

(iii) suponiendo un solenoide muy largo, B en el centro.

$$B = \mu_0 I n = \frac{\mu_0 I N}{l}$$

ETSI Telecomunicación

b) Flujo a través de la bobina (tomando $\vec{B}$ de igual al del centro)

$$\Phi = B \cdot S = \frac{\mu_0 N^2 I S}{l}$$

c) Coeficiente de autoinducción

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

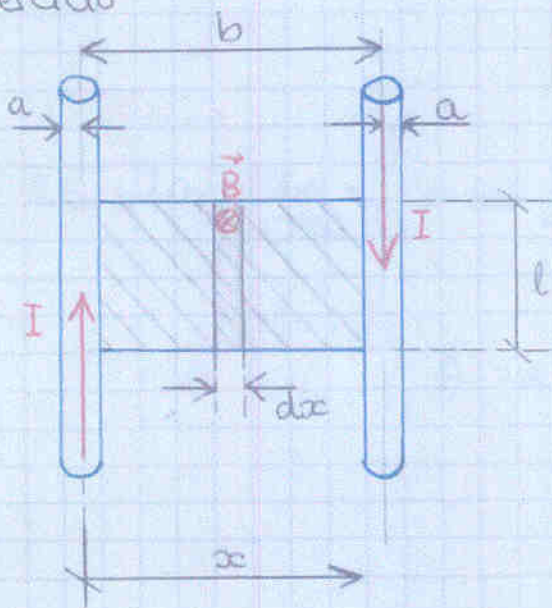
$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

Física II

Ejercicio

$$a \ll b$$

Se pide L/l



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (b-x)}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right)$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_{b-a} = \int B l dx$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{b-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{x}{b-x} \Big|_a^{b-a}$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\ln \frac{b-a}{a} - \ln \frac{a}{b-a} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \left(\frac{b-a}{a} \right)^2$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\Phi/I}{l} = \frac{\frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}}{l}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$

Física II

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Segundo cuatrimestre de 1^{er} curso
Curso 2003/2004

Contenido

- Formulario
- Apuntes de la asignatura.

Fecha de última actualización: 26 Diciembre 2007

Formulario Física II

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

Tema 1. Acciones magnéticas

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$B = \frac{F}{qv} = \frac{ma}{qv} = \frac{m v^2}{R}$$

$$\vec{F} = \int_L i(d\vec{l} \times \vec{B}) \rightarrow \text{B cte } F = I l B \sin \alpha$$

$$\vec{M}_0 = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{m} = N i \vec{S}$$

Tema 2. Campos magnéticos

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \frac{(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

Hilo:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

Espira: $\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3}$ $\downarrow$ para $\infty = 2$

Solenoides:

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

Tema 3. Inducción

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

si dan $\vec{A}$ $I = \frac{\mathcal{E}}{R} \rightarrow$ velocidad

si dan $\frac{dV}{dt}$ $I = C \frac{dV}{dt} = C \frac{d\mathcal{E}}{dt} \rightarrow$ aceleración

si no dan nada y no se desprecia la autoinducción

$$\mathcal{E} = IR + L \frac{dI}{dt}$$

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$L_{\text{sol}} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

$$W = \frac{1}{2\mu} B^2$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

Tema 4. Propiedades Materia

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{J}_s = \vec{M} \times \vec{u}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$M = \chi \vec{H}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi)$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre encerrada}}$$

	Diam	Param	Ferrom
χ	-	+	++
μ	$< \mu_0$	$\geq \mu_0$	$>> \mu_0$
μ_r	< 1	> 1	$>> 1$

$$H [A/m]$$

$$\Phi [Wb]$$

$$B [T]$$

$$\mathcal{R} [H^{-1}]$$

Circuitos Magnéticos

$$F = NI = \oint H \cdot dl = \Phi \mathcal{R}$$

$$H = \frac{B}{\mu}$$

$$\Phi = B \cdot S$$

$$\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu S}$$

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

$\oint$ cte en todo el circuito
si $S_1 = S_2 \Rightarrow B_1 S_1 = B_2 S_2$
 $B_1 = B_2$

Tema 5. Ecuaciones de Maxwell

ec. cont.

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

T. Gauss
para E

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

T. Gauss
para B
(no monopolos)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Maxwell-Faraday
(explica inducción)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ampere-Maxwell

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

corrientes
conducción
 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Corrientes
Desplaz.
 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

vector de pointing

$$\frac{dW}{dt} = - \iiint \vec{E} \cdot \vec{J} dV - \iint \vec{N} \cdot d\vec{S}$$

$\downarrow$ efecto Joule $\downarrow$ flujo de energía

Tema 6. Oscilador armónico

cinemática: $\ddot{x} = -\omega^2 x$ $\propto$ desfase 90° v desfase 90° a

Dinámica: $F = -k \Delta x$

libre $\rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \rightarrow x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

amort.

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow \Delta = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$\rightarrow$ subamortiguado $\lambda < \omega_0$
 $\Delta < 0$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$\rightarrow$ crítico $\lambda = \omega_0$
 $\Delta = 0$

$$x(t) = [A + Bt] e^{-\lambda t}$$

$\rightarrow$ sobreamortiguado $\lambda > \omega_0$
 $\Delta > 0$

$$x(t) = [A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t}] e^{-\lambda t}$$

forz.

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

$$\rightarrow x(t) = x_h + D \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$D = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\Omega\lambda)^2}}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\Omega\lambda}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

Energética:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E = T + U$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Tema 7. Ondas

$$u(x, t) = f(x \pm vt) \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Senoidales

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \cos k(x - vt) \\ &= A \cos (kx - \omega t) \\ &= A \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \end{aligned}$$

k : nº ondas en 2π m

φ fase: $k(x - vt)$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{período espacial})$$

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad (\text{período temporal})$$

$$\omega = 2\pi f = kv$$

$$\frac{v}{vT} = f \frac{\lambda}{\lambda}$$

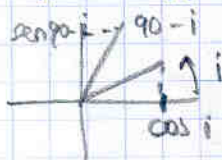
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

ángulo crítico $v_1 < v_2$

$$i_{\text{lim}} = \arcsen \frac{v_1}{v_2}$$

$$\cos i = \sin (90 - i)$$



Tema 8. Ondas II

$$y = \frac{D(r_2 - r_1)}{d}$$

máximos
 $r_2 - r_1 = n\lambda$

$$y_n = D \frac{n\lambda}{d}$$

mínimos
 $r_2 - r_1 = (2n+1)\lambda$

$$y_n = D \frac{(2n+1)\lambda}{d}$$

constant F and T

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \iff (\nabla u \cdot \mathbf{x})_x = (f(x, y))_x$$

relational

in is not constant in $\mathbb{R}^2$
 $(f(x, y) - x)_x = \text{const}$

$$\begin{aligned} (\nabla u \cdot \mathbf{x})_x &= 200 \text{ A} \\ (\nabla u \cdot \mathbf{x})_y &= 200 \text{ A} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \nabla u \cdot \mathbf{x} &= 200 \text{ A} \end{aligned}$$

Laurent series: $\frac{1}{x} = R$

Laurent series: $\frac{1}{y} = T$

with $x, y, T, R = 200$

$$\begin{aligned} R &= x \\ R &= T \end{aligned}$$

$$1 \leq \frac{2}{3} = R$$

$$\frac{200}{200} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{1}{200} \text{ m/s} = \text{min}$$

in $\mathbb{R}^2$ constant along

$$(1 - 0.5) \cdot 200 = 100$$

constant F and T

$$\frac{\partial u}{\partial x} = R$$

constant
 $R = 100 - 200$

$$\frac{\partial (1 - 0.5)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial (1 - 0.5)}{\partial x} = 0$$

constant
 $R = 100 - 200$

LECCION 1. Acciones Magnéticas sobre cargas en movimiento.

Introducción:

Cargas en reposo o movimiento en régimen permanente

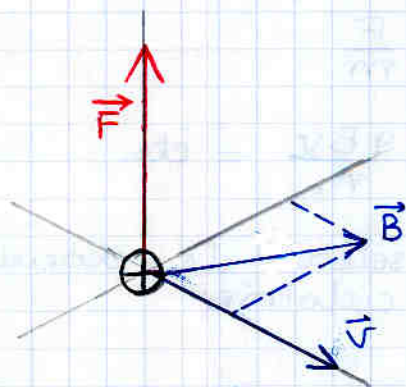
$$\vec{E} \neq \vec{E}(t)$$

$$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

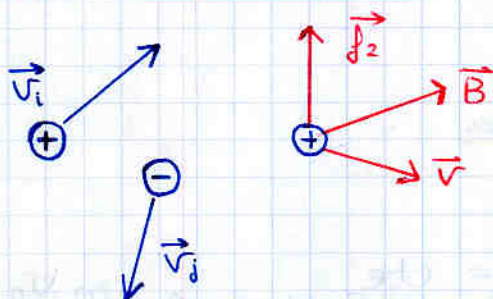
Si las cargas se mueven aparecen fuerzas distintas a las de Coulomb, las cuales dependen de la velocidad.

Fuerza magnética sobre partícula cargada



$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Fuerza de Lorentz



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Campo magnético

El campo eléctrico era fuerza por unidad de carga
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Pero el campo magnético depende de la velocidad

$$B = \frac{F}{qv} \quad \text{si } \vec{v} \perp \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \text{dimensiones: } [B] &= [F]/[q][v] \\ &= \text{M} \cdot \text{I}^{-1} \cdot \text{T}^{-2} \end{aligned}$$

Efectos de la fuerza $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

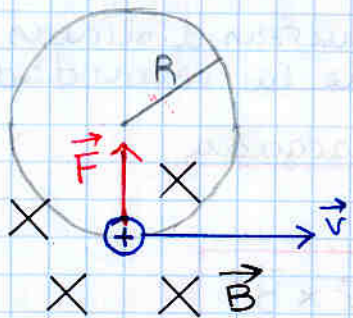
a) $\vec{v} \parallel \vec{B} \quad \vec{F} = \vec{0}$

M.R.U.



b) $\vec{v} \perp \vec{B}$

M.C.U.



$$\vec{F} \perp \vec{v}, \vec{B}$$

$$|\vec{v}| \text{ cte} \\ a_T = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{F}{m}$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qBv}{m} = \text{cte.}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

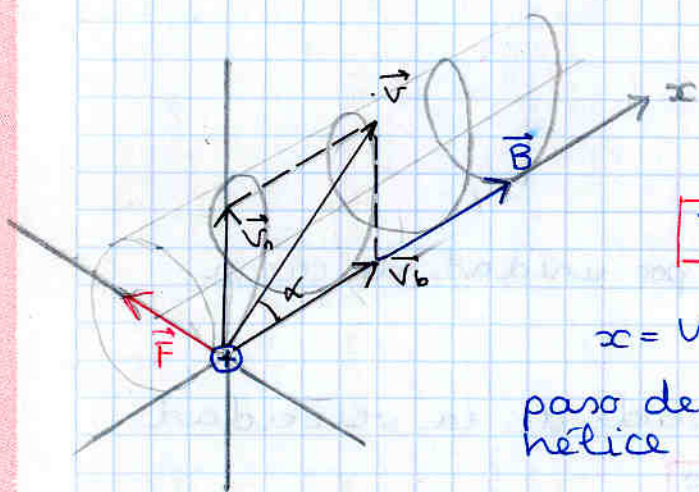
- selector de velocidad
- ciclotrón

la velocidad angular $\omega = \frac{v}{R}$

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}$$

ω no depende de v

c) $\vec{v}$ y $\vec{B}$ forman ángulo α



$$v_b = \text{cte}$$

$$v_n = \text{M.C.U.}$$

$$R = \frac{m v_n}{qB}$$

Trayectoria helicoidal

$$x = v_b \cdot t$$

paso de
hélice

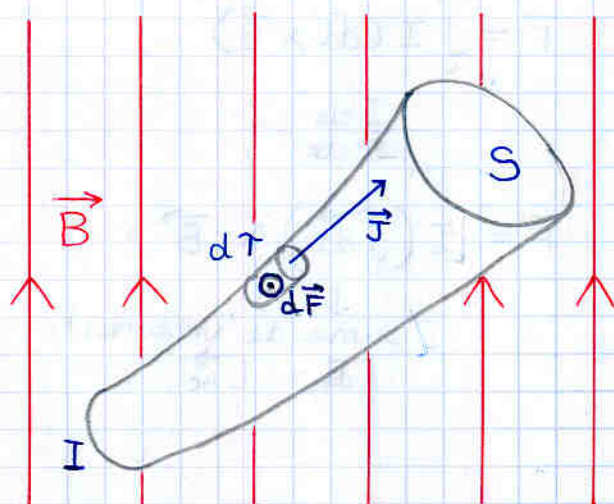
$$p = v_b \cdot T$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$p = v_b \frac{2\pi m}{qB}$$

- Fuerza sobre un conductor que transporta corriente



$$d\vec{F} = dq (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$dq = n \cdot q \cdot d\tau$$

n = n° de portadores por unidad de volumen
 q = carga de un portador
 $d\tau$ = diferencial de volumen

$$d\vec{F} = n q d\tau (\vec{v} \times \vec{B})$$

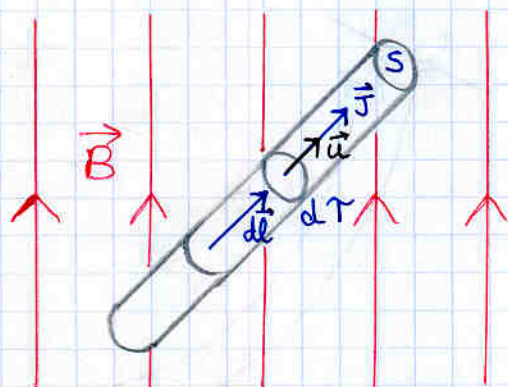
$$\vec{J} = n q \vec{v}$$

$$d\vec{F} = d\tau (\vec{J} \times \vec{B})$$

la fuerza total es la suma de todos los $d\vec{F}$

$$\vec{F} = \iiint_V (\vec{J} \times \vec{B}) d\tau$$

- Ley de Laplace para circuitos filiformes



$$d\vec{F} = d\tau (\vec{J} \times \vec{B})$$

$$\frac{d\tau}{J} = \frac{S \cdot dl}{J \cdot \vec{u}}$$

$$d\vec{F} = S \cdot dl (J \cdot \vec{u} \times \vec{B})$$

$$= S \cdot J (dl \vec{u} \times \vec{B})$$

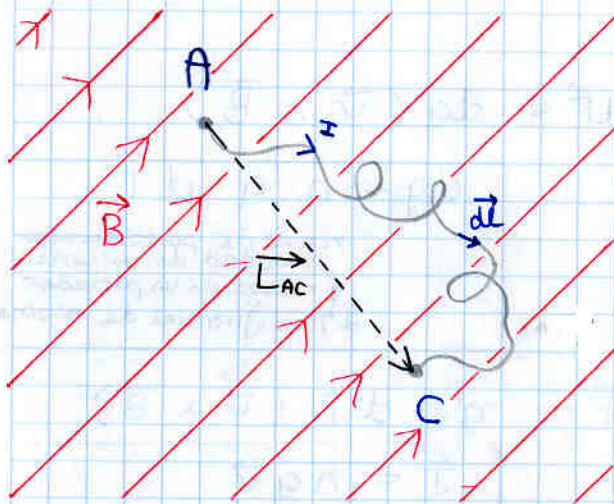
$$\frac{i}{dl} = \frac{S \cdot J}{dl \cdot \vec{u}}$$

$$d\vec{F} = i (d\vec{l} \times \vec{B})$$

Fuerza total: Ley de Laplace

$$\vec{F} = \int i (d\vec{l} \times \vec{B})$$

Caso particular: $\vec{B}$ cte



$$\vec{F} = \int I (d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\frac{I \, dl}{B \, cte}$$

$$\vec{F} = I \left(\int d\vec{l} \right) \times \vec{B}$$

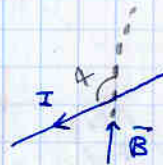
suma de vectores!
 $\int d\vec{l} = \vec{L}_{AC}$

$$\boxed{\vec{F} = I \cdot (\vec{L}_{AC} \times \vec{B})}$$

Corolario:

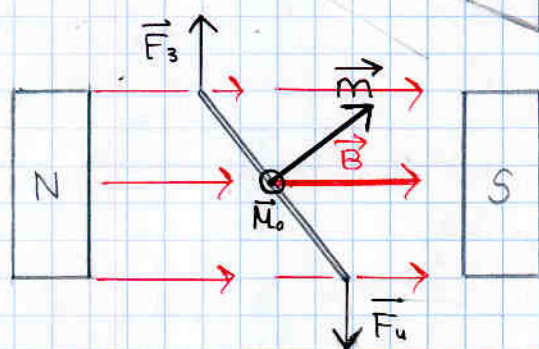
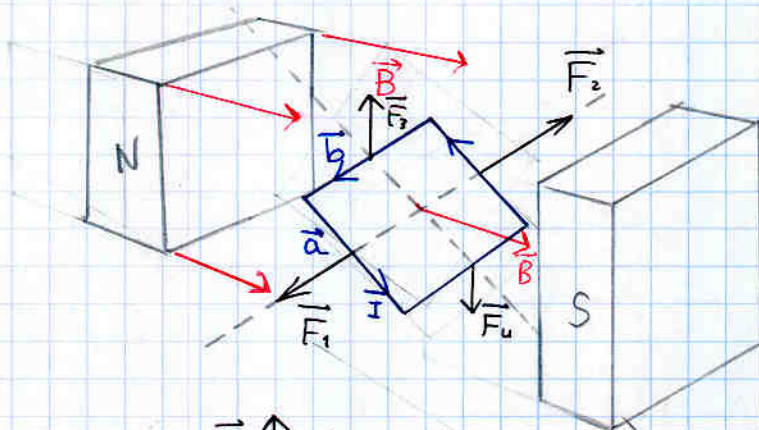
Circuito cerrado $\Rightarrow A=C \Rightarrow \vec{F}=\vec{0}$

Bcke: $\boxed{F = I l B \sin \alpha}$



Acción de un campo magnético sobre circuito cerrado

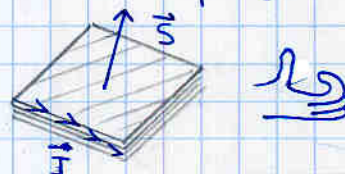
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$



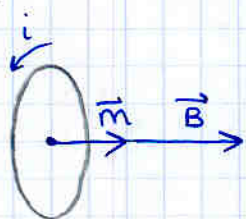
$$\vec{M}_0 = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{m} = N i \vec{S}$$

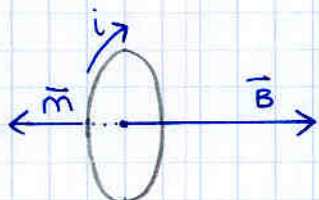
$\vec{m}$: momento magnético
 N : nº de espiras
 i : intensidad
 $\vec{S}$: vector superficie



La acción del campo magnético es girar el plano de la espira situándolo de modo que momento magnético $\vec{m} \parallel \vec{B}$ campo magnético



Equilibrio estable



Equilibrio inestable

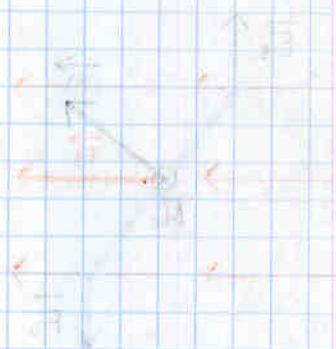
Force is an external influence that tends to change the motion of a body.

$$F = ma$$



$$\vec{F} \times \vec{r} = \vec{M}$$

$$F \sin \theta = M/r$$



The moment of a force is the product of the force and the perpendicular distance from the pivot to the line of action of the force.



