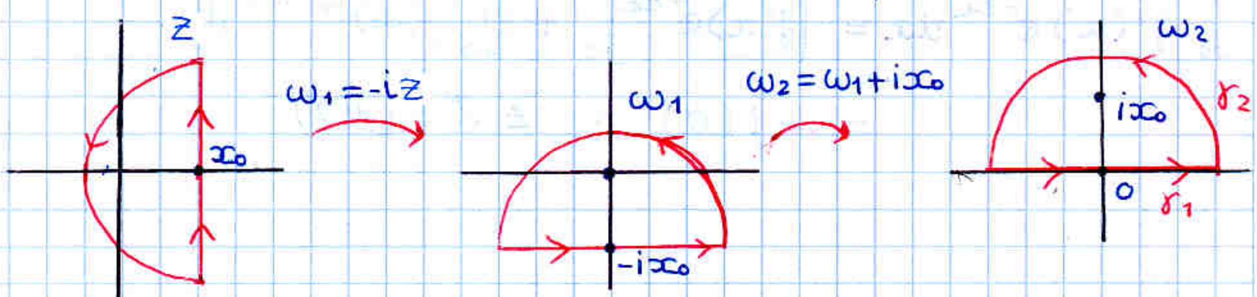
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z} e^{zt}\, dz \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma: \ y \to x_0 + iy \\ \gamma'(y) = i \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x_0+iy}\, e^{(x_0+iy)t}\, i\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(x_0+iy)t}}{x_0+iy}\, dy$$



Para hacer la integral, hacemos un truco



$$\omega = ix_0 - iz \longrightarrow \left.\begin{array}{l} z = i(\omega - ix_0) \\ dz = i\, d\omega \end{array}\right\}$$

$$\int_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{0} \overset{R\to\infty}{=} \int_{\gamma_1} = 2\pi i \ \mathrm{Res}(f, z_1)$$

Por un teorema anterior (el concepto es el de arriba)

- f derivable salvo en singularidad z_1
- $|f(z)| \cdot |z^2| \leq M$ con $\mathrm{Im}(z) > 0$ ó $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| \overset{\text{Lema de Jordan}}{=} 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \ \mathrm{res}(f, z_1)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{zt}}{z}\,i\,dz \overset{\text{c.v.}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\omega-ix_0)t}}{\cancel{i}(\omega-ix_0)}\cancel{i}\,d\omega$$

cumple $\lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{1}{i(\omega-ix_0)}\right| = 0 \qquad \left(\left|e^{i(\omega-ix_0)t}\right| = 1\right)$

(lema de Jordan)

$$= \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \ \operatorname{res}(f, ix_0)$$

$$= 1 \,//$$

Residuo en ix_0

$$\frac{e^{i(\omega-ix_0)t}}{(\omega-ix_0)} = \frac{\left[1 + i(\omega-ix_0)t + \frac{[i(\omega-ix_0)t]^2}{2!} + \dots\right]}{(\omega-ix_0)}$$

$$= \frac{1}{(\omega-ix_0)} + it + \frac{i(\omega-ix_0)t^2}{2!} + \dots$$

Residuo en ix_0
coef de $(\omega-ix_0)^{-1}$
$= 1$

$\boxed{\text{Algunas propiedades de } \mathcal{L}}$:

- $\mathcal{L}$ es lineal
- $\boxed{\mathcal{L}[f'](z) = -f(0) + z\,\mathcal{L}[f](z)}$

Dem:

$$\int_0^{\infty} f'(x)e^{-zx}\,dx = \left[f(x)e^{-zx}\right]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} f(x)e^{-zx}\,dx$$

$$= -f(0) + z\,\mathcal{L}[f](z)$$

Aplicación a una EDO : transf. de Laplace

ejemplo

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = e^{5t} \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$$

Ventaja: puede ser una función creciente.

$$\mathcal{L}[f'(t)](z) = -f(0) + z\mathcal{L}[f](z)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](z) = -f'(0) - zf(0) + z^2\mathcal{L}[f](z)$$

$$\mathcal{L}[x'' + 3x' + 2x](z) = -x'(0) - zx(0) + z^2\mathcal{L}[x](z) + 3(-x(0) + z\mathcal{L}[x](z)) + 2(\mathcal{L}[x](z))$$

$$= \mathcal{L}[e^{5t}] = \int_0^{+\infty} e^{5t}\cdot e^{-tz}\, dz = \int_0^{+\infty} e^{t(z-5)}\, dt = \frac{1}{z-5}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{L}[x])\cdot(z^2+3z+2) + [-3-z-3] = \frac{1}{z-5}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[x] = \frac{\frac{1}{z-5} + z + 6}{z^2+3z+2} = \frac{z^2+z-29}{(z-5)(z+1)(z+2)}$$

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{(z-5)} + \frac{29}{6}\cdot\frac{1}{(z+1)} + \frac{-27}{7}\cdot\frac{1}{(z+2)}$$

TRUCO

$$e^{5t} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{(z-5)}$$

$$\boxed{e^{at} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{(z-a)}}$$

en el ejercicio anterior

$$1 = e^0 \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{z-0} = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{42}e^{5t} + \frac{29}{6}e^{-t} - \frac{27}{7}e^{-2t} \quad //$$

ejemplo: aplicación de Fourier a una EDO

$x'' + 3x' + 2x = g(t)$ g. abs. integrable

$$\mathcal{F}[x'' + 3x' + 2x] = \mathcal{F}[g(t)]$$

$$(i\omega)^2 \mathcal{F}[x](\omega) + 3(i\omega)\mathcal{F}[x](\omega) + 2\mathcal{F}[x](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega)$$

$$\mathcal{F}[x](\omega)\{(i\omega)^2 + 3(i\omega) + 2\} = \mathcal{F}[g](\omega)$$

nota

$\dfrac{1}{(i\omega)^2 + 3(i\omega) + 2}$ bien definido para $\omega \in \mathbb{R}$

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$Y(i\omega) = \underbrace{\frac{1}{(i\omega+1)}}_{\mathcal{F}^{-1}[\,]=h_1} - \underbrace{\frac{1}{(i\omega+2)}}_{\mathcal{F}^{-1}[\,]=h_2}$$

$$= \mathcal{F}[h_1 - h_2]$$

$$\mathcal{F}[x] = \mathcal{F}[h_1 - h_2] \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$$

definición de convolución

$$= \mathcal{F}[g * \mathcal{F}^{-1}[Y]]$$

$$x(t) = g * \mathcal{F}^{-1}[Y]$$

TEMA 3 - ECUACIONES DERIVADAS PARCIALES (EDP)

EDO: $F(u, u', u'', \dots) = g(x,y)$

$\boxed{\text{EDP}: \; F(u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = g(x,y)}$

NOTACIÓN

$u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

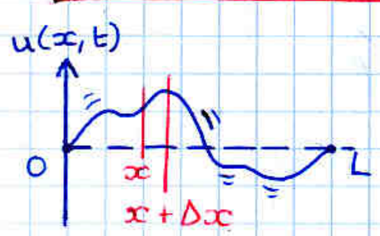
$u_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]$

etc..

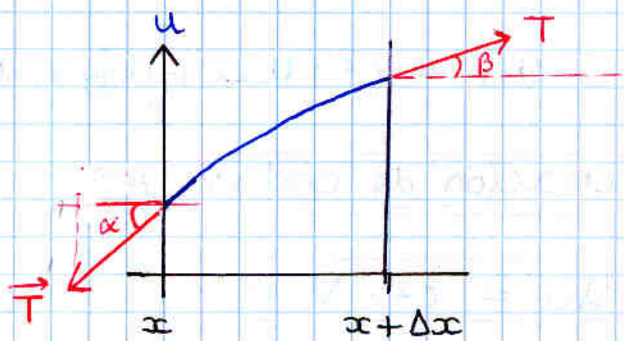
$$A_0 u(x,y) + A_1 u_x(x,y) + A_2 u_y(x,y) + A_{11} u_{xx}(x,y) + A_{12} u_{xy}(x,y) + A_{22} u_{yy}(x,y) = g(x,y)$$

Ejemplos Históricos

- Cuerda vibrando



acercandonos a un único trocito



las componentes horizontales de la tension se cancelan en cada trocito.

Las componentes verticales:

$$T \operatorname{sen}\beta - T\operatorname{sen}\alpha = \underbrace{m}_{\Delta x \cdot \rho} \cdot \underbrace{a}_{\frac{d^2u}{dt^2} = u_{tt}}$$

α, β pequeños $\rightarrow$ $\operatorname{sen}\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha$

$$T \underbrace{\operatorname{tg}\beta}_{\text{derivada en un punto}} - T\operatorname{tg}\alpha = \Delta x \cdot \rho \cdot u_{tt} \Rightarrow \frac{Tu_x(x+\Delta x, t) - Tu_x(x,t)}{\Delta x} = \rho \cdot u_{tt}$$

definición de derivada

$$T \cdot u_{xx} = \rho\, u_{tt}$$

$$u_{tt} = \frac{T}{\underbrace{\rho}_{>0}} u_{xx} \rightarrow \boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}$$

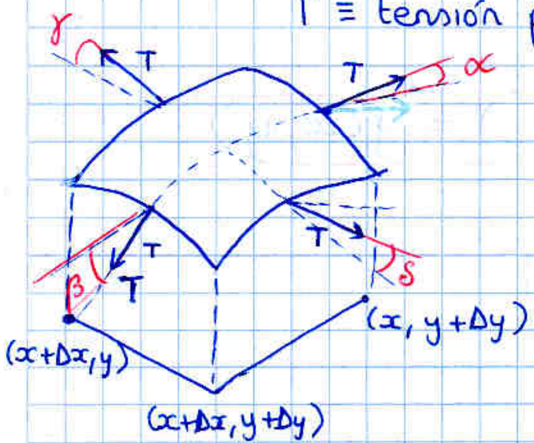
si aplico una fuerza adicional

$$fL + T\operatorname{sen}\beta - T\operatorname{sen}\alpha = L\rho\, u_{tt}$$

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{f}{\rho}}$$

Modelo bidimensional (tambor)

$T \equiv$ tensión por unidad de longitud



$$\Delta y\,(\underset{tg\,\beta}{T\,sen\,\beta} - \underset{tg\,\alpha}{T\,sen\,\alpha}) + \Delta x\,(\underset{tg\,\delta}{T\,sen\,\delta} - \underset{tg\,\gamma}{T\,sen\,\gamma}) = \rho\, S\, u_{tt}$$

$$\Delta y \cdot T \cdot (u_x(x+\Delta x, y) - u_x(x,y)) + \Delta x \cdot T\,(u_y(x, y+\Delta y) - u_y(x,y)) = \rho\,\Delta x\,\Delta y\, u_{tt}$$

$$\frac{T \cdot [u_x(x+\Delta x, y) - u_x(x,y)]}{\Delta x} + \frac{T[u_y(x,y+\Delta y) - u_y(x,y)]}{\Delta y} = \rho\, u_{tt}$$

$\lim \Delta x \to 0$
$\lim \Delta y \to 0$

$$T[u_{xx} + u_{yy}] = \rho\, u_{tt}$$

$$\boxed{u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})} + \underbrace{f/\rho}_{\text{fuerza externa}}$$

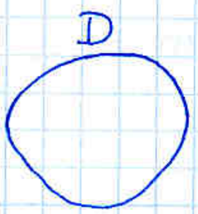
para 3D

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f/\rho$$

Ecuación de ondas

$$\boxed{u_{tt} = c^2 \cdot \nabla^2 u}$$

Ecuación del calor



$u(x,y,z)$ temperatura en (x,y,z)

$\vec{v} = -k \nabla u$

- Flujo que atraviesa una superficie B

$$\iint_B \langle v, n \rangle \, ds \underset{T^a \text{div}}{=} \iiint_D \text{div}(v) \, dx\,dy\,dz = \iiint_D \nabla^2 u(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$$

$$\left[\begin{array}{l} v = \left(-k\frac{\partial u}{\partial x}, -k\frac{\partial u}{\partial y}, -k\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \text{div}\, v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \quad = -K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z}\right) = -K\,\nabla^2 u \end{array} \right]$$

- cantidad de calor presente en D

$$\iiint_D \rho \cdot \sigma \cdot u(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$$

proporcional a:
- temperatura
- densidad
- cte depend. del medio

- cantidad de calor perdido (o ganado) por unidad de tiempo

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_D \rho \cdot \sigma \cdot u(x,y,z,t) \, dx\,dy\,dz = -\iiint_D \rho \cdot \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) \, dx\,dy\,dz$$

- Calor perdido ≡ Flujo que atraviesa

$$\iiint_D k\,\nabla^2 u(x,y,z,t) \, dx\,dy\,dz = -\iiint_D \rho \cdot \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) \, dx\,dy\,dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{c^2}_{\text{es cte positiva}} \nabla^2 u$$

$$\boxed{u_t = c^2 \nabla^2 u}$$ ecuación del calor

Ecuación de Laplace

campos gravitatorios: $\vec{F} = -m_0 \dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$

Es util trabajar con el potencial de ese campo

$$\phi(x,y,z) = \frac{m_0}{\|\vec{r}\|}$$

Demostración de que ese es el potencial:

NOTA: Cualquier potencial se puede escribir como

$$\phi(x,y,z) = m_0 \langle \cdot , \cdot \rangle$$

en nuestro caso:

$$\phi(x,y,z) = m_0 \overbrace{\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle}^{\|\vec{r}\|^2}{}^{-1/2}$$

derivemoslo:

NOTA
$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u, v \rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial x}, v \rangle \cdot \langle u, \frac{\partial v}{\partial x} \rangle$$

NOTA
$$\vec{r} = (x, y, z)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \begin{cases} = (1,0,0) \\ = \vec{e}_1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = m_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle^{-3/2} \cdot \underbrace{\left[\langle \vec{e}_1, \vec{r} \rangle \cdot \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle \right]}$$

$$= 2 \langle \vec{e}_1, \vec{r} \rangle$$
$$= 2 \quad x$$

↑ primera coordenada de x

$$= -m_0 \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle^{-3/2} \; x$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -m_0 \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle^{-3/2} \; y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -m_0 \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle^{-3/2} \; z$$

por tanto $\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$

$$= -m_0 \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle^{-3/2} (x, y, z)$$

$$= -m_0 \frac{\vec{r}}{\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle^{-3/2}} = -m_0 \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = \vec{F}$$

funciona todo igual de bien con

$$\vec{F} = -m_0 \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3}$$

$$\phi = \frac{m_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}$$

tanto esto como lo que viene

Derivando de nuevo:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-m_0 < \bar{r}, \bar{r} >^{-3/2} \overbrace{< \bar{r}, \bar{e}_1 >}^{= x}\right)$$

$$= -m_0 \left[\left\{ (-3/2) < \bar{r}, \bar{r} >^{-5/2} 2 < \bar{r}, \bar{e}_1 > \right\} < \bar{r}, \bar{e}_1 > + \left\{ < \bar{r}, \bar{r} >^{-3/2} \cdot 1 \right\}\right]$$

$$= -m_0 < \bar{r}, \bar{r} >^{-5/2} \left\{ -3x^2 + < \bar{r}, \bar{r} > \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -m_0 < \bar{r}, \bar{r} >^{-5/2} \left\{ -3y^2 + < \bar{r}, \bar{r} > \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -m_0 < \bar{r}, \bar{r} >^{-5/2} \left\{ -3z^2 + < \bar{r}, \bar{r} > \right\}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$= -m_0 < \bar{r}, \bar{r} >^{-5/2} \left\{ -3\|\bar{r}\|^2 + 3\|\bar{r}\|^2 \right\}$$

$$= 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

si en lugar de para una masa puntual lo aplicamos a todo un cuerpo

$$\phi(x, y, z) = \iiint \rho \frac{(x_0, y_0, z_0)}{\|\bar{r} - \bar{r}_0\|} \, dx_0 dy_0 dz_0$$

se sigue cumpliendo

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$ Ecuación de Laplace

Resumen:

Ecuación de ondas: $u_{tt} = \nabla^2 u \cdot c^2$

Ecuación del calor: $u_t = \nabla^2 u \cdot c^2$

Ecuación de Laplace: $\nabla^2 \phi = 0$

EDP lineales de 2° Orden

$u(x,y)$ función incógnita.

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + \underbrace{D u_x + E u_y + F u}_{\text{parte lineal, no presenta problemas}} = G$$

$A(x,y)$
$B(x,y)$
$C(x,y)$

la propia expresión nos sugiere

$D(x,y) \quad E(x,y) \quad F(x,y)$

$$\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

Hay tecnicas para diagonalizar esto haciendo $A = C = 0$ y dejando sólo $u_{\xi\eta}$ siendo $\xi(x,y)$ $\eta(x,y)$ nuevas variables que hay que hallar

xi Eta

Reducción a forma canónica

concepto teórico: luego veremos ejemplos

NOTA: ¡Tanto aquí en lo teórico como en los ejercicios hay que recordar la regla de la cadena!

tenemos $g(x)$
$F(x,y) = f(g(x)) \equiv (f \circ g)(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

si tenemos $g(x,y), h(x,y)$
$F(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

x, y variables originales, ξ, η variables nuevas $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$

nota: aquí estamos abusando de notación: u es en realidad $u(\xi,\eta)$ (función compuesta) pero la llamamos u por simplicidad

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x$$ (regla cadena)

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y$$

$$u_{xx} = \underbrace{(u_{\xi\xi}\,\xi_x + u_{\xi\eta}\,\eta_x)\,\xi_x + u_\xi \cdot \xi_{xx}}_{\text{derivada de un producto}} + \underbrace{(u_{\eta\xi}\,\xi_x + u_{\eta\eta}\,\eta_x)\,\eta_x + u_\eta \cdot \eta_{xx}}_{\text{derivada de un producto}}$$

$$u_{xy} = (u_{\xi\xi} \cdot \xi_y + u_{\xi\eta} \cdot \eta_y)\,\xi_x + u_\xi\,\xi_{xy} + (u_{\eta\xi}\,\xi_y + u_{\eta\eta}\,\eta_y)\,\eta_x + u_\eta\,\eta_{xy}$$

$$u_{yy} = (u_{\xi\xi}\,\xi_y + u_{\xi\eta}\,\eta_y)\,\xi_y + u_\xi\,\xi_{yy} + (u_{\eta\xi}\,\xi_y + u_{\eta\eta}\,\eta_y)\,\eta_y + u_\eta\,\eta_{yy}$$

sustituyendo en la ec: (ardua tarea) queda:

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u$$

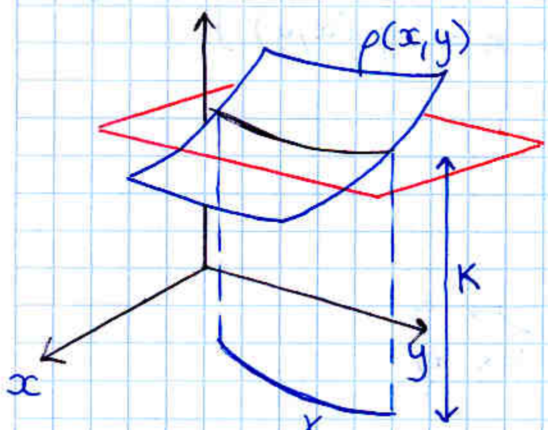
obligamos que $A^* = C^* = 0$
si se hace la sustitución, A^* y C^* son:

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$
$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

Por tanto ξ y η son las dos soluciones de una misma ecuación:

$$A\rho_x^2 + B\rho_x\rho_y + C\rho_y^2 = 0$$

Tecnica de resolución (demostración teórica)



la intersección de $\rho(x,y)$ con un plano $\rho(x,y)=K$ da como resultado una curva γ en el plano x,y
Es decir, una recta $y=y(x)$

$$\rho(x,y) = K$$
$$\Big\downarrow \text{despejar } y$$
$$y = y(x)$$

Veamos como:

$$\rho(x,y) = K$$
$$\rho(x, y(x)) = K$$

derivar respecto a x

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{y'} = 0$$

$$y' = \frac{-\partial\rho/\partial x}{\partial\rho/\partial y} = \frac{-\rho_x}{\rho_y}$$

ejemplo:

$$3x^2y + xy^3 = 3$$

derivar respecto a x

$$3\cdot 2x\cdot y + 3x^2y' + y^3 + x\,3y^2y' = 0$$

ec. del problema

$$A\rho_x^2 + B\rho_x\rho_y + C\rho_y^2 = 0$$
$$A\left(\frac{\rho_x}{\rho_y}\right)^2 + B\frac{\rho_x}{\rho_y} + C = 0 \qquad \text{dividir por } \rho_y^2$$

sustituyendo $y' = -\frac{\rho_x}{\rho_y}$

$$A(y')^2 - B(y) + C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A}}$$

Ecuación característica: es la ecuación que usaremos en la práctica

$\Rightarrow$ es 'dos' EDO de la que se obtienen dos soluciones

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} \xrightarrow{\text{EDO}} \begin{cases} y_1 = y_1(x) \longrightarrow \xi(x,y) = K \\ y_2 = y_2(x) \longrightarrow \eta(x,y) = K \end{cases}$$

poner en forma implícita

ejemplo: $A = y^2 \quad B = 0 \quad C = -x^2$

$$y' = \pm\frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{x}{y} \rightarrow y\,dy = \pm x\,dx \rightarrow \frac{y^2}{2} = \pm\frac{x^2}{2} + K$$

en forma implícita: $\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = K = \xi(x,y) \\ \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = K = \eta(x,y) \end{aligned}\right\}$ nuevas variables

Casos:

① Hiperbólico $(B^2-4AC > 0)$
≡ "exceso"

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} \begin{cases} \xi \\ \eta \end{cases}$$

② Parabólico $(B^2-4AC = 0)$
≡ "equilibrio"

$$y' = \frac{B}{2A} \rightarrow \xi \quad \text{sólo una}$$

tomamos $\eta(x,y)$ cualquier función independiente de ξ (jacobiano no sea cero)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

③ Elíptico $(B^2-4AC < 0)$
"elipsis"
"defecto"

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} \begin{cases} \xi(x,y) = \alpha(x,y) + i\,\beta(x,y) \\ \eta(x,y) = \alpha(x,y) - i\,\beta(x,y) \end{cases}$$

se obtienen dos soluciones complejas conjugadas

para evitar $\mathbb{C}$ tomamos nuevas variables

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi+\eta}{2} &= \begin{matrix}\mathrm{Re}(\xi) \\ \mathrm{Re}(\eta)\end{matrix} = \alpha(x,y) \\ \frac{\xi-\eta}{2} &= \begin{matrix}\mathrm{Im}(\xi) \\ -\mathrm{Im}(\eta)\end{matrix} = \beta(x,y) \end{aligned}\right\}$$

tomamos como nuevas variables la parte real e imaginaria ejemplo: reducción a forma canónica (caso hiperbólico)

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A = y^2 \\ B = 0 \\ C = -x^2 \end{array}\right\} \quad B^2 - 4AC = 4x^2y^2 > 0 \qquad y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) = \pm \frac{2xy}{2y^2} = \pm \frac{x}{y}$$

Obtenemos las dos soluciones de la ecuación característica, en forma implícita serán las nuevas variables.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{y} \longrightarrow y\,dy = \pm x\,dx \rightarrow \frac{y^2}{2} = \pm \frac{x^2}{2} + K$$

en forma implícita

$$\frac{y^2}{2} \pm \frac{x^2}{2} = K \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \xi(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \\ \eta(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \end{array} \quad \text{nuevas variables}}$$

Ahora no hay más que sustituir las nuevas variables en la ec. original $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy}$

(es pesado, hay que calcular u_{xx} y u_{yy} en función de ξ y η aplicando sucesivas veces la regla de la cadena).

derivando:

$$\xi_x = -x \qquad \xi_y = y \qquad \eta_x = x \qquad \eta_y = y$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$
$$= u_\xi(-x) + u_\eta(x) = x(u_\eta - u_\xi)$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$
$$= u_\xi(y) + u_\eta(y) = y(u_\eta + u_\xi)$$

$$u_{xx} = (u_\eta - u_\xi) + x\left[(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) - (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\cdot\eta_x)\right]$$
$$= (u_\eta - u_\xi) + x\left[-x u_{\eta\xi} + x u_{\eta\eta} + x u_{\xi\xi} - x u_{\xi\eta}\right]$$
$$= (u_\eta - u_\xi) + x^2\left[u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 2u_{\eta\xi}\right]$$
$$= (u_\eta - u_\xi) + x^2\left[u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 2u_{\eta\xi}\right]$$

$$u_{yy} = (u_\eta + u_\xi) + y\left[(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) + (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y)\right]$$
$$= (u_\eta + u_\xi) + y\left[y u_{\eta\xi} + y u_{\eta\eta} + y u_{\xi\xi} + y u_{\xi\eta}\right]$$
$$= (u_\eta + u_\xi) + y^2\left[u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}\right]$$

sustituyendo en la ecuación: $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$

$$y^2[u_\eta - u_\xi] - x^2[u_\eta + u_\xi] - 4x^2y^2 u_{\xi\eta} = 0$$

$$-u_\xi(x^2+y^2) + u_\eta(-x^2+y^2) - 4x^2y^2 u_{\xi\eta} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \xi(x,y) \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \eta(x,y) \end{cases}$$

$$\xi + \eta = y^2$$
$$\eta - \xi = x^2$$

$$\boxed{-2\eta u_\xi - 2\xi u_\eta - 4(\eta^2 - \xi^2) u_{\xi\eta} = 0}$$

Reducido a forma canónica, $\Rightarrow$ sólo aparecen términos en u_ξ, u_η, $u_{\xi\eta}$

ejemplo 2. Reducción a forma canónica (caso parabólico)

$$x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A = x^2 \\ B = 2xy \\ C = y^2 \end{array}\right\} \quad B^2 - 4AC = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$$

$$y'(x) = \frac{2xy}{2x^2} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \rightarrow \boxed{\ln x = \ln y + \ln k \rightarrow x = yk}$$

$$\boxed{k = \frac{x}{y} = \xi(x,y)}$$

Como segunda variable cogemos lo que sea, con tal de que sea independiente

p.ej. $\eta(x,y) = y$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det = \frac{1}{y}$$

son funcionalmente independientes.
Podemos resolver el problema sin tocar $y=0$

$$\left.\begin{array}{l} \xi(x,y) = \frac{x}{y} \\ \eta(x,y) = y \end{array}\right\}$$

sustituir en la ec. original

$\rightarrow u_x$
$\rightarrow u_y$
$\rightarrow u_{xx}$
$\rightarrow u_{xy}$
$\rightarrow u_{yy}$

calcular aplicando derivación y regla de la cadena

Al sustituir el resultado es una ecuación en forma canónica

Ecuación de ondas (unidimensional). Resolución por reducción a forma canónica. (Solución de d'Alembert)