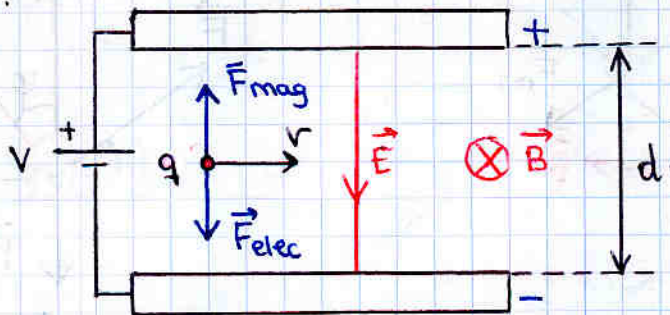
The principle of moments states that for a body in equilibrium, the sum of the clockwise moments must be equal to the sum of the anticlockwise moments.

Equilibrium conditions



Equilibrium conditions

ejercicio:

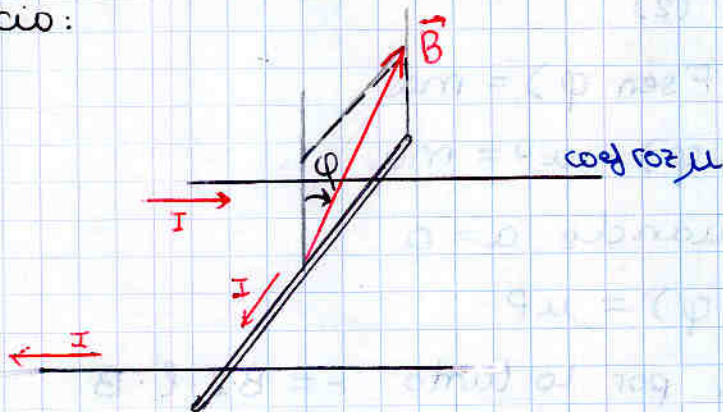


se pide que $\vec{F}_{elec} = -\vec{F}_{mag}$ ¿Cuánto debe valer v ?

$$\begin{aligned} F_{elec} &= F_{mag} \\ qE &= q(\vec{v} \times \vec{B}) \\ q \frac{V}{d} &= qvB \\ \frac{V}{d} &= vB \\ \boxed{v} &= \frac{V}{Bd} \end{aligned}$$

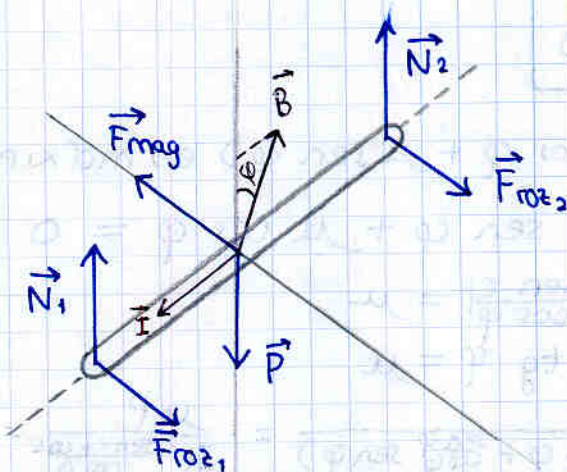
si la carga fuera negativa, las dos fuerzas cambiarían de sentido y aún estaría bien

ejercicio:



calcular el mínimo B que hay que aplicar para que la barra se mueva

Fuerzas que actúan sobre la barra



en el plano vertical:

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 &= \vec{0} \\ N_1 &= N_2 = -\frac{1}{2}\vec{P} \end{aligned}$$

en el plano horizontal

$$\vec{F}_{roz1} + \vec{F}_{roz2} + \vec{F}_{mag} = m \cdot \vec{a}$$

mínimo B cuando $a = 0$

$$\begin{aligned} F_{mag} &= F_{roz1} + F_{roz2} \\ &= \mu N_1 + \mu N_2 \end{aligned}$$

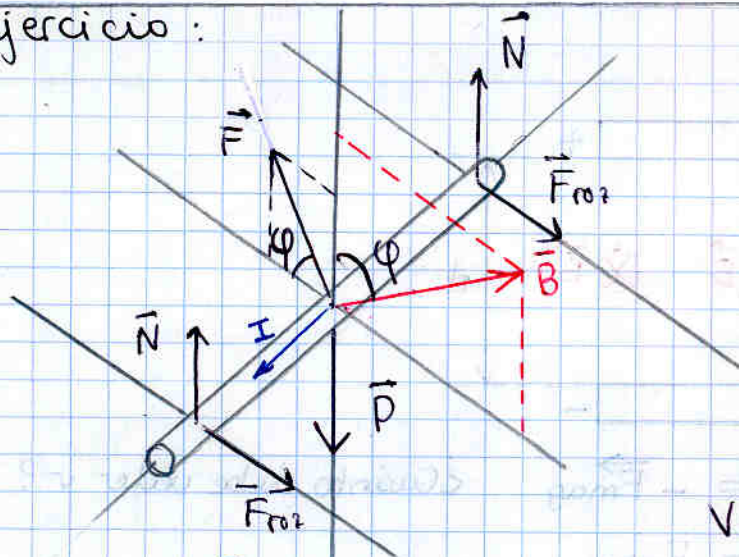
$$B \cdot I \cdot l \cdot \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \mu P$$

$$B = \frac{\mu P}{I l \cos \varphi}$$

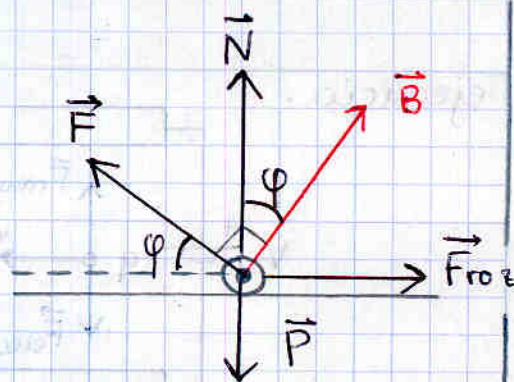
la mínima B se da cuando $\cos \varphi = 1$

$$B = \mu P / I l$$

ejercicio:



Hallar el $\vec{B}$ mínimo para que se mueva (pudiendo variar φ)



Proyectando fuerzas
Vertical:

$$N = P - F \sin \varphi \quad (1)$$

Horizontal:

$$F \cos \varphi - F_{roz} = ma$$

$$F \cos \varphi - \mu N = ma \quad (2)$$

• Sustituyendo (1) en (2)

$$F \cos \varphi - \mu (P - F \sin \varphi) = ma$$

$$F (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) - \mu P = ma$$

• La B mínima es cuando $a = 0$

$$F (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) = \mu P$$

• Vemos que $I \perp B$, por lo tanto $F = I \cdot \ell \cdot B$

$$I \ell B (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) = \mu P$$

$$B = \frac{\mu P}{I \ell (\cos \varphi + \mu \sin \varphi)}$$

• B es mínima cuando $(\cos \varphi + \mu \sin \varphi)$ es máximo

$$\frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) = -\sin \varphi + \mu \cos \varphi = 0$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \mu$$

$$\tan \varphi = \mu$$

$$B = \frac{\mu P}{I \ell (\cos \varphi + \mu \sin \varphi)} \stackrel{\tan \varphi = \mu}{=} \frac{\mu P}{I \ell (\cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \varphi)} = \frac{\mu P}{I \ell \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\cos \varphi}}$$

$$B = \frac{\mu P \cos \varphi}{I \ell} \text{ con } \tan \varphi = \mu$$

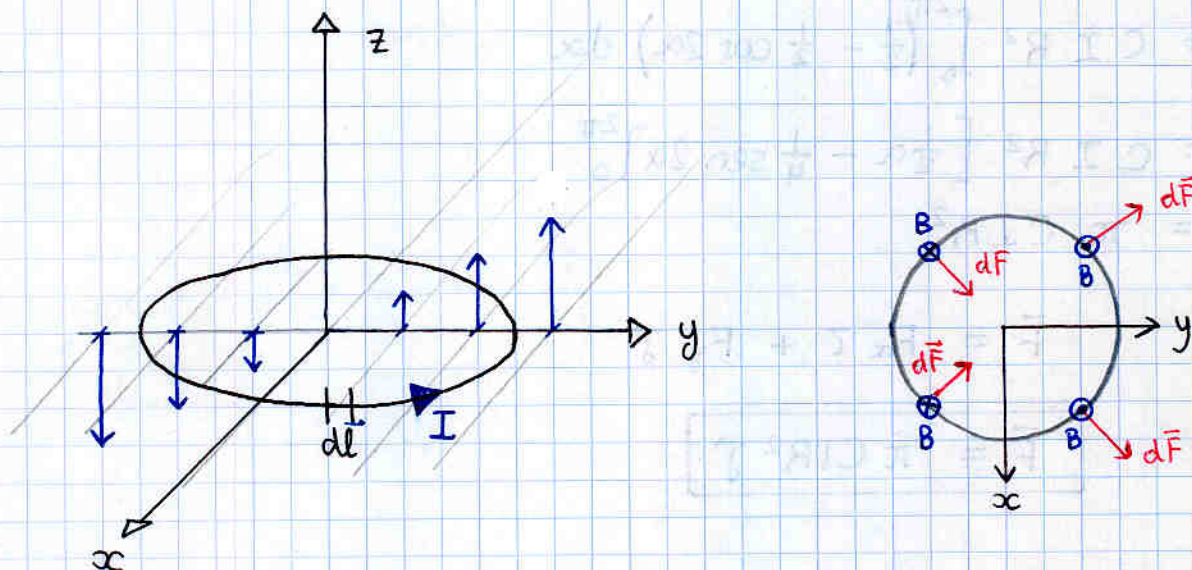
ejercicio:

Espira circular radio R sobre $z=0$ con centro $(0,0,0)$

Existe un campo magnético $\vec{B} = C y \vec{k}$ C es una cte.

Por la espira circula una intensidad I

Calcular la resultante de las fuerzas magnéticas sobre la espira



• Tomamos un $d\vec{l} \rightarrow d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} \\ \vec{B} &= Cy \vec{k} \end{aligned}$$

$$d\vec{F} = I \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & Cy \end{vmatrix} = I (Cy dy \vec{i} - Cy dx \vec{j})$$

$$d\vec{F} = I (C \cdot y \cdot dy \vec{i} - C \cdot y \cdot dx \vec{j})$$

$$\begin{aligned} F_x &= I \int_{-R}^R Cy dy \\ &= I \left[C \frac{y^2}{2} \right]_{-R}^R \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$F_y = I \int_{-R}^R -Cy dx$$

$$\begin{cases} x = R \cos \alpha \\ y = R \sin \alpha \\ dx = -R \sin \alpha d\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_y &= IC \int_0^{2\pi} (R \sin \alpha) \cdot (-R \sin \alpha d\alpha) \\ &= IC \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \alpha d\alpha \\ &= ICR^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

$$F_y = C I R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$$

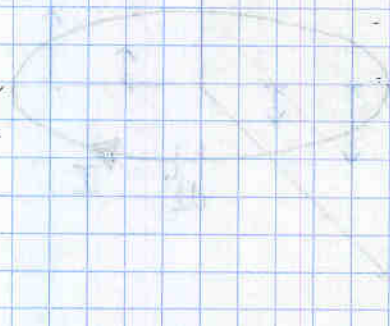
$$F_y = C I R^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) d\alpha$$

$$= C I R^2 \left[\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right]_0^{2\pi}$$

$$F_y = \pi C I R^2$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{F} = \pi C I R^2 \vec{j}}$$



LECCION 2 - Campos Magneticos independientes del tiempo

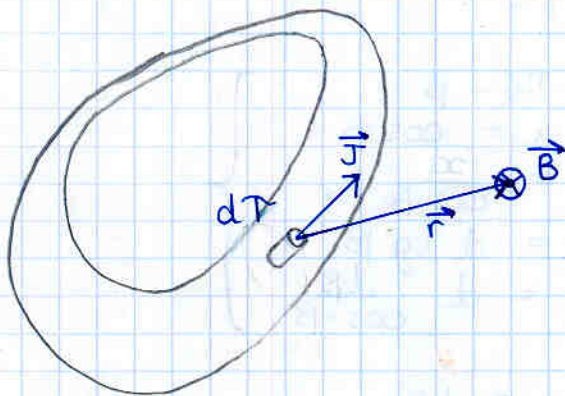
Campo magnetico creado por una corriente continua

Ley de Ampere - Laplace

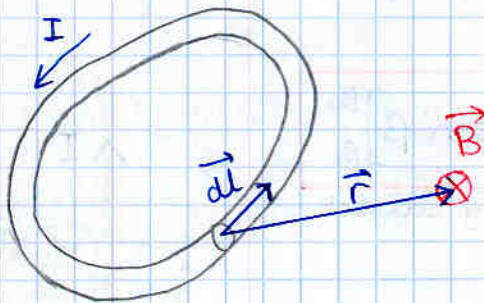
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} d\tau$$

$$\kappa = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$$

μ_0 : permeabilidad del vacio



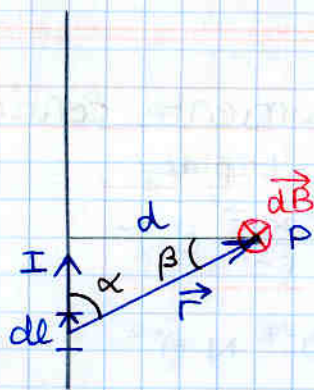
Campo magnetico creado por un circuito filiforme



$$\vec{J} d\tau = I d\vec{l} \quad \left(\begin{array}{l} d\tau = S dl \\ \vec{J} = J \cdot \vec{u} \\ I = SJ \\ d\vec{l} = dl \cdot \vec{u} \end{array} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \frac{(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}$$

Hilo rectilíneo



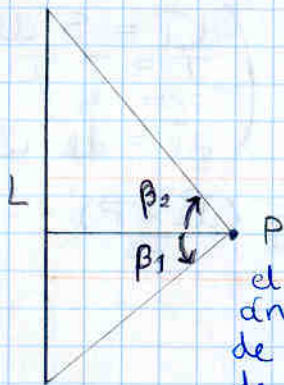
$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \alpha}{r^2}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \pi/2 - \beta \\ \sin \alpha = \cos \beta \\ r = \frac{d}{\cos \beta} \\ l = d \tan \beta \\ dl = d \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} \end{array} \right\}$$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \cos \beta d\beta$$

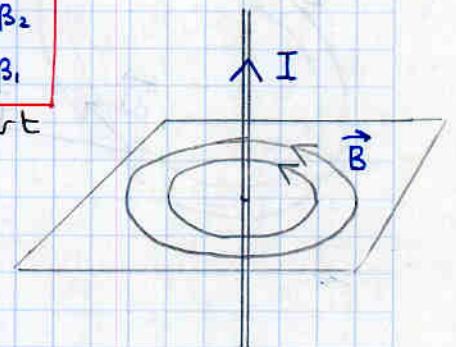
$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} [\sin \beta]_{\beta_1}^{\beta_2}$$

Ley de Biot y Savart

el signo del ángulo depende de la dirección de la corriente

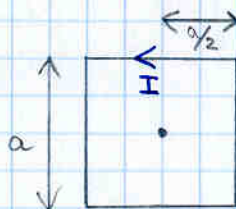


Casos particulares:

Hilo infinito: $\beta_1 = -\pi/2$
 $\beta_2 = \pi/2$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Circuito cuadrado:

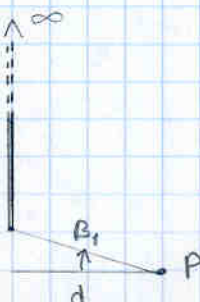


$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} [\sin \beta]_{-\pi/4}^{\pi/4} \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \sqrt{2} \vec{k} = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2\pi a} \vec{k}$$

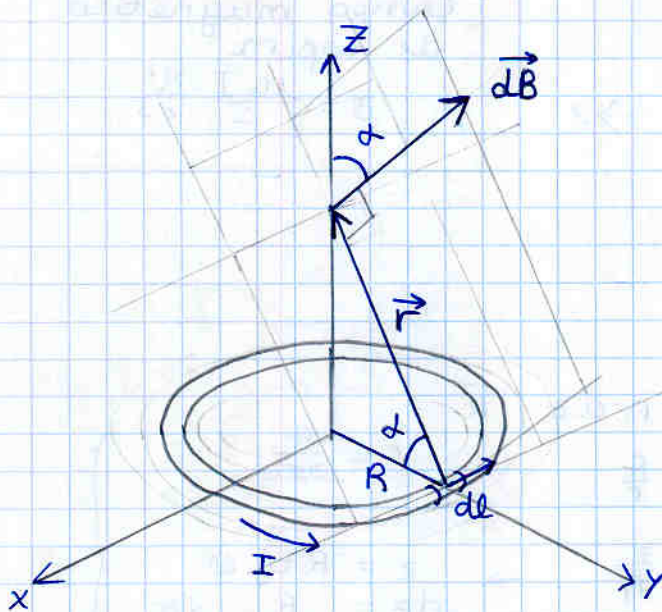
$$\vec{B}_2 = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2\pi a} \vec{k} = \vec{B}_3 = \vec{B}_4$$

$$\vec{B} = \frac{2\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi a} \vec{k}$$

Otras:



Espira circular



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

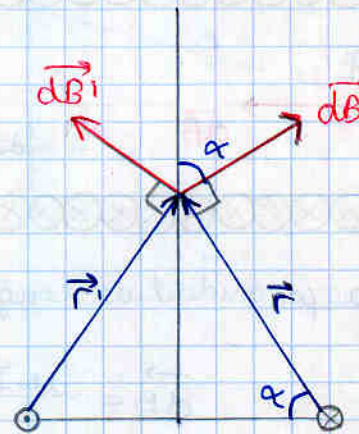
$dl \perp r$

$$|dB| = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} \quad \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0 I R \cos \alpha}{2r^2} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 m}{2\pi (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r}$$



$$B = \int dB \cos \alpha$$

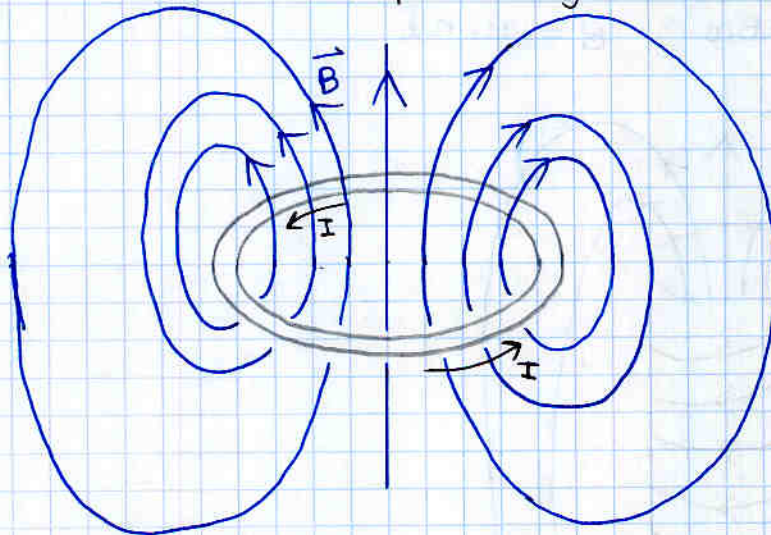
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\cos \alpha}{r^2} dl$$

$$= \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r^2} \oint dl$$

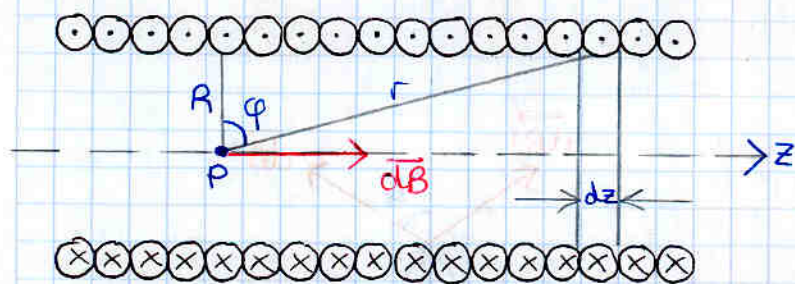
$$B = \frac{\mu_0 I R \cos \alpha}{2r^2}$$

$$m = iS = I\pi R^2$$

líneas de campo magnético de una espira



Solenoides



Campo magnético
de espira

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3}$$

n : nº espiras por unidad de longitud

$$\begin{aligned} \vec{dB} &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3} n dz \vec{R} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{R}{r} \rightarrow r = \frac{R}{\cos \varphi} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{R} \rightarrow \begin{array}{l} z = R \operatorname{tg} \varphi \\ dz = \frac{R}{\cos^2 \varphi} d\varphi \end{array} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I n}{2} \cos \varphi d\varphi \vec{R}$$

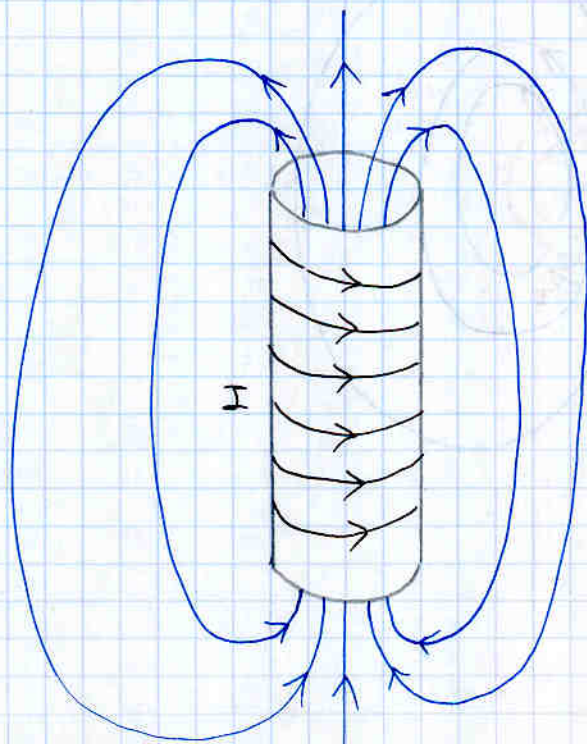
$$B = \int dB$$

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

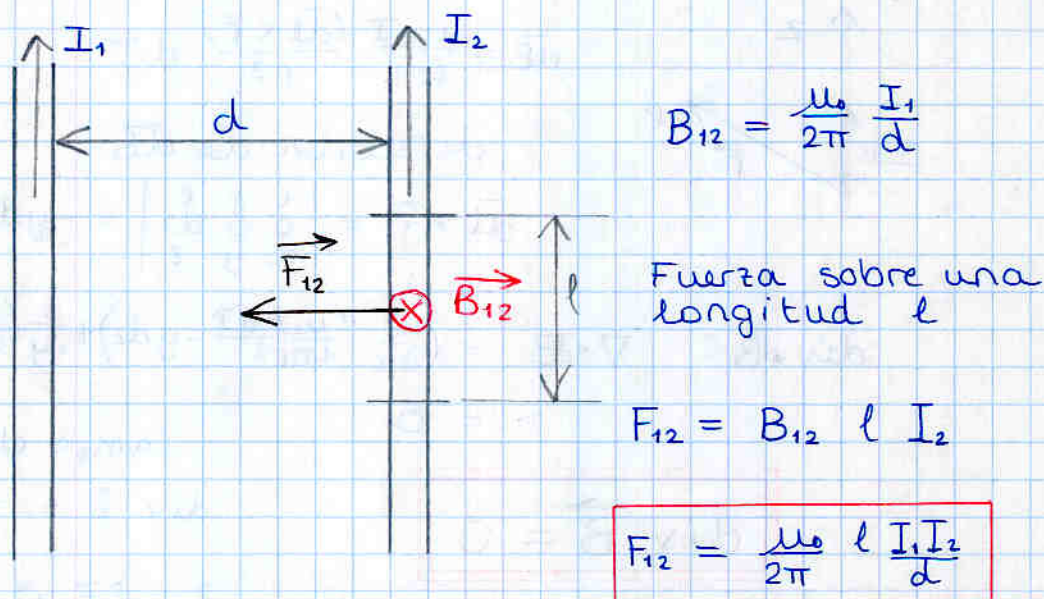
Si el solenoide es muy largo:

En el extremo: $B = \frac{\mu_0 I n}{2}$

En el centro: $B = \mu_0 n I$



Acciones mutuas entre dos corrientes paralelas

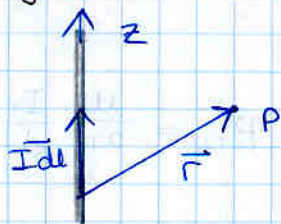


Definición de Amperio

La corriente que tiene que circular en el mismo sentido por dos hilos paralelos, separados una distancia de 1 metro, para que la fuerza de atracción sea de 2×10^{-7} N.

Flujo y divergencia del campo magnético

Divergencia:



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{dl} \times \vec{r})}{r^3} d\tau$$

dirección de $\vec{dB}$

$$\vec{dl} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & dz \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y dz \hat{i} + x dz \hat{j}$$

$$\text{div } \vec{B} \quad \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_0 I dz}{4\pi r^3} - y dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_0 I dz}{4\pi r^3} x dz \right) + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0$$

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

$$\boxed{\Phi = \int_{S. \text{CERR}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

Flujo:
sup. cerrada

campo eléctrico:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \int_{S.C.} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

el flujo para una
SUPERFICIE CERRADA
siempre es cero.

↳ las líneas de campo magnético son
cerradas

↳ no hay fuentes ni sumideros

→ NO existen monopolos magnéticos

Flujo a través de sup. S

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

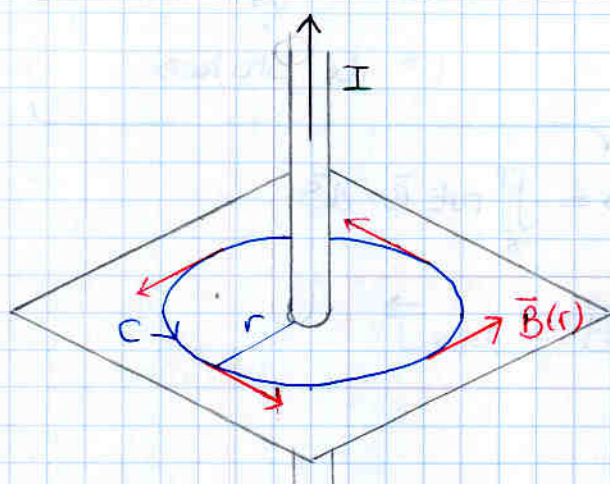
Unidad: Weber (Wb)

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

El flujo es tan importante que a veces al campo
magnético se le llama densidad de flujo. $\left(\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right)$

Teorema de Ampère

sólo si $\vec{B} \neq \vec{B}(t)$



circulación de B por la circunferencia.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

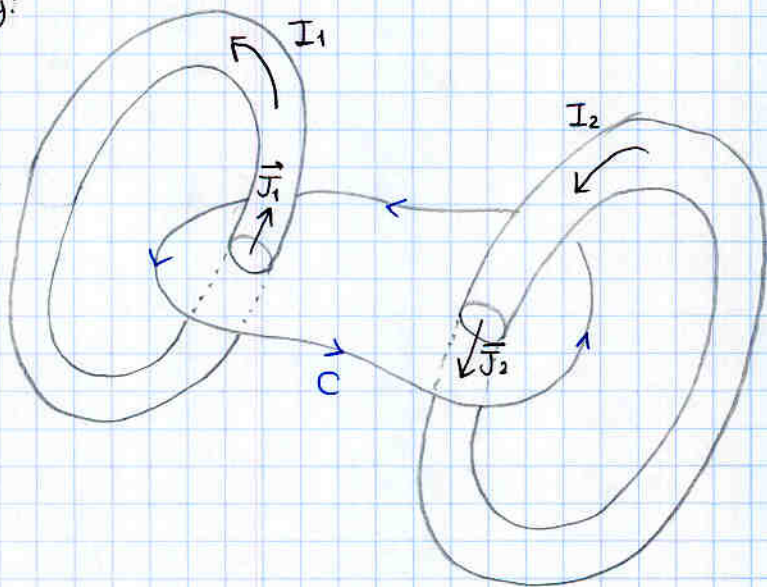
$$\vec{B} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$$

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{2\pi r} dl \\ &= \mu_0 I \end{aligned}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

La circulación del campo magnético (estático) a lo largo de un camino cerrado es: el producto entre la cte de permeabilidad magnética por la intensidad que atraviesa cualquier superficie limitada por la curva considerada

ej:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

El teorema de Ampere se utiliza en la práctica para calcular campos magnéticos.

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } B \text{ cte } \forall dl \\ \text{si } \vec{B} \parallel d\vec{l} \forall dl \end{array} \right\} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot L \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{L}$$

(similar al teorema de Gauss)

Rotacional del campo magnético

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I = \mu \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

T^a de Ampere

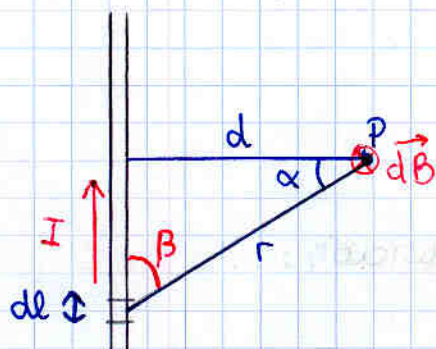
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

T^a de Stokes

$$\iint_S \mu \vec{J} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J}$$

ejercicio previo: campo creado por hilo



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

⚠ NO 2!

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \beta}{r^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{d}{r} \rightarrow r = \frac{d}{\cos \alpha} \\ \sin \alpha = \frac{l}{r} \rightarrow \\ \tan \alpha = \frac{l}{d} \rightarrow l = d \tan \alpha \\ dl = \frac{d}{\cos^2 \alpha} d\alpha \end{array} \right.$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\frac{d}{\cos^2 \alpha} \sin \beta}{\frac{d^2}{\cos^2 \alpha}} d\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \beta}{d} d\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \sin \beta d\alpha$$

$$\{ \sin \beta = \cos \alpha \}$$

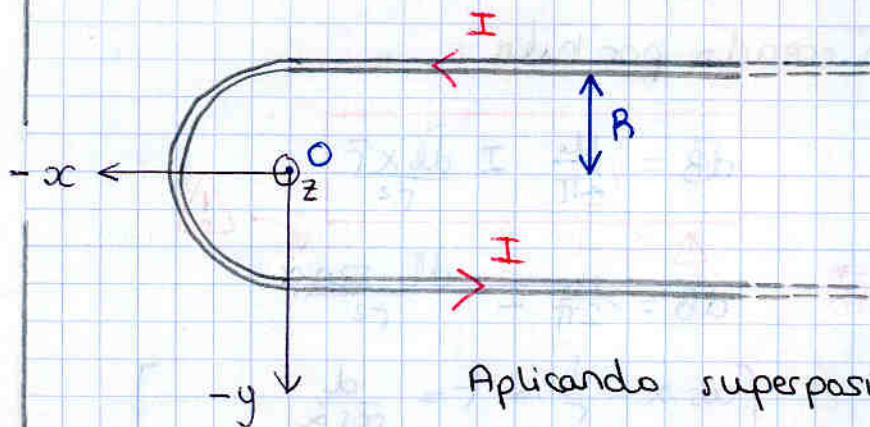
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \cos \alpha d\alpha$$

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} [\sin \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

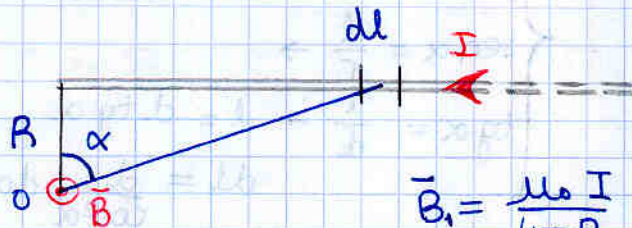
ejercicio

calcular $\vec{B}$ en O



Aplicando superposición: ...

B_1 :



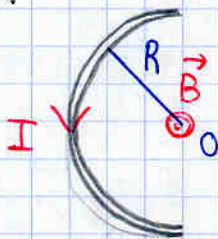
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{r}$$

$$\alpha_1 = -\pi/2$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{r}}$$

B_2 :



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \times r}{R^3}$$

$$dl \perp r$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2}$$

otra forma de verlo

$$l = R\alpha$$

$$dl = R d\alpha$$

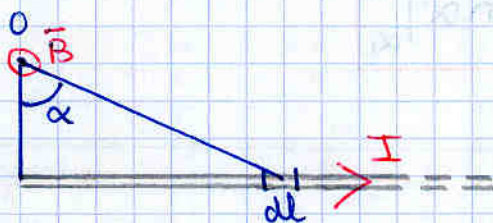
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{\pi R} dl$$

$$\int_0^{\pi} R d\alpha$$

$$\pi R$$

$$\boxed{\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4R} \vec{r}}$$

B_3 :



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \pi/2$$

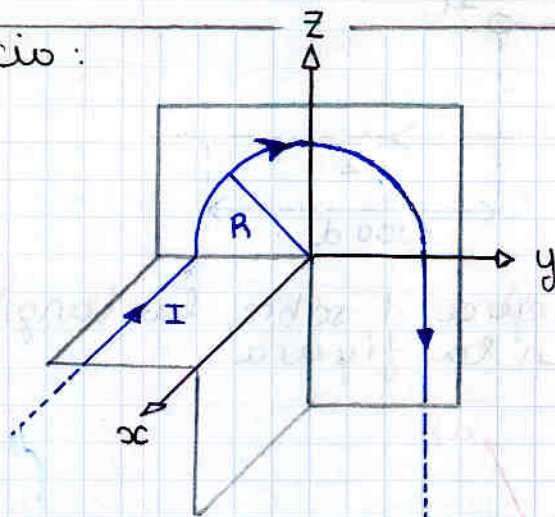
$$\boxed{\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{r}}$$

Superposición:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} \left(\frac{1}{\pi} + 1 + \frac{1}{\pi} \right) \vec{r}$$

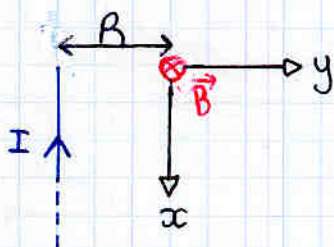
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4R} \left(\frac{2+\pi}{\pi} \right) \vec{r}}$$

ejercicio:



Calcular el campo magnético creado en $(0,0,0)$

Parte 1.



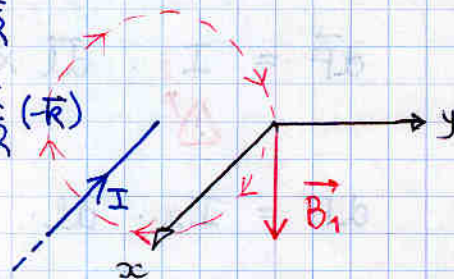
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\alpha_2 = 0$$

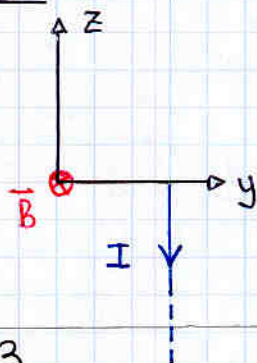
$$\alpha_1 = -\pi/2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (-\vec{r})$$



Parte 2



$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

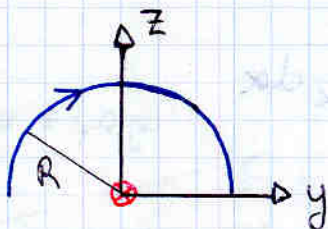
$$\alpha_2 = \pi/2$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (-\vec{r})$$

parte 3



$$d\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^2} \quad d\vec{l} \perp R$$

$$dB_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl$$

$$B_3 = \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl$$

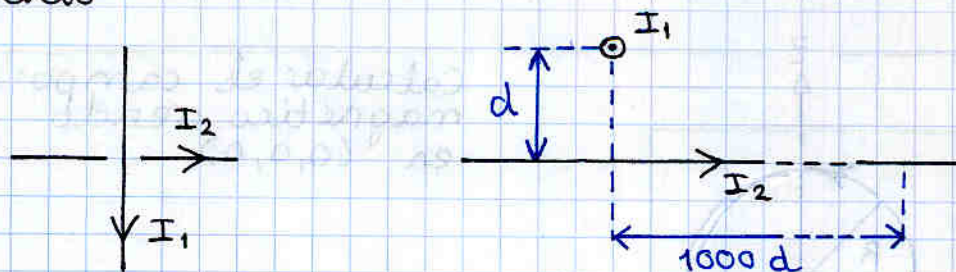
$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} (-\vec{r})$$

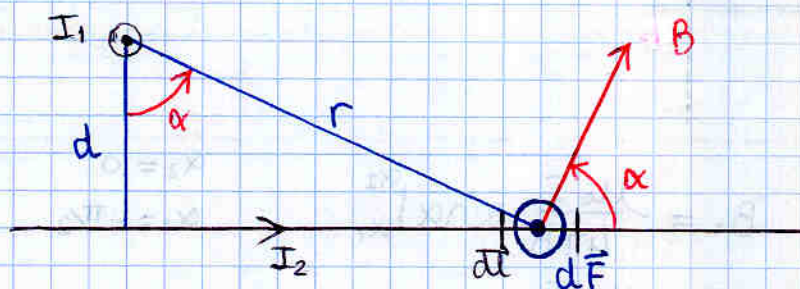
Superposición

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4R} \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right) \vec{r} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{r}$$

ejercicio



calcular la fuerza que ejerce 1 sobre la longitud $1000d$ de 2 mostrada en la figura.



$$d\vec{F} = I_2 \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$dF = I_2 \cdot dl \cdot B \cdot \sin \alpha$$

$$dF = I_2 \cdot dl \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot \sin \alpha$$

$$dF = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \frac{\sin \alpha}{r} dl$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{1}{d} \rightarrow l = d \tan \alpha \\ dl = \frac{d}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ \cos \alpha = \frac{d}{r} \rightarrow r = \frac{d}{\cos \alpha} \end{array} \right.$$

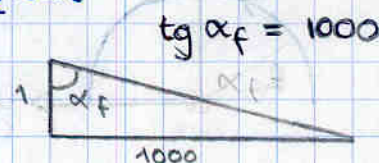
$$dF = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \frac{\sin \alpha}{d/\cos \alpha} \frac{d}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$dF = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha$$

$$F = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \int_0^{\arctan 1000} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha$$

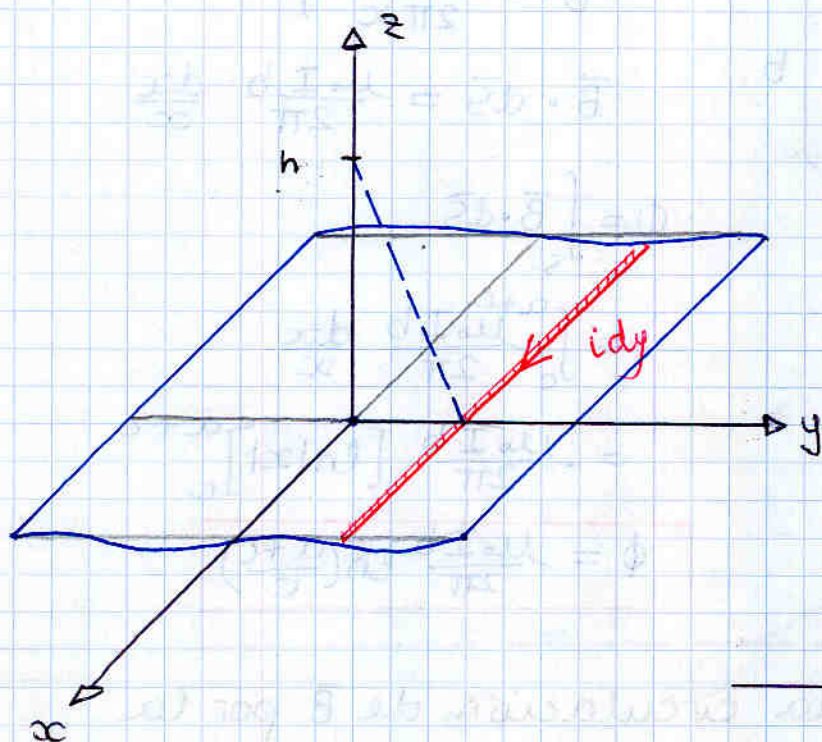
$$= \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \left[-\ln |\cos \alpha| \right]_0^{\arctan 1000}$$

$$= \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} (-\ln(\cos(\arctan 1000))) = 6.9078 \dots$$

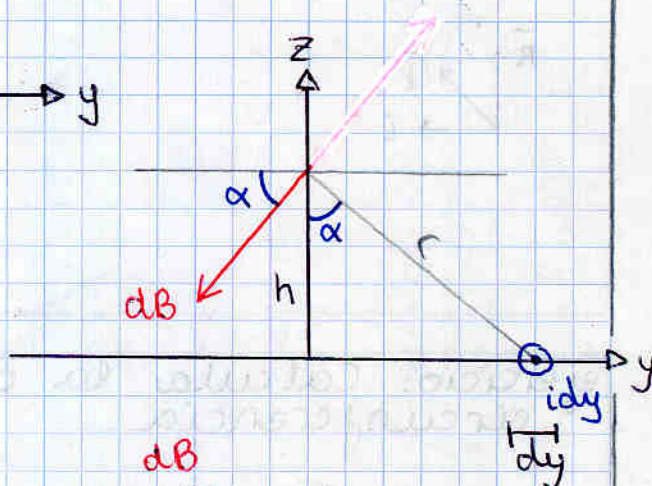


$$\vec{F} = 1.1 I_1 I_2 \mu_0 \vec{r}$$

ejercicio: Calcular el campo magnético creado por un plano infinito con una corriente i (A/m) a una distancia h .