Problema: $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{posición inicial} \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{velocidad inicial} \end{cases}$

comparando con

$$A u_{xx} + B u_{xt} + C u_{tt} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A = -c^2 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{array}\right\} \quad B^2 - 4AC = 4c^2 > 0 \quad \text{Hiperbólica}$$

$$t'(x) = \frac{\pm\sqrt{4c^2}}{-2c^2} = \pm\frac{1}{c}$$

nuevas variables $\Rightarrow$ $t(x) = \pm\frac{x}{c} + K$

despejar K

$K = t - \frac{x}{c} = \eta_1(x,t)$

$K = t + \frac{x}{c} = \xi_1(x,t)$ → por sencillez tomamos un múltiplo → $\boxed{\begin{array}{l}\eta(x,t) = x - tc \\ \xi(x,t) = x + tc\end{array}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta \\ u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = c(u_\xi - u_\eta) \\ u_{xx} = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + (u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) \\ \quad = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = c[u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t - (u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t)] \\ \quad = c^2[u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\eta}] \end{array}}$$

sustituyendo en la ec original:

$$-4c^2 u_{\xi\eta} = 0$$

$\boxed{u_{\xi\eta} = 0}$ $\quad x \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$ lo que significa que $\frac{\partial u}{\partial\eta}$ sólo depende de η y $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ sólo depende de ξ

la solución general debe ser del tipo

$u(\xi,\eta) = H(\eta) + K(\xi)$ H y K funciones arbitrarias

el problema queda reducido a:

$$\boxed{\begin{cases} u(x,t) = H(x-ct) + K(x+ct) & (1) \quad \text{Sol general} \\ u(x,0) = H(x) + K(x) = f(x) & (2) \\ u_t(x,0) = -cH'(x-c\underset{0}{t}) + cK'(x+c\underset{0}{t}) = g(x) & (3) \end{cases}}$$

(2), (3): condiciones iniciales

Derivando ② y ×C
$$\begin{cases} cH'(x) + cK'(x) = cf'(x) \\ -cH'(x) + cK'(x) = g(x) \end{cases}$$

sumando: restando:
$$\begin{cases} 2cK'(x) = cf'(x) + g(x) \\ 2cH'(x) = cf'(x) - g(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K'(x) = \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2c} g(x) \\ H'(x) = \frac{1}{2} f'(x) - \frac{1}{2c} g(x) \end{cases}$$

integrando

$$\Rightarrow \begin{cases} K(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\tau)\,d\tau + P \\ H(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\tau)\,d\tau + Q \end{cases}$$

sustituyendo en la solución general: $u(x,t) = H(\eta) + K(\xi)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\tau)\,d\tau + P\right.$$
$$+ \frac{1}{2} f(x-ct) \underbrace{- \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}}_{= +\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0}} g(\tau)\,d\tau + Q$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(f(x+ct) + f(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau + Q + P$$

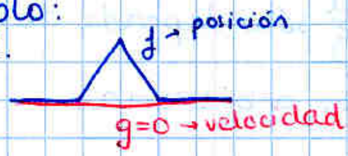
aplicando la C.I.

$$u(x,0) = f(x) + \overset{t=0}{0} + Q + P = f(x) \Rightarrow Q + P = 0$$

Solución:

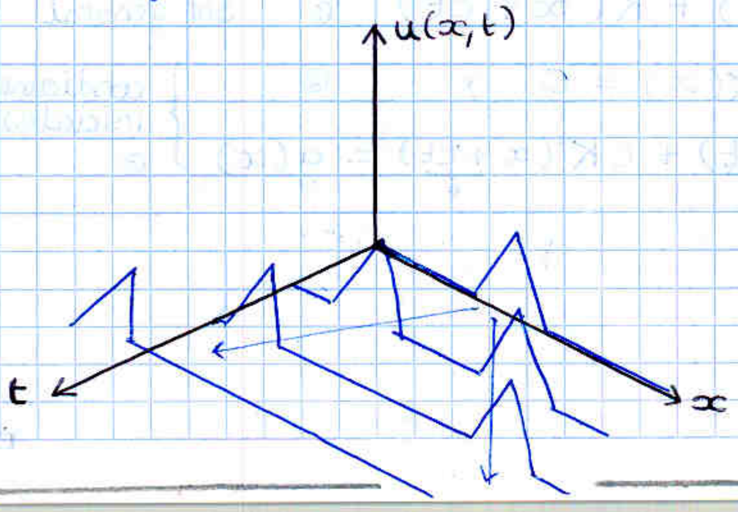
$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(f(x+ct) + f(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau}$$

ejemplo: CI.



en este caso:
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[f(x+ct) + f(x-ct)\Big]$$

Si dibujamos la solución:



¿Cómo podemos hacer que los extremos sean fijos?

Hacemos la extensión de f y g impar 2ℓ-periódica

Se puede comprobar que al aplicarlo a la solución $u(x,t)$, $u(0,t)$ y $u(\ell,t)$ son siempre cero

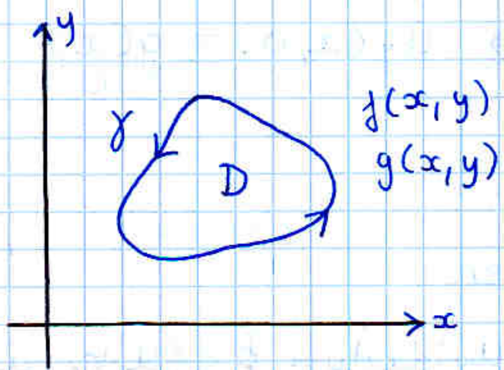
$u_t(0,t)$ y $u_t(\ell,t)$ $\Rightarrow$ la velocidad y posición en los extremos es nula

$\Rightarrow$ un muy buen modelo para extremos fijos.

Si aplicaramos eso al ejemplo de f de antes, el resultado sería que el pulso triangular 'rebota' en las paredes.

Ahora vamos a estudiar el caso no homogéneo, pero antes hay que ver:

Teorema de Green (en el plano)



$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma f\,dx + g\,dy$$

$$= \int_\gamma \langle (f, g), d\gamma \rangle$$

$$= \int_a^b \langle \left(f(\gamma(t)), g(\gamma(t))\right), \gamma'(t) \rangle\, dt$$

Caso no homogéneo de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} U_{1tt} - c^2 U_{1xx} = h_1(x,t) \\ U_1(x,0) = f(x) \\ U_{1t}(x,0) = g_1(x) \\ U_1(0,t) = 0 \\ U_1(\ell,t) = 0 \end{cases}$$

utilizo el sub-uno para distinguir cuando hagamos un C.V.

hacemos C.V. $\left\{ \begin{matrix} y = ct \\ x = x \end{matrix} \right\}$ para deshacernos de la c

$$(x,t) \longrightarrow (x,y)$$

$$U_1(x,t) \longrightarrow u(x,y) = U_1(x,ct)$$

$$U_{1t} = U_x x_t + U_y y_t = U_y \cdot c$$
$$U_{1tt} = c^2 U_{yy}$$

$$\Rightarrow \quad c^2 U_{yy} - c^2 U_{xx} = h_1\left(x, \frac{y}{c}\right)$$

$$U_{yy} - U_{xx} = \frac{h_1(x, y/c)}{c^2}$$

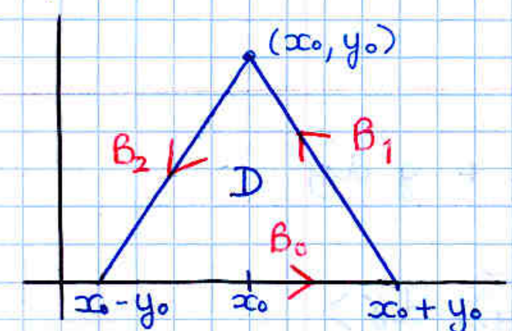
$$\frac{h_1(x, y/c)}{c^2} \longrightarrow h(x,y)$$

el problema queda:

$$\begin{cases} U_{yy} - U_{xx} = h(x,y) \\ u(x,0) = f(x) \\ c\,U_y(x,0) = g_1(x) \Rightarrow U_y(x,0) = \frac{g_1(x)}{c} \\ u(0,y) = 0 \\ u(\ell,y) = 0 \end{cases}$$

$g(x) = g_1(x)/c$

Aplicamos el teorema de Green:



$$\iint_D (V_x - U_y)\,dx\,dy = \oint_{B_0 \cup B_1 \cup B_2} \langle (U,V), d\gamma \rangle$$

siendo $U = u_y$ $\quad u_y = u_{yy}$
$V = u_x$ $\quad V_x = u_{xx}$

$$\iint_D (u_{xx} - u_{yy})\,dx\,dy = \oint \langle (u_y, u_x), d\gamma \rangle$$

y como $u_{xx} - u_{yy} = h(x,y)$

$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy = \int_{B_0} + \int_{B_1} + \int_{B_2}$$

hagamos cada integral por separado:

(B0) $\gamma_0 = (x, 0)$
$\gamma'_0 = (1, 0)$

$$\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} \langle (u_y, u_x), (1,0) \rangle \, dx = \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} u_y(x,0)\, dx$$

(B1) $\gamma_1(s) = (x_0+y_0, 0) + s(-y_0, y_0)$ $\quad s \in [0,1]$
$\gamma'_1(s) = (-y_0, y_0)$

truco

$\gamma: \ s = \vec{u} + k(\vec{v} - \vec{u})$

$$\int_0^1 \langle (u_y, u_x), (-y_0, y_0) \rangle \, ds$$

$$= -\int_0^1 \underbrace{\langle (u_x, u_y), (-y_0, y_0) \rangle}\, ds$$

$$\boxed{(u_x \; u_y)\begin{pmatrix} -y_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (u \circ \gamma_1)'(s)}$$

recordar de CALCULO DIFERENCIAL. De aquí vendría la regla de la cadena

$$= -\left[(u \circ \gamma_1)(s)\right]_0^1 = -u(x_0, y_0) + \underbrace{u(x_0+y_0, 0)}$$

$u(x,0) = f(x)$
$u(x_0+y_0, 0) = f(x_0+y_0)$

(B2) similarmente $\quad \gamma_2(s) = (x_0, y_0) + s(-y_0, -y_0)$

$$\int_0^1 \langle (u_y, u_x), (-y_0, -y_0) \rangle \, ds = (\dots) = \int_0^1 (u \circ \gamma_2)'(s)$$

$$= \left[(u \circ \gamma_2)(s)\right]_0^1 = u(x_0 - y_0, 0) - u(x_0, y_0)$$

Por tanto, sumándolos

$$\iint_D h(x,y)\, dx\, dy = \int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} (u_y)_{(x,0)} dx - 2u(x_0,y_0) + f(x_0+y_0) + f(x_0-y_0)$$

de las C.I. $\quad u_y(x,0) = \dfrac{g_1(x)}{c}$

queda:

$$\iint_D h(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{c}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} g_1(x)\, dx - 2u(x_0,y_0) + f(x_0+y_0) + f(x_0-y_0)$$

despejando $u(x_0, y_0)$

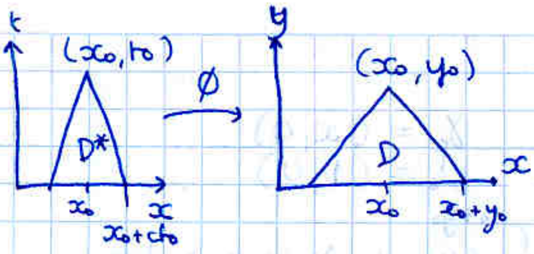
$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+y_0) + f(x_0-y_0)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x_0-y_0}^{x_0+y_0} g_1(x)\, dx - \frac{1}{2}\iint_D h(x,y)\, dx\, dy$$

deshaciendo el cambio de variable

$$u_1(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+ct_0) + f(x_0-ct_0)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g_1(x)\, dx - \underbrace{\frac{1}{2}\iint_D h(x,y)\, dx\, dy}$$

falta deshacer el C.V. aquí.

fórmula de cambio de variable:



$$\iint_{D^*} -\frac{h_1(x,t)}{c^2}\,dx\,dt = \iint_D h(x,y)\,J(x,y)\,dx\,dy$$

$$x = x \qquad\qquad J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial x/\partial x & \partial x/\partial y \\ \partial t/\partial x & \partial t/\partial y \end{pmatrix}$$
$$y = \frac{1}{c}y$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{c}$$

Así que finalmente queda:

$$\boxed{u_1(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+ct_0)+f(x_0-ct_0)\right] + \frac{1}{2c}\left[\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g_1(x)\,dx + \iint_{D^*} h_1(x,t)\,dx\,dt\right]}$$

Método de separación de variables

$$A U_{xx} + B U_{xy} + C U_{yy} + D U_x + E U_y + F U = G$$

caso $B=0$

$$A U_{xx} + C U_{yy} + D U_x + E U_y + F U = G$$

El método consiste en:

$$\boxed{\text{suponer que se puede escribir } u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)}$$

en ese caso se tiene: $U_x = X'Y \quad U_y = XY'$
$U_{xx} = X''Y \quad U_{yy} = XY''$

la ecuación queda:

$$AX''Y + CXY'' + DX'Y + EXY' + FXY = G$$

dividiendo por XY

$$A\frac{X''}{X} + C\frac{Y''}{Y} + D\frac{X'}{Y} + E\frac{Y'}{Y} + F = \frac{G}{XY}$$

$$A\frac{X''}{X} + D\frac{X'}{X} + F = -C\frac{Y''}{Y} - E\frac{Y'}{Y} + \frac{G}{XY}$$

si F y $\frac{G}{XY}$ se pueden separar como una f de x y otra f de y, podemos resolver como si fuera una EDO.

Gran parte del truco de este método es saber convertir las condiciones iniciales al suponer $u = X\cdot Y$

por ejemplo:

$$u(0,t)=0 \xrightarrow{u=X\cdot T} u(0,t) = X(0)\cdot T(t)$$

ó $T(t)=0 \ \forall t$ — trivial y absurdo (no cumpliría otras condiciones)

$X(0)=0$ — esta es la buena

$$u(0,t)=0 \longrightarrow X(0)=0$$

similarmente: $u(\ell,t)=0 \longrightarrow X(\ell)=0$

otro ejemplo
$u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$u(x,b)=0 \longrightarrow Y(b)X(x) = 0 \rightarrow Y(b)=0$$

rechazamos $X(x)\equiv 0$

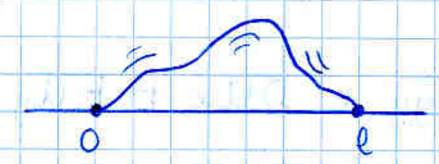
$$U_x(0,y)=0 \longrightarrow X'(0)\cdot Y(y) = 0 \rightarrow X'(0)=0$$

rechazamos la posibilidad $Y(y)\equiv 0$

$$U_x(a,y)=0 \rightarrow X'(a)=0$$

Ecuación de ondas homogenea. Solución mediante separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \quad \forall t \\ u(\ell,t) = 0 \quad \forall t \end{cases}$$



suponemos $u(x,t) = X(t) \cdot T(t)$

Por tanto: $u_x = X'T \quad u_{xx} = X''T$
$u_t = XT' \quad u_{tt} = XT''$

Sustituyendo en la ecuación

$$XT'' - c^2 X'' T = 0$$

dividiendo por $X \cdot T \cdot c^2$

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}}_{\text{sólo depende de } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{sólo depende de } y} = \lambda$$

como sale que dos cosas que dependen una de t y la otra de x son iguales, la única posibilidad es que ambas sean una constante λ

Ahora podemos resolver dos EDO:

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda \qquad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Pero antes hay que reescribir las condiciones iniciales con $X(x)$ y $T(t)$

$u(x,0) = f(x) \Rightarrow \underbrace{T(0)}_{cte} \cdot X(x) = f(x)$
$u_t(x,0) = g(x) \Rightarrow T(0) \cdot X'(x) = g(x)$ } de momento no nos sirve

$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$u(\ell,t) = 0 \Rightarrow X(\ell) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(\ell) = 0$

es decir, tenemos dos EDO

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases} \qquad \{ T'' - \lambda c^2 T = 0 \}$$

$$\begin{cases} u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

} estas dos C.I. las usaremos a la hora de unir las 2 EDOS haciendo $u = X \cdot T$

Resolvamos las por separado:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases}$$

Se resuelve por casos según las raíces del polinomio característico.

$\lambda > 0$ $\quad X(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$

$\pm\sqrt{\lambda}$

$$\left.\begin{array}{l} X(0) = A + B = 0 \\ X(\ell) = Ae^{\sqrt{\lambda}\ell} + Be^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0 \end{array}\right\} A = B = 0$$

solución nula/trivial que no nos importa.

$\lambda = 0$ $\quad X'' = 0$

$X(x) = Ax + B \qquad \left.\begin{array}{l} X(0) = B = 0 \\ X(\ell) = A\ell = 0 \end{array}\right\} A = B = 0$

solución nula/trivial que no nos importa

lógico: $X'' = 0$ lo cumplen sólo las rectas
si $X(0) = X(\ell) = 0$ la única recta es $X \equiv 0$

$\lambda < 0$ $\rightarrow \pm i\sqrt{-\lambda}$

$X = A \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} x) + B \cos(\sqrt{-\lambda} x)$

$X(0) = B = 0$
$X(\ell) = A \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\,\ell) = 0$ $\nearrow A = 0 \rightarrow$ trivial
$\searrow \sqrt{-\lambda}\,\ell = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Es decir

si $\lambda < 0$ y $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{\ell}$ entonces la solución es

$X(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$ infinitas soluciones $n \in \mathbb{Z}$ pero son la misma para $n = -n$ por tanto $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} X(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) & & \text{funciones propias} \\ & n = 1, 2, 3, \ldots & \\ \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} & & \text{valores propios} \end{array}}$$

Ahora hay que resolver el problema de la T

IMPORTANTE: Hay que utilizar las condiciones $\lambda < 0$ y $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{\ell}$ para resolver el problema de las T. (ya que en otros casos $X \equiv 0 \Rightarrow u = XT = 0$)

$\{ T'' - \lambda c^2 T = 0$

caso $\lambda<0$ $\quad \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{\ell}$ $\quad$ raíces del polinomio $= \pm i\sqrt{-\lambda}c = \pm i \frac{n\pi}{\ell}c$

$$\rightarrow \boxed{T(t) = C_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t + D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{\ell} t}$$

Ahora agrupamos las EDO sabiendo

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) \qquad n = 1,2,3,\dots$$

$$\boxed{u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{\ell} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x}$$

son $n \in \mathbb{N}$ soluciones

Para hallar la particular, hay que aplicar las 2 C.I. que nos quedan

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$

No lo cumple ninguna u_n !!!

Tranquilidad; aprovechamos que el sumatorio de todas las soluciones es una serie de Fourier, que sí puede ser $f(x)$.

Si tenemos varias soluciones, sumadas también serán solución. Por tanto:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{\ell} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x}$$

y ahora para que esa $u(x,t)$ cumpla $u(x,0) = f(x)$ no hay mas que exigir que $u(x,0)$ sea la serie de Fourier de $f(x)$ (extensión impar 2π-periódica de $f(x)$, que como sabemos mantiene los extremos fijos en la solución)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x = f(x)$$

Expresión de una serie de Fourier

$$\Longleftrightarrow \boxed{A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx}$$

coeficientes de Fourier

igualmente

$$u_t(x,t) = \sum \left(-A_n \frac{n\pi c}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{\ell} t + B_n \frac{n\pi c}{\ell} \cos \frac{n\pi c}{\ell} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n n\pi c}{\ell} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x = g(x)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{B_n n\pi c}{\ell} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx$$

$$\boxed{B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx}$$

se obtiene por tanto la solución como una serie. Podemos truncarla obteniendo una aproximación tan buena como queramos

Acotación de la solución: (del error cometido)

Si truncamos en n_0

$$u(x,t) = \sum_{1}^{n_0} + \underbrace{\sum_{n_0+1}^{\infty}}_{\text{error cometido}}$$

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} (A_n \cos(\,) + B_n \operatorname{sen}(\,)) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \underset{\substack{\text{Cauchy}\\ \text{Schwarz}}}{\leq} \sum_{n_0+1}^{\infty} (|A_n|^2 + |B_n|^2)^{1/2}$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx \qquad |f(x)| \leq M$$

$$|A_n| \leq \frac{2}{l} M \int_0^l \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{2}{l} M \left[\frac{-\cos \frac{n\pi}{l} x}{n\pi/l} \right]_{x=0}^{x=l}$$

$$= M(1 - \cos n\pi) \frac{2}{n\pi} \leq \frac{4M}{n\pi}$$

igualmente $|B_n| \leq \frac{4M}{n\pi}$ tomando M como la cota de f y de g

Por tanto

$$\text{Error cometido} \leq \sum_{n_0+1}^{\infty} (|A_n|^2 + |B_n|^2)^{1/2} = \frac{4M}{\pi} \Big(\underbrace{\sum_{n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{se puede calcular}} \Big)^{1/2} < \varepsilon$$

Ecuación del calor. Solución mediante separación de variables.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in [0,l] \\ u(0,t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ u(l,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

supongamos: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

entonces: $u_t = T'X$
$u_{xx} = X'' \cdot T$

en la ecuación queda:

$$\frac{T'X}{XT} = \frac{X''Tc^2}{XT} \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

Condiciones iniciales

$u(0,t) = 0 \rightarrow X(0) = 0$
$u(l,t) = 0 \rightarrow X(l) = 0$

$$\left\{\begin{array}{ll} X'' - \lambda X = 0 & T' - \lambda c^2 T = 0 \\ X(0) = 0 & \\ X(l) = 0 & \end{array}\right\}$$

esta EDO es idéntica a la de la ecuación de ondas

$$\boxed{X_n(x) = A_n \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}\, n x \qquad n \in \mathbb{Z} \qquad \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{l}}$$

ahora resolvemos el problema de la T imponiendo $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{l}$

$T'_n = \lambda_n c^2 T_n \rightarrow$ raíz del polinomio característico $\rightarrow \lambda_n c^2 = -\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2$

$$\Rightarrow T(t) = B_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t}$$

La solución total para $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ queda

$$u_n(x,t) = A_n\, e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} A_n\, e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x}$$

hacemos la suma para poder igualar $u(x,0) = 0$

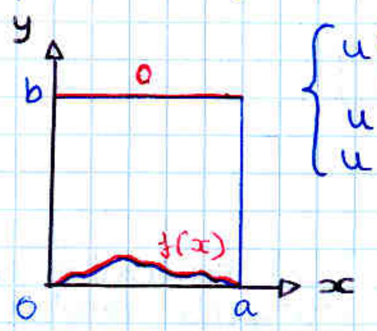
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

Serie de Fourier

$$\boxed{A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x}$$

Ecuación de Laplace. Solución mediante separación de variables

Aquí no juega el tiempo, es una situación estable



$$\begin{cases} u(x,y) & \nabla^2 u = 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,a] \\ u(x,b) = 0 \end{cases}$$

supongamos que por los lados no escapa ni entra calor

$$u_x(0,y) = 0$$
$$u_x(a,y) = 0$$

supongamos $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

sustituyendo en la ecuacion: $u_{xx} + u_{yy} = 0 = \nabla^2 u$

$$X''Y + XY'' = 0$$

dividiendo por XY

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \lambda$$

condiciones iniciales

$$u_x(0,y) = 0 \rightarrow X'(0) = 0$$
$$u_x(l,y) = 0 \rightarrow X'(l) = 0$$
$$u(x,b) = 0 \rightarrow Y(b) = 0 \quad \leftarrow \text{importante darse cuenta}$$

$$\boxed{\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}}$$

Primero resolvemos la EDO de $X(x)$

$\lambda > 0$ $\rightleftarrows \begin{matrix} \sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \end{matrix}$ $\Rightarrow X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$X'(x) = A\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}x} - B\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$\left.\begin{array}{l} X'(0) = A - B = 0 \\ X'(a) = A\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}a} - A\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}a} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = B = 0 \\ \text{Solución trivial} \end{array}$$

$\lambda = 0$ $X(x) = Ax + B$

$$X'(x) = A$$
$$X'(0) = A = 0$$

$\boxed{X_0(x) = B}$ solución válida ¡!