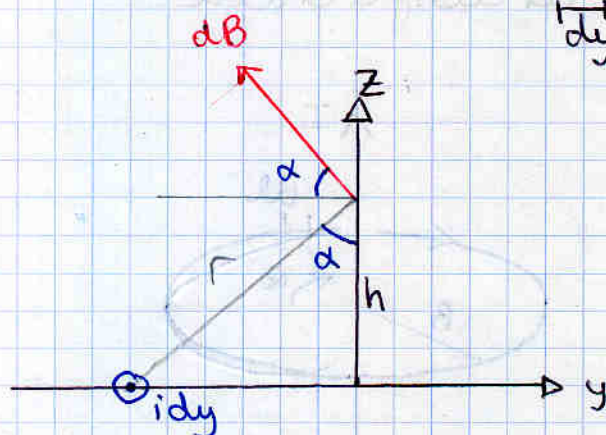
Hay que darse cuenta de que se anulan las componentes verticales



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i dy}{2\pi r} \quad \leftarrow \text{!} \times 2!$$

Para sumar los dB's sumamos su componente horizontal

$$dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\cos \alpha}{r} dy$$



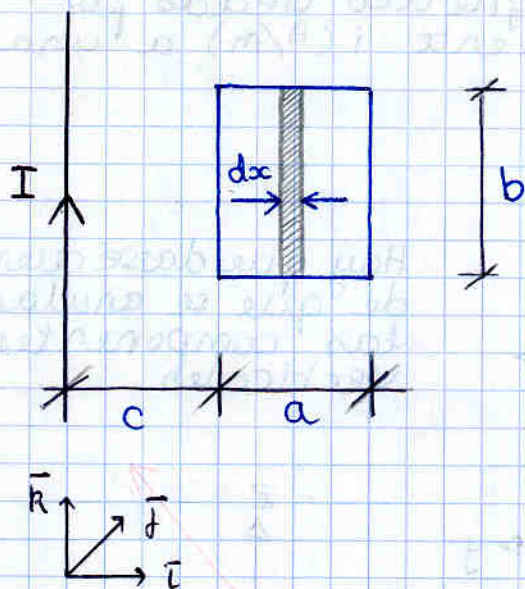
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int \frac{\cos \alpha}{r} dy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{y}{h} \rightarrow y = h \tan \alpha \rightarrow dy = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ \cos \alpha = \frac{h}{r} \rightarrow r = \frac{h}{\cos \alpha} \end{array} \right.$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{\frac{h}{\cos \alpha}} \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2} (-\vec{j})$$

ejercicio: Calcular el flujo de $\vec{B}$ a través de la superficie



$$d\vec{S} = b dx \vec{j}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{j}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dx}{x}$$

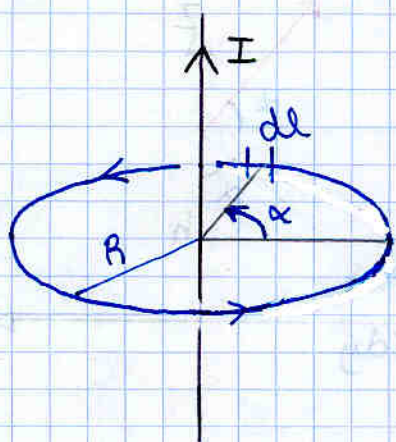
$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} [\ln|x|]_c^{a+c}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$

ejercicio: Calcular la circulación de $\vec{B}$ por la circunferencia



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$d\vec{l}$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{l}$$

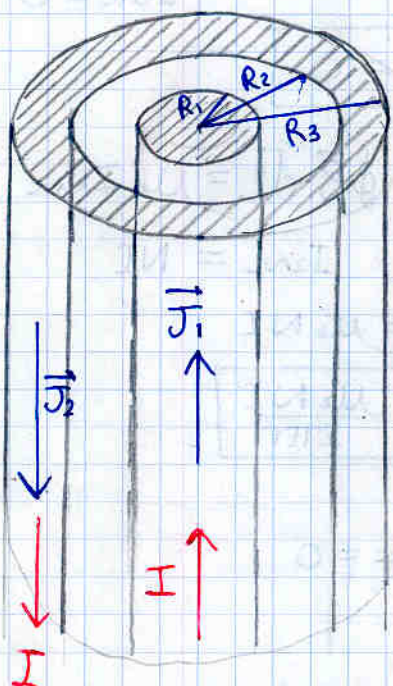
$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl$$

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$C = \mu_0 I$$

Campo magnético creado por un cable coaxial
utilizando el teorema de Ampère



$$B(r < R_1) \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B \parallel d\vec{l}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 J_1 \text{ Senarrada}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \frac{I}{\pi R_1^2} \cdot \pi r^2$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R_1^2}$$

$$B(r < R_1) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$B(R_1 < r < R_2)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$B(R_2 < r < R_3)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

$$B(R_2 < r < R_3) = \frac{\mu_0 I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)}{2\pi r}$$

$$I_{enc} = I - J_2 \text{ Senarrada}$$

$$= I - J_2 (\pi r^2 - \pi R_2^2)$$

$$= I - \frac{I}{(\pi R_3^2 - \pi R_2^2)} (\pi r^2 - \pi R_2^2)$$

$$= I - I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

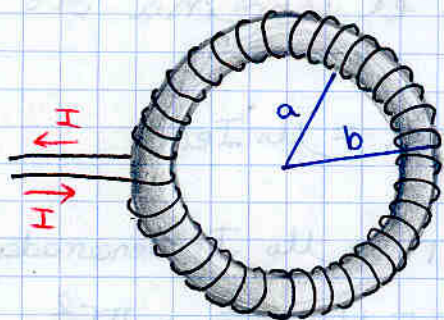
$$I_{enc} = I \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

$$B(r > R_3) \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$I_{enc} = I - I = 0$$

$$B(r > R_3) = 0$$

Campo magnético creado por un solenoide toroidal.



$$B(r < a)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$I_{enc} = 0$$

$$B(r < a) = 0$$

$$B(a < r < b)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$I_{enc} = NI$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B(a < r < b) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

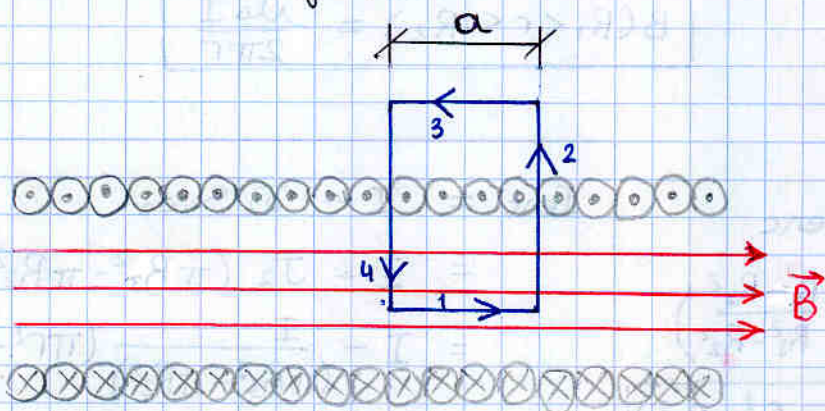
$$B(r > b)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$I_{enc} = 0$$

$$B(r > b) = 0$$

Ejercicio para calcular el campo exterior a un solenoide infinito



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I n a)$$

$$B \cdot a$$

$$+ B' a = \mu_0 I n a$$

Sabemos de ejemplos anteriores que el campo magnético en el centro de un solenoide es $B = \mu_0 I n$

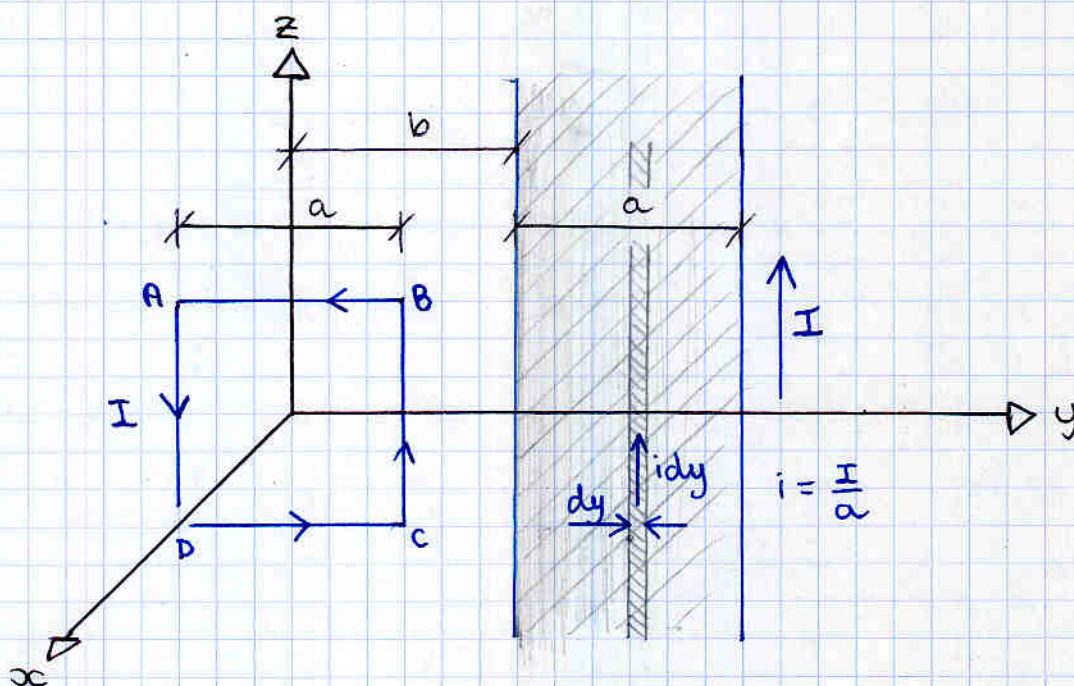
$$\mu_0 I n a + B' a = \mu_0 I n a$$

$$B' = 0$$

Problema de examen: calcular $\vec{B}$ en $(0,0,0)$

Espira cuadrada $\rightarrow$ lado a
 $\rightarrow$ entrada en el origen
 $\rightarrow$ circula una corriente I

Banda metálica $\rightarrow$ espesor despreciable
 $\rightarrow$ longitud infinita, anchura a
 $\rightarrow$ circula una corriente I
 $\rightarrow$ situada a distancia b del eje z .



Espira cuadrada

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(\frac{a}{2})} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1 = -\pi/4}^{\alpha_2 = \pi/4}$$

$$= 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

los 4 lados:

$$B_{\text{espira}} = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

Banda metálica

por hilos:

$$dB = \frac{\mu_0 idy}{2\pi y}$$

$$i = \frac{I}{a}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{dy}{y}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_b^{b+a} \frac{dy}{y}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{b+a}{b}$$

superposición

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (4\sqrt{2} + \ln \frac{b+a}{b}) \vec{i}$$

LECCION 3: INDUCCION ELECTROMAGNETICA

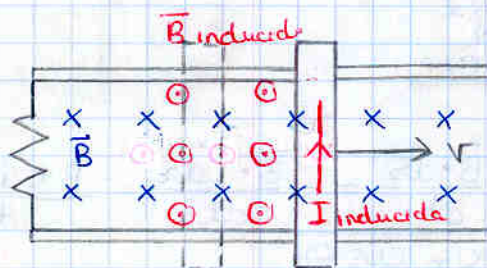
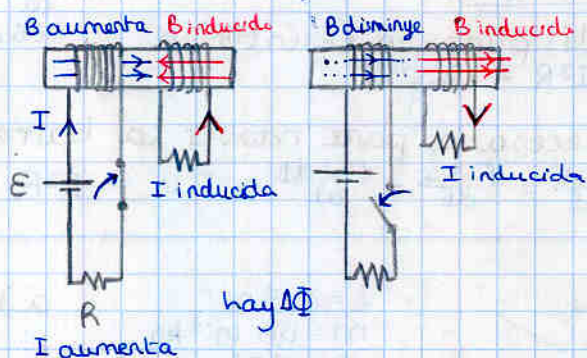
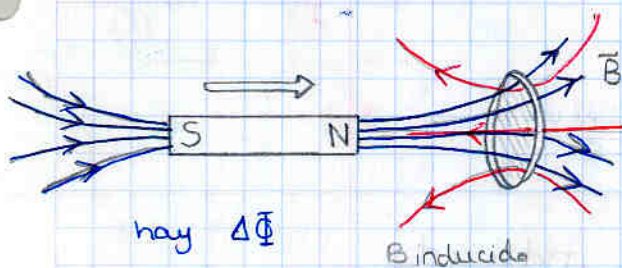
LEY DE FARADAY

- Es una ley experimental
- Si existe variación del flujo del campo magnético en una zona del espacio con el tiempo, aparece una fem inducida
- Si en esa zona del espacio hay un conductor, se provoca un movimiento de cargas libres: corriente eléctrica de intensidad I .

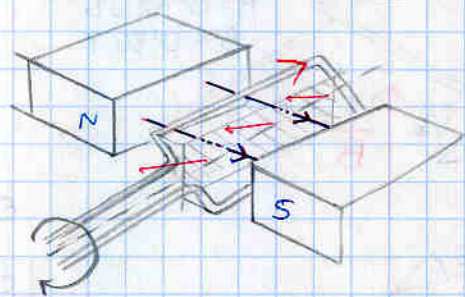
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Ley de Lenz:
El signo de la f.e.m. inducida es tal que se opone a la causa que lo produce

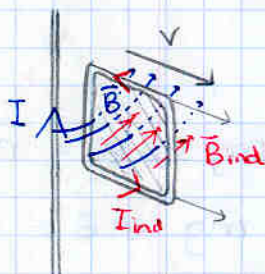
ejemplos:



hay $\Delta\Phi$ (area cambia)



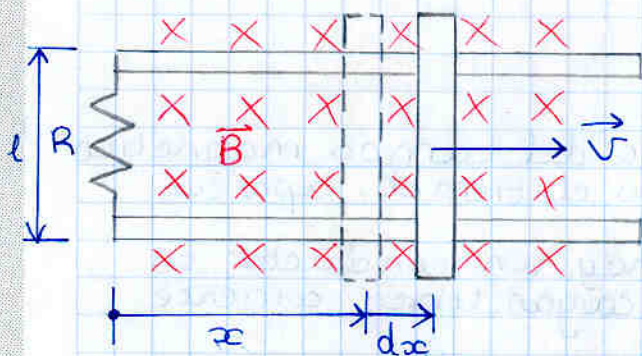
hay $\Delta\Phi$ (area perpendicular cambia)



hay $\Delta\Phi$ ($\vec{B}$ cambia)

- un campo magnético que varía con el tiempo induce un campo eléctrico no conservativo.

ejercicio



a) corriente inducida:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B l dx = B l v dt$$

$$\mathcal{E} = -B l v$$

como en el circuito hay una resistencia

$$R \quad \mathcal{E} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad I = -\frac{B l v}{R}$$

si hubiera un condensador en lugar de una resistencia:

$$C \quad \mathcal{E} \quad I = C \frac{d\mathcal{E}}{dt} = C \frac{d(-B l v)}{dt} \quad I = -C B l \frac{dv}{dt}$$

$$I = -C B l a$$

la dirección de I viene dada por la ley de Lenz
(B inducida contraria a B)



b) F sobre barra para v cte.

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} + \vec{F}_{\text{mag}} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}_{\text{mag}}$$

$$\vec{F} = -I \vec{l} \times \vec{B}$$

$$|F| = I l B = I l \frac{B R}{l v}$$

$$F = \frac{I^2 R}{v}$$

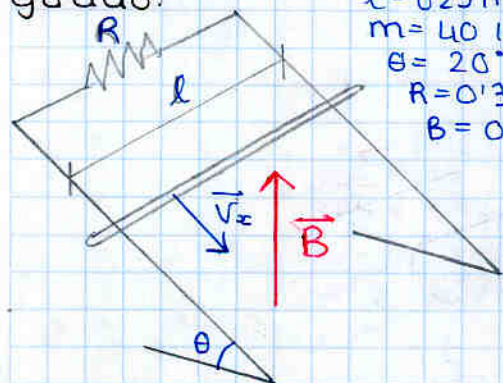
c) Pot disipada en resistencia

$$P = I^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

d) Pot necesaria para mover la barra

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx}{dt} = \frac{F v dt}{dt} = F v = I^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

ejercicio:



$$l = 0.25 \text{ m}$$

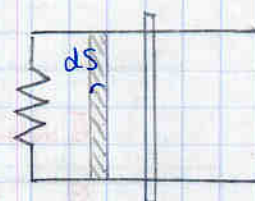
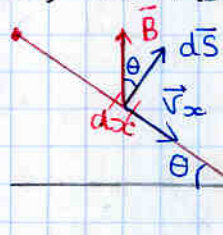
$$m = 40 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\theta = 20^\circ$$

$$R = 0.32 \Omega$$

$$B = 0.86 \text{ T}$$

a) I inducida



$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\vec{B} \cdot d\vec{S}}{dt} = -\frac{\vec{B} \cdot \vec{l} dx}{dt} = -\frac{B l dx \cos \theta}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -B l v_x \cos \theta$$

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$I_{\text{ind}} = -\frac{B l v_x \cos \theta}{R}$$

b) Velocidad máxima

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\text{en eje } x: -F_{\text{mag}} \cos \theta + mg \sin \theta = m a$$

$$-\frac{B^2 l^2 v_x \cos^2 \theta}{R} + mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt}$$

$$v_{\text{max}} \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

$$mg \sin \theta = \frac{B^2 l^2 v_{\text{max}} \cos^2 \theta}{R}$$

$$\vec{F}_{\text{mag}} = I \vec{l} \times \vec{B} = \frac{B l v_x \cos \theta}{R} l \cdot B$$

$$= \frac{B^2 l^2 v_x \cos \theta}{R}$$

$$v_{\text{max}} = \frac{mg \sin \theta R}{B^2 l^2 \cos^2 \theta}$$

Expresión diferencial de la Ley de Faraday

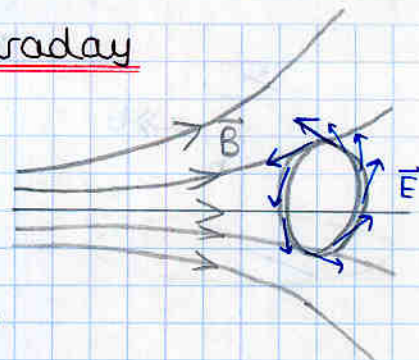
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

↓ (Tª Stokes)

$$\mathcal{E} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

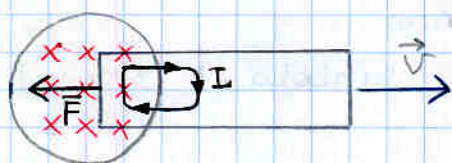


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

si $\vec{B}$ varía con el tiempo, se induce un campo eléctrico no conservativo (caso general de $\text{rot } \vec{E} = 0$)

Corrientes de Foucault

Son corrientes inducidas que aparecen en metales con una variación de flujo: ej metal moviéndose en un campo magnético, o metal en reposo en un $\vec{B}$ variando.



Aplicaciones:

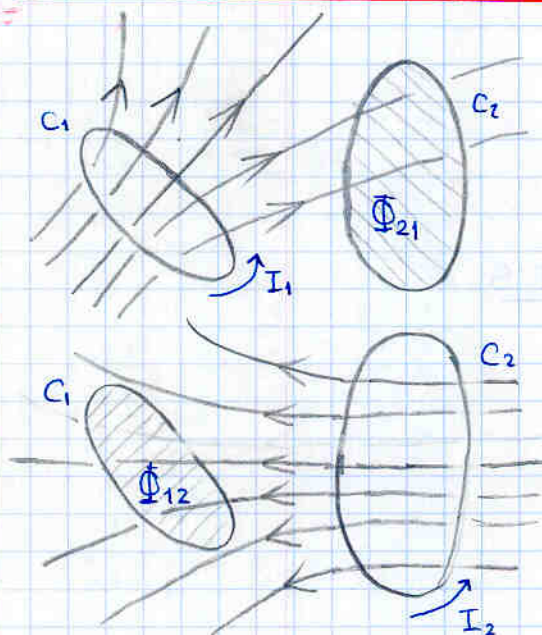
- Hornos de inducción
- Frenos magnéticos

En general estas corrientes son indeseables

En los transformadores se utilizan núcleos laminados para dificultar el paso de estas corrientes.



Coefficiente de inducción mutua



$$\Phi_{21} \propto I_1$$

$$\Phi_{21} = M I_1$$

//

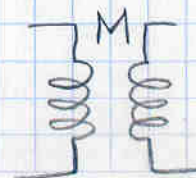
$$\Phi_{12} = M I_2$$

$$\Phi_{12} \propto I_2$$

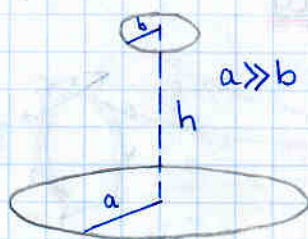
M: coeficiente de inducción mutua

Henrio (H)

Símbolo



ejercicio: Calcular M



Dos formas:

$$I_a \rightarrow B_a \rightarrow \Phi_b \rightarrow M = \frac{\Phi_b}{I_a}$$

$$I_b \rightarrow B_b \rightarrow \Phi_a \rightarrow M = \frac{\Phi_a}{I_b}$$

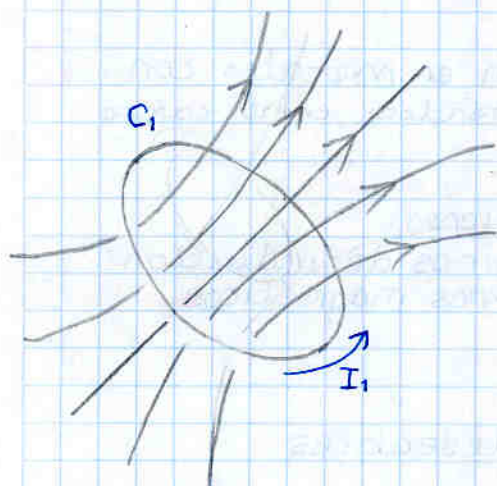
sólo una es fácil, porque B_a se puede considerar cte $\forall b$

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a r^2}{2(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

$$\Phi_b = B_a \cdot S = \frac{\mu_0 I_a a^2}{2(a^2 + h^2)^{3/2}} \pi b^2$$

$$M = \frac{\Phi_b}{I_a} = \frac{\pi \mu_0 a^2 b^2}{2(a^2 + h^2)^{3/2}}$$

Coefficiente de autoinducción



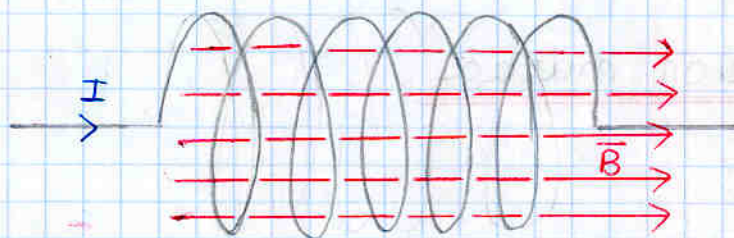
$$\Phi_{11} \propto I_1$$

$$\Phi_{11} = L I_1$$

L: coeficiente de autoinducción
Henrio

símbolo

ejercicio: Calcular L de una bobina



$$B = \mu_0 I n$$

$$n = \frac{N}{l}$$

nº espiras por
unidad
long.

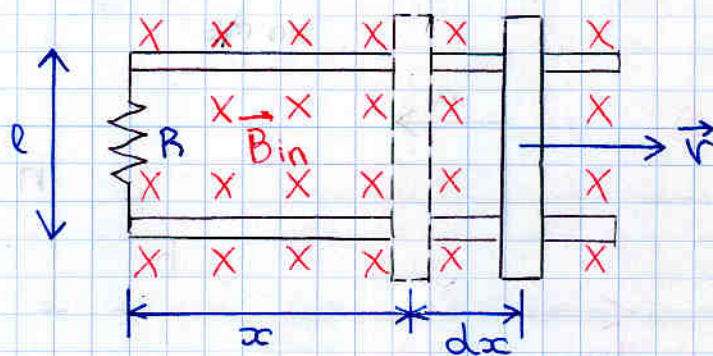
$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

$$\Phi = B S N$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 I S}{l}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

ejercicio



a) corriente inducida:

$$d\phi \rightarrow -\frac{d\phi}{dt} = \mathcal{E} \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\begin{aligned} d\phi &= \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= B \cdot l \cdot dx \\ &= B \cdot l \cdot v \cdot dt \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -B \cdot l \cdot v$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B l v}{R}$$

¿dirección?

El flujo está aumentando, la I inducida se opondrá a ese aumento creando un campo magnético hacia fuera del papel. I irá así ↻

b) Fuerza sobre barra para v cte:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \\ \vec{F} + \vec{F}_{\text{mag}} &= 0 \\ \vec{F} &= -\vec{I} l \times \vec{B} \end{aligned}$$

$$F = I l B = I l \frac{I R}{l v}$$

$$F = \frac{I^2 R}{v}$$

c) Potencia necesaria para mover la barra.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F dx}{dt} = \frac{F \cdot v \cdot dt}{dt} = F \cdot v = \frac{I^2 R}{v} \cdot v$$

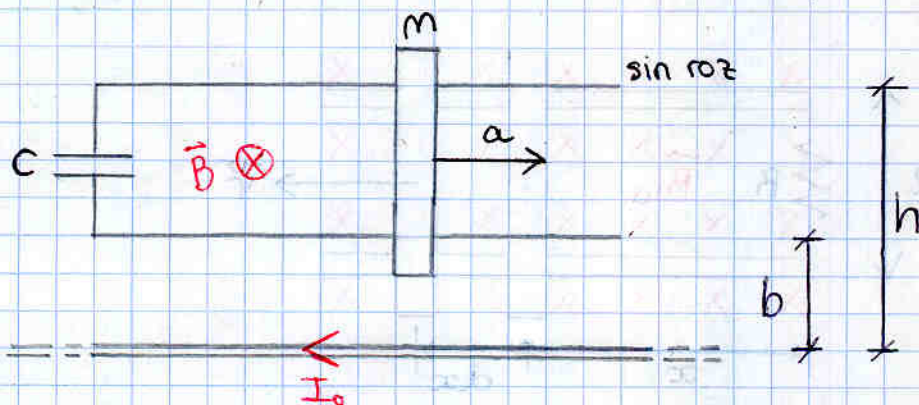
$$P = I^2 R$$

$$P = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

d) Potencia disipada en la resistencia

$$P = I^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

Ejercicio:



a) I inducida

Tomando tiras horizontales:

$$dS = x dy$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi y}$$

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I_0 x}{2\pi} \int_b^h \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I_0 x}{2\pi} \ln \frac{h}{b}$$

Derivamos respecto del tiempo

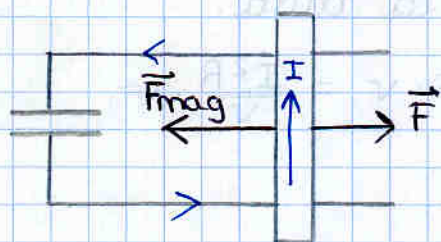
$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{\mu_0 I_0 \ln(h/b)}{2\pi} x \right)^{v dt} = \frac{\mu_0 I_0 \ln(h/b) v}{2\pi}$$

$$I \neq \mathcal{E}/R \quad \Delta$$

$$Q = CV \rightarrow I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

$$I = C \frac{\frac{\mu_0 I_0 \ln(h/b) v}{2\pi}}{dt} = C \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{h}{b} a$$

b) Fuerza sobre la barra para que a cte



$$\vec{F} + \vec{F}_{mag} = m\vec{a}$$

$$F - F_{mag} = ma$$

$$F = F_{mag} + ma$$

$$F_{mag} \quad d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad dl \perp B$$

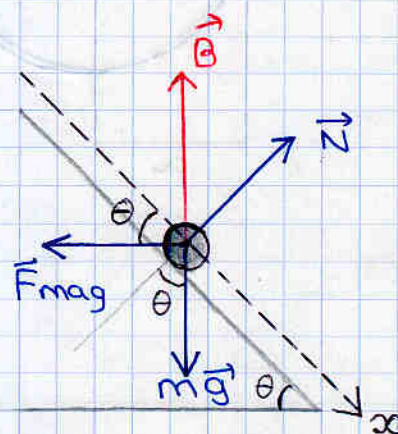
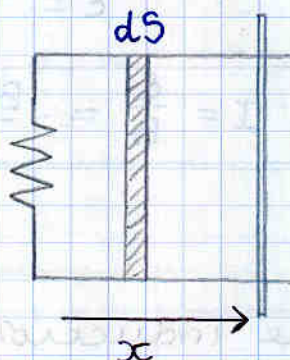
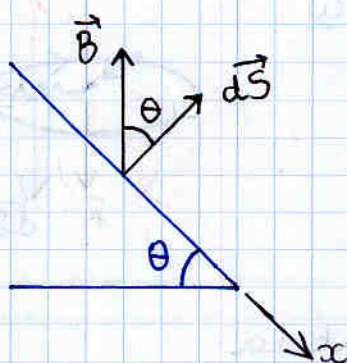
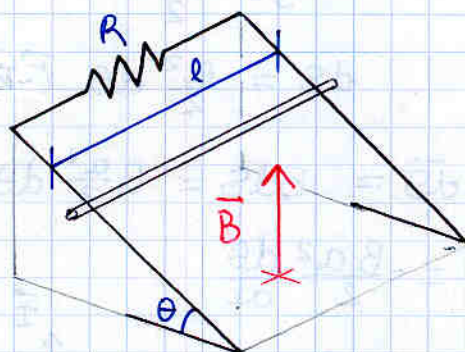
$$dF = I dl B$$

$$= I dy \frac{\mu_0 I_0}{2\pi y}$$

$$F = I \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_b^h \frac{dy}{y} = \frac{I_{ind} \mu_0 I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{h}{b} \right)$$

Ejercicio: Calcular $V_x \max$

$$\begin{aligned} l &= 0.25 \text{ m} \\ m &= 40 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \\ \theta &= 20^\circ \\ R &= 0.32 \Omega \\ B &= 0.86 \text{ T} \end{aligned}$$



eje x : $-F_{\text{mag}} \cos \theta + mg \sin \theta = ma = m \frac{dv}{dt}$

$$v_{\text{max}} \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

$$F_{\text{mag}} \cos \theta = mg \sin \theta$$

F_{mag} : $F_{\text{mag}} = I \vec{l} \times \vec{B} \quad l \perp B$
 $= IlB$

I_{ind} : $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot ds \cdot \cos \theta$
 $= B \cdot l dx \cos \theta$

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} = Bl v_x \cos \theta$$

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bl v_x \cos \theta}{R}$$

$$F_{\text{mag}} = IlB$$

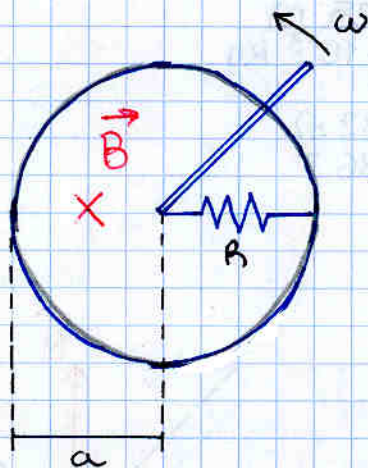
$$F_{\text{mag}} = \frac{B^2 l^2 v_x \cos \theta}{R}$$

$$\frac{B^2 l^2 v_x^{\text{max}} \cos^2 \theta}{R} = mg \sin \theta$$

$$v_{\text{max}x} = \frac{R mg \sin \theta}{B^2 l^2 \cos^2 \theta} = \frac{0.32 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 9.81 \cdot \sin 20^\circ}{0.86^2 \cdot 0.25^2 \cdot \cos^2 20^\circ}$$

$$v_x^{\text{max}} = 1.052 \text{ ms}^{-1}$$

Ejercicio: Calcular I_{ind}



$$dS: \quad \frac{\pi a^2}{S} \rightarrow \frac{2\pi}{\theta}$$

$$S = \frac{a^2 \theta}{2}$$

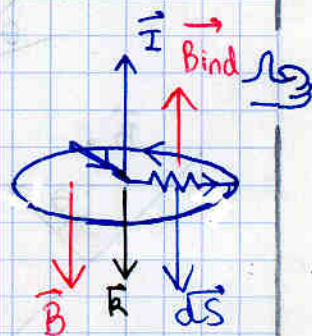
$$dS = \frac{a^2}{2} d\theta \vec{R}$$

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = B \frac{a^2}{2} d\theta$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{B a^2}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{B a^2 \omega}{2}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{B a^2 \omega}{2R}$$



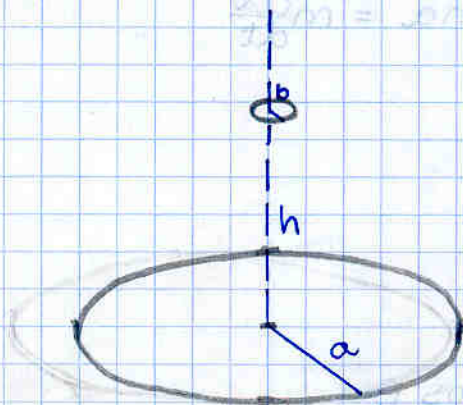
Calcular coeficiente de inducción mutua

$$a \gg b$$

Hay 2 formas que dan el mismo resultado:

$$I_a \rightarrow B_a \rightarrow \Phi_b = \int_{S_b} \vec{B}_a \cdot d\vec{S} \rightarrow M = \frac{\Phi_b}{I_a}$$

$$I_b \rightarrow B_b \rightarrow \Phi_a = \int_{S_a} \vec{B}_b \cdot d\vec{S} \rightarrow M = \frac{\Phi_a}{I_b}$$



Elegimos la primera forma ya que al ser $a \gg b$, podemos considerar b como un punto en el eje de a , y B_a cte $\forall S_b$ y B_a conocido.

$$I_a \rightarrow B_a \text{ en el eje} \quad B_a = \frac{\mu_0 I_a r^2}{2(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

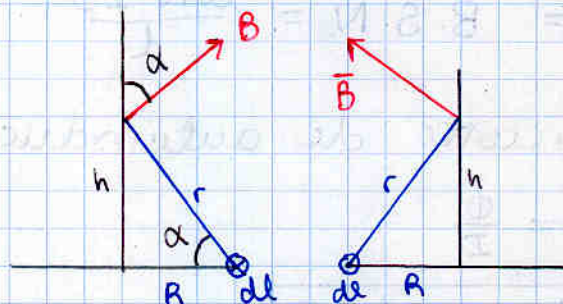
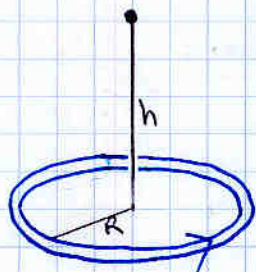
$$\Phi_b = B_a \cdot S_b = \frac{\mu_0 I_a a^2}{2(a^2 + h^2)^{3/2}} \cdot \pi b^2$$

$$M = \frac{\Phi_b}{I_a} = \frac{\mu_0 a^2 \pi b^2}{2(a^2 + h^2)^{3/2}}$$

Calcular L bobina

a) Calcular B bobina

(i) Calcular B en el eje de una espira



se cancelan las componentes horizontales

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad dl \perp r$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2}$$

$$B = \int dB \cos \alpha = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int \cos \alpha \, dl$$

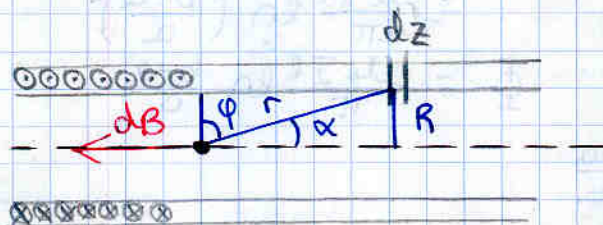
$$B = \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$B = \frac{\mu_0 I \cos \alpha R}{2r^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} \vec{R}}$$

(ii) Calcular B en el eje de una bobina



$$dB = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3} n \, dz$$

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2 n}{2} \frac{R/\cos^2 \phi \, d\phi}{R^3/\cos^3 \phi} = \frac{\mu_0 I n}{2} \cos \phi \, d\phi$$

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos \phi \, d\phi = \frac{\mu_0 I n}{2} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$n = \frac{N}{l}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I N}{2l} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}}$$

(iii) suponiendo un solenoide muy largo, B en el centro.

$$B = \mu_0 I n = \frac{\mu_0 I N}{l}$$

b) Flujo a través de la bobina (tomando $\vec{B}$ de igual al del centro)