$\lambda<0 \rightarrow \pm i\sqrt{-\lambda}$

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\,\text{sen}\sqrt{-\lambda}\,x$$

$$X'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\,\text{sen}\sqrt{-\lambda}x + B\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}x$$

$$X'(0) = B\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow B=0$$

$$X'(a) = -A\sqrt{-\lambda}\,\text{sen}\sqrt{-\lambda}a = 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{-\lambda}\,a = n\pi}$$

$$\boxed{X_n(x) = A_n\cos\frac{n\pi}{a}x} \quad n=1,2,3,\dots$$

Ahora resolvemos el problema de la $Y(t)$ teniendo en cuenta las dos posibilidades que han surgido resolviendo la $X(x)$

$\lambda=0$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

$$Y(y) = Ay + B$$

$$Y(b) = Ab + B = 0 \Rightarrow B = -Ab =$$

$$\boxed{Y_0(y) = A(y-b)}$$

$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \nearrow \frac{n\pi}{a} \quad \searrow -\frac{n\pi}{a}$

$$Y(y) = De^{\frac{n\pi}{a}y} + Ee^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

$$Y(b) = De^{\frac{n\pi b}{a}} + Ee^{-\frac{n\pi b}{a}} = 0 \Rightarrow E = -De^{\frac{2\pi n b}{a}}$$

$$\Rightarrow Y(y) = De^{\frac{n\pi}{a}y} - De^{\frac{2n\pi b}{a}} \cdot e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

A quien se le ocurriría esto:

$$= De^{\frac{n\pi}{a}b}\left\{e^{-\frac{n\pi}{a}b}e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{\frac{n\pi b}{a}}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right\}$$

$$= 2De^{\frac{n\pi}{a}b}\,\text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)^2$$

$$\boxed{Y_n(y) = B_n\,\text{senh}\,\frac{n\pi}{a}(y-b)}$$

Uniendo las soluciones $u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$

teniendo en cuenta los casos $\underset{u_0}{\lambda=0}$ y $\underset{u_n}{\lambda<0}$

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= A_0(y-b) \\ u_n &= A_n\cos\frac{n\pi x}{a}\cdot\text{senh}\,\frac{n\pi}{a}(y-b) \end{aligned}} \quad n=1,2,3,\dots$$

Tomamos la suma de las soluciones

$$\boxed{u(x,y) = A_0(y-b) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{a}\,\text{senh}\,\frac{n\pi}{a}(y-b)}$$

Condiciones iniciales:

$$u(x,0) = A_0(-b) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a} = f(x)$$

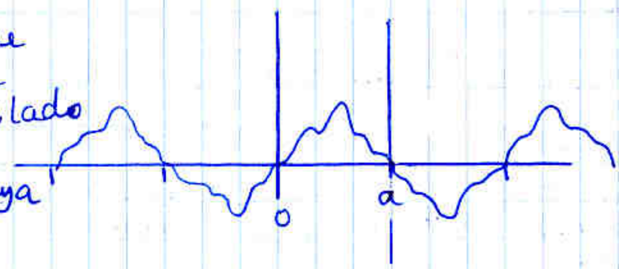
coefts. de Fourier

$$\frac{a_0}{2} = -A_0 b$$

$$a_n = (-A_n)\operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

· donde estamos considerando la extensión par 2π-periódica de $f(x)$

lo tenemos permitido ya que por los lados el problema está aislado y por tanto no afecta lo que haya



La solución final es:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y) &= A_0(y-b) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}(y-b) \\ a_n &= \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \\ A_0 &= -\frac{a_0}{2b} \\ A_n &= -\frac{a_n}{\operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a}} \end{aligned}}$$

Siempre que hemos utilizado el método de separación de variables hemos recurrido a lo mismo.

La solución general es una colección de funciones u_n y todas sus combinaciones lineales.

Para que se cumpla la / las condicion(/es) inicial(/es) en general no las cumple ningun u_n concreto, sino que tomamos $\sum^{\infty} u_n$ que, al ser una serie de Fourier, si que puede cumplir las condiciones iniciales (típico $u(x,0) = f(x)$) haciendo que los coeficientes de Fourier sean los adecuados se consigue.

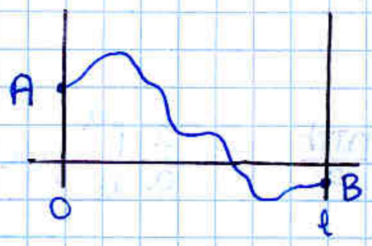
Resolución de un problema no homogéneo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \boxed{F(x)}$$

Este método sirve cuando la parte no homogenea depende de una sola de las variables (ej. la viscosidad según posición)

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = A$$
$$u(l,t) = B$$



Como el término no homogéneo depende de una sóla de las variables;

se hace el $\boxed{\text{cambio de variable } \; V(x,t) = u(x,t) + W(x)}$

$$\left.\begin{aligned} V &= u + W \\ V_x &= u_x + W' \\ V_{xx} &= u_{xx} + W'' \\ V_t &= u_t \\ V_{tt} &= u_{tt} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} u_{xx} &= V_{xx} - W'' \\ u_{tt} &= V_{tt} \end{aligned}$$

se sustituyen en la ecuación inicial

el nuevo problema:

$$\boxed{\begin{aligned} &V_{tt} = c^2 V_{xx} - c^2 W'' + F(x) \\ &u(0,t) = V(0,t) - W(0) = A \\ &u(l,t) = v(l,t) - W(l) = B \end{aligned}}$$

Truco: exigir que sea homogenea

exigimos
$$c^2 W'' = F(x)$$
$$W(0) = A$$
$$W(l) = B$$

Obtenemos $W(x)$

$$W''(x) = \frac{1}{c^2} F(x) \longrightarrow W'(x) = \frac{1}{c^2}\int_0^x f(\tau)\,d\tau + K$$

$$W(x) = \frac{1}{c^2}\int_0^x \left[\int_0^s \left(f(\tau)\,d\tau + K\right) d\tau\right] ds + M$$

$$= \frac{1}{c^2}\int_0^x \int_0^s F(\tau)\,d\tau\,ds + \frac{1}{c^2}Kx + M$$

$$W(0) = -A = M$$

$$W(l) = -B = \dots \quad \text{(se despeja } K\text{)}$$

se obtiene $W(x)$

el problema con la nueva variable y con la $W(x)$ adecuada:

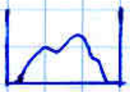
$$\boxed{\begin{aligned} &V_{tt} = c^2 V_{xx} \\ &V(x,0) = f(x) + W(x) \\ &V_t(x,0) = g(x) \\ &v(0,t) = 0 \\ &v(l,t) = 0 \end{aligned}}$$

lo hemos convertido en una EDP homogénea que podemos resolver con las técnicas que ya conocemos.

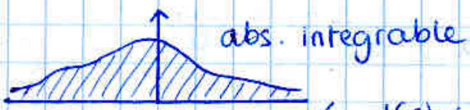
Métodos transformados para EDP

Son métodos muy potentes tanto para homogéneas como no homogéneas.
Se basa en aplicar transformadas integrales a ambos lados de una ecuación y aplicar propiedades de derivación.

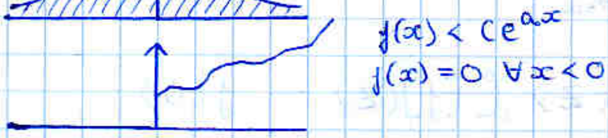
Transf. finitas:



Transf. Fourier:



Transf. Laplace:



Antes que nada vamos a estudiar las transformadas finitas (que aún no las conocemos)

Transformadas Seno y Coseno

$$\mathcal{S}[f](n) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$\mathcal{C}[f](n) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

Son, en efecto, a_n y b_n coeficientes de serie de Fourier para $f \in [0,a]$ extensión impar $2a$-periódica

$$f \underset{}{\overset{\mathcal{S}}{\rightleftarrows}} b_1, b_2, \ldots$$

y sólo queda deducir las propiedades de derivación (simplemente aplicar derivación por partes)

$$\mathcal{S}[f'](n) = \frac{2}{a}\int_0^a f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$= \underbrace{\frac{2}{a} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\Big|_0^a}_{0} - \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$\mathcal{C}[f'](n) = \frac{2}{a}\int_0^a f'(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$= \frac{2}{a} \underbrace{f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\Big|_0^a}_{\substack{\cos n\pi \, - \, 1 \\ (-1)^n}} + \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \frac{n\pi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{S}[f'](n) &= -\frac{n\pi}{a}\mathcal{C}[f](n) \\ \mathcal{C}[f'](n) &= \frac{n\pi}{a}\mathcal{S}[f](n) + \frac{2}{a}\left[f(a)\cdot(-1)^n - f(0)\right] \end{aligned}}$$

para tenerlo todo juntito, las otras dos transformadas son

Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\alpha t} \, dt$$

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = (i\alpha) \, \mathcal{F}[f](\alpha)$$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_{0/-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{-zt} \, dt$$

$$\mathcal{L}[f'](z) = (z) \, \mathcal{L}[f](z) - f(0)$$

ejercicio. Transformada Seno y Coseno

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(l,t) = 0$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

haciendo extensión impar $2l$-periódica logramos extremos fijos. (como siempre)

Apliquemos la transformación $\mathcal{S}_x$ a los dos lados (hacer $\mathcal{S}_x$ significa aplicar la transformada seno siendo x la variable que usamos para integrar y tomando t fija, de forma que $\mathcal{S}_x$ dependerá de n y de t.)

notación: $\mathcal{S}_x[u(x,t)](n) = S_n(t)$ (de alguna manera es como "eliminamos" la x)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$

$$\mathcal{S}_x[u_{tt}] = \mathcal{S}_x[c^2 u_{xx}] + \mathcal{S}_x[f(x,t)]$$

Vayamos paso a paso:

- $\mathcal{S}_x[u_{tt}(x,t)](n) = \frac{2}{l}\int_0^l u_{tt}(x,t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx$

como la integral es respecto a x:

$$= \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{2}{l}\int_0^l u(x,t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx\right] = \frac{d^2}{dt^2} S_n(t)$$

- $\mathcal{S}_x[c^2 u_{xx}] = c^2 \mathcal{S}_x[u_{xx}]$

$$= c^2\left[-\frac{n\pi}{l} \mathcal{C}_x[u_x](n)\right]$$

aplicando propiedad de derivación

$$= c^2\left[-\frac{n\pi}{l}\left[\frac{n\pi}{l} \mathcal{S}_x[u](n) + \frac{2}{l}\left[\underbrace{u(l)}_{\substack{u(l,t)\\=0}}(-1)^n - \underbrace{u(0)}_{\substack{u(0,t)\\=0}}\right]\right]\right]$$

$$= -\frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} S_n(t)$$

Por tanto la ecuación queda:

$$\frac{d^2}{dt^2} S_n(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{l^2} S_n(t) = \mathcal{S}_x[f(x,t)](n)$$

EDO en la variable t, lineal, 2° orden, coeficientes constantes, no homogenea

Podemos resolverla por alguno de los métodos que vimos en la asignatura ED.

Primero la homogénea:

$$\frac{d^2}{dt^2} S_n(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{\ell^2} S_n(t) = 0$$

por el método del polinomio característico se obtienen las soluciones (raices complejas)

Sol. de la homogénea $\quad A \cos \frac{cn\pi}{\ell} t + B \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} t$

Solución particular

La obtendremos por el método de variación de parámetros (probablemente saldría igual por método de coeficientes indeterminados pues tiene coeficientes constantes)

Recordemos el método de variación de parámetros

(!) $1\, y'' + P(t) y' + Q(t) y = R(t)$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ R(t) \end{pmatrix}$$

(!)

$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots$

en nuestro caso:

$$\begin{cases} A' \cos \frac{cn\pi}{\ell} t + B' \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} t = 0 \\ -A' \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) \operatorname{sen}(\quad) + B' \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) \cos(\quad) = \mathcal{S}_x[f(x,t)](n) \end{cases}$$

que viene de $\begin{pmatrix} \cos \frac{cn\pi}{\ell} t & \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} t \\ -\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{\ell} t\right) & \left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{S}_x[f] \end{pmatrix}$

multiplicando la de arriba por seno, la de abajo por coseno y sumando se obtiene

$$B' = \frac{\ell}{cn\pi} \cos \frac{cn\pi}{\ell} t \; \mathcal{S}_x[f(x,t)](n)$$

$$A' = -\frac{\ell}{cn\pi} \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} t \; \mathcal{S}_x[f(x,t)](n)$$

$$A = -\frac{\ell}{cn\pi} \int_0^t \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{\ell} \tau \; \mathcal{S}_x[f(x,\tau)](n)\, d\tau$$

$$B = \frac{\ell}{cn\pi} \int_0^t \cos \frac{cn\pi}{\ell} \tau \; \mathcal{S}_x[f(x,\tau)](n)\, d\tau$$

de forma que una solución particular es

$$\text{Part} = A\cos\frac{cn\pi}{\ell}t + B\,\text{sen}\frac{cn\pi}{\ell}t$$

metemos el coseno que no depende de τ

$$= -\frac{1}{cn\pi}\int_0^t \text{sen}\frac{cn\pi}{\ell}\tau\ \mathcal{S}_x[f(x,\tau)](n)\cdot\cos\frac{cn\pi}{\ell}t\ d\tau$$

$$+\frac{1}{cn\pi}\int_0^t \cos\frac{cn\pi}{\ell}\tau\ \mathcal{S}_x[f(x,\tau)](n)\cdot\text{sen}\frac{cn\pi}{\ell}t\ d\tau$$

y aplicando la propiedad:

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\,a\cos b - \cos a\,\text{sen}\,b$$

se obtiene

$$\text{Part}(t) = \frac{\ell}{cn\pi}\int_0^t \mathcal{S}_x[f(x,\tau)](n)\cdot\text{sen}\frac{cn\pi}{\ell}(t-\tau)\ d\tau$$

Solución general

$$S_n(t) = \text{hom}(t) + \text{part}(t)$$

$$S_n(t) = A\cos\frac{cn\pi}{\ell}t + B\,\text{sen}\frac{cn\pi}{\ell}t + \frac{1}{cn\pi}\int_0^t \mathcal{S}_x[f(x,0)](n)\,\text{sen}\frac{cn\pi}{\ell}(t-\tau)\,d\tau$$

Condiciones iniciales:

$$S_n(0) = A = 0$$

$$S_n'(t) = B\frac{cn\pi}{\ell}\cos\frac{cn\pi}{\ell}t + \underbrace{\frac{1}{cn\pi}\mathcal{S}_x[f(x,t)](n)\,\text{sen}\frac{cn\pi}{\ell}\underbrace{(t-t)}_{0}}_{0} = 0$$

$$B\frac{cn\pi}{\ell}\cos\frac{cn\pi}{\ell}t = 0$$

$$B = 0$$

$$\boxed{S_n(t) = \frac{\ell}{cn\pi}\int_0^t \mathcal{S}_x[f(x,0)](n)\cdot\text{sen}\frac{cn\pi}{\ell}(t-\tau)\,d\tau}$$

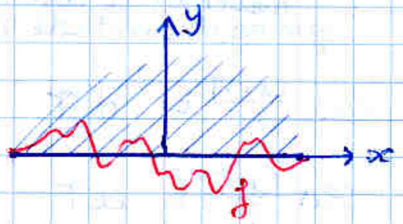
Una vez tenemos S_n, obtenemos $u(x,t)$

$$\begin{tikzcd} u(x,t) \arrow[r, bend left, "\mathcal{S}_x"] & S_n(t) \arrow[l, bend left, "\mathcal{S}_x^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t)\,\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}x}$$

Dirichlet en semiplano. Método transformada de Fourier

$u(x,y)$ armónica ($\nabla^2 u = 0$)



$$u(x,0) = f(x)$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\to-\infty \\ y\to+\infty}} u(x,y) = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

fijando 'y', aplicamos $\mathcal{F}_x$ a los dos lados (es decir, haremos desaparecer la x, ya que $\mathcal{F}_x$ dependerá de 'ω' y de 'y')

notación $\mathcal{F}_x[u(x,y)](\omega) = U(\omega,y) :=: U_\omega(y)$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\mathcal{F}_x[u_{xx}] + \mathcal{F}_x[u_{yy}] = 0$$

- $\mathcal{F}_x[u_{xx}] = i\omega\,\mathcal{F}_x[u_x] = -\omega^2 \mathcal{F}_x[u] = -\omega^2 U_\omega(y)$
- $\mathcal{F}_x[u_{yy}] = \frac{d^2}{dy^2}\mathcal{F}_x[u] = \frac{d^2}{dy^2} U_\omega(y)$

la ecuación queda:

$$-\omega^2 U_\omega(y) + \frac{d^2}{dy^2} U_\omega(y) = 0$$

es una EDO con <u>solución general</u> (se obtiene usando el polinomio característico)

$$U_\omega(y) = A(\omega)e^{\omega y} + B(\omega)e^{-\omega y}$$

Para que $\lim_{y\to\infty} U = 0$ el exponente debe ser negativo siempre

$$U_\omega(y) = Ce^{-|\omega| y}$$

Y ahora se utilizan las <u>condiciones iniciales</u>

es decir

$A(\omega) = C(\omega)$ $\omega<0$
$A(\omega) = 0$ $\omega>0$
$B(\omega) = 0$ $\omega<0$
$B(\omega) = C(\omega)$ $\omega>0$
$A(0) = B(0) = C(0)$

$$U_\omega(0) = \mathcal{F}[f](\omega)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-i\omega x} = \mathcal{F}[f](\omega)$$

$$C(\omega)e^0 = \mathcal{F}[f](\omega) \rightarrow \quad C(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$$

Solución

$$\boxed{U_\omega(y) = \mathcal{F}[f](\omega)\, e^{-|\omega| y}}$$

Solución general

Polinomio característico $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

$\lambda = \pm\omega$

$$U_\omega(y) = A(\omega)e^{\omega y} + B(\omega)e^{-\omega y}$$

Condiciones iniciales

Aquí hay que usar un poco la cabeza

tenemos $\lim_{y\to\infty} U_\omega = 0$

para que $A(\omega)e^{\omega y} + B(\omega)e^{-\omega y}$ tienda a cero en el $y =$ infinito para cualquier ω, el exponente siempre debe ser negativo

Por tanto
$$A(\omega) = 0 \quad \omega > 0$$
$$B(\omega) = 0 \quad \omega < 0$$
$$A(0) = B(0) = C(0)$$

por tanto podemos introducir $C(\omega)$ que será $A(\omega<0)$ y $B(\omega>0)$
$$A(\omega) = C(\omega) \quad \omega < 0$$
$$B(\omega) = C(\omega) \quad \omega > 0$$

podemos escribirlo directamente como:
$$U_\omega(y) = C(\omega)e^{-|\omega|y}$$

además, la otra C.I.
$$U_\omega(0) = C(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$$

la solución final es:

$$\boxed{U_\omega(y) = \mathcal{F}[f](\omega)\, e^{-|\omega|y}}$$

Hagamos ahora la transformación inversa para obtener $u(x,y)$

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} U_\omega(y)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\cdot e^{-|\omega|y}\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

desdoblando el módulo

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \mathcal{F}[f](\omega)\, e^{\omega y}\, e^{i\omega x}\, d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\, e^{-\omega y}\, e^{i\omega x}$$

e insertando la expresión de $\mathcal{F}[f](\omega)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-i\omega s} \underbrace{ds} \right] e^{\omega y}\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

muy importante utilizar variable muda y no x o y

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-i\omega s} ds \right] e^{-\omega y}\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

(Fubini) = (cambiar el orden)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{\omega(-is+y+ix)} d\omega \right] f(s)\, ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{0}^{+\infty} e^{\omega(\underbrace{-is}_{\text{puede entrar en la integral}}-y+ix)} d\omega \right] f(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{\omega(-is+y+ix)}}{-is+y+ix} \right]_{\omega=-\infty}^{\omega=0} f(s)\, ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{\omega(-is-y+ix)}}{-is-y+ix} \right]_{\omega=0}^{\omega=\infty} f(s)\, ds \quad \boxed{e^{-\omega y} \cdot \underbrace{e^{i(x-s)}}_{\text{módulo } 1} \xrightarrow{\omega\to\infty} = 0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{-is+y+ix} - \frac{1}{-is-y+ix} \right) f(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{y-i(s-x)} + \frac{1}{y+i(s-x)} \right) f(s)\, ds \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} + \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{2\,\mathrm{Re}(z)}{|z|^2}$$

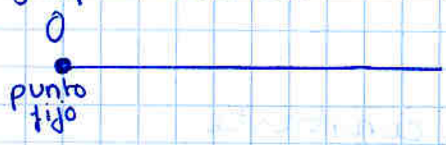
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y}{y^2+(s-x)^2} f(s)\, ds$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y}{y^2+(s-x)^2} f(s)\, ds}$$

formula q ya vimos en tema I

Método transformada de Laplace

ejemplo: varilla semiinfinita



$u(x,0) = 0$
$u_t(x,0) = 0$
$u(0,t) = 0$
$u_x(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t)}$$

Aplicar Fourier o Laplace depende de $f(t)$.
si $f(t)$ no es abs. integrable, no sirve Fourier

si $|f(t)| \leq Ce^{at}$, $f(t)=0 \ \forall t<0$ podemos aplicar Laplace

Apliquemos $\mathcal{L}_t$ a cada término. Esta vez usamos t como la variable de integración que haremos desaparecer ya que existe $f(t)$ (no $f(x)$)

notación: $\mathcal{L}_t[u(x,t)](z) = L_z(x)$

$$\mathcal{L}_t[u_{tt}] = \mathcal{L}_t[c^2 u_{xx}] + \mathcal{L}_t[f]$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t[u_{tt}] &= z\,\mathcal{L}_t[u_t] - u_t(x,0)\\
&= z\left[\mathcal{L}_t[u]z - u(x,0)\right] - u_t(x,0)\\
&= z^2\mathcal{L}_t[u] - \underbrace{z\,u(x,0)}_{0} - \underbrace{u_t(x,0)}_{0}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_t[u_{xx}] = \frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}_t[u]$$

$$\begin{cases} \boxed{z^2 L_z(x) = c^2 \dfrac{d^2}{dx^2} L_z(x) + \mathcal{L}_t[f]} \\ \text{C.I. } L_z(0) = \mathcal{L}_t[\underbrace{u(0,t)}_{0}] = 0 \end{cases}$$

es una EDO en x

dividir por c^2

cte, ya que f sólo depende de t (esto justifica haber aplicado $\mathcal{L}_t$ y no $\mathcal{L}_x$)

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}L_z(x) - \left(\frac{z}{c}\right)^2 L_z(x) = \overbrace{-\frac{1}{c^2}\mathcal{L}_t[f]}^{\text{cte}} \\ &L_z(0) = 0 \end{aligned}}$$

Solución de la homogénea

$$y'' - \left(\tfrac{z}{c}\right)^2 y = K$$

$$A(z)\, e^{\frac{z}{c}x} + B(z)\, e^{-\frac{z}{c}x}$$

Solución particular:

por ejemplo, se ve claramente que la constante $\dfrac{K}{-\left(\frac{z}{c}\right)^2}$ es solución

$$\frac{K}{-\left(\frac{z}{c}\right)^2} = -\left(\tfrac{c}{z}\right)^2 K = -\left(\tfrac{c^2}{z^2}\right)\tfrac{-1}{c^2}\mathcal{L}_t[f] = +\tfrac{1}{z^2}\mathcal{L}_t[f]$$

Solución general:

$$\boxed{L_z(x) = A(z)\, e^{\left(\frac{z}{c}\right)x} + B(z)\, e^{-\left(\frac{z}{c}\right)x} + \tfrac{1}{z^2}\mathcal{L}_t[f](z)}$$

Condiciones iniciales:

$$L_z(0) = A(z) + B(z) + \tfrac{1}{z^2}\mathcal{L}_t[f](z) = 0$$

antes apliquemos

$$x \to +\infty \qquad A(z)\, e^{\left(\frac{z}{c}\right)x} \longrightarrow +\infty \quad (\text{no cumple la C.I})$$

$$\Rightarrow A(z) = 0$$

$$\Rightarrow L_z(0) = 0 \Rightarrow B(z) = -\tfrac{1}{z^2}\mathcal{L}_t[f](z)$$

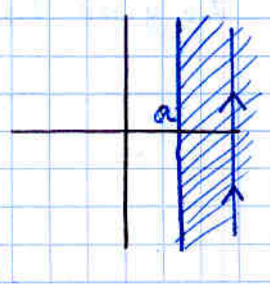
Solución

$$\boxed{L_z(x) = \mathcal{L}_t[f](z)\left\{\frac{1 - e^{-\left(\frac{z}{c}\right)x}}{z^2}\right\}} = \mathcal{L}_t[u](z)$$

Ahora hay que recuperar u mediante TL^{-1}

Forma directa

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L_z(x)\, e^{zt}\, dz$$



con tablas

si encontramos $h(x)$ tal que

$$\mathcal{L}_t[h](z) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{z}{c}\right)x}}{z^2}$$

entonces:

$$\mathcal{L}_t[u] = L_z(x) = \mathcal{L}_t[f](z) \cdot \mathcal{L}_t[h](z)$$

por tanto

$$\boxed{u(x,t) = (f * h)(t)}$$

Solución de EDO. Función de Green

Generalizando para cualquier EDO lineal con C.I. nulas.

$$a_n \frac{d^n}{dx^n}(y(x)) + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}}(y(x)) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = 0$$

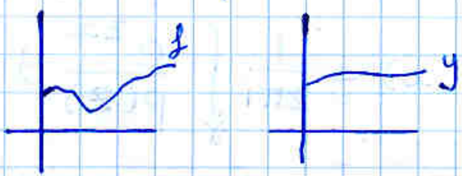
llamamos un operador diferencial

$$P(D) := \left(a_n \frac{d^n}{dx_n} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0\right)$$

y la ecuación es

$$\boxed{P(D)\,y(x) = f(x)}$$

supongamos que estamos interesados en $x > 0$



aplicamos $\mathcal{L}$ a ambos lados

$$\mathcal{L}[P(D)\,y(x)] = \mathcal{L}[f]$$

como las C.I son nulas, se cumple

$$\mathcal{L}[y^{(n)}] = z^n\,\mathcal{L}[y] + \overbrace{0}^{C.I.}$$

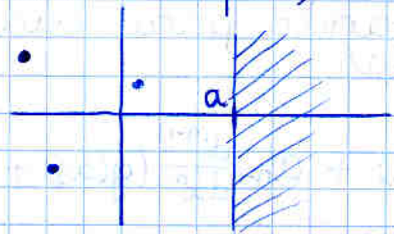
siempre sale z elevado a la potencia igual al orden de derivación

por tanto queda:

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{polinomio} \\ a_n z^n + \dots + a_0}}{p(z)}\,\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f](z)}$$

por tanto $$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{p(z)}\mathcal{L}[f](z)$$

hacemos TL^{-1}, dejando fuera los ceros de $p(z)$



$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[y](z)\right](x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(z)}\mathcal{L}[f](z)\right](x)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{p(z)}\left[\int_0^{+\infty} f(s)\, e^{-zs}\, ds\right] e^{zx}\, dz$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{z(x-s)}}{p(z)}\, dz\right]}_{\substack{\text{función de Green} \\ G(x-s) \\ \text{no depende de } f}} f(s)\, ds$$