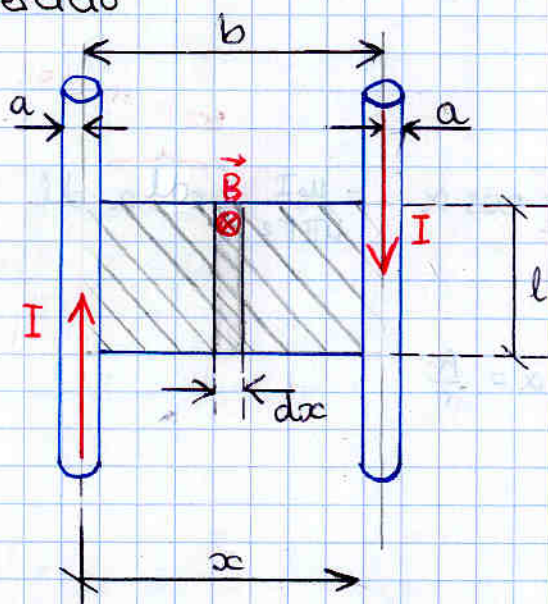
$$\Phi = B \cdot S \cdot N = \frac{\mu_0 N^2 I S}{l}$$

c) coeficiente de autoinducción

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

Ejercicio



$a \ll b$
Se pide L/l

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (b-x)}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right)$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_{b-a} = \int B l dx$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{b-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{x}{b-x} \Big|_a^{b-a}$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\ln \frac{b-a}{a} - \ln \frac{a}{b-a} \right)$$

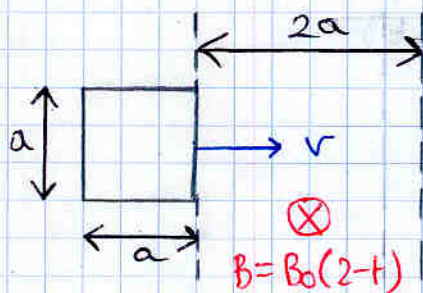
$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \left(\frac{b-a}{a} \right)^2$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\Phi/I}{l} = \frac{l \mu_0}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b-a}{a}$$

ejercicio:



$$a = 0.2 \text{ m}$$

$$v = 2 \text{ ms}^{-1}$$

$$R = 2 \Omega$$

a)



$$d\Phi_1 = B \cdot dS = B \cdot dx \cdot a$$

$$d\Phi_1 = B_0(2-t) a \, dx$$

$$\Phi_1 = \int_0^x B_0(2-t) a \, dx = \frac{B_0(2-t) a x}{1} = B_0 a x (2-t)$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \left[-B_0 a x + B_0 a (2-t) \frac{dx}{dt} \right]$$

$$= B_0 a (x - (2-t)v)$$

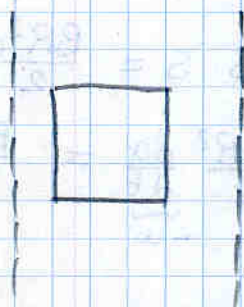
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_0 a}{R} (x - (2-t)v)$$

$$= \frac{B_0 a}{R} (x - 2v + vt)$$

$$= \frac{B_0 a}{R} (2vt - 2v)$$

$$I(t) = \frac{B_0 a 2v}{R} (t - 1)$$

b)



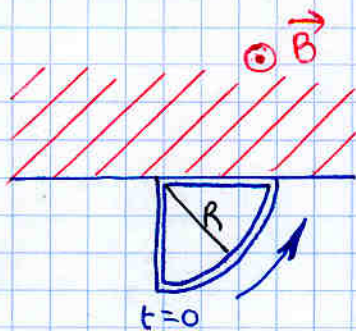
$$d\Phi_2 = B dS = B_0(2-t) a^2$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = B_0 a^2$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_0 a^2}{R}$$

c) (similar a a)

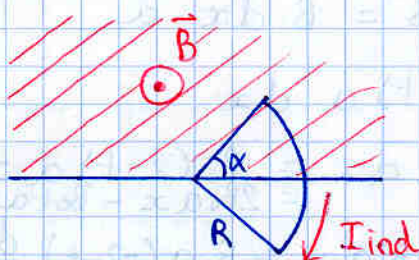
ejercicio



$\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
se pide $\mathcal{E}(t)$

caso 1

$$0 < t < \frac{\pi}{2\omega}$$



$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S = B \cdot \frac{R^2 \alpha}{2}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{BR^2}{2} \frac{d\alpha}{dt} = - \frac{BR^2 \omega}{2}$$

caso 2

$$\frac{\pi}{2\omega} < t < \frac{\pi}{\omega}$$

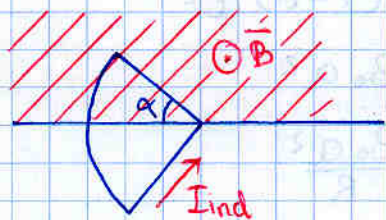


$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S = \frac{B \cdot R^2 \pi}{2} \quad (\text{cte})$$

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} = 0$$

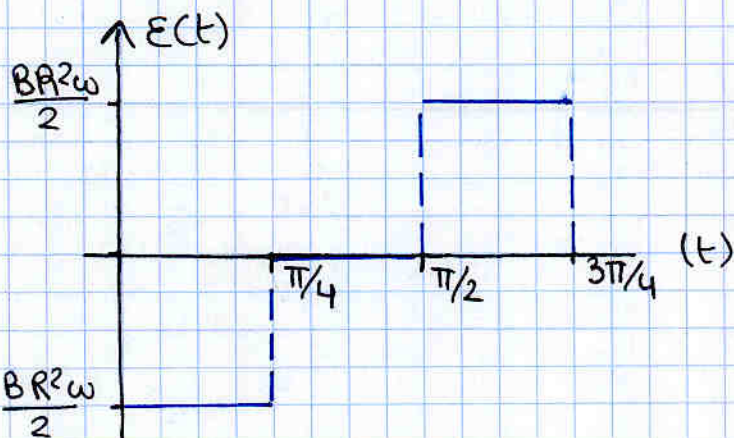
caso 3

$$\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{3\pi}{2\omega}$$



$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S = \frac{BR^2 \alpha}{2}$$

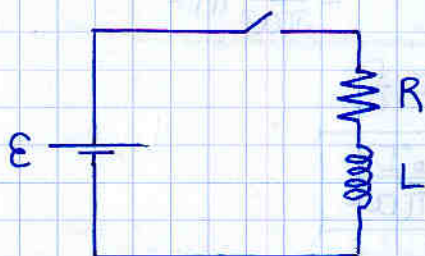
$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{BR^2}{2} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{BR^2 \omega}{2}$$



Densidad de energía magnética

$$w = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

Ejemplo (demostración en un solenoide largo)



$$IR + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}$$

también se puede ver como:

$$\sum \mathcal{E} = i \sum R$$

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = iR$$

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = iR$$

↑ ley del
Lenz ley del
Faraday

Balance energético:

$$\underbrace{\mathcal{E}_i dt}_{\text{E del generador}} = \underbrace{L i di}_{\text{energía consumida en incrementar } i \text{ en } di} + R i^2 dt$$

$$dW = L i di$$

$$W = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

para un solenoide largo

$$L = \mu_0 n^2 S l \quad B = \mu_0 n I \quad W = \frac{1}{2} L I^2$$

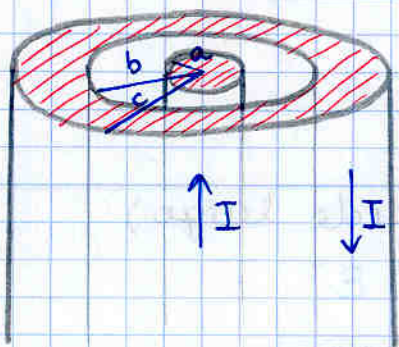
$$W = \frac{1}{2} L I \rightarrow W = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 S l) \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2$$

$$W = \frac{S l B^2}{2 \mu_0}$$

$$w = \frac{W}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + IR$$

ejercicio: cable coaxial



a) campo magnético en función de r (hecho anteriormente)

• $B(r < a)$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B \parallel d\vec{l}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2}$$

$$I_{enc} = I \cdot S_{enc} = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2$$

$$B(r < a) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

• $a < r < b$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B(a < r < b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

• $B(b < r < c)$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

$$B(b < r < c) = \frac{\mu_0 I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)}{2\pi r}$$

$$\begin{aligned} I_{enc} &= I_1 - I_2 \\ &= I - I_2 S_{enc} \\ &= I - \frac{I}{\pi c^2 - \pi b^2} (\pi r^2 - \pi b^2) \\ &= I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \end{aligned}$$

• $B(r > c)$

$$I_{enc} = I - I$$

$$B(r > c) = 0$$

b) Densidad de energía

$$w = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$w(r < a) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\right)^2}{\mu_0} = \frac{1}{8} \frac{I^2 r^2 \mu_0}{\pi^2 a^4}$$

$$w(a < r < b) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2}{\mu_0} = \frac{1}{8} \frac{I^2 \mu_0}{\pi^2 r^2}$$

$$w(b < r < c) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\mu_0 I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)}{2\pi r}\right)^2}{\mu_0} = \frac{1}{8} \frac{\mu_0 I^2 \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)^2}{\pi^2 r^2}$$

$$w(r > c) = \frac{1}{2} \frac{(0)^2}{\mu_0} = 0$$

c) Coeficiente de autoinducción por unidad de longitud (L/l)

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow L = \frac{2W}{I^2} \rightarrow \boxed{\frac{L}{l} = \frac{2W}{l I^2}}$$

$$W_1 = \iiint w_1 dv$$

$$\boxed{V = \pi r^2 l}$$
$$\boxed{dV = 2\pi r l dr}$$

$$W_1 = \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4a^4 \pi} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

$$W_2 = \int_a^b \frac{1}{r} \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

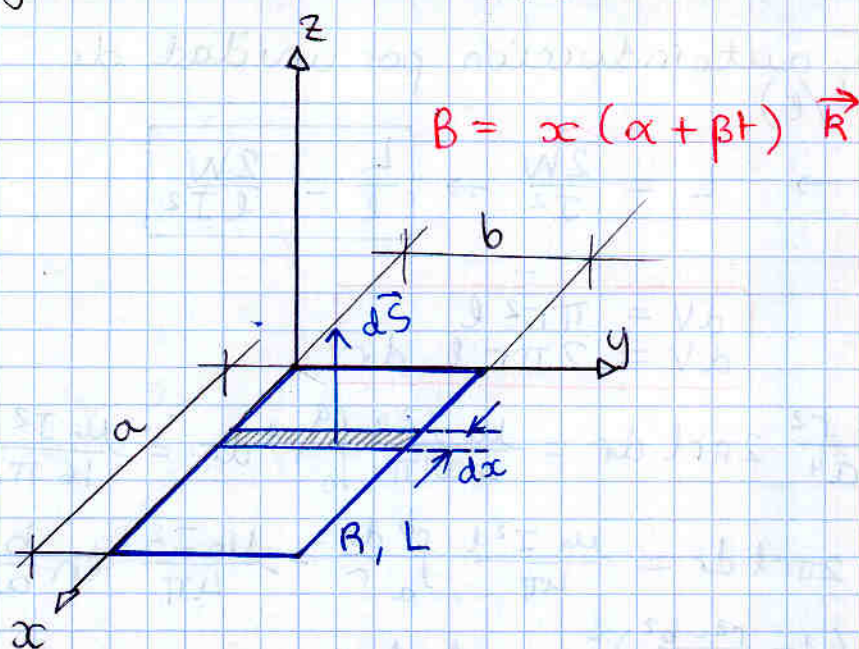
$$W_3 = \int_b^c \frac{\mu_0 I^2 (1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2})^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \dots$$

$$W_4 = 0$$

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$\frac{L}{l} = \frac{2W_T}{l I^2}$$

ejercicio calcular Inducida



$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{B} = (\alpha + \beta t)x \vec{k}$$

$$d\vec{S} = b dx \vec{k}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = b(\alpha + \beta t)x dx$$

$$\Phi = \int_0^a b(\alpha + \beta t)x dx$$

$$= b(\alpha + \beta t) \int_0^a x dx$$

$$\Phi = b(\alpha + \beta t) \frac{a^2}{2}$$

$$\mathcal{E}_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\beta b a^2}{2}$$

$$\mathcal{E}_{ind} = IR + L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{\beta b a^2}{2} - IR = L \frac{dI}{dt}$$

$$\beta b a^2 - 2IR = 2L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{L}{R} \frac{dI}{dt} = \frac{\beta b a^2}{2R} - I$$

$$\int_0^I \frac{dI}{\frac{\beta b a^2}{2R} - I} = \int_0^t \frac{R}{L} dt$$

$$\left[\ln \left| \frac{\beta b a^2}{2R} - I \right| \right]_0^I = -\frac{Rt}{L}$$

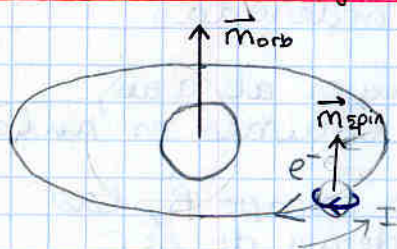
$$\ln \left(\frac{\frac{\beta b a^2}{2R} - I}{\frac{\beta b a^2}{2R}} \right) = -\frac{Rt}{L}$$

$$\frac{\beta b a^2}{2R} - I = \frac{\beta b a^2}{2R} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$I(t) = \frac{\beta b a^2}{2R} \left[1 - e^{-t/L} \right]$$

LECCION 4: PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA

Materiales magnéticos



Los átomos tienen electrones en movimiento a su alrededor.

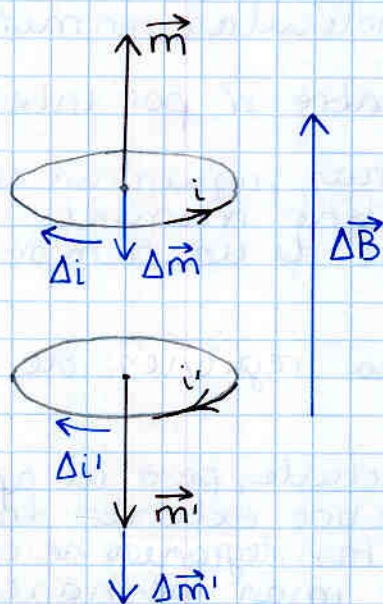
Los electrones también rotan alrededor de su eje: spin

Ambos equivalen a una corriente eléctrica ligada al átomo caracterizada por su momento magnético.

Diamagnetismo

La mayor parte de sustancias están formados por moléculas o iones en los cuales los momentos magnéticos de los átomos se anulan entre sí.

Por lo tanto, un elemento de volumen dV no manifiesta ningún momento magnético; la sustancia no está imantada. Se llama un material diamagnético.



Supongamos un campo exterior que aumenta desde 0 hasta $\vec{B}$. La variación de flujo que atraviesa cada corriente atómica induce en ella una f.e.m. que la modifica.

Esta modificación tiene el mismo sentido en todas las corrientes atómicas.

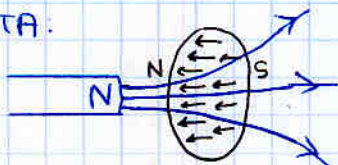
Aparece un momento magnético resultante no nulo en cada molécula, opuesto, según la Ley de Lenz, al campo exterior que lo crea.

Aparece un momento magnético en cada elemento de volumen, de sentido opuesto al campo magnético exterior.

NOTA: El diamagnetismo se presenta en cualquier tipo de materia, aunque sólo es apreciable su efecto en sustancias cuyas moléculas tienen momento magnético nulo.

En sustancias paramagnéticas o ferromagnéticas el comportamiento diamagnético se ve enmascarado por otros fenómenos más intensos.

NOTA:

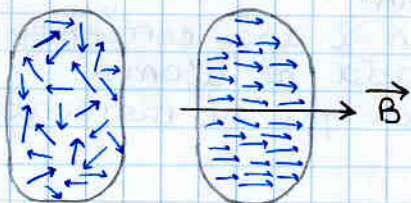


aparece una débil fuerza de repulsión

Paramagnetismo

ejs: oxígeno, aluminio.

- Sustancias formadas por iones o moléculas con momento magnético no nulo.
- Sin embargo, la interacción magnética de unas moléculas con otras es débil, por lo que están ordenadas independientemente.
- Los momentos magnéticos se distribuyen al azar, el momento magnético neto de un volumen es nulo.



- Si se aplica un campo $\vec{B}$, las orientaciones dejan de ser aleatorias y tienden a tomar la dirección y sentido de $\vec{B}$.
- Cada elemento de volumen tiene un momento magnético no nulo en dirección y sentido de $\vec{B}$.

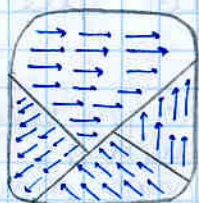
Al retirar el campo los momentos magnéticos vuelven a orientarse al azar.

Ferromagnetismo

ejs: hierro, cobalto, níquel

- Sustancias formadas por iones o moléculas con momento magnético resultante no nulo.
- Dichos momentos están acoplados entre sí por interacciones muy fuertes.
- Sus orientaciones no son aleatorias, siguen un orden.
- Una porción macroscópica puede tener momento magnético no nulo en ausencia de un campo externo.

Las orientaciones se distinguen por dominios de unos 10^6 átomos.



Se verá en más detalle, pero al aplicar un campo magnético exterior las fronteras de ciertos dominios se expanden. Es irreversible $\rightarrow$ imán permanente.

Intensidad de imantación

Cuando una porción de materia adquiere un momento magnético no nulo, se dice que está imantada.

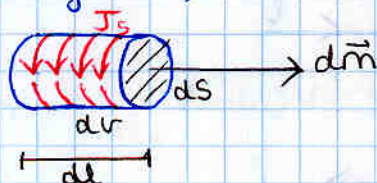
Vector intensidad de imantación

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv}$$



$$[M] = A/m$$

Este momento magnético es equivalente al que crearía una intensidad ficticia de densidad J_s (intensidad por unidad de longitud)



en los ejercicios se utiliza esta intensidad ficticia porque es más fácil para los cálculos

definición $\vec{m}$

$$\vec{m} = \int \vec{I} \cdot \vec{S}$$

$$d\vec{m} = dI \cdot d\vec{S}$$

Relación entre J_s y M

$$J_s = \frac{dI}{dl}$$

$$dI = J_s dl$$

definición $\vec{M}$

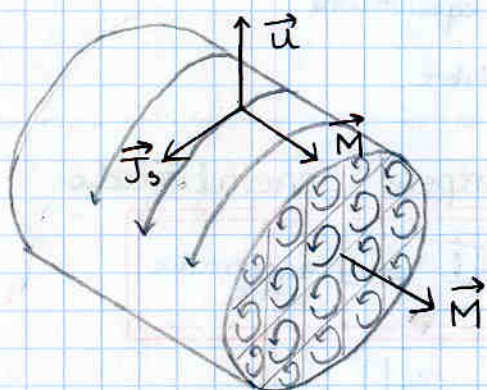
$$d\vec{m} = \vec{M} \cdot dv$$

$$d\vec{m} = \vec{M} \cdot dS \cdot dl$$

$$d\vec{m} = J_s dl d\vec{S}$$

$$\vec{J}_s = \vec{M}$$

Si M es uniforme, las corrientes equivalentes de los dv adyacentes se cancelan. En el interior no hay corriente efectiva, pero en la superficie sí.



$$\vec{J}_s = \vec{M} \times \vec{u}$$

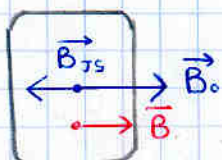
unitario perpendicular a la superficie

Campo magnético en material imantado:

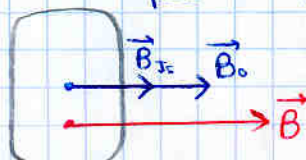
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{J_s}$$

campo aplicado

campo creado por la imantación



diamagnético



paramagnético

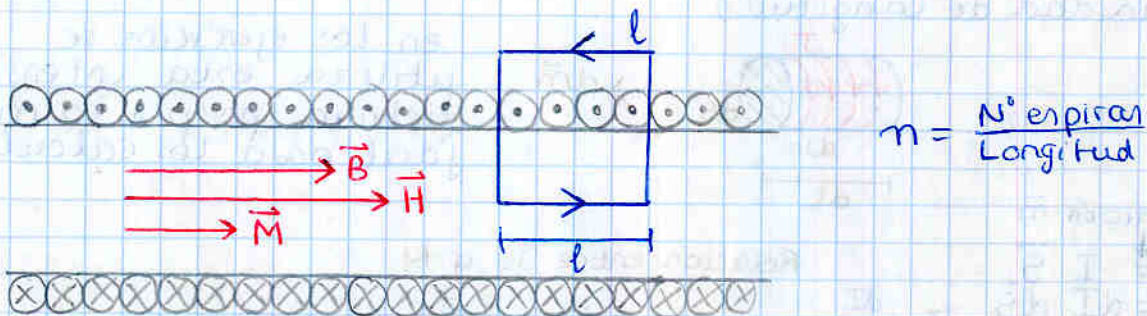
Excitación magnética

Def: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ $[H] = A/m$

mientras $\vec{B}$ depende de las corrientes libres y equivalentes, $\vec{H}$ esta asociado unicamente a las corrientes libres.