Función de Green

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zx}}{p(z)}\, dz}$$

$$G(x-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{z(x-s)}}{p(z)}\, dz$$

$$y(x) = \int_0^{+\infty} G(x-s)\, f(s)\, ds$$

si conocemos G, podemos escribir la solución a cualquier EDO lineal sea cual sea f como

$$\boxed{y(x) = (G * f)(x)}$$

Sistemas de Sturm-Liouville (SL)

situación general:

$$\boxed{a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + (a_0(x) + \alpha)\,y = 0}$$

con condiciones en los extremos que involucran 'y' e/o 'y''

en a: $c_0\,y(a) + c_1\,y'(a) = 0$

en b: $d_0\,y(b) + d_1\,y'(b) = 0$

$a \quad b$

Veremos que para ciertos valores de α (valores propios) habrán soluciones correspondientes y_α (funciones propias)

dividiendo por a_2:

$$y'' + \frac{a_1}{a_2}y' + \left(\frac{a_0}{a_2} + \frac{\alpha}{a_2}\right)y = 0$$

multiplicando por $e^{\int \frac{a_1}{a_2}}$

$$\underbrace{e^{\int\frac{a_1}{a_2}}y'' + \frac{a_1}{a_2}e^{\int\frac{a_1}{a_2}}y'}_{\left(e^{\int\frac{a_1}{a_2}}\cdot y'\right)'} + \left[\frac{a_0}{a_2}e^{\int\frac{a_1}{a_2}} + \frac{\alpha}{a_2}e^{\int\frac{a_1}{a_2}}\right]y = 0$$

llamando:

$$\Big(\underbrace{e^{\int\frac{a_1}{a_2}}}_{p}\,y'\Big)' + \Big[\underbrace{\frac{a_0}{a_2}e^{\int\frac{a_1}{a_2}}}_{q} + \underbrace{\frac{e^{\int\frac{a_1}{a_2}}}{a_2}}_{s}\,\alpha\Big]y = 0$$

$$p = e^{\int\frac{a_1}{a_2}} \qquad q = \frac{a_0}{a_2}p \qquad s = \frac{p}{a_2}$$

hay que saber identificar a_0, a_1 y a_2 y saber obtener de ellos p, q, s

$$\left.\begin{cases} \boxed{(py')' + (q + s\alpha)y = 0} \\ c_0\,y(a) + c_1\,y'(a) = 0 \\ d_0\,y(b) + d_1\,y'(b) = 0 \end{cases}\right\} \text{Sistema de S-L}$$

$$\boxed{p > 0 \text{ y } s > 0 \text{ en } [a,b] \Rightarrow \text{ecuación regular}}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{si } p \text{ o } s \text{ se anulan} \\ \text{o si el intervalo no es finito}\end{array}\right\} \Rightarrow$ ecuación singular

Teorema:

(SL) regular
$y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}$ funciones propias $\Rightarrow$ $\boxed{< y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2} >_s = 0}$

son ortogonales respecto a s

$$\int_a^b y_{\alpha_1}(x) \cdot y_{\alpha_2}(x) \cdot s(x)\, dx = 0$$

núcleo/peso

Teorema:

(SL) regular $\Rightarrow$ los valores propios son reales

Teorema:

(SL) regular $\Rightarrow$ los valores propios forman una sucesión monótona creciente.

$$\boxed{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots \to +\infty}$$

El conjunto de funciones propias

$\boxed{(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots) \text{ son un sistema ortogonal completo}}$

Sea f una función que cumple las condiciones del sistema

$$c_0\, y(a) + c_1\, y'(a) = 0$$
$$d_0\, y(b) + d_1\, y'(b) = 0$$

se puede escribir

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, y_{\alpha_k}$$

siendo $< f, y_{\alpha_k} >_s = a_k < y_{\alpha_k}, y_{\alpha_k} >_s$

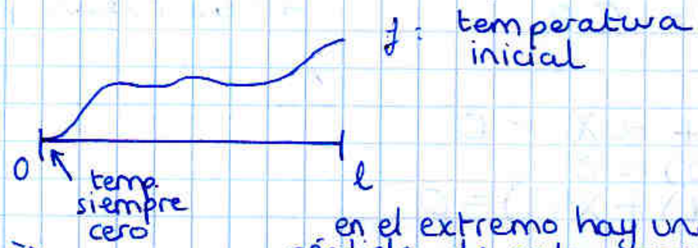
$$a_k = \frac{< f, y_{\alpha_k} >}{< y_{\alpha_k}, y_{\alpha_k} >}$$

ejemplo:

ecuación del calor en una varilla

$$\boxed{u_t = k\, u_{xx}}$$

$u(x,0) = f(x)$
$u(0,t) = 0$



$u_x(l,t) = -a\, u(l,t)$ - - - → en el extremo hay una pérdida de calor proporcional a la temperatura.

Como el intervalo es finito no aplicamos transformadas integrales.

(típica C.C de un sistema SL)

Lo hacemos por separación de variables

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

la ec. queda $\quad T'X = kX''T$

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ aX(l) + X'(l) = 0 \end{array}} \qquad \boxed{T' - k\lambda T = 0}$$

es un sistema de Sturm - Liouville

$\underline{\lambda > 0}$

$T' = k\lambda T \qquad\qquad X'' = \lambda X$

$T(t) = c\cdot e^{\lambda k t} \qquad\qquad X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$u(x,t) = T(t)\cdot X(x)$$

no tiene sentido que conforme pasa el tiempo se vaya calentando.

$\underline{\lambda = 0}$

$T(t) = M \qquad\qquad X(x) = Ax + B$

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

no cambia con el tiempo → un disparate

$\lambda < 0$ notación $\alpha = -\lambda$
$\alpha > 0$

$T' + \alpha k T = 0$

$T(t) = C e^{-\alpha k t}$ disminuye con el tiempo → tiene buena pinta

$X'' + \alpha X = 0$
$X(0) = 0$
$a X(l) + X'(l) = 0$

$\Rightarrow X(x) = A \cos(\sqrt{\alpha}\, x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}\, x)$

- $X(0) = 0 = A$ (aplicando la 1ª cond. inicial)

$\Rightarrow X(x) = B \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}\, x)$

$X'(x) = B\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}\, x)$

- $a\, X(l) + X'(l) = 0$ (la 2ª cond. inicial)

$a\, B \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}\, l) + B\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}\, l) = 0$

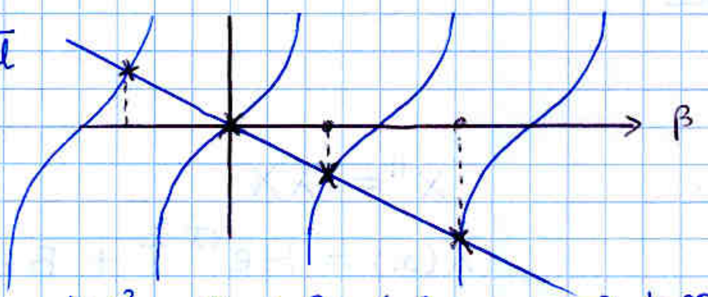
¿Que α's verifican esto? Valores propios

$B = 0 \rightarrow$ sol. trivial
$B \neq 0 \rightarrow$ $a \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}\, l) + \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}\, l) = 0$

$\operatorname{tg}(\sqrt{\alpha}\, l) = -\sqrt{\alpha}/a$

si llamamos $\beta = \sqrt{\alpha}\, l$

$\operatorname{tg}(\beta) = -\dfrac{\beta}{a \cdot l}$



$\alpha_n = \left(\frac{\beta_n}{l}\right)^2$ $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 \ldots \longrightarrow +\infty$
$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots \longrightarrow +\infty$

Por tanto: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots \rightarrow +\infty$ valores propios

$\left.\begin{array}{l} X_n(x) = B_n \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n}\, x) \\ T_n(t) = C_n\, e^{-\alpha_n k t} \end{array}\right\}$ funciones propias

$$\boxed{u_n(x,t) = A_n \operatorname{sen} \sqrt{\alpha_n}\, x \cdot e^{-\alpha_n k t}}$$

y ahora hacemos como siempre, la suma de las u_n será también solución

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \sqrt{\alpha_n}\, x \cdot e^{-\alpha_n k t}}$$

como siempre, con esta $u(x,t)$ podremos hacer que se cumpla la condición inicial $u(x,0) = f(x)$

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \sqrt{\alpha_n}\, x$$

¡Atención! $\sqrt{\alpha_n}$ no son enteros
$\Rightarrow$ no es una serie de Fourier

Aquí es donde aplicamos la teoría de Sturm-Liouville

$$\left.\begin{array}{l} X'' + \alpha X = 0 \\ X(0) = 0 \\ a X(l) + X'(l) = 0 \end{array}\right\}$$ es un problema típico de Sturm-Liouville

comparando con $a_2 X'' + a_1 X' + (a_0 + \lambda) X = 0$

$a_2(x) = 1$
$a_1(x) = 0$
$a_0(x) = 0$

calculando p, q y s

$p = e^{\int \frac{a_1}{a_2}} = 1$

$q = 0 = \frac{a_0}{a_2} p$

$s = 1 = \frac{p}{a_2}$ (función peso)

$s > 0$, $p > 0 \Rightarrow$ sistema regular ($\Rightarrow$ concuerda con el resultado anterior $\alpha_1 < \alpha_2 \ldots \to +\infty$)

$\Rightarrow$ X_{α_k} son un sistema ortogonal completo
$X_{\alpha_k} = \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_k} \cdot x)$ [calculado antes]

por tanto, la C.I.

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_k}\, x)$$

siendo $$\boxed{A_k = \frac{\langle f, X_{\alpha_k} \rangle_s}{\langle X_{\alpha_k}, X_{\alpha_k} \rangle_s}}$$

era importante conocer s para saber el peso del $\langle \cdot , \cdot \rangle$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\sqrt{\alpha_n}\, x) \cdot e^{-\alpha_n k t}}$$

Caso particular de sistema S-L: Ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \alpha^2) y = 0 \qquad \alpha \geq 0$$

$a_2(x) = x^2$ $\quad p = x \quad p = e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x}$

$a_1(x) = x$ $\quad q = x \quad q = p \cdot \frac{a_0}{a_2}$

$a_0(x) = x^2$ $\quad s = \frac{1}{x} \quad s = \frac{p}{a_2}$

pensando un poco, se puede deducir que la ecuación sólo puede ser una serie de potencias

La solución general se expresa como

$$y(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 J_{-\alpha}(x) \qquad \text{si } \alpha \text{ no es entero}$$

$$y(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x) \qquad \text{si } \alpha \text{ es entero}$$

donde J_α y Y_α son expresiones grandes, pero conocidas, de series de potencias

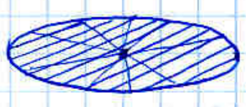
Función de Bessel de 1ª especie de orden α: $J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\alpha}}{2^{2k+\alpha} k! \, \Gamma(\alpha + k + 1)}$ función gamma Euler

" " " " 2ª especie: $Y_\alpha(x) = \frac{\cos(\alpha\pi) J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$

Por los teoremas de Sturm-Liouville sabemos que

J_α y Y_α forman un sistema ortogonal completo. (ortogonal respecto de $s = \frac{1}{x}$)

ejemplo: ecuación de Laplace en polares



$$\nabla^2 u = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

Supongamos que existe simetria angular

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0$$

aplicando a la ecuación de ondas (tambor vibrando)

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

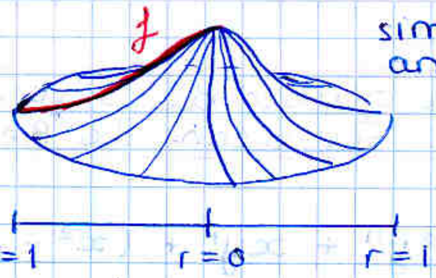
en polares y suponiendo simetria angular $\quad u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$$

$u(r,0) = f(r)$ posición inicial

$u_t(r,0) = 0$ parte del reposo

$u(1,t) = 0$ sujeto por bordes



Separación de variables

$$u(r,t) = R(r) \cdot T(t)$$

la ec. queda: $RT'' = c^2 \left(R''T + \frac{1}{r} R'T \right)$

dividiendo por RT $\quad \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = \lambda$

$$\boxed{\begin{array}{l} T'' - c^2 \lambda T = 0 \\ T'(0) = 0 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} R'' + \frac{1}{r} R' - \lambda R = 0 \\ R(1) = 0 \end{array}}$$

$\lambda > 0 \to T(t)$ expon.

$\lambda = 0 \to T(t)$ rectas

$\lambda < 0 \to T(t)$ senos y cosenos. Periódica. Es la buena.

escribimos $\boxed{\lambda = -\alpha^2}$

$$T'' + \alpha^2 c^2 T = 0$$

$$T(t) = A \cos \alpha c t + B \operatorname{sen} \alpha c t$$

$$T'(0) = -A\alpha c \operatorname{sen} \alpha c t + B \alpha c \cos \alpha c t \Big|_{t=0} = B \alpha c = 0$$

$$\boxed{T(t) = A \cos \alpha c t}$$

Ahora toca:

$$\boxed{R'' + \frac{1}{r} R' + \alpha^2 R = 0}$$ no es facil

podemos convertirla en la ec. de Bessel con un C.V. $\boxed{s = \alpha r}$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR_s}{ds} \frac{ds}{dr} = \alpha \frac{dR_s}{ds} \quad \to \quad R' = \alpha R'_s$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \alpha^2 \frac{d^2 R_s}{ds^2} \quad \to \quad R'' = \alpha^2 R''_s$$

permitanme llamar a R_s como R

así que, con el cambio $s = \alpha r$ $\quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{s}$

queda:

$$\alpha^2 \frac{d^2R}{ds^2} + \frac{\alpha^2}{s}\frac{dR}{ds} + \alpha^2 R = 0$$

dividir por α^2 y multiplicar por s^2

$$s^2 \frac{d^2R}{ds^2} + s\frac{dR}{ds} + s^2 R = 0$$

$$s^2 R'' + sR' + s^2 R = 0$$

que es: $\boxed{s^2 R'' + sR' + (s^2 - \nu^2)R = 0}$ ecuación de Bessel

siendo $\nu = 0$

la solución viene dada por J_0 y Y_0 funciones de Bessel

$$R_s(s) = C J_0(s) + D Y_0(s)$$

siendo J_0 y Y_0 ortogonales respecto al peso $\frac{1}{s}$

Y_0 es singular en el origen $\Rightarrow$ no concuerda con una membrana que vibra $\Rightarrow D = 0$

deshaciendo el C.V.

$$\boxed{R(r) = C J_0(\alpha r)}$$

las condiciones iniciales nos darán los valores propios α

$$R(1) = C J_0(\alpha) = 0$$

los α serán las raíces de J_0

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$$

Por tanto la solución final:

$$\boxed{u_n(r,t) = a_n J_0(\alpha_n r)\cos(\alpha_n c t)}$$

y para poder aplicar la C.I. $u(r,0) = f(r)$ hacemos como siempre la suma

$$\boxed{u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n r)\cos(\alpha_n c t)}$$

$u(r,0) = \sum a_n \underbrace{J_0(\alpha_n r)} = f(r)$ es la condición inicial

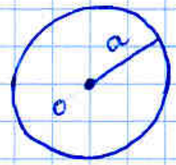
sabemos que es un S.O.G. respecto del peso $\frac{1}{s} = r$

por tanto:

$$a_n = \frac{\langle f, J_0(\alpha_n r)\rangle_r}{\langle J_0(\alpha_n r), J_0(\alpha_n r)\rangle_r} = \frac{\int_0^1 f(r)\, J_0(\alpha_n r)\cdot r \cdot dr}{\int_0^1 J_0^2(\alpha_n r)\cdot r\, dr}$$

Dirichlet en un disco.
Tratado por separación de variables
Nucleo de Poisson

Encontrar una función armónica que coincida con f en la frontera.



$$\nabla^2 u = 0$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u(a,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

una condición importante de la que nosotros DEBEMOS darnos cuenta
$u(r,\theta)$ y $f(\theta)$ son 2π-periódicas

Separación de variables: $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0$$

dividiendo por $R\Theta$ y multiplicando por R^2

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(\theta)\ 2\pi\text{-periódica}\end{array}} \qquad \boxed{r^2R'' + rR' - \lambda R}$$

$\lambda < 0$ $\quad \Theta(\theta) \to$ exponenciales $\to$ no cumple ser periódica

$\lambda = 0$ $\quad \Theta(\theta) = A\theta + B$

$$r^2R'' + rR' = 0$$
$$rR'' + R' = 0$$
$$R' = S$$
$$rS' + S = 0$$
$$r\frac{dS}{dr} = -S \Rightarrow -\frac{dS}{S} = \frac{dr}{r} \Rightarrow -\ln s = +\ln r + \ln k$$
$$\Rightarrow \frac{1}{S} = kr \Rightarrow S = \frac{K}{r}$$
$$R = \int_0^r k\frac{1}{r}dr = k\ln r + M$$
$$R(r) = k\ln r + M$$

para que sea 2π periódica tomamos $A=0$
$$u(r,\theta) = K\ln r + M$$
en particular podemos tomar $u(r,\theta) = C$ (cte).

Dirichlet en un disco tratado por separación de variables
Nucleo de Poisson (cont.)

$\lambda > 0$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0$$

$\rightarrow \Theta(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}\theta)$

Para que cumpla ser 2π-periódica $\Rightarrow \sqrt{\lambda}$ entero (valores propios)
$\Rightarrow \lambda$ son los enteros^2

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$$

por inspección $R(r) = r^\rho$

$r^2(\rho)(\rho-1)r^{\rho-2} + r(\rho)r^{\rho-1} - \lambda r^\rho = 0$

$\rho(\rho-1)r^\rho + \rho r^\rho - \lambda r^\rho = 0$

$r^\rho(\rho^2 - \lambda) = 0$

$\rho = \pm\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow R(r) = Cr^{+\sqrt{\lambda}} + \cancel{Dr^{-\sqrt{\lambda}}}$ no tiene sentido que en $r = 0$, $R(r) \to \infty$

Por tanto la solución final

$\lambda=0$ $\quad u_0(r,\theta) = C_0$

$\lambda>0$ $\quad u_n(r,\theta) = C_n r^n(A_n\cos n\theta + B_n\,\text{sen}\, n\theta)$

si hacemos la suma para aplicar la C.I. $\quad u(a,\theta) = f(\theta)$

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left[a_n\cos(n\theta) + b_n\,\text{sen}(n\theta)\right]$$

a: radio

y hacemos $\rho = \frac{r}{a}$ $\quad$ en $r = a \rightarrow \rho^n = 1$

aplicamos la C.I.

$$u(a,\theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\theta + b_n\,\text{sen}\, n\theta\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau\, d\tau \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,\text{sen}\, n\tau\, d\tau \\ u(r,\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left[a_n\cos(n\theta) + b_n\,\text{sen}(n\theta)\right] \end{aligned}}$$

recuerda $\left|\int_0^{2\pi} f\right| \leq 2\pi \cdot \max|f|$

f continua 2π-periódica: $|f| < M \quad |a_n| < 2M \quad |b_n| < 2M$

$\sum \rho^n[a_n\cos n\theta + b_n\,\text{sen}\, n\theta] \leq \sum \rho^n \cdot 4M$ $\quad$ como $0<\rho<1 \Rightarrow 4M\sum\rho^n$ conv.

$\xRightarrow[\text{de Weierstrass}]{\text{Tª M}}$ la serie conv. uniformemente pero no nos vamos a conformar esta vez con la solución tan 'a trozos'

escribámosla de forma explícita (sustituyendo a_n y b_n)

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau \; +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \underbrace{\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos n\tau\,d\tau \cos n\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\operatorname{sen} n\tau\,d\tau \operatorname{sen} n\theta\right]}_{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)[\cos n(\tau-\theta)]\,d\tau}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\rho^n \underbrace{\cos n(\tau-\theta)}_{\frac{e^{in(\tau-\theta)}+e^{-in(\tau-\theta)}}{2}}\right\}d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(e^{in(\tau-\theta)} + e^{-in(\tau-\theta)}\right)\right\}$$

si desarrollamos la serie (el resultado es conocido) queda

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}}_{\text{núcleo de Poisson}} f(\tau)\,d\tau}$$

recuerda que $\rho = \frac{r}{a}$ (el radio 'relativo' al radio exterior)

Examen de Matemáticas

Enero 2003

Enunciados.[1]

1 Primer ejercicio

Se considera la función $f(x) = x$, $x \in]-\pi, \pi[$.

1. Calcular su serie de Fourier (realizar los cálculos; la respuesta es

$$2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right]). \tag{1}$$

2. Mencionar los resultados teóricos que permitan asegurar la convergencia de la serie en (1) y el valor del límite puntual. Hacer un gráfico aproximado con el comportamiento de las sumas parciales de la serie (1).

3. Hay un resultado que permite integrar término a término una serie de Fourier aunque no sea uniformemente convergente (¡en realidad, aunque no sea puntualmente convergente!). Enunciar el resultado mencionado y aplicarlo a la serie (1) dada, integrando en $[a, x]$, siendo $-\pi \le a < x \le \pi$.

4. Tómese ahora $a = 0$. Se obtendrá, a partir de lo demostrado en el apartado anterior,

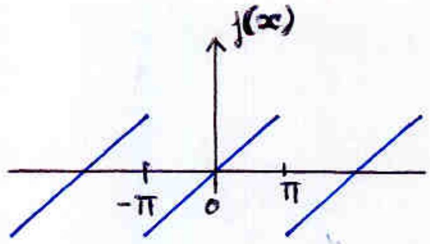
$$\frac{x^2}{4} = C - \left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right], \tag{2}$$

[1]Cuando se pide un enunciado, debe formularse con precisión, aunque no es necesario demostrarlo. Cuando se proporciona un resultado, debe comprobarse. Si no se sabe hacer, puede pasarse a la siguiente pregunta aceptándolo.

Primer ejercicio

1. $f(x) = x \qquad x \in]-\pi, \pi[$

haciendo la extensión 2π-periódica:



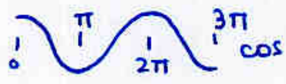
como $f(x)$ es impar, sólo tendrá términos en el seno.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

cálculo de las integrales:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \underset{\text{por partes}}{=} \frac{2}{\pi}\left[\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos nx \, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(0 - \frac{\pi}{n}\cos n\pi\right) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx \, dx\right]$$



$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\underbrace{\operatorname{sen} nx\Big|_0^{\pi}}_{0}\right]$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} = 2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$b_n = \left\{2, -1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \dots\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \sim \cancel{\sum_{n=1}^{\infty}}\, 2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots\right]$$

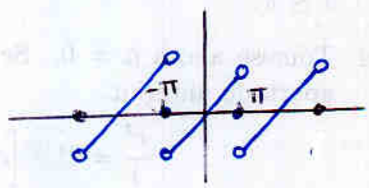
2. sea f integrable, 2π-periódica

- monótona en $[x-\delta, x[$ y $]x, x+\delta]$ $\xRightarrow{\text{Jordan}}$ $S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$
- existen derivadas parciales laterales finitas en x $\xRightarrow{\text{Dini}}$

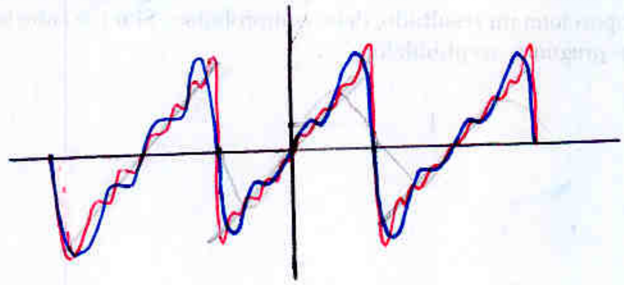
como f no es continua, no converge uniformemente.

La S_n converge puntualmente a:

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \neq \pm n\pi \\ 0 & x = \pm n\pi \end{cases}$$



Aproximadamente:



donde C es una constante a determinar. Para hacerlo, integrar ambos términos de (2) entre $-\pi$ y π. No está claro inicialmente que pueda integrarse a ambos lados, así que justificar con precisión que ello es posible en este caso.

5. Se obtendrá, después de estos cálculos, que

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Puntuación: 1) 2, 2) 2, 3) 2, 4) 2, 5) 2.

3. · f 2π-periódica
· continua a trozos $\Longrightarrow$ su serie de Fourier se puede integrar término a término dando lugar a la serie de Fourier de f'.

Nuestra serie: lo cumple

$$x \sim 2\left[\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right]$$

por tanto

$$\int_a^x x\,dx \sim 2\int_a^x \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\, dx$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \sim 2\left[\overbrace{-\cos x + \cos a} + \overbrace{\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 2a}{4}} - \overbrace{\frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 3a}{9}} + \ldots\right]$$

4. Para $a = 0$

$$\frac{x^2}{2} \sim 2\left[C - \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\right]$$

$C = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots$

como $\frac{x^2}{2}$ es continua a trozos $\rightarrow$ su serie de Fourier se puede integrar término a término…

además no sólo eso: la serie es uniformemente convergente por el criterio M de Weierstrass

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \sim 2\int_{-\pi}^{\pi}\left[C - \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\right] dx$$

$$\left.\frac{x^3}{6}\right|_{-\pi}^{\pi} \sim 2\left[Cx \underbrace{- \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^3} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \ldots}_{0}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{2\pi^3}{6} \sim 2C\,2\pi \Rightarrow C = \frac{2\pi^3}{2 \cdot 2\pi \cdot 6} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12}$$

Segundo ejercicio:

1. $U_t = c^2 U_{xx}$
$u(x,0) = f(x)$
$u(x,t) \longrightarrow 0$
$u_x(x,t) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow}$

aplicando $\mathcal{F}_x$ (suponiendo que $u(x,t)$ sea abs. integrable, las CI parecen indicarlo)

$$\mathcal{F}_x[U_t] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x[u]$$

$$\mathcal{F}_x[U_{xx}] = (i\alpha)^2 \mathcal{F}_x[u] = -\alpha^2 \mathcal{F}_x[u]$$

llamando $\mathcal{F}_x[u(x,t)](\alpha) = F_\alpha(t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F_\alpha(t) + c^2\alpha^2 F_\alpha(t) = 0 \\ F_\alpha(0) = \mathcal{F}_x[f(x)](\alpha) \end{cases}$$

solución: $F_\alpha(t) = A(\alpha) e^{-c^2\alpha^2 t}$

C.I. $F_\alpha(0) = A(\alpha) = \mathcal{F}_x[f(x)](\alpha)$

$$\Rightarrow \quad F_\alpha(t) = \mathcal{F}_x[f](\alpha)\cdot e^{-c^2\alpha^2 t}$$

$$\mathcal{F}_x[u(x,t)](\alpha) = \mathcal{F}_x[f(x)](\alpha)\cdot e^{-c^2\alpha^2 t}$$

haciendo la transformada inversa:

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[\mathcal{F}_x[f(x)](\alpha)\cdot e^{-c^2\alpha^2 t}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathcal{F}_x[f(x)](\alpha)\cdot e^{-c^2\alpha^2 t}\cdot e^{i\alpha x}\right]d\alpha$$

variable muda

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot e^{-i\alpha s}\,ds\right)\cdot e^{-c^2\alpha^2 t}\cdot e^{i\alpha x}\right]d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot e^{-i\alpha s}\,ds\right)\cdot e^{-c^2\alpha^2 t}\cdot e^{i\alpha x}\right]d\alpha$$

podemos cambiar el orden de las integrales

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot e^{-c^2\alpha^2 t}\cdot e^{i\alpha(x-s)}\,d\alpha\,ds$$

2. sabiendo $\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

$$u(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[\mathcal{F}_x[f(x)](\omega)\cdot e^{-c^2\omega^2 t}\right]$$

si logramos encontrar $h(x,t)$: $\mathcal{F}_x[h(x,t)](\omega) = e^{-c^2\omega^2 t}$
entonces

$$\mathcal{F}_x[u(x,t)](\omega) = \mathcal{F}_x[f(x)(\omega)]\cdot\mathcal{F}_x[h(x,t)](\omega)$$

$$\boxed{u(x,t) = f(x) * h(x,t)}$$

encontremos $h(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}[e^{-c^2\omega^2 t}]$

partiendo de $e^{-ax^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ si hacemos $\frac{1}{4a} = c^2 t \to a = \frac{1}{4c^2t}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{4c^2t}}} = \frac{\sqrt{2}c\sqrt{t}}{1}$

~~no llegaría a nada~~

2 Segundo ejercicio

Resolver las EDP usando la Transformada de Fourier.

1. Encontrar la temperatura $u(x,t)$ de una barra homogénea de sección transversal constante con aislamiento lateral que se extiende de $x = -\infty$ a $+\infty$, para el tiempo $t > 0$, suponiendo que la temperatura inicial dada es

$$u(x,0) = f(x), \quad (-\infty < x < \infty)$$

y para toda $t \geq 0$ la solución y su derivada con respecto a x satisfacen

$$u(x,t) \longrightarrow 0, \quad u_x(x,t) \longrightarrow 0 \ \textit{cuando} \ |x| \longrightarrow \infty$$

(recordar que la ecuación del calor es $u_t = c^2 u_{xx}$).

2. Resolver el problema de calor anterior por el método de convolución. Para ello recordar que

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(w) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \tag{3}$$

3. Encontrar la solución del apartado 1 usando la transformada seno, suponiendo que la barra se extiende de 0 a ∞, que la temperatura inicial es

$$u(x,0) = f(x) \quad (0 \leq x < \infty),$$

y que en el extremo izquierdo se tiene la condición en la frontera

$$u(0,t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

4. Resolver la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, \ t > 0)$$

sujeta a las siguientes condiciones

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 64xe^{-4x^2}$$

(Sugerencia: Recuerde el siguiente resultado $\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = i^n F^{(n)}(w)$)

Puntuación: 1) 2.5, 2) 2.5, 3) 2.5, 4) 2.5.

$$\cancel{h(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-c^2\omega^2 t}\right]}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2\omega^2 t} e^{i\omega x} \, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}}$$

$$\cancel{= \mathcal{F}_x^{-1}\left[e\right.}$$

$$e^{-ax^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

si $a = \frac{1}{4c^2t}$ para que $\frac{1}{4a} = c^2 t$

$$e^{-\frac{x^2}{4c^2t}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{\sqrt{2}\, c\sqrt{t}}_{\substack{\text{cte} \\ \text{(recuerda: t fijo)}}} e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2c^2t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2t}} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2c^2t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = f(x) * h(x,t)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot h(x-s,t) \, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2c^2t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4c^2t}} \, ds$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4c^2t}} \, ds}$$

Soluciones.

1 Primer Ejercicio.

1. El cálculo de los coeficientes de Fourier es posible al ser f una función integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (dando a f valores arbitrarios en los extremos).

2. La extensión $2\pi-$periódica de la función f dada es suave a trozos. Esta es la razón por la que su serie de Fourier converge puntualmente. Lo hace, en cualquier punto x que no sea un múltiplo de π, al valor de la función f en x, puesto que f es continua en ese punto. En los múltiplos de π converge, como es sabido, a
$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=0.$$

3. Cualquier función $2\pi-$periódica y continua a trozos en $I\!R$ tiene una serie de Fourier que puede ser integrada término a término en cualquier intervalo acotado, aunque es bien sabido que las condiciones dadas no son, en general, suficientes para asegurar la convergencia puntual de la serie de Fourier. Integrando la función dada en $[a, x]$ se obtiene
$$\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{2}=$$
$$=2\left[-\left(\cos x-\tfrac{\cos 2x}{2^2}+\tfrac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right)+\left(\cos a-\tfrac{\cos 2a}{2^2}+\tfrac{\cos 3a}{3^2}-\ldots\right)\right]$$

4. Haciendo $a=0$ resulta
$$\frac{x^2}{2}=$$
$$=2\left[-\left(\cos x-\tfrac{\cos 2x}{2^2}+\tfrac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right)+\left(1-\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}-\ldots\right)\right],$$
luego
$$\frac{x^2}{4}=C-\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right) \qquad (4)$$
donde
$$C:=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots$$

3. $u_t - c^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 \leq x < \infty$

$u(x,0) = f(x) \qquad u(x,t) \to 0$

$u(0,t) = 0 \qquad u_x(x,t) \underset{|x|\to\infty}{\to} 0$

con transformada seno.

$$\mathcal{S}[f(x)](n) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad n = 1,2,3,\dots$$

~~MAL~~ ~~Había~~ que usar la ~~transformada~~

$$\mathcal{S}\left[\frac{df(x)}{dx}\right](n) = \frac{2}{a}\int_0^a f'(x)\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$\underset{(\text{partes})}{=} \frac{2}{a}\left[\underbrace{\left(f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\right)_0^a}_{0} - \int_0^a \frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\, f(x)\,dx\right]$$

$$= -\frac{2n\pi}{a^2}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$= -\frac{n\pi}{a}\,\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$\boxed{S[f'(x)](n) = -\frac{n\pi}{a}\,\mathcal{C}[f(x)](n)}$$

$$\mathcal{S}[f''(x)] = -\frac{n\pi}{a}\,\mathcal{C}[f'(x)](n)$$

$$\mathcal{C}[f'(x)] = \frac{2}{a}\int_0^a f'(x)\cos\frac{n\pi x}{a}$$

$$= \frac{2}{a}\left[\underbrace{\left(f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\right)_0^a}_{f(a)(-1)^n - f(0)} \underbrace{- \int_0^a -\frac{n\pi}{a} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}}_{+\frac{n\pi}{a}\mathcal{S}[f(x)](n)}\right]$$

$$\cancel{f(x)[-1+(-1)^n]}$$

$$\cancel{\begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -2f(x) & n \text{ impar}\end{cases}}$$

$$= \frac{n\pi}{a}\,\mathcal{S}[f(x)](n) + \frac{2}{a}\left[f(a)(-1)^n - f(0)\right]$$

$$\boxed{\mathcal{S}[f''(x)] = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}\,\mathcal{S}[f(x)](n) - \frac{2n\pi}{a^2}\left[f(a)(-1)^n - f(0)\right]}$$

en nuestro caso $a \to \infty$, lo hago para a y luego el lím $a \to \infty$

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0$$

$$\mathcal{S}_x[u_t] - c^2\,\mathcal{S}_x[u_{xx}] = 0$$

$$\mathcal{S}_x[u_t](n) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{S}_x[u](n)$$

$$\mathcal{S}_x[u_{xx}](n) = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}\,\mathcal{S}_x[u](n) - \underbrace{\frac{2n\pi}{a^2}\left[\underbrace{u(a)(-1)^n}_{0} - \underbrace{u(0)}_{0 \text{ c.c.}}\right]}_{0}$$

condiciones de contorno nulas

llamando $\mathcal{S}_x[u(x,t)](n) = S_n(t)$

$$\mathcal{S}_x[u(x,0)](n) = \mathcal{S}_x[f(x)](n)$$

$$S_n(0) = \mathcal{S}_x[f(x)](n)$$

mal. al ser $x \in [0,\infty]$ había que tomar la transformada de Fourier seno

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\right]}_{\text{transformada seno}}d\alpha$$

La serie que aparece en la expresión (4) es uniformemente convergente, pues los cosenos están acotados en módulo por 1, luego en valor absoluto la serie está dominada, independientemente de x, por $\sum \frac{1}{n^2}$, que es convergente. Basta pues aplicar el criterio M de Weierstrass para obtener la convergencia uniforme. Por tanto, la serie se puede integrar término a término en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

5. Realizando la integración resulta

$$\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi C.$$

Por tanto, $C = \pi^2/12$.

queda la ecuación:

$$\left\{\begin{array}{l} S_n'(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} S_n(t) = 0 \\ S_n(0) = \mathcal{S}_x[f(x)](n) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad S_n(t) = A(n) \cdot e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} t}$$

C.I. $\quad S_n(0) = A(n) = \mathcal{S}_x[f(x)](n)$

$$\Rightarrow \quad S_n(t) = \mathcal{S}_x[f(x)](n) \cdot e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} t}$$

$$\mathcal{S}_x[u(x,t)](n) = \mathcal{S}_x[f(x)](n) \cdot e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} t}$$

$$u(x,t) = \mathcal{S}_x^{-1}\left[\mathcal{S}_x[f(x)](n)\, e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} t}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\mathcal{S}_x[f(x)](n) \cdot e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} t}}_{b_n}\Big) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

$$b_n = \mathcal{S}_x[f(x)](n) \cdot e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} t}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{a}\, 5\int_0^a f(x) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx \cdot e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} t}}$$

$$\boxed{u(x,t) = \lim_{a \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}}$$

4.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \left(\begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ t > 0 \end{matrix}\right) \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 64\, x\, e^{-4x^2} \end{cases}$$

recuerda $\mathcal{F}[t^n f(t)] = i^n \dfrac{\partial^n}{\partial \omega^n} \mathcal{F}[f](\omega)$

$$\mathcal{F}_x\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](\omega) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}_x[u(x,t)](\omega) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}F_\omega(t) = F''_\omega(t)$$

$$\mathcal{F}_x\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\omega) = -\omega^2\mathcal{F}_x[u(x,t)](\omega) := -\omega^2 F_\omega(t)$$

$$\mathcal{F}_x\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right](\omega) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x[u(x,0)](\omega) = \frac{\partial}{\partial t}F_\omega(0)$$

queda:

$$\begin{cases} F''_\omega(t) + 4\omega^2 F_\omega(t) = 0 \\ F_\omega(0) = 0 \\ F'_\omega(0) = \mathcal{F}_x[64x\, e^{-4x^2}] \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_x[64xe^{-4x^2}] = 64\,\mathcal{F}_x[x\,e^{-4x^2}] = 64\, i \frac{d}{d\omega}\left(\mathcal{F}_x[e^{-4x^2}]\right)$$

siendo $\mathcal{F}_x[e^{-4x^2}](\omega) \overset{(3)}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 4}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\cdot 4}}$ $= \dfrac{1}{\sqrt{8}}\, e^{-\frac{\omega^2}{16}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x(4x+i\omega)}\,dx$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{1}{\sqrt{8}} e^{-\frac{\omega^2}{16}}\right] = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(-\frac{2\omega}{16}\right) e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

por tanto

$$\mathcal{F}_x[64xe^{-4x^2}] = -\frac{8i\omega}{\sqrt{8}}\, e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

$$= -\sqrt{8}\, i\omega\, e^{-\frac{\omega^2}{16}} = -\sqrt{8}\, e^{i\pi}\omega e^{-\frac{\omega^2}{16}} = -\sqrt{8}\,\omega\, e^{i\pi - \frac{\omega^2}{16}}$$

$$\begin{cases} F''_\omega(t) + 4\omega^2 F_\omega(t) = 0 \\ F_\omega(0) = 0 \\ F'_\omega(0) = -\sqrt{8}\, i\omega e^{-\frac{\omega^2}{16}} \end{cases}$$

$\lambda^2 + 4\omega^2 = 0$

$\lambda^2 = -4\omega^2 = -(2\omega)^2$

$\lambda = \pm i\, 2\omega$

$$F_\omega(t) = A(\omega)\cos 2\omega t + B(\omega)\,\text{sen}\, 2\omega t$$

$$F'_\omega(t) = -2\omega A(\omega)\,\text{sen}\, 2\omega t + 2\omega B(\omega)\cos 2\omega t$$

$$F_\omega(0) = A(\omega) = 0$$

$$F'_\omega(0) = 2\omega B(\omega) = -\sqrt{8}\, i\omega e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

$$B(\omega) = -\sqrt{2}\, i e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}_x[u(x,t)](\omega) = -\sqrt{2}\, i\, e^{-\frac{\omega^2}{16}}\,\text{sen}\,(2\omega t)}$$

$$= -\sqrt{2}\,\cancel{i}\, e^{-\frac{\omega^2}{16}}\,\frac{e^{i2\omega t} - e^{-i2\omega t}}{2\cancel{i}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{\omega^2}{16}}\left(e^{i2\omega t} - e^{-i2\omega t}\right)$$

si se supone que es posible invertir el orden de las integrales, se obtiene

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2w^2t}e^{i(wx-wv)}dw\right]dv.$$

Por lo tanto, descomponiendo la integral interior en dos partes (una extendida al intervalo $]-\infty,0]$ y la otra a $[0,+\infty[$) y cambiando la variable en la segunda, se obtiene

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-c^2w^2t}cos(wx-wv)dw\right]dv.$$

2. En el desarrollo anterior se ha encontrado que

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}e^{iwx}dw.$$

Consideramos de nuevo que t es constante. Sabemos que $\widehat{f*g}=\hat{f}.\hat{g}$, luego $f*g=\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}.\hat{g})$, donde $\mathcal{F}^{-1}$ denota la transformada inversa de Fourier. Por tanto, si denotamos

$$\hat{g}(w)=e^{-c^2w^2t},$$

resulta que

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\\&=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}dw=\\&=\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}.\hat{g})(x,t),\end{aligned}$$

por lo que

$$u(x,t)=(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}dw. \tag{5}$$

Puesto que, por la definición de convolución

$$(f*g)=\int_{-\infty}^{\infty}f(p)g(x-p)dp,$$

usando (3) para determinar la transformada inversa de $\hat{g}$ y reemplazando x por $x-p$ y sustituyendo en (5) obtenemos

$$u(x,t)=(f*g)(x)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)e^{-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}}dp.$$

3. Aplicando la transformada de Fourier seno, ya que x varía de 0 a ∞, se obtiene

$$\mathcal{F}_s(u_t) = \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} c^2 \mathcal{F}_s(u_{xx}) = c^2(-w^2)\mathcal{F}_s(u) = -c^2 w^2 \hat{u}_s(w,t).$$

La solución de esta ecuación diferencial de primer orden es

$$\hat{u}_s(w,t) = C(w) e^{-c^2 w^2 t}.$$

Por la condición inicial, se tiene

$$\hat{u}_s(w,t) = \hat{f}_s e^{-c^2 w^2 t}.$$

Tomando la transformada seno inversa y sustituyendo

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(p) \sin wp \; dp,$$

se obtiene la formula buscada

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(p) \sin wp . e^{-c^2 w^2 t} \sin wx \; dp \; dw.$$

4. Aplicamos la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación, considerando que t es constante. Se obtiene

$$\mathcal{F}(u_{tt}) = 4\mathcal{F}(u_{xx}).$$

Calculando las transformadas de Fourier a ambos lados,

$$\mathcal{F}(u_{tt})(w,t) = \hat{u}_{tt}(w,t) = 4\mathcal{F}(u_{xx})(w,t) = -4w^2 \hat{u}(w,t).$$

Por tanto,

$$\hat{u}_{tt} + 4w^2 \hat{u} = 0,$$

una ecuación diferencial ordinaria en la variable t, donde se ha fijado w. La solución general, con w constante, es

$$\hat{u}(w,t) = A(w) cos(2wt) + B(w) sen(2wt).$$

Las condiciones iniciales afirman que $u(x,0) = 0$. Entonces

$$\hat{u}(w,0) = A(w) cos(0) + B(w) sen(0) = A(w) = 0,$$

2 Segundo Ejercicio.

1. Se debe resolver la ecuación de calor

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

sujeta a las condiciones dadas. Tomando la transformada de Fourier con respecto a x a ambos lados de la ecuación se obtiene una ecuación diferencial ordinaria en t. Precisamente, se fija t y se considera $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$, la transformada de Fourier de u respecto de la variable t, es decir,

$$\hat{u}(w,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ixw} dx.$$

Entonces,

$$\mathcal{F}(u_t)(w) = c^2 \mathcal{F}(u_{xx})(w) = c^2(-w^2)\mathcal{F}(u)(w) = -c^2 w^2 \hat{u}(w).$$

Se obtiene, siempre suponiendo t fija,

$$\mathcal{F}(u_t)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-iwx} dx = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(w,t).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(w,t) = -c^2 w^2 \hat{u}(w,t).$$

Considerando ahora esta última ecuación como una edo en la variable t (mientras que se fija la variable w), la solución general es

$$\hat{u}(w,t) = C(w) e^{-c^2 w^2 t},$$

donde C es una constante (que, obviamente, depende de w). En vista de la condición inicial resulta que $C(w) = \hat{f}(w)$, con lo que

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t}.$$

Por la fórmula de la inversión

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw.$$

Dado que

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iwv} dv,$$

$$\boxed{\mathcal{F}_x\left[u(x,t)\right](\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[e^{-\frac{\omega^2}{16}}e^{-i\omega 2t} - e^{-\frac{\omega^2}{16}}e^{i\omega 2t}\right]}$$

propiedad

$$\mathcal{F}\left[f(x+t_0)\right](\omega) = e^{i\omega t_0}\,\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega)$$

$$f(x+t_0) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{i\omega t_0}\,\mathcal{F}\left[f(x)\right](\omega)\right]$$

haciendo

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{\omega^2}{16}}\right]$$

$$e^{-ax^2} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad (3)$$

$$e^{-4x^2} \xrightarrow{a=4} \frac{1}{\sqrt{8}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

$$e^{-4x^2} \longrightarrow \frac{\sqrt{8}}{8}e^{-\frac{\omega^2}{16}} = \frac{2\sqrt{2}}{8}e^{-\frac{\omega^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

$$\frac{1}{2}e^{-4x^2} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

por tanto, aplicando la propiedad

$$\frac{1}{2}e^{-4(x-2t)^2} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\omega^2}{16}}e^{-i\omega 2t}$$

$$\frac{1}{2}e^{-4(x+2t)^2} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\omega^2}{16}}e^{i\omega 2t}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\omega^2}{16}}e^{-i\omega 2t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\omega^2}{16}}e^{i\omega 2t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-4(x-2t)^2} - \frac{1}{2}e^{-4(x+2t)^2}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{-4(x-2t)^2} - e^{-4(x+2t)^2}\right]}$$

luego

$$\hat{u}(w,t) = B(w)\sin(2wt).$$

Para resolver $B(w)$, recordamos la otra condición:

$$u_t(x,0) = 64xe^{-4x^2}.$$

Aplicando la transformada a esta condición,

$$\mathcal{F}(u_t(x,0)) = \hat{u}_t(w,0) = \mathcal{F}(64xe^{-4x^2}).$$

luego

$$\mathcal{F}(64xe^{-4x^2}) = i\mathcal{F}(64e^{-4x^2}) = 64i\frac{d}{dw}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-w^2/16}\right] = 4i\sqrt{\pi}we^{-w^2/16}.$$

Por lo tanto,

$$\hat{u}_t(w,0) = 4i\sqrt{\pi}we^{-w^2/16}.$$

Así obtenemos que

$$B(w) = -2i\sqrt{\pi}e^{-w^2/16}.$$

Por último

$$\hat{u}(w,t) = -2i\sqrt{\pi}e^{-w^2/16}sen(2wt).$$

Ahora se aplica la fórmula de inversión y se obtiene la solución

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{-2i\sqrt{\pi}e^{-w^2/16}sen(2wt)\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{-2i\sqrt{\pi}e^{-w^2/16}\left[\frac{e^{2iwt}-e^{-2iwt}}{2i}\right]\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\pi}e^{-w^2/16}e^{-iw(2t)} - \sqrt{\pi}e^{-w^2/16}e^{iw(2t)}\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\pi}e^{-w^2/16}\right\}_{x\to x-2t} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\pi}e^{-w^2/16}\right\}_{x\to x+2t} \\
&= 2e^{-4(x-2t)^2} - 2e^{-4(x+2t)^2}.
\end{aligned}$$

Esta función satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales y las condiciones impuestas en el problema.

Matemáticas.
Abril 2004

1. Enunciados

1.1. Primer ejercicio

1.1.1. Problema

Las series de Fourier tienen importantes aplicaciones en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Este ejercicio ilustra una de estas aplicaciones: las oscilaciones forzadas de un cuerpo de masa m suspendido de un resorte están determinadas por la ecuación

$$my'' + cy' + ky = r(t), \tag{1}$$

donde k es la constante de elasticidad del resorte, c la de amortiguamiento y $r(t)$ es una fuerza externa, siendo $y(t)$ la posición del cuerpo en el instante t medida desde la posición de equilibrio. El procedimiento de resolución consiste en desarrollar $r(t)$ en serie de Fourier (se supone que es una función 2π periódica) de forma que se obtenga

$$r(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)].$$

Se resuelve entonces

$$my'' + cy' + ky = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

mediante el procedimiento de ensayar soluciones de forma seno y coseno, obteniéndose una solución y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces se considera como posible solución

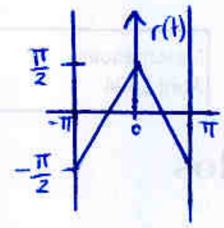
$$y(t) = \frac{y_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t). \tag{2}$$

Aplicar este procedimiento cuando $m = 1$, $c = 0{,}02$ y $k = 25$, siendo

$$r(t) := \begin{cases} t + \frac{\pi}{2}, & \text{si } -\pi < t < 0, \\ -t + \frac{\pi}{2}, & \text{si } 0 < t < \pi, \end{cases}$$

siendo $r(t)$ además una función 2π–periódica.

$$y'' + 0'02\,y' + 25y = r(t) \qquad r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases}$$



$$r(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt$$

por ser $r(t)$ una función par, sólo tendrá términos a_k

además su valor medio $\frac{a_0}{2} = 0$

$$r(t) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt \qquad k = 1, 2, \dots$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(t) \cos kt \, dt$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} r(t) \cos kt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos kt - t\cos kt \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \cos kt \, dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \cos kt \, dt$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen} kt}{k}\right]_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen} kt}{k}\cdot t\right]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} kt}{k}\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} kt}{k}\, dt = \frac{2}{k\pi}\left[\frac{\cos kt}{k}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left[\cos 0 - \cos k\pi\right] = \frac{2}{\pi k^2} - \frac{2}{\pi k^2}(-1)^k$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left(1 - (-1)^k\right) \qquad k = 1, 2, 3, \dots \qquad \boxed{= \begin{cases} \frac{4}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}}$$

además $a_0 = 0$

$$y'' + 0'02y' + 25y = \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \qquad r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)t$$

$$y'' + 0'02y' + 25y = \frac{4}{\pi n^2}\cos nt \qquad n = 1, 3, 5, \dots$$

conjetura:
$$y_n(t) = A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt$$
$$y_n'(t) = -nA_n \operatorname{sen} nt + nB_n \cos nt$$
$$y_n''(t) = -n^2 A_n \cos nt - n^2 B_n \operatorname{sen} nt$$

sustituyendo en la ecuación:

$$[-n^2 A_n + 0'02 nB_n + 25A_n]\cos nt + [-n^2 B_n - 0'02\, n A_n + 25 B_n]\operatorname{sen} nt = \frac{4}{\pi n^2}\cos nt$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\begin{cases} (1)\ A_n[25 - n^2] + [0'02n]B_n = \frac{4}{\pi n^2} \\ (2)\ A_n[-0'02n] + [25 - n^2]B_n = 0 \rightarrow \quad B_n = \frac{0'02\, n\, A_n}{25 - n^2} \end{cases}$$

sust en (1) $\quad A_n\left[25 - n^2 + \frac{(0'02n)^2}{25 - n^2}\right] = \frac{4}{\pi n^2} \rightarrow \quad A_n = \dfrac{\frac{4}{\pi n^2}}{25 - n^2 + \frac{(0'02n)^2}{25 - n^2}}$

1.1.2. Cuestiones

1. Se habrá obtenido en la solución del problema el desarrollo en serie de Fourier de la función $r(t)$. Estudiar la convergencia de este desarrollo.

2. ¿Cómo puede garantizarse que la serie (2) converge y, por tanto, define realmente una función $y(t)$? Sugerencia: estudiar la magnitud de los coeficientes que aparecen en cada una de las soluciones y_n.

3. ¿Cómo puede garantizarse que la serie (2) realmente satisface la ecuación diferencial (1)? Sugerencia: a partir de la cuestión 1 se conoce el tipo de convergencia de la serie (2) y de las series formales obtenidas derivando una y dos veces término a término. Aplicar ahora resultados conocidos (enunciarlos precisamente) de la teoría de series de funciones de variable real.

4. Calcular la amplitud de la solución y_n (son funciones oscilatorias) para los valores $n = 1, 3, 5, 7, 9$. Observar que es muy pequeña excepto para $n = 5$, con lo que aproximadamente la solución es oscilatoria con frecuencia cinco veces más que la de la excitación $r(t)$. Dar los detalles de este argumento.