Teorema de Ampere Generalizado

ejercicio 'de demostración'



calcular $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ a lo largo de la trayectoria mostrada

$$\begin{aligned}\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} - \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} - \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mu_0 I_{\text{enc}} - J_s l \\ &= I_{\text{enc}} - J_s l \\ &= l \cdot n \cdot I + \cancel{J_s l} - \cancel{J_s l} \\ &= l n I_{\text{libre}}\end{aligned}$$

T^a de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encerrada total}}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{total}}$$

T^a de Ampere Generalizado

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{encerrada libre}}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}}$$

Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas

La imantación $\vec{M}$ depende $\rightarrow$ de $\vec{H}$
 $\rightarrow$ del material

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$$

$\chi \equiv$ susceptibilidad magnética (cte adimensional)

- ↳ diamagnético: < 0 valor pequeño
- ↳ paramagnético: > 0 valor pequeño
- ↳ ferromagnético: > 0 muy grande $\rightarrow$ no cte $\chi(H)$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$= \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H})$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$\mu \equiv$ cte de permeabilidad del material $[\mu] = [\mu_0]$

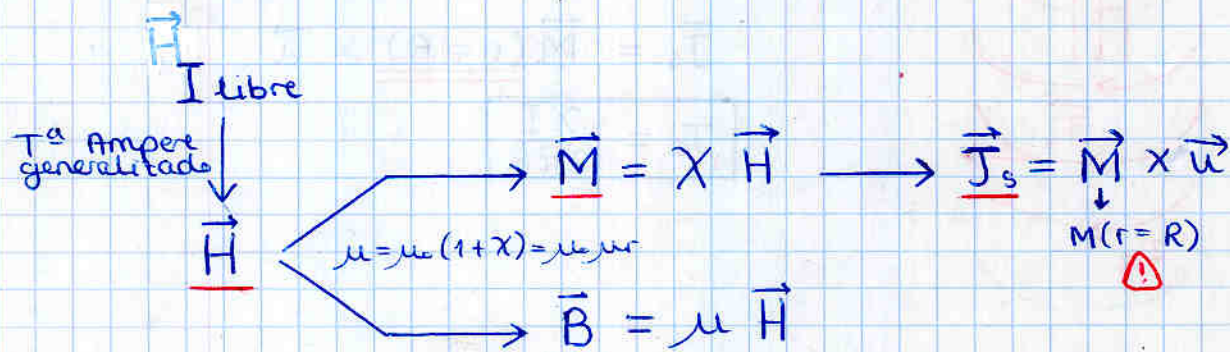
	Diam	Param	Ferrom
χ	-	+	++ (cte)
μ	$< \mu_0$	$> \mu_0$	$\gg \mu_0$ (cte)
μ_r	< 1	> 1	$\gg 1$ (cte)

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) = \mu_0 \mu_r$$

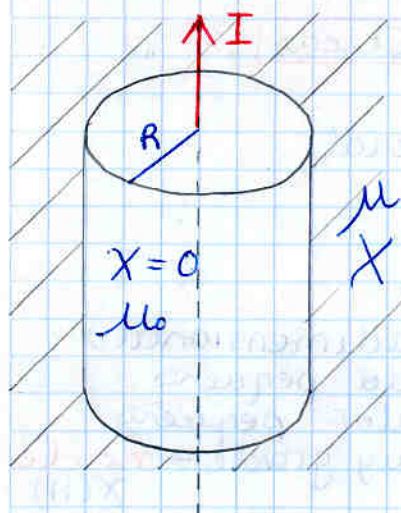
$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi)$$

$\mu_r \equiv$ permeabilidad magnética relativa (adimensional)

Procedimiento en problemas:



Problema



Calcular

$H(r)$

excitación magnética

$B(r)$

campo magnético

$M(r)$

vector imantación

J_s

Corriente equivalente p.u. de longitud

- $H(r)$ por T^a Ampere generalizado

$$r < R \quad I_{enc} = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = I_{enc} = \frac{I r^2}{R^2}$$

$$H(r < R) = \frac{I r}{2\pi R^2}$$

$$r > R$$

$$H \cdot 2\pi r = I_{enc}$$

$$H(r > R) = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B(r) = \mu H$$

$$B(r < R) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$$B(r > R) = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$M(r) = \chi \cdot H$$

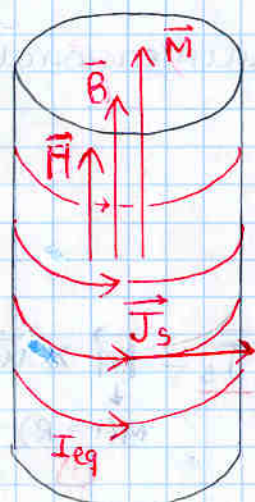
$$M(r < R) = 0$$

$$M(r > R) = \frac{\chi I}{2\pi r}$$

$$\vec{J}_s = \vec{M} \times \vec{u}$$

$$\vec{J}_s = \vec{M}(r=R) \times \vec{u}$$

$$J_s = \frac{\chi I}{2\pi R}$$



Ferromagnetismo

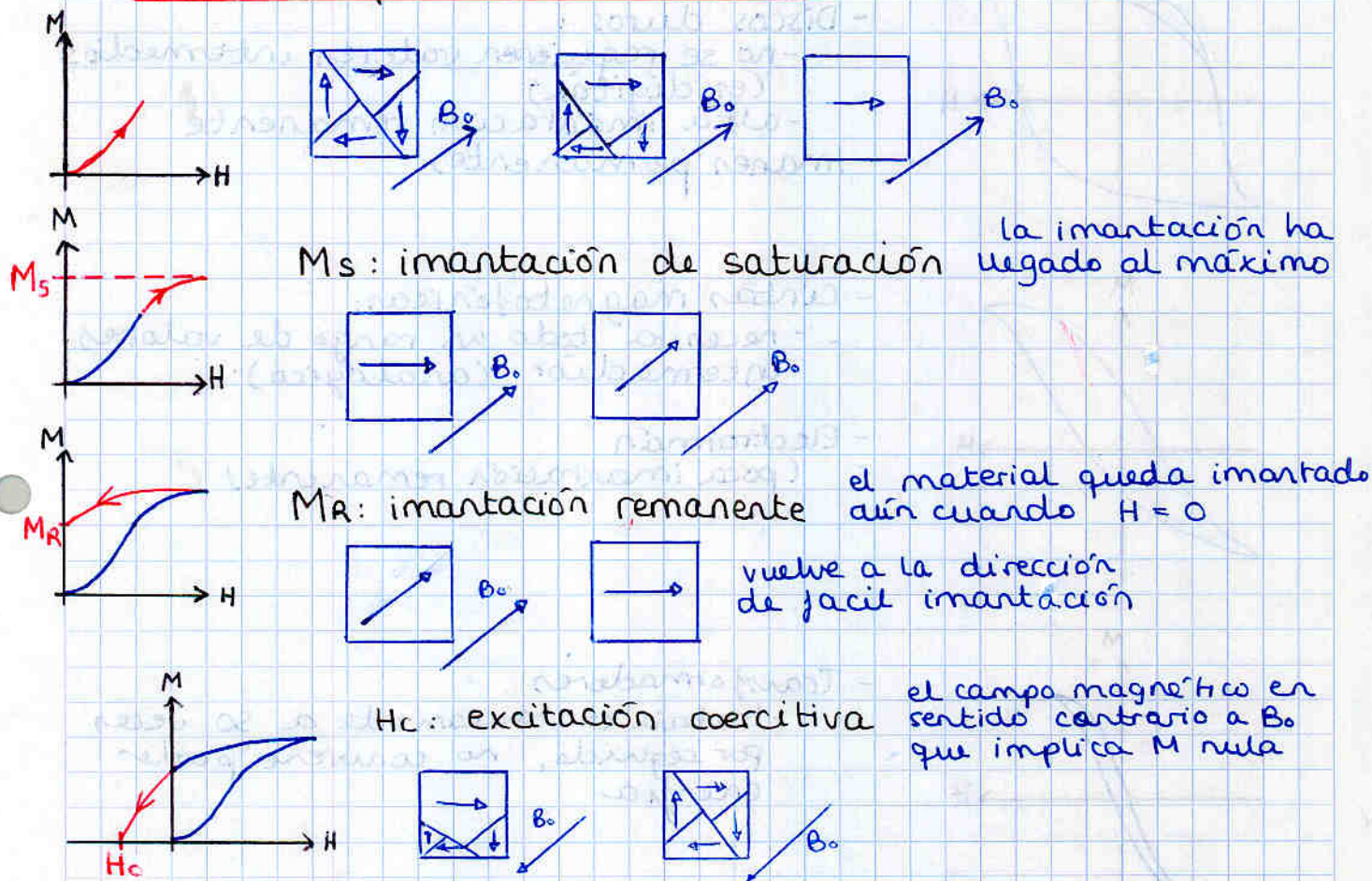
Propiedades más significativas:

- La relación $\vec{M}(\vec{H})$ y $\vec{B}(\vec{H})$ no es lineal $\Rightarrow \mu = \mu(H)$ $\chi = \chi(H)$
- μ tiene una amplia gama de valores según $\vec{H}$.
Alcanza valores de 10^4 (en para y diamagnéticas es cercana a 1)
- Fenómeno de histéresis: $\chi(H)$ y $M(H)$ depende de la historia magnética del material.

Ciclo de Histéresis

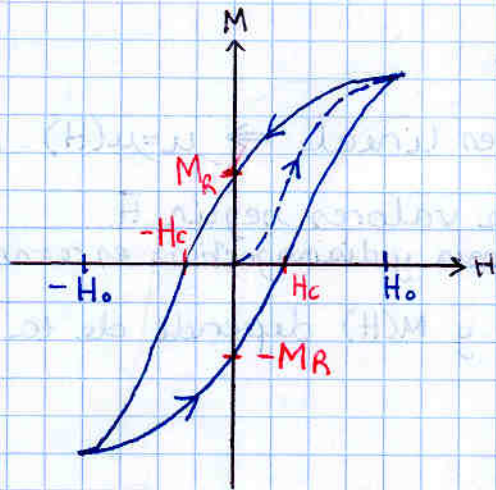
Se basa en la teoría de los dominios magnéticos, regiones de tamaño reducido donde los momentos magnéticos atómicos tienen idéntica dirección. Dicha dirección depende de la estructura cristalina, así que se presentan en unas pocas direcciones de fácil imantación.

Curva de primera imantación:



NOTA: A bajas temperaturas, la orientación que se consigue en los momentos magnéticos atómicos es casi perfecta. A altas temperaturas, la agitación térmica se opone a la alineación de los momentos magnéticos. A cierto valor de la temperatura (punto de Curie) el material se comporta como paramagnético.

Ciclo de histéresis

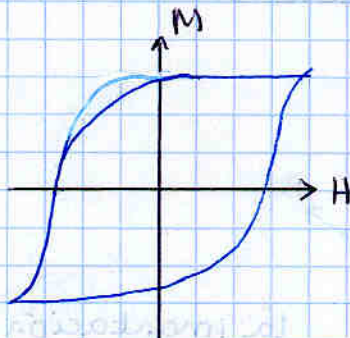


si la muestra se somete a un campo que varía entre $-H_0$ y H_0 se produce el ciclo llamado de Histéresis.

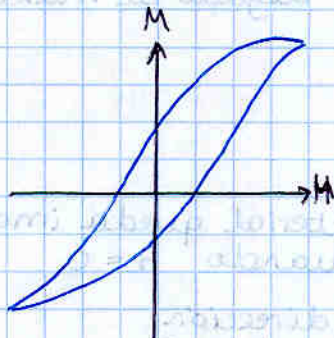
la realización del ciclo requiere un aporte de energía que se disipa como calor.

La energía necesaria es proporcional al volumen de la muestra y al área encerrada en el ciclo de histéresis

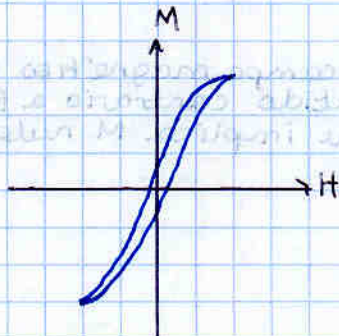
Importancia del ciclo en las aplicaciones



- Discos duros:
 - no se requieren valores intermedios (es digital)
 - alta imantación remanente
- Imanes permanentes



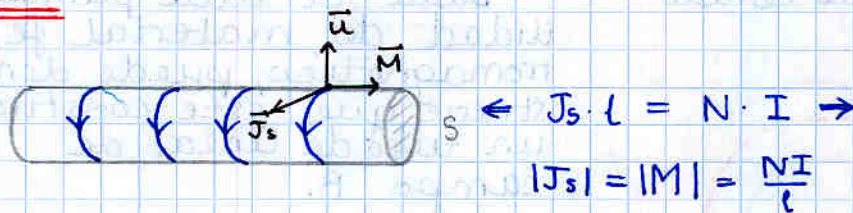
- Cintas magnetofónicas:
 - necesita todo un rango de valores intermedios (analógico)
- Electroimán (poca imantación remanente)



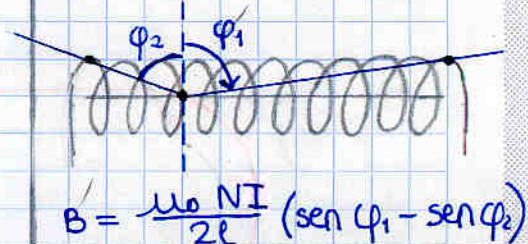
- Transformadores
 - trabaja continuamente a 50 veces por segundo, no conviene perder energía

Campo magnético creado por un imán permanente

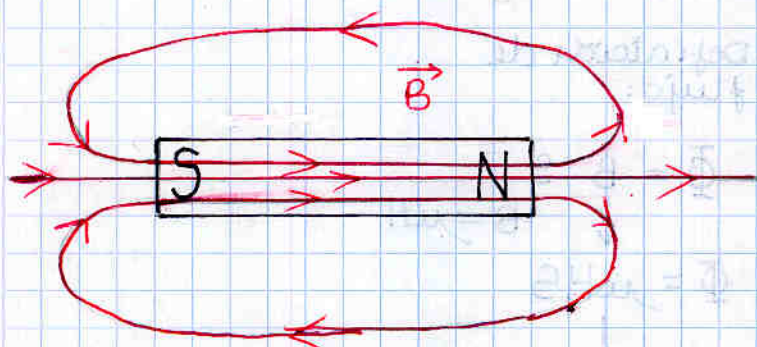
$\vec{B}$



Recuerda:



$$B_{\text{iman}} = \frac{\mu_0 M}{2} (\text{sen } \varphi_1 - \text{sen } \varphi_2)$$



- líneas cerradas
- circulación de $\vec{B}$ a lo largo de dichas líneas:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

↑
incluye J_s

(la circulación en el exterior y en el interior se suman)

$\vec{H}$: Excitación magnética

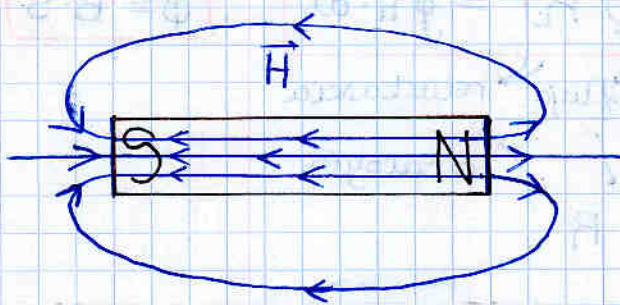
$$H_{\text{iman}} = \frac{B}{\mu_0} - M$$

Exterior: $M=0$

$$H = \frac{M}{2} (\text{sen } \varphi_1 - \text{sen } \varphi_2)$$

$$\text{Interior: } H = M \left[\underbrace{\frac{1}{2} (\text{sen } \varphi_1 - \text{sen } \varphi_2)}_{< 2} - 1 \right]$$

< 0



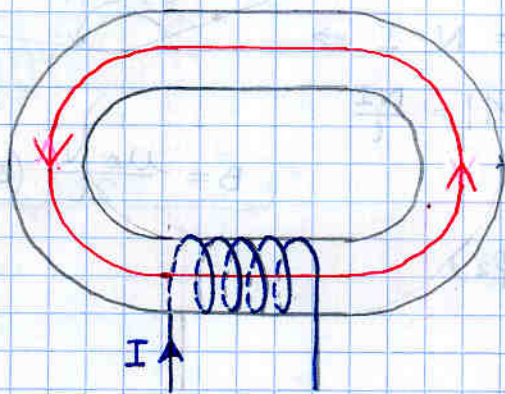
- líneas de campo de H emanan del polo norte y van al polo sur (incluso en el interior)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}} = 0$$

la circulación del exterior compensa a la del interior.

Circuitos magnéticos

sea el siguiente circuito cerrado



Dada la alta permeabilidad del material ferromagnético, puede demostrarse que éste constituye un tubo de líneas de campo $\vec{B}$.

El flujo magnético es constante en cualquiera de sus secciones

Se llama circuito magnético

Tª de Ampere a una línea de campo:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

Definición de flujo:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$\downarrow \quad B = \mu H$$

$$\Phi = \mu H S$$

$$\downarrow$$

$$H = \frac{\Phi}{\mu S}$$

$$\oint \frac{\Phi}{\mu S} dl = NI \rightarrow \Phi \oint \frac{dl}{\mu S} = NI$$

Reluctancia del circuito $R = \oint \frac{dl}{\mu S}$

Fuerza Magnetomotriz $\mathcal{F} = N \cdot I$

Ley de Hopkinson

$$\mathcal{F} = \Phi R = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

nota

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

fuerza magnetomotriz $\downarrow$ flujo $\downarrow$ reluctancia

$\mathcal{E} = I R$ $\swarrow$ analogía

análoga a la ley de Ohm para circuitos eléctricos

Resumen:

$$NI = \Phi R$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} (= H \cdot l)$$

$$H = \frac{B}{\mu}$$

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$R = \oint \frac{dl}{\mu S}$$

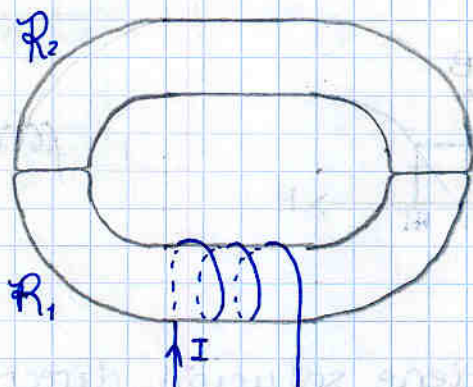
$$L = \frac{N^2}{R}$$

como se verá más tarde

Asociación de Reluctancias

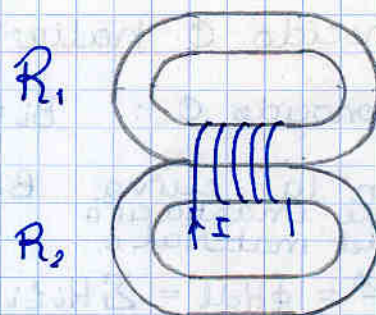
Análogo a la asociación de resistencias (demostración: pag 374 libro)

• Serie



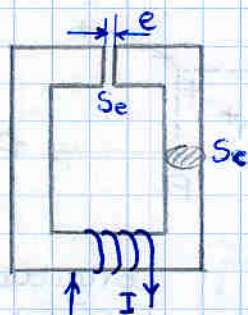
$$R = R_1 + R_2$$

• Paralelo



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

• ejemplo: entrehierro



Si el entrehierro es muy pequeño se puede considerar que las pérdidas de flujo en el entrehierro son pequeñas.