Puntuación: problema=6, cuestiones=1+1+1+1.

$$\boxed{A_n = \frac{4\,(25-n^2)}{\pi n^2\left[(25-n^2)^2 + (0'02n)^2\right]} \qquad B_n = \frac{4\;0'02n}{\pi n^2\left[(25-n^2)^2+(0'02n)^2\right]}} \qquad n = 1,3,5..$$

llamamos $a = 25-n^2$, $b = 0'02n$ por simplicidad

$$A_n = \frac{4a}{\pi n^2[a^2+b^2]} \qquad B_n = \frac{4b}{\pi n^2[a^2+b^2]}$$

$$y_n = \frac{4a}{\pi n^2[a^2+b^2]}\cos nt + \frac{4b}{\pi n^2[a^2+b^2]}\operatorname{sen} nt$$

tomamos como solución:

$$y(t) = \frac{y_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \qquad y_0(t) = 0 \qquad (\text{recuerda que } a_0 = 0)$$

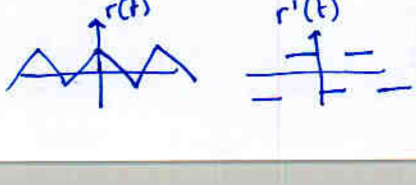
$$\boxed{y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}\cos nt + B_{2n-1}\operatorname{sen} nt}$$

Cuestiones

1. $\left.\begin{array}{l} r(t) \text{ continua} \\ r'(t) \text{ derivable a trozos} \end{array}\right\} \Rightarrow$ se puede derivar término a término

$\left.\begin{array}{l} r(t) \text{ continua} \\ r(t) \text{ derivable a trozos} \\ r'(t) \text{ continua a trozos} \end{array}\right\} \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} r(t)$ las sumas parciales de la serie de Fourier tienden uniformemente a $r(t)$

$\exists$ convergencia uniforme



2.

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_{2n-1}$$

para comprobar si converge a una función, debemos asegurar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{2n-1}^2 + B_{2n-1}^2 \right) \text{ converge} \quad (\text{identidad de Parseval})$$

$$A_{2n-1}^2 = \frac{16\, a^2}{\pi^2 n^4 [a^2+b^2]^2} \qquad B_{2n-1}^2 = \frac{16\, b^2}{\pi^2 n^4 [a^2+b^2]^2}$$

$$< \frac{16}{\pi^2 n^4} \text{ ya que } \frac{a^2}{[a^2+b^2]^2} \leq 1 \qquad < \frac{16}{\pi^2 n^4}$$

$$\frac{b^2}{[a^2+b^2]^2} \leq 1$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 n^4}$ converge ya que $\sum \frac{1}{n^p}$ converge $\forall p > 1$ $\Rightarrow \sum \frac{16}{\pi^2 (2n-1)^4}$ conv.

y $0 < A_{2n-1}^2 < \frac{16}{\pi^2 (2n-1)^4} \Rightarrow \sum A_{2n-1}^2$ converge

similarmente se puede deducir que $\sum B_{2n-1}^2$ converge

y por tanto $\sum \left(A_{2n-1}^2 + B_{2n-1}^2 \right)$ converge

$\Rightarrow$ es una serie de Fourier

Hubiera sido mas elegante por el criterio M de Weierstrass

$$\left| A_{2n-1}^2 + B_{2n-1}^2 \right| < \frac{32}{\pi^2 n^4} = \frac{K}{n^4} = M_n$$

como $\sum \frac{K}{n^4}$ conv $\xrightarrow[\text{criterio M de Weierstrass}]{} \sum A_{2n-1}^2 + B_{2n-1}^2$ converge uniformemente

3. De la cuestión anterior sabemos que $y_n = \sum A_{2n-1} \cos nt + B_{2n-1} \operatorname{sen} nt$ conv. uniformemente

$$y'_n = \sum -n A_{2n-1} \operatorname{sen} nt + n B_{2n-1} \cos nt$$

$(-n A_{2n-1})^2 < \frac{16}{\pi^2 n^2}$ como $\sum \frac{16}{\pi^2 n^2}$ conv $\xrightarrow[\text{criterio M}]{} y'_n$ conv uniformem.

$(+n B_{2n-1})^2 < \frac{16}{\pi^2 n^2}$

$$y''_n = \sum -n^2 A_{2n-1} \cos nt - n^2 B_{2n-1} \operatorname{sen} nt$$

$(-n^2 A_{2n-1})^2 = \frac{16}{\pi^2} \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} < \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$ como $\sum \frac{16}{\pi n^2}$ conv $\xrightarrow[\text{criterio M}]{} y''_n$ conv uniformem.

~~tanto y' como y'' verifican las condiciones de deriva~~

1.2. Segundo ejercicio

1.2.1. Problema

Calcular, si es posible, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}. \tag{3}$$

Sugerencia: integrar una cierta función de variable compleja alrededor de un circuito como el de la figura 1.

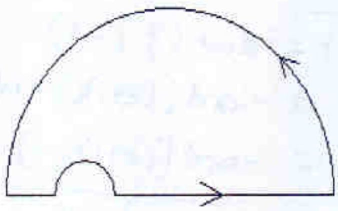


Figura 1: El circuito de integración

1.2.2. Cuestiones

1. Enunciar con todo detalle el Teorema del Residuo.
2. Dar un argumento de integración real impropia para discutir la convergencia o divergencia de la integral (3). En función de ello interpretar adecuadamente lo obtenido mediante técnicas de integración compleja en el problema.
3. Enunciar el teorema sobre desarrollos de Laurent. Calcular el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el punto -1 desde el primer término hasta el que contiene $(z+1)$.
4. Dar un argumento para asegurar que la integral a lo largo de la semicircunferencia "grande" de la figura tiende a cero cuando su radio tiende a $+\infty$.

Puntuación: problema=5, cuestiones=1+2+1+1.

tomamos la función $\quad f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2+2)}$

con singularidades en $\quad z=-1 \quad z=\pm i\sqrt{2}$

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{1}{(x+iy+1)(x^2-y^2+2)} = \frac{1}{x^3-y^2x+2x+x^2iy-iy^3+2iy+x^2-y^2+2}$$

$$= \frac{1}{(x^3-y^2x+2x+x^2-y^2+2)+i(x^2y-y^3+2y)}$$

derivable en todo $\mathbb{C}$ salvo en las singularidades

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})} \qquad \begin{array}{l} z_1=-1 \\ z_2 = i\sqrt{2} \\ z_3 = -i\sqrt{2} \end{array}$$

¿Que tipo de singularidades?

Para $z_1=-1$

$$\text{ord}(f, z_1) = \text{ord}(f,-1)$$
$$= -\text{ord}[(z+1)(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2}), -1]$$
$$= \underbrace{-\text{ord}[(z+1),-1]}_{\text{ord}=1} - \underbrace{\text{ord}[z-i\sqrt{2},-1]}_{(-1-i\sqrt{2})\neq 0} - \underbrace{\text{ord}[z+i\sqrt{2},-1]}_{\text{ord}=0}$$

ord = 0

en una serie de pot. así que no tiene term negativos. a_0 es el primero $\neq 0$

polo de orden 1 $\leftarrow$ $= -1$

$$\text{res}(f, z_1) = \qquad \text{sabiendo } f = a_{-1}(z+1)^{-1} + a_0 + a_1(z+1) + \dots$$

$$h(z) = f\cdot(z+1) = a_{-1} + a_0(z+1) + a_1(z+1)^2 + \dots$$

$$h(-1) = a_{-1}$$

$$h(z) = \frac{1}{(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})} = \frac{1}{(z^2+2)}$$

$$h(-1) = \frac{1}{1+2} = 1/3 = a_{-1} \;///$$

$$\text{res}(f, z_1) = 1/3 \;///$$

para $z_2 = i\sqrt{2}$

$$\text{ord}(f, z_2) = -\underbrace{\text{ord}[(z+1), i\sqrt{2}]}_{0} - \underbrace{\text{ord}[(z-i\sqrt{2}), i\sqrt{2}]}_{1} - \underbrace{\text{ord}[(z+i\sqrt{2}), i\sqrt{2}]}_{0}$$

$$= -1$$

polo de orden 1 $\leftarrow$

$$\text{res}(f, z_2) \cdot \quad h(z) = f\cdot(z-i\sqrt{2}) = a_{-1} + a_0(z-i\sqrt{2}) + a_1(\dots)^2$$

$$h(z) = \frac{1}{(z+1)(z+i\sqrt{2})}$$

$$h(i\sqrt{2}) = \frac{1}{(i\sqrt{2}+1)(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})} = \frac{1}{2i\sqrt{2}(i\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{1}{-4+2i\sqrt{2}} = \frac{-4-2i\sqrt{2}}{16+8} = \frac{-4-2i\sqrt{2}}{24}\cdot\frac{(\sqrt{2}/4)}{(\sqrt{2}/4)}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}-i}{6\sqrt{2}}$$

2. Soluciones

2.1. Primer ejercicio

2.1.1. Problema

La función $r(t)$ es obviamente par, y la extensión 2π–periódica es continua (ver la figura 2). La serie de Fourier asociada tiene sólo téminos en coseno,

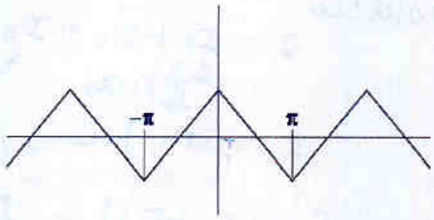


Figura 2: La función $r(t)$

y sus coeficientes se calculan fácilmente mediante integración por partes. Precisamente se obtiene

$$a_n := \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Por tanto, la serie de Fourier de $r(t)$ es

$$r(t) \approx \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t. \tag{4}$$

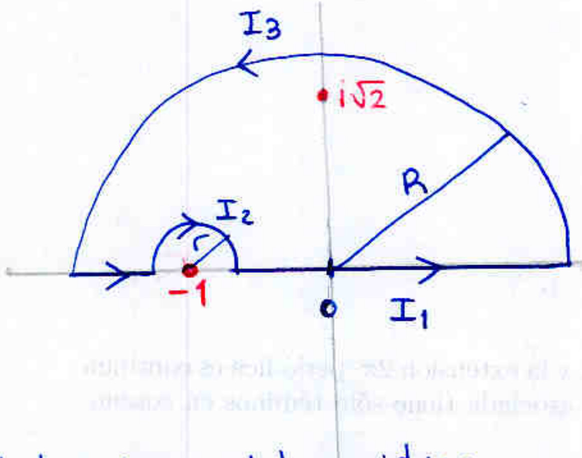
Se sabe que, al ser r continua y suave a trozos, la serie de Fourier converge a la función incluso uniformemente. Siguiendo las sugerencias del enunciado, se trata ahora de resolver la ecuación diferencial ordinaria lineal, de segundo orden, con coeficientes constantes y no homogénea,

$$y'' + 0{,}02y' + 25y = \frac{4}{\pi n^2} \cos nt, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{5}$$

Dada la forma del término independiente, se debe ensayar como solución particular una como

$$y_n(t) := A_n \cos nt + B_n \sin nt, \tag{6}$$

nos queda por tanto



cuando $R \to \infty$, $r \to 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \to I_1$

$I_3 \to 0$

podemos asegurar que $I_3 \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ sin mas que comprobar que

$|f(z)| \cdot |z^2| \leq M$

$\left|\frac{z^2}{(z+1)(z^2+2)}\right| = \frac{|z^2|}{|z^3+z^2+2z+2|} \leq 1$ a partir de cierto z, $|z| \to \infty$

en el semiplano superior

Por el teorema del residuo

$I = \underbrace{I_1}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} + I_2 + \underbrace{I_3}_{0}$

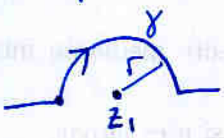
$I = +2\pi i\,[\mathrm{res}(f; i\sqrt{2})]$

sentido contrario a las agujas del reloj

sentido de $\gamma = e^{ix}$ $\alpha\,[0\to\pi]$ es positivo (es el sentido positivo para los ángulos)

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i\,[\mathrm{res}(f; i\sqrt{2})] - I_2$

Proposición



z_1 polo orden 1

$\int_\gamma f(z)\,dz \xrightarrow[r\to 0]{} -i\pi\,\mathrm{res}(f, z_1)$

va en sentido negativo para los angulos e^{ix} $[\alpha: \pi \to 0]$

$I_2 = -i\pi\,\mathrm{res}(f, -1)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = +2\pi i\,[\mathrm{res}(f; i\sqrt{2})] + i\pi\,[\mathrm{res}(f; -1)]$$

$$= +\pi i\,[+2\,\mathrm{res}(f; i\sqrt{2}) + \mathrm{res}(f; -1)]$$

$$= +\pi i\left[\frac{+2\sqrt{2} - 2i}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= +\pi i\left[\frac{-\sqrt{2} - 2i + 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\right] = \pi i\left(\frac{\cancel{\quad} + 2i}{6\sqrt{2}}\right)$$

$$= +\frac{2\pi}{6\sqrt{2}} = +\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$$

Cuestiones:

1. Teorema del residuo

. sea $f: D \to \mathbb{C}$ derivable salvo en singularidades z_i (finitas)

entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{i} \mathrm{res}(f, z_i)\,\mathrm{Ind}(z_i)$

de los apuntes:

Teorema del residuo:

sea G conjunto abierto estrellado

sea α una trayectoria suave a trozos cerrada $\alpha \subset G$

sea $f: G\setminus F \to \mathbb{C}$ derivable $F = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset G\setminus\alpha$ (puntos donde no es derivable)

$$\Rightarrow \int_\alpha f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j)\,\mathrm{Ind}(\alpha, z_j)$$

donde A_n y B_n son constantes a determinar. Llevando la expresión de y_n a la ecuación (5) se obtiene inmediatamente, denotando $a := (25-n^2)$, $b := 0{,}02n$,

$$A_n = \frac{4a}{\pi n^2(a^2+b^2)}, \quad B_n = \frac{4b}{\pi n^2(a^2+b^2)}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{7}$$

Siguiendo con las sugerencias del enunciado se considera una posible solución

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{2n-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{2n-1}\cos(2n-1)t + B_{2n-1}\sin(2n-1)t]\,. \tag{8}$$

En las cuestiones que se tratan más adelante se discute la convergencia de esta serie y la validez de la solución dada como su suma.

2.1.2. Cuestiones

1. Como se ha dicho antes, la extensión 2π–periódica de la función $r(t)$ es continua, y la función resultante es suave a trozos. Por tanto, la serie de Fourier asociada a $r(t)$ y dada por la expresión (4) es convergente a la función $r(t)$, incluso uniformemente.

2. Observar ahora la solución dada como suma de una serie en (8). La expresión de los coeficientes, dada en (7), permite acotarlos. Precisamente se obtiene

$$|A_n| \le \frac{K}{n^4}, \ |B_n| \le \frac{K}{n^5}, \ n \in I\!N, \ n \text{ impar}. \tag{9}$$

   Como $|\sin| \le 1$ y $|\cos| \le 1$, usando las acotaciones (9) y dado que la serie numérica $\sum \frac{1}{n^4}$ es convergente, se puede aplicar el criterio M de Weierstrass para concluir que la serie (8) es uniformemente convergente.

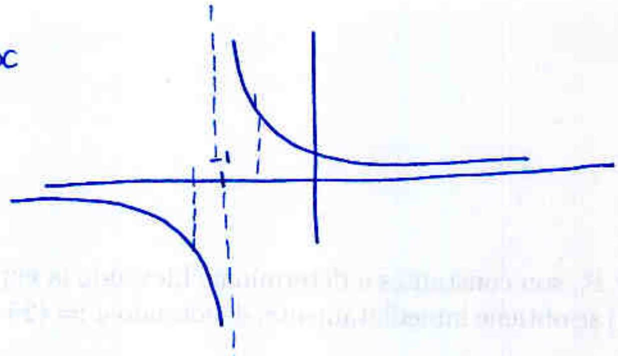
3. La serie obtenida derivando formalmente (término a término) la serie (8) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-(2n-1)A_n\sin(2n-1)t + (2n-1)B_n\cos(2n-1)t]$$

   y, de nuevo derivando formalmente se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-(2n-1)^2 A_n\cos(2n-1)t - (2n-1)^2 B_n\sin(2n-1)t\right].$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,dx$$



separamos la integral en

$$I = \underbrace{\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,dx}_{I_2} + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,dx}_{I_3}$$

comparando I_1 con $\frac{1}{x^2+2}$: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2+2}} = \frac{1}{(x+1)} = 0$

como $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2}\,dx$ es convergente $\xRightarrow[\text{comp}]{}$ I_1 es conv.

$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2+2}\,dx$ es conv $\xRightarrow[\text{comp}]{}$ I_3 es conv.

<u>Respecto a I_2</u>

comparando con $\frac{1}{x^2+2}$: no sirve, hay que comparar con algo que tenga singularidad en -1

$\lim_{x\to -}$

$\frac{1}{x+1}$ $\quad \lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{\frac{1}{x+1}} = \lim \frac{1}{(x^2+2)} = \frac{1}{3}$

se comportan igual

como $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x+1}\,dx$ diverge ($p \le 1$) $\Rightarrow \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ diverge !!

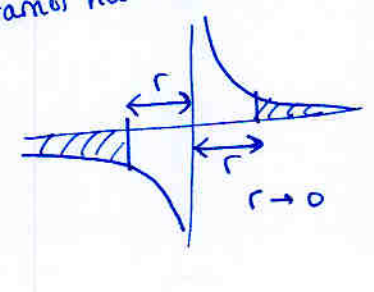
el resultado obtenido no es coherente con la teoría de integración real impropia

el termino $\int_{-1-r}^{-1+r}$

nosotros hemos hecho

$$\lim_{r\to 0} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{-1-r} f(x)\,dx}_{\text{conv}} + \cancel{\int_{-1-r}^{-1+r} f(x)\,dx} + \underbrace{\int_{-1+r}^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{conv}} \right]$$

es decir estamos haciendolo de una forma simétrica en la que se van anulando zonas conforme $r \to 0$



en la Tª de integración real impropia no se consideran estas técnicas

Observar que ambas son uniformemente convergentes, aplicando de nuevo el criterio M de Weierstrass, teniendo en cuenta que la serie numérica $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente. Por tanto, se sabe, por la teoría de series de funciones, que $y(t)$ es dos veces derivable, siendo

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-(2n-1)A_n \sin(2n-1)t + (2n-1)B_n \cos(2n-1)t],$$

y también

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(2n-1)^2 A_n \cos(2n-1)t - (2n-1)^2 B_n \sin(2n-1)t\right].$$

Así, la función $y(t)$ dada en (8) representa de verdad la solución, pues verifica la ecuación diferencial (1).

4. Las funciones $y_n(t)$ están dadas en (6). Son combinaciones lineales de senos y cosenos. Es inmediato que el máximo del valor absoluto de esta función (es decir, su amplitud) tiene como valor $AMP_n := \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$. Se toman varios valores para n: se obtiene

n	1	3	5	7	9
AMP_n	$5{,}31 * 10^{-2}$	$8{,}84 * 10^{-3}$	0,51	$1{,}08 * 10^{-3}$	$2{,}81 * 10^{-4}$

Los valores siguientes son cada vez más pequeños. Resulta que la amplitud de la solución es prácticamente la de y_5, es decir, 0,51. La frecuencia de oscilación del movimiento resultante es, por la misma razón, prácticamente la de y_5, es decir, cinco veces mayor que la de $r(t)$.

2.2. Segundo ejercicio

2.2.1. Problema

La función

$$f(z) := \frac{1}{(z+1)(z^2+2)}$$

tiene tres polos, precisamente en $z_1 = -1$, $z_2 = \sqrt{2}i$, $z_3 := -\sqrt{2}i$. Denotamos como γ el circuito de la figura 1, recorrido en sentido positivo y de forma que rodee al punto z_2, como γ_2 la semicircunferencia superior de radio R y como

3. Sea $f: D'(z_0; R) \to \mathbb{C}$ derivable siendo D' un disco agujereado

entonces f se puede escribir como
$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$$

calcular el desarollo de $f(z)$ en -1 desde el 1er término hasta el de $(z+1)$

$$\text{ord}(f, -1) = -1$$

$$f(z) \simeq \frac{a_{-1}}{(z+1)} + a_0 + a_1(z+1) + \dots$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(-1,r)} \frac{f(z)}{(z+1)^{k+1}} dz} \qquad \left(a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\right)$$

(es lógico, ya que el resultado de la integral es siempre $2\pi i$ por el coef de $(z-z_0)^{-1}$)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(-1,r)} \frac{f(z)}{(z+1)} dz$$

$$\gamma: e^{\alpha i} \quad \alpha \in [0, 2\pi] \qquad \gamma' = i e^{\alpha i}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(-1,r)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(-1,r)} \frac{1}{(z+1)(z^2+2)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{i e^{\alpha i}}{(e^{\alpha i}+1)(e^{2\alpha i}+2)} d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi}$$

mejor otro método

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z+1)} + a_0 + a_1(z+1) + \dots$$

$$h(z) = f(z)\cdot(z+1) = a_{-1} + a_0(z+1) + a_1(z+1)^2 + \dots = \frac{1}{z^2+2}$$

$$h(-1) = a_{-1} \qquad h(-1) = \frac{1}{1^2+2} = \frac{1}{3} \,//$$

$$h'(z) = a_0 + 2a_1(z+1) + \dots = -1 \cdot 2z \cdot \frac{1}{(z^2+2)^2}$$

$$h'(-1) = a_0 = \frac{-2(-1)}{(1^2+2)^2} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \,//$$

$$h''(z) = 2a_1 + \dots = -2\frac{1}{(z^2+2)^2} - 2z(-2)2z\frac{1}{(z^2+2)^3}$$

$$= \frac{-2}{(z^2+2)^2} + \frac{8z^2}{(z^2+2)^3}$$

$$a_1 = \frac{h''(-1)}{2} = \frac{\frac{-2}{(1^2+2)^2} + \frac{8(-1)^2}{(1^2+2)^3}}{2} = \frac{\frac{-2}{9} + \frac{8}{9}}{2} = \frac{6/9}{2} = 3/9 = 1/3 \,//$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1/3}{(z+1)} + 1/3 + 1/3(z+1) + \dots$$

$$\left|\frac{1}{(z+1)(z^2+2)}\right| \underset{|z|\to\infty}{\overset{\text{cuando}}{<}} \frac{1}{|z|^3} = \frac{1}{R^3}$$

4. $$\int_{\gamma_3} f(z)dz \le M \cdot L(\gamma_3) \qquad |f(z)| < M \qquad L(\gamma_3) = \pi R^2$$

luego $$\int_{\gamma_3} f(z) dz \underset{R\to\infty}{\le} \frac{1}{R^3}\cdot \pi R^2 = \frac{\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

γ_1 la pequeña semicircunferencia de radio r centrada en z_1, recorridos en el sentido dado por γ. Se sabe, por el Teorema del Residuo, que

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, z_2).$$

Ahora bien,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{-R}^{-1-r} f(x)dx + \int_{-1+r}^{R} f(x)dx.$$

Si se consigue probar que cuando $R \to +\infty$, entonces $\int_{\gamma_1} f(z)dz \to I_1 = 0$, y que cuando $r \to 0$ se tiene $\int_{\gamma_2} f(z)dz \to I_2$ resultará $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \to 2\pi i \operatorname{res}(f, z_2) - I_2$. El cálculo del residuo en $z_1 = -1$ y $z_2 = \sqrt{2}i$ es sencillo, pues ambos polos son de orden 1. Se obtiene, inmediatamente,

$$\operatorname{res}(f, z_1) = 1/3, \quad \operatorname{res}(f, z_2) = \frac{-\sqrt{2} - i}{6\sqrt{2}}.$$

Para calcular $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ se hace uso de un resultado conocido sobre la integración a los largo de pequeños arcos centrados en polos de orden 1. Se obtiene $\int_{\gamma_1} f(z)dz = -\pi\ i \operatorname{res}(f, z_1) = -\pi\ i/3$ (el signo menos es debido a que γ_1 está recorrida en el sentido ~~contrario a~~ de las agujas del reloj). La razón por la que $\int_{\gamma_2} f(z)dz \to 0$ cuando $R \to +\infty$ es que $|f(z)z^2|$ está acotada en el semiplano superior cuando $|z| \to +\infty$. Se obtiene, finalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}. \tag{10}$$

2.2.2. Cuestiones

1.

2. Observar que, para $|x|$ suficientemente grande, $|x^3+x^2+2x+2| \geq 2|x^3|$, luego $|f(x)| \leq (2|x|^3)^{-1}$. Esta última función da una integral impropia convergente en $[K, \infty[$ y en $]-\infty, -K]$, para $K > 2$, por ejemplo, como es inmediato observar calculando una primitiva, luego por el criterio de comparación existen las integrales $\int_{-\infty}^{-K} f(x)dx$ y $\int_K^{+\infty} f(x)dx$. Cuando se trata de calcular $\int_{-K}^{K} f(x)dx$ nos encontramos con una sorpresa: *esta*

integral no es convergente, y ello se debe a la singularidad existente en -1. Esto puede observarse si se compara la función cerca de -1 con la función $1/(x+1)$, que da una integral divergente en $]-1,0[$ y en $[-2,-1[$. Entonces, ¿cuál es el sentido del cálculo realizado antes, cálculo que da como valor el expresado en (10)? La respuesta está contenida en el método que se ha usado para evaluar la integral en el problema: lo que realmente tenemos es

$$\lim_{R\to+\infty, r\to 0+} \int_{-R}^{-1-r} f(x)dx + \lim_{R\to+\infty, r\to 0+} \int_{-1+r}^{R} f(x)dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

valor que tiene sentido al observar el tipo de gráfica de f:

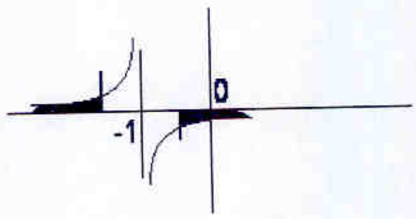


Figura 3: La función $f(x)$

3. Se sabe que el orden del polo de f en $z=-1$ es 1, luego

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+1)(z^2+2)} = \\ &= a_{-1}(z+1)^{-1} + a_0 + a_1(z+1) + a_2(z+1)^2 + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Para encontrar los coeficientes se puede multiplicar a ambos lados de (11) por $(z+1)$, de forma que se obtiene

$$g(z) := \frac{1}{z^2+2} = a_{-1} + a_0(z+1) + a_1(z+1)^2 + a_2(z+1)^3 + \dots,$$

con la ventaja de que ahora g es una función derivable en un entorno de $z=-1$. Así, sus coeficientes se obtienen por derivación, es decir, $a_{n-1} = g^{(n)}(-1)/(n!)$, $n = 0,1,2,,\dots$. Resulta inmediatamente

$$a_{-1} = \frac{1}{3},\ a_0 = \frac{1}{3^2},\ a_1 = \frac{-4{,}3^{-3} - 3^{-2}}{2}, \dots$$

4. Observar que

$$\left|\frac{1}{(z+1)(z^2+2)}\right| \leq \frac{1}{(R-1)(R^2-2)}$$

para $R > 2$. Por tanto,

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \frac{1}{(R-1)(R^2-2)}\pi R.$$

Así, cuando $R \to +\infty$ la integral tiende a cero.

Examen de Matemáticas
Enero 2004

1 Enunciados

1.1 Primer ejercicio

El ejercicio considera distintas funciones de variable compleja y formula diversas cuestiones (acerca de su posible carácter derivable, por ejemplo). El alumno deberá dar una explicación suficiente de las respuestas proporcionadas, no limitándose simplemente a decir "si" o "no".

1. Sea $f(z) := \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

   (a) Calcular $\int_{C(0;r)} f(z)\, dz$, donde $C(0,r)$ es la circunferencia de centro 0 y radio r recorrida en sentido positivo.

   (b) A la vista del resultado anterior y del Teorema de la Integral de Cauchy, ¿qué se puede decir sobre la derivabilidad de f en $\mathbb{C}$? Formular correctamente el Teorema de la Integral de Cauchy.

   (c) Se habrá observado que f no es derivable en $\mathbb{C}$. Esto hubiera sido posible saberlo sin calcular la integral. ¿Cuál es un argumento alternativo?

   (d) ¿Se hubiera podido obtener el resultado observando las curvas $u = cte$, $v = cte$ (siendo u la parte real de f y v su parte imaginaria)?

   (e) ¿Es f desarrollable en serie de potencias en alguna bola abierta de radio positivo?

2. Sea $g(z) := |z| + i|z|$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Suponer por un momento que g fuera derivable en $B(0;1)$, la bola abierta de centro cero y radio 1. Considerar la función $G(z) := 1 - g(z)$ en ese mismo conjunto. Mediante el cálculo de su módulo y usando el Teorema del Módulo Máximo, llegar a una contradicción, lo que prueba que g no es derivable en la bola considerada. Dar los detalles de este argumento y enunciar precisamente el Teorema del Módulo Máximo.

(b) ¿Es g derivable en algún punto de $\mathbb{C}$?

3. (a) Definir lo que se entiende como una función armónica. Probar que las partes real e imaginaria de cualquier función derivable de variable compleja son funciones armónicas.

   (b) Como aplicación, considerar $h(z) := |z|^2 + i|z|^2$, $z \in \mathbb{C}$. ¿Es h derivable en algún punto de $\mathbb{C}$?

4. Sea la función $u(x,y) := x + y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Comprobar que es una función armónica en todo el plano.

   (b) Se sabe que entonces es la parte real de una función derivable $F(z)$. Obtener la función F ([1]) ¿Qué tipo de transformación geométrica realiza la función F?

Puntuación:
3 (=0.5+1+0.5+0.5+0.5), 2.5 (=1.5+1), 2.5 (=1.5+1), 2 (=0.5+1.5).

1.2 Segundo ejercicio

Resolver el siguiente problema.

$$\begin{aligned} u_{tt} = c^2 u_{xx} + A\sinh(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,& \\ u(x,0) = 0,& \\ u_t(x,0) = 0,& \\ u(0,t) = h,& \\ u(l,t) = k.& \end{aligned}$$

[1] La función F se puede calcular de diversos modos. Uno de ellos consiste en obtener la familia de las curvas $u = cte$ y una familia ortogonal. Hacerlo de este modo y también mediante el cálculo de la conjugada armónica resolviendo unas sencillas ecuaciones en derivadas parciales.

donde h y k son constantes.

Calcular $u(x,t)$ ([2])

2 Soluciones

2.1 Primer ejercicio

1. (a) Una parametrización de la curva es $\phi(z) := re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces $\int_{C(0,r)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} re^{-it}ire^{it}dt = 2\pi ir^2$.

   (b) Como la integral no es cero, la función f no es derivable compleja, en virtud del Teorema de Cauchy.

   (c) Un argumento alternativo consiste en comprobar si se satisfacen o no las dos condiciones siguientes: si $f = u + iv$, entonces las dos funciones reales de dos variables u y v deben ser diferenciables y deben verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Observar que $u(x,y) = x$, mientras que $v(x,y) = -y$. Son funciones diferenciables en cualquier punto. Sin embargo, $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, mientras que $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, por lo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se verifican en ningún punto, y así f no es derivable, como función compleja, en ningún punto.

   (d) Las curvas $u = cte$ son rectas verticales, mientras que las curvas $v = cte$ son rectas horizontales. Forman dos familias mutuamente ortogonales, luego de esta forma no se podría haber concluído que la función f no es derivable. Sólo en el caso de que las dos familias no hubieran resultado mutuamente ortogonales se hubiera podido decir con este procedimiento que la función f no era derivable, ya que las familias de curvas $u = cte$ y $v = cte$, en el caso de una función derivable compleja, son mutuamente ortogonales.

   (e) Si f fuera desarrollable en serie de potencias en alguna bola abierta de radio positivo, en esa bola sería derivable. Sin embargo, f no es derivable en ningún punto.

2. (a) Si la función g fuera derivable en esa bola, también lo sería la función $G(z) = (1 - |z|) - i|z|$. El cuadrado de su módulo es,

[2] La solución puede dejarse indicada. Sugerencia: Escribir la solución de la forma $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$

obviamente, $(1-|z|)^2+|z|^2 = 1+2|z|^2-2|z|$. Es inmediato que esta función real de dos variables reales, definida y continua en la bola cerrada $\overline{B}(0;1)$, alcanza el mínimo (con valor $1/2$) en esa bola en los puntos z de módulo $1/2$. Observar que, por este mismo cálculo, G no se anula en esa bola, luego se puede considerar la función $1/G$, que también sería derivable si G lo fuera. Pero se ha visto que $|1/G|$ alcanza el máximo en la bola en los puntos de módulo $1/2$, luego $1/G$ no satisface el Principio del Módulo Máximo, llegándose a una contradicción.

(b) En este caso, si $g = u + iv$, se tiene $u(x,y) = v(x,y) = |z| = +\sqrt{x^2+y^2}$. Veremos que g no es derivable como función compleja en ningún punto. Para ello, observar que $u = v$ posee derivadas parciales en cualquier punto $(x,y) \neq (0,0)$. Si se verificaran las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $(x,y) \neq (0,0)$, se tendría $+(x^2+y^2)^{-1/2}x = +(x^2+y^2)^{-1/2}y$, y, por otra parte, $+(x^2+y^2)^{-1/2}x = -(x^2+y^2)^{-1/2}y$, lo que es imposible. En $(0,0)$ las funciones u y v no son diferenciables como funciones de dos variables reales, pues no tienen derivadas parciales. Se concluye que g no es derivable como función compleja en ningún punto.

3. (a)

(b) Si $h = u + iv$ entonces $u(x,y) = x^2+y^2$, que no es armónica, pues $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$ en cualquier punto. Así, en cualquier bola abierta es imposible que h sea derivable, pues entonces u y v serían armónicas en esa bola. Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann también se puede observar inmediatamente que h es derivable sólo en 0.

4. Se trata de encontrar una función $F(z)$ de variable compleja tal que si $F = u + iv$, donde u es su parte real y v su parte imaginaria, entonces $u(x,y) = x + y$. Ello es posible, pues u es obviamente una función armónica (en todo el plano). Si v denota la conjugada armónica, se debe verificar $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, por lo que $v(x,y) = y + k(x)$, para cierta función $k(x)$. Entonces, derivando v respecto de x, se tiene $k'(x) = -1$, por lo que una posible función k es $k(x) := -x$, y entonces $v(x,y) = -x + y$. Así, una posible función F es $F(z) = (x+y) + i(-x+y)$, es decir, $F(z) = (1-i)z$, y F es, simplemente, el producto por el número complejo $(1-i)$, que representa un giro de

ángulo $-\pi/4$ y una homotecia de razón $\sqrt{2}$. Una forma alternativa de encontrar F consiste en observar que la familia $u = cte$ está formada por todas las rectas $x+y = c$, donde c es una constante real. La familia ortogonal está dada por todas las rectas $-x+y = c$, c una constante real, como se puede observar haciendo una representación gráfica.

2.2 Segundo ejercicio

Se trata de una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden y no homogénea. Como sugiere el propio enunciado, sea

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) \tag{1}$$

la solución del problema.

Entonces $u_t = v_t$, $u_{tt} = v_{tt}$, $u_x = v_x + w'$, $u_{xx} = v_{xx} + w''$. Sustituyendo en la ecuación resulta

$$v_{tt} = c^2[v_{xx} + w''(x)] + A\sinh(x).$$

Para convertir la EDP en una homogénea, suponemos que $w(x)$ es la solución de la EDO

$$c^2 w(x)'' + A\sinh(x) = 0. \tag{2}$$

Entonces, resulta que v satisface la EDP homogénea

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}. \tag{3}$$

Las condiciones iniciales y de frontera toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u(x,0) = v(x,0) + w(x) = 0,\\ u_t(x,0) = v_t(x,0) = 0,\\ u(0,t) = v(0,y) + w(0) = h,\\ u(l,t) = v(l,t) + w(l) = k. \end{aligned}$$

Suponemos pues que $w(x)$ es solución de (2) con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} w(0) = h,\\ w(l) = k. \end{aligned}$$

La solución de (2) proporciona

$$w(x) = \frac{-A}{c^2}\sinh(x) + Bx + C,$$

donde B y C constantes arbitrarias. Notar que

$$w(0) = C = h,$$

$$w(l) = \frac{-A}{c^2}\sinh(l) + Bl + h = k,$$

de donde

$$B = \frac{1}{l}\left(\frac{A}{c^2}\sinh(l) + k - h\right).$$

Por tanto

$$w(x) = \frac{-A}{c^2}\sinh(x) + \left(\frac{A}{c^2}\sinh(l) + k - h.\right)\frac{x}{l} + h \tag{4}$$

Con las condiciones adoptadas para w resulta que $v(x,t)$ satisface el siguiente problema:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx}, \\ v(x,0) &= -w(x), \\ v_t(x,0) &= 0, \\ v(0,t) &= 0, \\ v(l,t) &= 0. \end{aligned}$$

Se utiliza ahora el Método de Separación de Variables. Sea $v(x,t) = X(x)T(t)$. Obtenemos, para una cierta constante de separación λ,

$$X'' - \lambda X = 0, \tag{5}$$
$$T'' - \lambda c^2 T = 0. \tag{6}$$

Haciendo uso de las condiciones dadas, se tiene, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} v(0,t) &= X(0)T(t) = 0, \\ v(l,t) &= X(l)T(t) = 0, \end{aligned}$$

luego, si se quiere evitar la solución nula, necesariamente $X(0) = X(l) = 0$. Se trata de resolver la siguiente ecuación para distintos valores de λ:

$$X'' - \lambda X = 0,$$
$$X(0) = 0,$$
$$X(l) = 0.$$

Caso $\lambda = 0$. La solución general es $X(x) = A + Bx$. Aplicando las condiciones de frontera obtenemos $A = B = 0$, luego $X(x) = 0$ para todo x, lo que no es aceptable.

Caso $\lambda > 0$. La solución general en este caso es de la forma

$$X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x},$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Sustituyendo las condiciones de frontera tenemos $A + B = 0$, $Ae^{-\sqrt{\lambda}l} + Be^{\sqrt{\lambda}l} = 0$. Vemos que el determinante del sistema es diferente de cero, por lo cual A y B deben ser ambos cero y se obtiene de nuevo la solución idénticamente nula.

Caso $\lambda < 0$. En este caso la solución general es de la forma

$$X(x) = Acos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x.$$

De la condición $X(0) = 0$ resulta $A = 0$. La condición $X(l) = 0$ da

$$B\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$$

Para no obtener la solución trivial, se debe verificar $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$. Por tanto

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

luego

$$-\lambda = (n\pi/l)^2,\ n = 1, 2, \ldots$$

La solución del problema es, pues,

$$X_n(x) = B_n\sin(n\pi x)/l$$

Resolviendo la ecuación (6), obtenemos

$$T_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{l}t$$

donde C_n y D_n son constantes. Obsérvese que $v_t(x,t) = X(x).T'(t)$ y así $v_t(x,0) = X(x).T'(0) = 0$ para todo x, por lo que $T'(0) = 0$. Se obtiene, entonces, que $D_n = 0$, y entonces

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi c}{l} t.$$

Combinando ambos resultados en la función v se obtiene la sucesión de soluciones

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right).\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Como la ecuación (3) es lineal y homogénea, por el principio de superposición se ensaya una solución

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

aplicando la condición inicial

$$v(x,0) = -w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Así

$$a_n = -\frac{2}{l}\int_0^l w(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

Por tanto

$$v(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l w(\xi) \sin \frac{n\pi}{l}\xi d\xi\right] \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \tag{7}$$

La solución buscada es, por tanto,

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x),$$

donde las funciones v y w están descritas arriba en las fórmulas (7) y (4), respectivamente.

Examen de Matemáticas
Enero 2004

1 Enunciados

1.1 Primer ejercicio

El ejercicio considera distintas funciones de variable compleja y formula diversas cuestiones (acerca de su posible carácter derivable, por ejemplo). El alumno deberá dar una explicación suficiente de las respuestas proporcionadas, no limitándose simplemente a decir "si" o "no".

1. Sea $f(z) := \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

   (a) Calcular $\int_{C(0;r)} f(z)\, dz$, donde $C(0,r)$ es la circunferencia de centro 0 y radio r recorrida en sentido positivo.

   (b) A la vista del resultado anterior y del Teorema de la Integral de Cauchy, ¿qué se puede decir sobre la derivabilidad de f en $\mathbb{C}$? Formular correctamente el Teorema de la Integral de Cauchy.

   (c) Se habrá observado que f no es derivable en $\mathbb{C}$. Esto hubiera sido posible saberlo sin calcular la integral. ¿Cuál es un argumento alternativo?

   (d) ¿Se hubiera podido obtener el resultado observando las curvas $u = cte$, $v = cte$ (siendo u la parte real de f y v su parte imaginaria)?

   (e) ¿Es f desarrollable en serie de potencias en alguna bola abierta de radio positivo?

2. Sea $g(z) := |z| + i|z|$, $z \in \mathbb{C}$.

Examen de Matemáticas Enero 2004

Primer Ejercicio

Sea $f(z) = \overline{z}$

1\.

(a) Calcular $\oint_{C(0;r)} f(z)\,dz$

se calcula como

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = \int_a^b f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$$\varphi(t) = r\cdot e^{it} \quad t\in[0,2\pi]$$

$$\varphi'(t) = r\cdot i\cdot e^{it}$$

$$f[\varphi(t)] = \overline{[r\cdot e^{it}]} = r\cdot e^{-it}$$

$$= ir^2\int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-it}\cdot e^{it}}_{1}\,dt = 2\pi i r^2$$

(b) Teorema de Cauchy

sea f: conjunto estrellado $\to \mathbb{C}$

f derivable $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ y f tiene primitiva

siendo γ una trayectoria cerrada y derivable a trozos.

Del teorema de Cauchy se puede deducir que $f(z) = \overline{z}$ no es derivable.

(c) No cumple las ecuaciones de Cauchy Riemann

$u = x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \to 1 \neq -1$

$v = -y$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \to 0 = 0$

Teorema de Riemann

f derivable $\overset{CR}{\Leftrightarrow}$ diferenciable

y, aunque es diferenciable, no cumple CR

$\Rightarrow$ no es derivable (en ningun punto)

(d) f derivable, $f = u+iv$ $\Rightarrow$ $u = cte \perp v = cte$

como $x = cte \perp -y = cte$ no se puede afirmar nada

(e) no es derivable en ningun punto $\Rightarrow$ no es serie de potencias en ningun punto

2. $g(z) := |z| + i|z|$

(a) considerar $G(z) = (1 - |z|) + i(-|z|)$ en $B(0;1)$

$G(z) = 1 - g(z)$

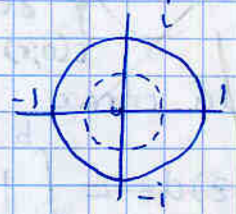
$$|G(z)|^2 = (1-|z|)^2 + |z|^2$$

$$= 1 - 2|z| + |z|^2 + |z|^2$$

$$= 2|z|^2 - 2|z| + 1$$

$$= \cancel{(\ldots)(\ldots)}$$

$$= 2\underbrace{\left(\underbrace{|z|^2 - |z|}_{\leq 0} + 1/2\right)}_{\leq 1/2}$$



tiene ~~el~~ un máximo en cero

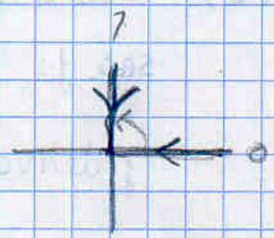
$\Rightarrow$ no está en la frontera

Teorema del módulo máximo:

f derivable
f no constante $\Rightarrow$ no existe maximo local
$\equiv$ alcanza su maximo en la frontera

(b) Ecuaciones de CR

$u = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$
$v = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

multiplicando por $\sqrt{x^2+y^2}$, ya que el caso $x=0$, $y=0$ no es derivable, no lo consideramos. En $(0,0)$ no son diferenciables

$$\begin{matrix} x = y \\ x = -y \end{matrix} \longrightarrow y = -y$$

las ecuaciones de CR no se cumplen en ningun punto

$\Rightarrow$ no es derivable en ningun punto

3. (a) f armonica $f(x,y)$ $\iff$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

sea $f = u+iv = u(x,y)+iv(x,y)$

C.R.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \xrightarrow{\text{derivando otra vez}} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

sumando ambas $\rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

~~restando ambas~~:

~~sumando~~ restando

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad \longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=0$$

(b) $h(z)=|z|^2+i|z|^2$

$u=|z|^2=x^2+y^2$

$v=|z|^2=x^2+y^2$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2+2\neq 0$ ni u ni v son armónicas en ningun punto

$\Rightarrow$ h no es derivable en ninguna ~~punto~~ bola abierta

por CR $\Rightarrow$ sólo derivable en $(0,0)$

4. $u(x,y):=x+y \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

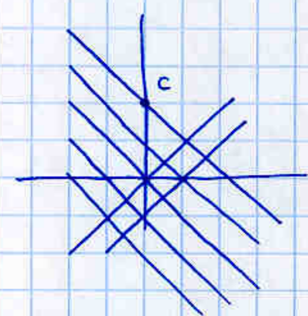
(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ en todo $\mathbb{R}^2$

(b) Buscamos $F(z)=u+iv$ sabiendo $u=x+y$
F derivable

Teorema: F derivable $\Rightarrow$ $u=cte \perp v=cte$

$u=cte$

$x+y=c \rightarrow y=-x+c$



familia ortogonal

$y=x+c$

$y-x=c$

$F(z)=(x+y)+i(y-x)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=1$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-1$ ✓

otra forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$0 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$v = y + k(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$1 = 1 \qquad k'(x) = -1$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -1 \rightarrow k(x) = -x$$

$$\Rightarrow v = y - x$$

$$F = x + y + i(y - x)$$

$$x - ix + y + iy$$

$$x = \mathrm{Re}(z)$$
$$y = \mathrm{Im}(z)$$

$$= x + iy - ix + y$$

$$= z - iz$$

$$= z(1-i)$$

F multiplica por el numero complejo $1-i$

- homotecia $|1-i| = \sqrt{2}$
- giro $\arg_\pi(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

Segundo ejercicio:

Resolver $$u_{tt} = c^2 u_{xx} + A\sinh(x) \qquad 0 < x < l \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$
$$u(0,t) = h$$
$$u(l,t) = k$$

sabiendo $u(x,t) = V(x,t) + w(x)$

h y k son constantes

el término no homogéneo depende de una sola de las variables

$$\text{C.V.} \quad v(x,t) = u(x,t) - w(x)$$

$$V = u - w$$
$$V_t = u_t$$
$$V_{tt} = u_{tt} \rightarrow u_{tt} = V_{tt}$$
$$V_x = u_x - w'$$
$$V_{xx} = u_{xx} - w'' \rightarrow u_{xx} = V_{xx} + w''$$

la ec. queda

$$V_{tt} = c^2(V_{xx} + w'') + A\sinh(x)$$

$$\boxed{V_{tt} = c^2 V_{xx} + c^2 w'' + A\sinh(x)}$$

$u(0,t) = v(0,t) + w(0) = h$

$u(l,t) = v(l,t) + w(l) = k$

exigimos $$c^2 w'' = -A\sinh(x)$$

$$w'' = -\frac{A}{c^2}\sinh(x)$$

$$w'' = -\frac{A}{c^2}\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$w'' = -\frac{A}{2c^2}e^x + \frac{A}{2c^2}e^{-x}$$

$$w' = -\frac{A}{2c^2}e^x - \frac{A}{2c^2}e^{-x} + M$$

$$w = -\frac{A}{2c^2}e^x + \frac{A}{2c^2}e^{-x} + Mx + N$$

exigiendo $\boxed{w(0) = h}$

$$-\frac{A}{2c^2} + \frac{A}{2c^2} + N = h \Rightarrow N = h$$

$\boxed{w(l) = k}$

$$-\frac{A}{c^2}\sinh(l) + h + Ml = k \Rightarrow M = \frac{k + \frac{A}{c^2}\sinh(l) - h}{l}$$

$$w(x) = -\frac{A}{c^2}\sinh(x) + \frac{k + \frac{A}{c^2}\sinh(l) - h}{l}x + h$$

nos queda:

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} \\ v(x,0) = -w(x) \\ v_t(x,0) = 0 \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow u(x,0) = 0$
$\hookrightarrow v(x,0) + w(x) = 0$
$\rightarrow u_t(x,0) = 0$
$\hookrightarrow v_t(x,0) = 0$
$u(0,t) = h$
$\hookrightarrow v(0,t) + w(0) = h$
$\hookrightarrow v(0,t) = 0$
$u(l,t) = k$
$\hookrightarrow v(l,t) = 0$

Lo podemos resolver por separación de variables

supongamos $v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$v_t = XT'$ $\qquad v_x = X'T$
$v_{tt} = XT''$ $\qquad v_{xx} = X''T$

$$XT'' = c^2 X''T$$

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow \text{valores propios}$$

$\cancel{T'' - \lambda T = 0 \quad X'' - \frac{\lambda}{c^2} X = 0}$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$T'' - \lambda c^2 T = 0$ $\qquad X'' - \lambda X = 0$
$T'(0) = 0$ $\qquad X(0) = 0$
$\qquad X(l) = 0$

$\lambda > 0$

$X'' - \lambda X = 0$ polinomio característico $\alpha^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\lambda}$

$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

C.I. $X(0) = A + B = 0$
$X(l) = Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ otra forma
$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{pmatrix} \neq 0$

$A = B = 0$

$B = 0$
$A = 0$

$X(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow$ trivial

$\lambda = 0$

$X'' = 0$ $\qquad X(x) = Ax + B$

C.I. $X(0) = B = 0$
$X(l) = Al = 0 \Rightarrow A = 0$ $\qquad X(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow$ trivial

$\lambda < 0$ $\quad X'' - \lambda X = 0$ $\quad$ pol. característico $\quad \alpha = \pm\sqrt{-\lambda}\, i$

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + B\,\text{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

C.I. $\quad X(0) = A = 0$

$$X(l) = B\,\text{sen}(\sqrt{-\lambda}\, l) = 0 \longrightarrow B = 0 \Rightarrow \text{sol. trivial}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{-\lambda}\, l = n\pi$$

$$\boxed{\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{l}} \quad \text{valores propios}$$

$$\Rightarrow X(x) = B\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$T'' - \lambda c^2 T = 0$$

polinomio caract: $\quad \alpha^2 - \lambda c^2 = 0$

$$\alpha^2 = \lambda c^2$$

$$\alpha = \pm i\sqrt{-\lambda c^2}$$

$$T(t) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\, c\, t) + B\,\text{sen}(\sqrt{-\lambda}\, c\, t)$$

sabiendo que $\quad \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{l}$

$$T(t) = A\cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{cn\pi}{l} t\right)$$

C.I. $\quad T'(0) = 0$

$$T'(t) = -\frac{cn\pi}{l} A\,\text{sen}\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + B\frac{cn\pi}{l}\cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right)$$

$$T'(0) = B\frac{cn\pi}{l} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$T(t) = A\cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right)$$

Por tanto

$$v(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

$$v_n(x,t) = B\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\cdot A\cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right)$$

para aplicar la C.I.

$$v(x,0) = -w(x)$$

hago la suma de las n soluciones, que también será solución

$$\boxed{v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\cdot A\cos\left(\frac{cn\pi}{l}\right) t}$$

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} AB\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = -w(x)$$

Que es la ~~ex~~ serie de Fourier para una función impar en [-l, l]

siendo

$$AB = a_n = \frac{2}{l} \int_0^l (-w(x)) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

por tanto

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l w(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \cdot \cos \frac{cn\pi}{l} x$$

y $\quad u(x,t) = v(x,t) + w(x)$

siendo $\quad w(x) = -\frac{A}{c^2}\sinh(x) + \frac{1}{l}\left[k + \frac{A}{c^2}\sinh(l) - h\right] x + h$

Matemáticas
Abril 2002

1 Primer ejercicio

1.1 Problema

Se considera la función de variable compleja

$$f(z) = e^{-z^{-4}},\ z \neq 0,\quad f(0) = 0.$$

1. Determinar los puntos donde f es derivable.
2. El caso $z = 0$ requiere un estudio particular: Se observará que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, aunque, sin embargo, f no es derivable en 0. ¿Cómo es esto posible?
3. ¿Qué tipo de singularidad es 0?

1.2 Cuestiones

1. Se supone que dos curvas diferenciables en el plano complejo se cortan en un punto $z = z_0$ formando un ángulo $\alpha = \pi/2$. Sea f una función derivable en un conjunto abierto que contiene a z_0, y tal que $f'(z_0) \neq 0$. Demostrar que las curvas imágenes se cortan formando el mismo ángulo.
2. ¿Es ello cierto para otro ángulo α cualquiera?
3. Considerar la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\quad cz+d \neq 0.$$

Expresar esta transformación como composición de transformaciones elementales y describir el significado geométrico de cada una de ellas.

Primer ejercicio:

Problema:

1. $f(z) = e^{-z^{-4}}$ $\quad z \neq 0 \quad f(0) = 0$

$f(z) = e^{-\frac{1}{z^4}}$

$$z^4 = (x+iy)^4$$
$$= (x+iy)^2(x+iy)^2$$
$$= [(x^2-y^2)+i(2xy)]\cdot[(x^2-y^2)+i(2xy)]$$
$$= [(x^2-y^2)^2-(2xy)^2]+i[2(x^2-y^2)(2xy)]$$
$$= x^4-2y^2x^2+y^4-4x^2y^2+i4x^3y-i4y^3x$$
$$= (x^4-6x^2y^2+y^4)+i(4xy(x^2-y^2))$$

$$\frac{1}{z^4} = \frac{(x^4-6x^2y^2+y^4)-i(4xy(x^2-y^2))}{(x^4-6x^2y^2+y^4)^2+(4xy(x^2-y^2))^2}$$

calculos auxiliares:

$$(x^4-6x^2y^2+y^4)^2 = x^8 - 6x^6y^2 + x^4y^4 - 6x^6y^2 + 12x^4y^4 - 6x^2y^6 + x^4y^4 - 6x^2y^6 + y^8$$

$$(4xy(x^2-y^2))^2 = \cancel{16x^6y^2 \ldots} (4x^3y-4xy^3)^2$$
$$= (16x^6y^2 - 16x^4y^4 - 16x^4y^4 + 16x^2y^6$$

la suma:

$$x^8+y^8+4x^6y^2+4y^6x^2-18x^4y^4 := a$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{z^4} = -\frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{a} + i\,\frac{4xy(x^2-y^2)}{a}$$

$e^{-\frac{1}{z^4}}$ $\quad \cancel{Re}\, e^{-\frac{1}{z^4}}] = e^{-\frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{a}} \cdot e^{i\frac{4xy(x^2-y^2)}{a}}$

$$u = \mathrm{Re}[e^{-\frac{1}{z^4}}] = e^{-\frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{a}} \cos\left[\frac{4xy(x^2-y^2)}{a}\right]$$

$$v = \mathrm{Im}[e^{-\frac{1}{z^4}}] = e^{-\frac{x^4-6x^2y^2+y^4}{a}} \operatorname{sen}\left[\frac{4xy(x^2-y^2)}{a}\right].$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ aaaaah!!!

4. Determinar la imagen del semiplano $\Re z \geq 2$ mediante la transformación

$$f(z) := \frac{z+i}{z-i}.$$

2 Segundo ejercicio

2.1 Problema

Se considera la serie de Fourier

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots$$

1. Probar que converge a $(\pi - x)/2$ para los puntos de $]0, 2\pi[$ y a 0 para los puntos $x = 0$ y $x = 2\pi$, justificando las afirmaciones que se realicen.

2. ¿A qué función converge en toda la recta real?

3. Considerar la serie obtenida derivando término a término y establecer su convergencia. ¿Qué pasa en particular en $x = 0$?

2.2 Cuestiones

1. En relación con el problema precedente, ¿qué debería exigirse a una serie de Fourier para que la serie derivada converja puntualmente?

2. ¿Qué es lo que falla en la serie dada en el problema?

Examen de Matemáticas

Abril, 2003

1 Enunciados

1.1 Primer Ejercicio

1.1.1 Problema

Resolver el siguiente ejercicio: encontrar una función armónica v definida en el disco abierto de centro cero y radio 1 (disco que llamaremos de ahora en adelante *disco unidad* y denotaremos por D), de forma que la extensión continua de v a la frontera de D sea 0 en los puntos z de la frontera con parte imaginaria $\Im z > 0$ y sea al mismo tiempo 1 en los puntos z de la frontera con $\Im z < 0$.

Sugerencia

1. Realizar una transformación conforme que lleve D (en el plano z) al semiplano superior (en el plano w) (denotado de ahora en adelante por Π), y la frontera de D al eje real.
2. Hecho esto, resolver el problema encontrando una función armónica de la variable w definida en Π tomando los valores adecuados en el eje real. Para ello, observar el comportamiento de la función $\arg_\alpha(w)$ y de la función $\arg_\alpha(w-a)$, donde a y α son constantes reales.

Solución. Proporcionamos la solución de la sugerencia 2 para ayuda del alumno: se trata de la función

$$\frac{1}{\pi}\arg_{\pi/2}\left(\frac{w-1/2}{w+1/2}\right). \tag{1}$$

El alumno debe justificar este resultado y finalmente expresarlo en la variable z.

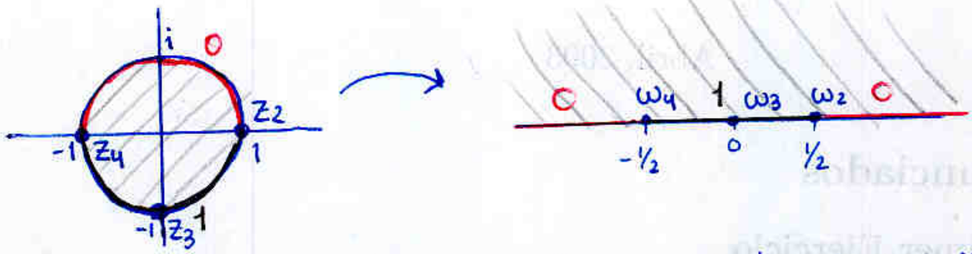
Primer ejercicio:

Antes de hace la transformación, debería saber donde valdrá la función 1 y 0 en el eje x una vez hecha, sabiendo la solución:

$$\frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{w-1/2}{w+1/2}\right) = \frac{1}{\pi}\arg(w-1/2) - \frac{1}{\pi}\arg(w+1/2)$$

la resta será

por lo tanto la transformación será



la transformación de Möbius que buscamos será

conserva la razón doble:

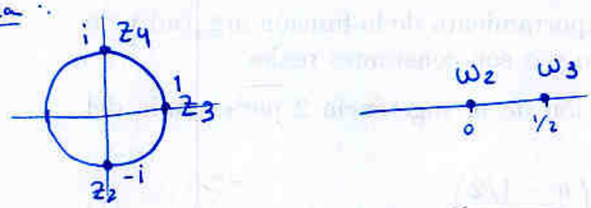
$$\frac{z-z_2}{z-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2} = \frac{w-w_2}{w-w_4}\cdot\frac{w_3-w_4}{w_3-w_2}$$

$$\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{-i+1}{-i-1} = \frac{w-1/2}{w+1/2}\cdot\frac{0+1/2}{0-1/2} = -\frac{w-1/2}{w+1/2}$$

$$\frac{-iz+z+i-1}{-iz-z-i-1} = -\frac{w-1/2}{w+1/2}$$

$$(w+1/2)\left(\frac{iz-z-i+1}{-iz-z-i-1}\right) = w-1/2 \rightarrow (w+1/2)\left(\frac{[1-z]+i[z-1]}{[-1-z]+i[}\right.$$

otra forma:



tal vez así salga más sencillo.

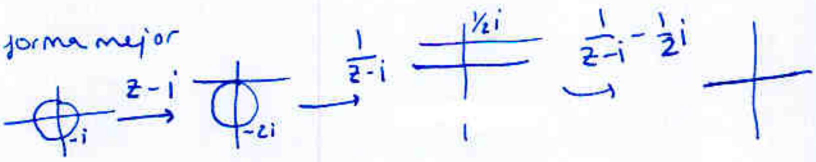
$$\frac{z+i}{z-i}\cdot\frac{1-i}{1+i} = \frac{w-0}{\cancel{w-\infty}}\cdot\frac{\cancel{1/2-\infty}}{1/2-0} = 2w \Rightarrow \boxed{w = \frac{z+i}{z-i}\cdot\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1}{2}}$$

compruebo que el interior del círculo sea el semieje positivo

$$z=0 \rightarrow w = \frac{i}{-i}\cdot\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-1}{1}\cdot\frac{(1-i)^2}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(1-2i-1) = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$$

se cumple.

forma mejor



1.1.2 Cuestiones

1. En la resolución del problema se ha sustituido el cálculo de una función armónica en D por el de una función armónica en Π. La razón es que la composición de una función armónica y una función derivable compleja es, de nuevo, una función armónica. Justificar precisamente este hecho.

2. El problema planteado, de variable real, se ha sustituido por uno de variable compleja. Esto se basa en el hecho de que las partes real e imaginaria de una función derivable de variable compleja son armónicas. Probarlo.

3. Se sabe que una función armónica tiene una conjugada armónica. Definir este término y calcular la conjugada armónica de la función dada en (1). **Sugerencia**. Hay dos formas de calcular la conjugada armónica: la primera es complicada y requiere el uso de integrales reiteradas, la segunda requiere sólo observar que hay una función conocida cuya parte imaginaria está relacionada con (1). Discutir esto.

4. Encontrar la función $f(w)$ cuya parte imaginaria es la función dada en (1).

5. Probar que, en general, si $f = u+iv$ es una función de variable compleja derivable, siendo u su parte real y v su parte imaginaria, las curvas $u =$constante y $v =$constante se cortan en ángulo recto. Discutir, como ejemplo, la función $f(z) = z^2$.

Puntuación. Problema: 5 puntos; cuestiones: 1 punto cada una.

Ahora falta resolver el problema en Π

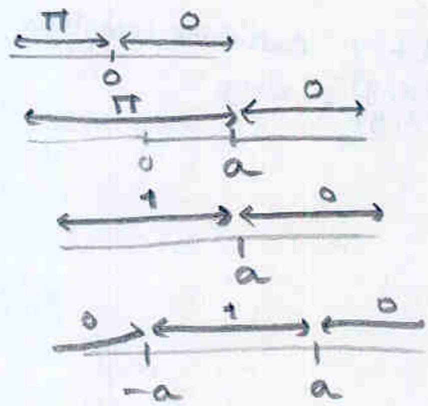
bla.. bla.. bla facil

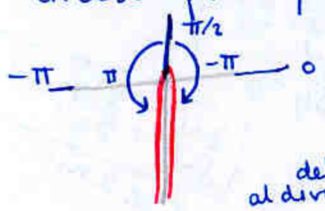
$\arg(z)$

$\arg(z-a)$

tomamos $\arg_{\pi/2}$ para que la discontinuidad no moleste en el semiplano positivo

$\frac{1}{\pi}\arg(z-a)$





$\frac{1}{\pi}\arg(z-a) - \frac{1}{\pi}\arg(z+a)$

propiedades del argumento al dividir en $\mathbb{C}$ $= \frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

nuestro caso es $a = 1/2$

$= \frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{w-1/2}{w+1/2}\right)$ ///

sustituir $w = \frac{z+i}{z-i}\cdot\frac{1-i}{1+i}\frac{1}{2}$ en ↗

Cuestiones:

1. Demostrar que si

$$\begin{tikzcd} \overset{z}{D} \arrow[r, "g"', "\text{compleja derivable}"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & \overset{w}{\Pi} \arrow[r, "f", "\text{armónica}"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $f \circ g$ es también armónica

$$f \circ g = f(g(z))$$

f cumple $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ $\quad f(x,y)$

g cumple $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\quad g = (u,v) = g(x,y)$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ $\quad f(g\,\cancel{(\ )}) = f(x,y)$

$\cancel{\dfrac{\partial f\circ g}{\partial u} = \dfrac{\partial f\circ g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}}$

$f \circ g$ cumple $\dfrac{\partial^2 f\circ g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f\circ g}{\partial y^2} = 0$?

$$\frac{\partial^2 f\circ g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f\circ g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f\circ g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \cancel{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f\circ g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f\circ g}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f\circ g}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f\circ g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f\circ g}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

demostración mejor:

una función armónica siempre es la parte real de una función derivable compleja.

La composición de dos funciones derivables complejas es derivable

La parte real de la composición será una función armónica

2. $f = u + iv$ derivable compleja $\quad u(x,y)$, $v(x,y)$ $\quad z = x + iy$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow{\partial/\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \xrightarrow{\partial/\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$+$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

$\Rightarrow$ u es armónica

$$\xrightarrow{\partial/\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\partial/\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0}$$

$\Rightarrow$ v es armónica

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$

$u_{xx} = (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$

$+$

1.2 Segundo ejercicio

Consideremos una barra de longitud l y supongamos:
-El calor se distribuye uniformemente sobre cada sección transversal a lo largo del tiempo.
-No hay intercambio de calor con el exterior (es decir, la barra está aislada)
-La temperatura es nula en los extremos.
-La distribución inicial de temperatura viene dada por una función $f(x)$ para $0 \leq x \leq l$.

a) En términos matemáticos se trata de resolver la siguiente EDP. Usar el método de separación de variables.

$$\begin{aligned} u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

b) Resolver el problema planteado en a) precisamente cuando la función f es $\sin^2$ y la barra tiene longitud π.

Nota: discutir con cuidado los valores de la constante para que el problema posea solución con significado físico, así como analizar todos los casos que se presenten.

Puntuación: a) 5, b) 5

3. Cualquier función derivable compleja, su parte real e imaginaria son funciones armónicas, la relación entre ellas es que son funciones armónicas conjugadas

Calcular la función armónica conjugada de

$$\frac{1}{\pi} \arg_{\pi/2}\left(\frac{w - 1/2}{w + 1/2}\right)$$

sabiendo que existe la función derivable compleja:

$$\ln_\alpha(z) = \ln|z| + i \arg_\alpha(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \ln_{\pi/2}\left(\frac{w-1/2}{w+1/2}\right) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \ln\left|\frac{w-1/2}{w+1/2}\right|} + i \underbrace{\frac{1}{\pi} \arg_{\pi/2}\left(\frac{w-1/2}{w+1/2}\right)}$$

la función armónica conjugada es $\frac{1}{\pi} \ln\left|\frac{w-1/2}{w+1/2}\right|$

4. $f(w) = \frac{1}{\pi} \ln_{\pi/2}\left(\frac{w - 1/2}{w + 1/2}\right)$

4. $f = u + iv \qquad u = \text{cte} \perp v = \text{cte}$

$u(x, y)$
$v(x, y)$

la pendiente de $u = \text{cte}$ es $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = m$

la pendiente de $v = \text{cte}$ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{\frac{\partial v}{\partial y}} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = n$

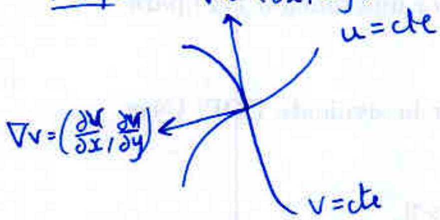
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\partial v/\partial y}{-\partial v/\partial x} = m$$

se cumple $m = -\dfrac{1}{n}$

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = n \qquad \Rightarrow u = \text{cte} \perp v = \text{cte}$$

mejor: $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$



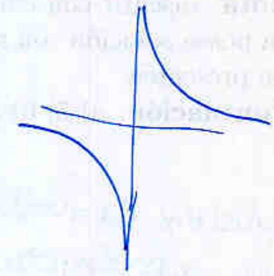
$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right\rangle$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \;/\!/\!/ \quad \perp$$

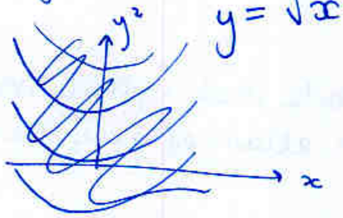
ejemplo $f(z) = z^2$
$= (x^2 - y^2) + i(2xy)$

$x^2 - y^2 = c \qquad\qquad 2xy = c$

$y^2 = x^2 - c \qquad\qquad y = \dfrac{c}{2x}$

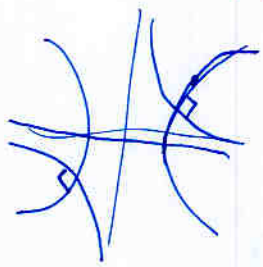
$y = \sqrt{x^2 - c}$





$c = 1 \quad y^2 = x^2 - 1$

x	0	1	2	3	4	5
y	X	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{15}$	



1 Soluciones

1.1 Primer ejercicio

1.1.1 Problema

Hay una transformación fraccional lineal que convierte D en Π. Se puede obtener como composición de las siguientes aplicaciones elementales: Precisamente,

Figure 1: La sucesión de transformaciones

$$z \to z - i \to \frac{1}{z-i} \to \frac{1}{z-i} - \frac{i}{2} = \frac{1-iz}{2(z-i)} = w.$$

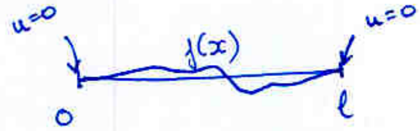
La semicircunferencia inferior se transforma, como es inmediato observar, en el intervalo $[-1/2, 1/2]$ del eje real, mientras que la semicircunferencia superior se transforma en el resto del eje real, es decir $]-\infty, -1/2[\cup]1/2, +\infty[$. Observar ahora que la función $\arg_{\pi/2}(z)$ es armónica en el plano complejo al que se le ha suprimido $\{z \in C : \ z = ti, \ t < 0\}$, y vale 0 en el eje real positivo y π en el eje real negativo. Por ello, la función

$$g(w) := \frac{1}{\pi}\left[\arg_{\pi/2}\left(w - \frac{1}{2}\right) - \arg_{\pi/2}\left(w + \frac{1}{2}\right)\right] \tag{2}$$

es la adecuada en el plano w: es armónica en Π, toma el valor 1 en $[-1/2, 1/2]$ y el valor 0 en $]-\infty, -1/2[\cup]1/2, +\infty[$. Para obtener la función pedida v de la variable z hay que deshacer el cambio de variable, es decir, sustituir w por $\frac{1}{z-i} - \frac{i}{2}$ en (2). Resulta

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\left[\arg_{\pi/2}\left(\frac{1-iz}{2(z-i)} - \frac{1}{2}\right) - \arg_{\pi/2}\left(\frac{1-iz}{2(z-i)} + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Problema 2.



barra aislada (no hay intercambio de calor)

$$u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t) \qquad 0<x<l \,,\ t\geq 0$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$u_t = k u_{xx}$

primer paso: suponer que
$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$
$$u_t(x,t) = X(x)\cdot T'(t)$$
$$u_{xx}(x,t) = X''(x)\cdot T(t)$$

$$\Rightarrow \quad XT' = kX''T$$

dividir entre XT

$$\frac{T'}{T} = k\frac{X''}{X}$$

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \text{ (val. propios)}$$

$$\boxed{\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}} \qquad \boxed{\{T' - \lambda k T = 0}$$

para $\lambda > 0$

$X'' - \lambda X = 0 \longrightarrow$ soluciones $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$\left.\begin{aligned} X(0) &= A + B = 0 \\ X(l) &= Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{aligned}\right\} A = B = 0$$

solución trivial que no nos interesa.

para $\lambda = 0$

$X'' = 0 \rightarrow$ soluciones $X(x) = Ax + B$ sol. trivial

$$\left.\begin{aligned} X(0) &= B = 0 \\ X(l) &= A\cdot l = 0 \end{aligned}\right\} A = B = 0$$

para $\lambda < 0$

$X'' - \lambda X = 0 \rightarrow$ soluciones $X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x)$

$$X(0) = A = 0$$
$$X(l) = B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\,l) = 0 \longrightarrow B = 0 \text{ no nos interesa}$$
$$\hookrightarrow \sqrt{-\lambda}\,l = n\pi \qquad n = 0,1,2\ldots$$
$$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad \text{valores propios}$$

$$X(x) = B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$T' - \lambda k T = 0 \longrightarrow$ soluciones $T(t) = Ae^{\lambda k t} = Ae^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$
$$\boxed{u_n(x,t) = b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}}$$

1.1.2 Cuestiones

1. La respuesta a esta cuestión está contenida en la teoría desarrollada.

2. La respuesta a esta cuestión está contenida en la teoría desarrollada.

3. Si la función obtenida como solución del problema está dada (en la variable w) por (2), observar que se puede escribir como

$$g(w) = \frac{1}{\pi} \arg_{\pi/2} \frac{w - 1/2}{w + 1/2}.$$

La función $\arg_{\pi/2}(w)$ es la parte imaginaria de la función $\log_{\pi/2}(w)$, siendo su parte real $\log|w|$. Por tanto, esta última es su conjugada armónica. En nuestro caso, la conjugada armónica de $g(w)$ es, pues,

$$h(w) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{w - 1/2}{w + 1/2} \right|.$$

Si se quiere expresar como función de z, de nuevo hay que deshacer el cambio de variable usando $w = \frac{1-iz}{2(z-i)}$.

4. La función está dada por $\log_{\pi/2} \frac{w-1/2}{w+1/2}$, como se ha dicho en la cuestión anterior.

5. La respuesta a esta cuestión está contenida en la teoría desarrollada.

1.2 Segundo Ejercicio

a) Usando el método de separación de variables, buscamos primero una solución de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Reemplazando en la EDP se obtiene

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t),$$

lo que implica

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

para aplicar la C.I.

$$u(x,0)=f(x)$$

debemos considerar como solución de u la suma de todas las u_n

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}kt}$$

de forma que

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)=f(x)$$

esto se puede conseguir haciendo que b_n sean los coeficientes de la serie de fourier de la extensión impar 2ℓ-periódica de $f(x)$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(s)\operatorname{sen}\frac{n\pi s}{\ell}\,ds\right]\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-\frac{n^2\pi^2kt}{\ell^2}}\right)}$$

2. $\begin{cases} f(s)=\operatorname{sen}^2(s)\\ \ell=\pi\end{cases}$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(s)\operatorname{sen}\frac{n\pi s}{\ell}\,ds=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s)\operatorname{sen}\frac{n\pi s}{\pi}\,ds$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\cancel{\pi} s}{\cancel{\pi}}\right)ds$$

$$=\cancel{\left(-\frac{1}{n}\cos(ns)\operatorname{sen}^2(s)\right)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\frac{1}{n}\cos(ns)\,2\cos(s)}$$ no.

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{is}-e^{-is}}{2i}\right)^2\cdot\frac{e^{ins}-e^{-ins}}{2i}\,ds$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{2is}-1-1+e^{-2is}}{-4}\right)\cdot\frac{e^{ins}-e^{-ins}}{2i}\,ds=\int_0^{\pi}\frac{(e^{2is}-2+e^{-2is})\cdot(e^{ins}-e^{-ins})}{-8i}\,ds$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{is(2+n)}-e^{is(2-n)}-2e^{ins}+2e^{-ins}+e^{is(-2+n)}-e^{is(-2-n)}}{-8i}\,ds$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{is(2+n)}-e^{is(-2-n)}}{-8i}\right)+\frac{e^{is(-2+n)}-e^{is(2-n)}}{-8i}+\left(\frac{2(e^{-ins}-e^{ins})}{-8i}\right)ds$$

$$=-\frac{2}{4\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(s(2+n))+\operatorname{sen}(s(n-2))+2\operatorname{sen}(ns)\,ds$$

donde λ es una cierta constante. En particular, para la función que depende de x,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Resolveremos esa ecuación teniendo en cuenta que se tiene también, a partir de las condiciones iniciales,

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{3}$$

1. Supongamos por un momento que $\lambda = c^2 > 0$. Entonces se obtienen dos soluciones linealmente independientes, $X(x) = e^{cx}$ y $X(x) = e^{-cx}$ y, por tanto, $X(x) = Ae^{cx} + Be^{-cx}$, donde A y B son constantes arbitrarias. Llevando estas soluciones a (3) resulta, inmediatamente, la solución trivial, que desecharemos, pues no satisface la condición inicial.

2. Supongamos ahora $\lambda = 0$. Se obtiene $X(x) = Ax + B$. Llevando de nuevo esta solución a (3) se obtiene otra vez la solución trivial.

3. Si no se quiere obtener la solución trivial hay que suponer $\lambda = -c^2 < 0$, con lo que se obtiene

$$X(x) = A\cos(cx) + B\sin(cx).$$

Llevando esta solución a (3) resulta que los autovalores son $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, con $n \in I\!N$ y sus correspondientes autofunciones $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x)$, para $n \in I\!N$.

Utilizando los valores obtenidos para λ en la ecuación correspondiente a la variable t, resulta

$$T_n'(t) + k\frac{n^2\pi^2}{l^2}T(t) = 0, \ \forall\ n \in I\!N,$$

cuya solución general es:

$$T_n(t) = a_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{l^2}t}, \ \forall\ n \in I\!N.$$

Construimos la solución formal como una serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{l^2}t}\sin(\frac{n\pi x}{l}). \tag{4}$$

$$= -\frac{12}{4\pi}\left[-\frac{1}{2+n}\cos(s(2+n)) - \frac{1}{n-2}\cos(s(n-2)) - \frac{2}{n}\cos(ns) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{12}{4\pi}\left[\frac{1}{2+n}\cos(s(2+n)) + \frac{1}{n-2}\cos(s(n-2)) + \frac{2}{n}\cos(ns) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{12}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{2+n}\left[(-1)^n - 1\right] + \frac{1}{n-2}\left[(-1)^n - 1\right] + \frac{2}{n}\left[(-1)^n - 1\right]\right]$$

$$= \frac{12}{4\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2} + \frac{2}{n}\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2} + \frac{2}{n}\right] & n \text{ impar} \end{cases} \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{n} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right]\right) \text{sen } nx \cdot e^{-n^2 kt}}$$

?

Calcularemos las constantes a_n, $n \in I\!N$ de modo que

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l.$$

Por lo tanto, se debe tener

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

Esto representa la serie de Fourier de la extensión impar y $2l-$periódica de la función f, lo que permite identificar las constantes como los coeficientes de Fourier de la función dada. Precisamente

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds, \quad \forall\ n \in I\!N. \tag{5}$$

Llevando estas expresiones a (4) obtenemos entonces la solución formal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\left(\int_0^l f(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds\right) e^{\frac{-kn^2\pi^2}{l^2}t}\sin(\frac{n\pi x}{l}). \tag{6}$$

b) Se trata de un caso particular de la primera parte en el que la función f es $\sin^2$ en el intervalo $[0,\pi]$. Basta aplicar la expresión obtenida en (5) con lo que resulta

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(s)\sin(ns)ds = \\ = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi}(1-\cos(2s))\sin(ns)ds = \\ = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi}\sin(ns)ds - \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(2+n)s - \sin(2-n)s]ds, \forall\ n \in I\!N. \end{aligned}$$

Por tanto, si n es par es inmediato que $a_n = 0$, mientras que si n es impar se obtiene fácilmente

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n}\right), \ n \in I\!N.$$

Llevando estos valores a (4) se puede escribir la solución como

$$u(x,t) = \sum_{n=0,\ n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n}\right) e^{-kn^2t}\sin(nx).$$