- el área efectiva S_e del entrehierro es del mismo orden que la del resto del circuito S_c

- l es la longitud del ^{resto del} circuito

- e es la longitud del entrehierro

Reluctancia def:
 $R = \oint \frac{dl}{\mu S}$

Reluctancia entrehierro:

$$R_e = \frac{e}{\mu_0 S_e}$$

Reluctancia resto del circuito:

$$R_c = \frac{l}{\mu S_c}$$

Reluctancia total del circuito (están en serie:)

$$R = R_e + R_c$$

el flujo: $\Phi = \frac{F}{R} = \frac{NI}{R_e + R_c} = \frac{NI}{\frac{e}{\mu_0 S_e} + \frac{l}{\mu S_c}}$

el campo B: $B = \frac{\Phi}{S}$

en el entrehierro: $B_e = \frac{\Phi}{S_e} = \frac{NI}{\frac{R_e + R_c}{S_e}} = \frac{NI}{\frac{e}{\mu_0} + \frac{l S_e}{\mu S_c}}$

los problemas son complicados puesto que $\mu = \mu(H)$

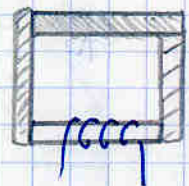
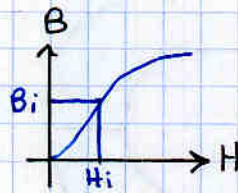
Resolución de Problemas Circuitos Magnéticos

$$\begin{aligned} \frac{F}{NI} &= \oint H \cdot dl = H \cdot l & \phi = BS \\ R &= \oint \frac{dl}{\mu S} & H = \frac{B}{\mu} \end{aligned}$$

En general: i elementos en serie, longitud l_i y sección S_i

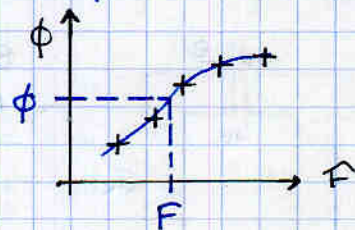
A) conocido ϕ hallar $\hat{F}$

- conocido ϕ : $B_i = \frac{\phi}{S_i}$
- en la curva de imantación del material $B_i \rightarrow H_i$
- $\hat{F} = \oint H \cdot dl = \sum H_i l_i$



B) conocido $\hat{F}$, calcular ϕ no tiene solución directa

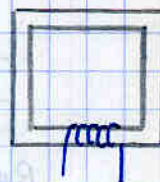
- suponer diversos valores $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ del flujo
- Mediante A) calcular $F_1, F_2, \dots, F_n$
- Representar gráfica F vs ϕ con los puntos calculados
- obtener el ϕ para el F dado en el enunciado.



↳ Circuitos reluctancia única

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \oint H \cdot dl = NI \\ H \cdot l &= NI \rightarrow H = \frac{NI}{l} \end{aligned}$$

- en la gráfica $H \rightarrow B$
- $\phi = B \cdot S$



longitud l
sección S

↳ Circuitos con entrehierro

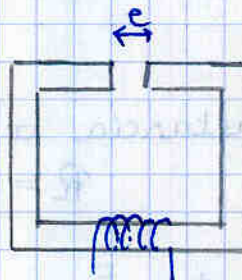
$$F = NI = \oint H \cdot dl = H_0 e + H \cdot l$$

$$NI = \frac{B}{\mu_0} e + H l$$

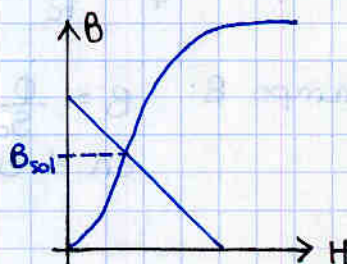
$$B = \frac{NI \mu_0}{e} - \frac{H l \mu_0}{e}$$

- Buscar intersección de esta expresión de B con la curva de imantación

$$\Phi_{sol} = B_{sol} \cdot S$$



longitud l

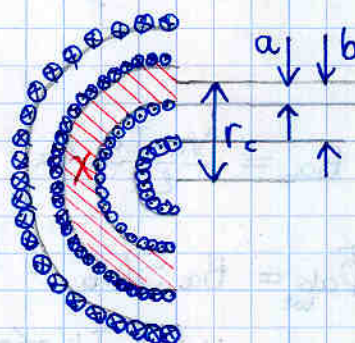
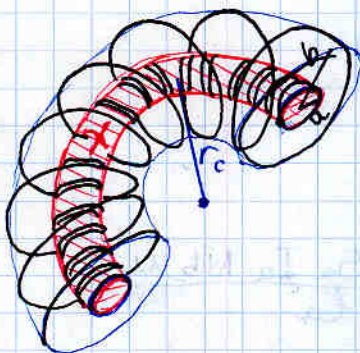


Analogía circuitos eléctricos y magnéticos

Circuitos Eléctricos	Circuitos Magnéticos
Fem $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$	Fmm $F = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$
Intensidad I	Flujo magnético Φ
Resistencia $R = \int \rho \frac{dl}{S}$	Reluctancia $\mathcal{R} = \int \frac{dl}{\mu S}$
resistividad ρ	$1/\mu$
conductancia $\sigma = \frac{1}{\rho}$	permeabilidad μ
Densidad de corriente $\vec{J} = \frac{\vec{I}}{S}$	Densidad de flujo $\vec{B} = \frac{\vec{\Phi}}{S}$
Campo eléctrico $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$	Excitación magnética $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

Ejercicios Tema 4

ejercicio:



Las dos bobinas tienen N_a y N_b espiras.

Hallar coeficiente de autoinducción de las dos bobinas
se supone $I_a \rightarrow B_a \rightarrow \Phi_{aa} \rightarrow L_a = \frac{\Phi_{aa}}{I_a}$

L_a

$$\begin{aligned} N_a I_a &= \Phi_a \mathcal{R}_a \\ N_a I_a &= B_a S_a \mathcal{R}_a \end{aligned} \quad B_a = \frac{N_a I_a}{S_a \mathcal{R}_a} = \frac{N_a I_a}{S_a \frac{l_a}{\mu S_a}}$$

$$\Phi_{a \text{ tot}} = B_a S_a N_a = \frac{N_a^2 I_a \mu S_a}{l_a}$$

$$\begin{aligned} L_a &= \frac{\Phi_{a \text{ tot}}}{I_a} = \frac{N_a^2 S_a \mu}{l_a} = \frac{N_a^2 \mu \pi a^2}{2\pi r_c} = \frac{N_a^2 \mu a^2}{2r_c} \\ &= \frac{N_a \mu (1+x) a^2}{2r_c} \\ (L_a &= \frac{N_a^2}{\mathcal{R}_a}) \end{aligned}$$

Lb supongamos Ib

$$B_b = \frac{N_b I_b}{S_b R_b} = \frac{N_b I_b \mu S_b}{S_b l_b} = \frac{I_b \mu N_b}{l_b}$$

μ varía según dentro o fuera del núcleo ferromagnético.

$$B_b(r < a) = \frac{\mu N_b I_b}{2\pi r_c}$$

$$B_b(b < r < a) = \frac{\mu_0 N_b I_b}{2\pi r_c}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{b\text{TOT}} &= \frac{\mu N_b I_b}{2\pi r_c} \pi a^2 N_b + \frac{\mu_0 N_b I_b}{2\pi r_c} \pi (b^2 - a^2) N_b \\ &= \frac{N_b^2 I_b}{2r_c} (\mu a^2 + \mu_0 (b^2 - a^2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_b = \frac{\Phi}{I_b} &= \frac{N_b^2}{2r_c} (\mu a^2 + \mu_0 (b^2 - a^2)) \\ &= \frac{N_b^2}{\left(\frac{l_c}{\pi(\mu a^2 + \mu_0 (b^2 - a^2))}\right)} \quad R = \frac{l}{\mu S}\end{aligned}$$

M coeficiente inducción mutua

$$M = \frac{\Phi_{ab}}{I_b} = \frac{\Phi_{ba}}{I_a}$$

$$\Phi_{ab}: \quad B_a = \frac{N_a I_a \mu}{l_a}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{ab\text{tot}} &= B_a S N_b = \frac{N_a S_a I_a N_b \mu}{l_a} \\ &= \frac{\mu N_b I_b \pi a^2 N_a}{2\pi r_c}\end{aligned}$$

$$M = \frac{\Phi_{ab}}{I_b} = \frac{\mu N_b N_a a^2}{2r_c} \quad \left(= \frac{N_b N_a}{R_c} \right) \quad R_c = \frac{l_c}{\mu S_a} = \frac{2\pi r_c}{\mu \pi a^2}$$

Autoinducción de una bobina arrollada en un circuito magnético

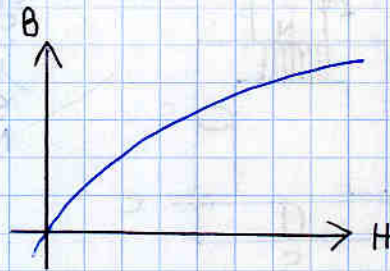
$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

ejemplo

$$\begin{aligned} l &= 0.5 \text{ m} \\ S &= 5 \text{ cm}^2 \\ N &= 200 \end{aligned}$$

- a) Φ si $I = 1 \text{ A}$
 b) μ_r si $I = 1 \text{ A}$
 c) M si $I = 1 \text{ A}$
 d) L



a) $\Phi = B \cdot S$
 $\uparrow$
 $H?$

$$F = NI = \oint H dl = H \cdot l$$

$$H = \frac{NI}{l} = 400 \text{ A/m}$$

$$H = 400 \text{ A/m} \xrightarrow{\text{gráfica}} B = 0.74 \text{ T}$$

$$\Phi = B \cdot S = 3.7 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}$$

b) μ_r $H = \frac{B}{\mu} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \rightarrow \mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{0.74}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400} = 1472$

c) M $M = \chi \cdot H = (\mu_r - 1)H = 588400 \text{ A/m}$

d) $L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2}{\left(\frac{l}{\mu S}\right)} = \frac{200^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{0.5} = 5.027 \cdot 10^{-5} \text{ H}$
 $= 50.27 \mu\text{H}$

ejercicio

- Circuito magnético con entrehierro
 longitud del hierro: $l = 0.4 \text{ m}$
 sección: $S = 9 \text{ cm}^2$
 entrehierro: $e = 2 \text{ mm}$

Fuerza magnetomotriz necesaria para un $\Phi = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$
 Utiliza la curva de imantación adjunta

$$B_{\text{hierro}} = \frac{\Phi}{S} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^{-4}} = 2/9 \text{ T}$$

$$B_{\text{hierro}} = 2/9 \xrightarrow{\text{gráfica}} H_{\text{hierro}} = 170 \text{ A/m}$$

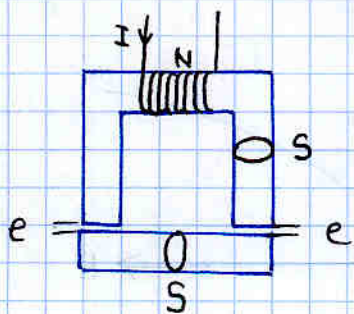
$$B_{\text{entrehierro}} = \frac{\Phi}{S} = 2/9 \text{ T}$$

$$H_{\text{en}} = \frac{B_{\text{en}}}{\mu_0} = \frac{2/9}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1.768 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

$$F = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\text{hierro}} \cdot l + H_{\text{entrehierro}} \cdot e$$

 $F = 421.6 \text{ A}$

ejercicio



$$\begin{aligned} l_h &= 98 \text{ cm} \\ S &= 50 \text{ cm}^2 \\ \mu &= 400 \mu_0 \\ e &= 0.5 \text{ cm} \\ N &= 1000 \end{aligned}$$

← en este ejercicio se ignora la curva de imantación y se considera μ cte.

a) I para que $B_e = 0.6 \text{ T}$

si $B_e = 0.6 \text{ T}$, (se considera que no) entonces $B_h = 0.6 \text{ T}$
(hay pérdidas)

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$I = \frac{H_h \cdot l + H_e \cdot 2e}{N}$$

$$H_h = \frac{B_h}{\mu_h}$$

← extrañamente se considera μ cte. Si tuvieramos curva de imantación: $B \rightarrow H$

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0}$$

$$= \frac{B}{N} \left[\frac{l}{\mu_h} + \frac{2e}{\mu_0} \right]$$

$$= \frac{0.6}{1000} \left[\frac{0.98}{400 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} + \frac{0.01}{4\pi \cdot 10^{-7}} \right]$$

$$= 5.944 \text{ A}$$

b) L ?

Se puede hacer:

suponer $I \rightarrow$ calcular $\Phi \rightarrow L = \frac{\Phi}{I}$

pero es mas fácil:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu S} + \frac{2e}{\mu_0 S}} = \frac{1000^2}{\frac{0.98}{400\mu_0 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} + \frac{2 \cdot 0.005}{\mu_0 \cdot 50 \cdot 10^{-4}}} = 0.505 \text{ H}$$

ejercicio: Dispositivo grabador de cinta magnetofónica

1. Cabezal de grabación: $N = 15$
 $\mu_r = 8000$
 $S_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$
 $l_1 = 2 \text{ cm}$

2. Cinta: curva de primera imantación
 $S_2 = 3.8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$
 $l_2 = 2 \text{ mm}$

a) Si $H_{\text{cinta max}} = 15 \text{ A/m}$, $I_{\text{max}} ?$

$H_{\text{cinta}} = 15 \text{ A/m} \xrightarrow{\text{grafica}} B_{\text{cinta}} = 0.1 \text{ T}$

$\Phi_{\text{cinta}} = B_{\text{cin}} \cdot S_2 = 3.8 \cdot 10^{-8} \text{ T} \cdot \text{m}^2$

$\Phi_{\text{cab}} = \Phi_{\text{cin}}$ (el flujo en circ. mag es cte.)

$B_{\text{cab}} = \frac{\Phi_{\text{cab}}}{S_1} = 9.5 \cdot 10^{-3} \text{ T}$

$H_{\text{cab}} = \frac{B_{\text{cab}}}{\mu_0 \mu_r} = 0.94498 \text{ A/m}$

$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\text{cab}} \cdot l_1 + H_{\text{cinta}} \cdot l_2$

$I = \frac{H_{\text{cab}} \cdot l_1 + H_{\text{cinta}} \cdot l_2}{N}$

$I = 3.26 \cdot 10^{-3} \text{ A}$

b) $I = 3 \text{ mA}$

(i) H_{cin} (como $S_1 \neq S_2 \rightarrow B_{\text{cin}} \neq B_{\text{cab}}$
 pero $\Phi_{\text{cin}} = \Phi_{\text{cab}}$
 $B_{\text{cin}} S_2 = B_{\text{cab}} S_1 \rightarrow B_{\text{cab}} = \frac{B_{\text{cin}} \cdot S_1}{S_2}$)

$NI = H_{\text{cab}} \cdot l_1 + H_{\text{cin}} \cdot l_2$

$= \frac{B_{\text{cab}}}{\mu_0 \mu_r} l_1 + H_{\text{cin}} \cdot l_2$

$NI = B_{\text{cin}} \frac{S_1}{S_2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} l_1 + H_{\text{cin}} \cdot l_2$

$\rightarrow B_{\text{cin}} = \frac{NI S_1 \mu_0 \mu_r}{S_2 l_1} - H_{\text{cin}} \frac{l_2 S_1 \mu_0 \mu_r}{S_2 l_1}$

$B_{\text{cin}} = 0.238 - 0.01058 H_{\text{cin}}$

$H_{\text{cin}} = 13.5 \text{ A/m}$

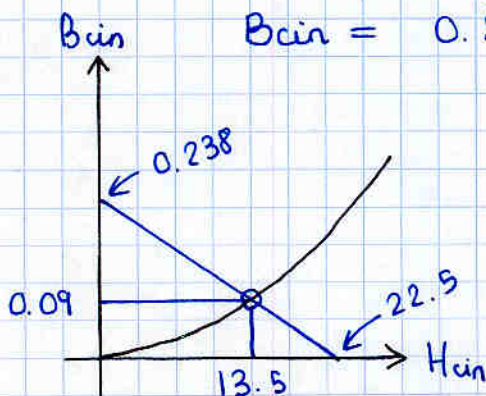
(ii) $\Phi = B_{\text{cin}} \cdot S_2 = 0.09 \cdot 3.8 \cdot 10^{-7} = 3.42 \cdot 10^{-8}$

(iii) M_{cin}

$M_{\text{cin}} = \chi H_{\text{cin}}$

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{0.09}{\mu_0} - 13.5 = 71606 \text{ u.s.i.}$



Spencer: Temperature distribution in the atmosphere

$$T = T_0 - \frac{g}{c_p} z$$

$$T_0 = 288.15 \text{ K}$$

$$g = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

$$c_p = 1005 \text{ J/kg K}$$

$$T = 288.15 - \frac{9.80665}{1005} z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

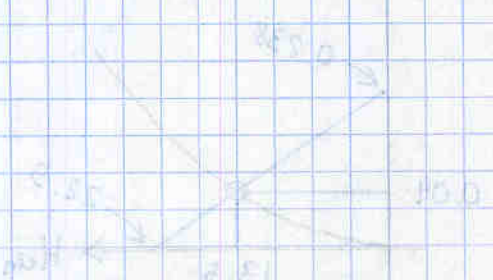
$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$



$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

$$T = 288.15 - 0.00977 z$$

LECCIÓN 5. ECUACIONES DE MAXWELL

conocimientos previos

Electrostática
cargas en reposo

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 \text{ (conservativo)} \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \text{ (Tª Gauss)} \end{aligned}$$

Magnetostática
corrientes continuas

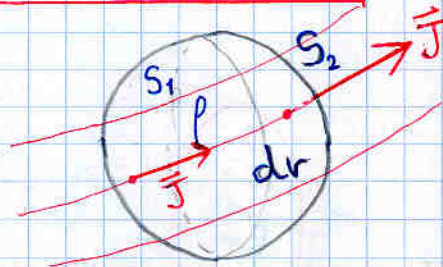
$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \text{ (no monopolos)} \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \text{ (Tª Ampere)} \\ \hookrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \end{aligned}$$

si $\vec{B}$ cte

Inducción
campos magnéticos
variables

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (campo eléctrico no conservativo)} \\ \hookrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Ecuación de continuidad



Sabemos que

$$Q = \iiint_V \rho \, dV$$

derivando respecto del tiempo

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

Por conservación de la carga

$$\frac{dQ}{dt} = \text{carga que entra} - \text{carga que sale}$$

$$= - \underbrace{\iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1}_{< 0} - \underbrace{\iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}_2}_{> 0}$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

↓ Tª divergencia

$$\frac{dQ}{dt} = - \iiint_V \text{div } \vec{J} \, dV$$

el flujo de la que sale es > 0
el flujo de la que entra es < 0
para arreglarlo se pone un menos

igualando:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div } \vec{J}}$$

Ecuación de continuidad

$$\text{si } \rho \text{ cte} \Rightarrow \text{div } \vec{J} = 0$$

T^a Ampere es inválida en régimen variable

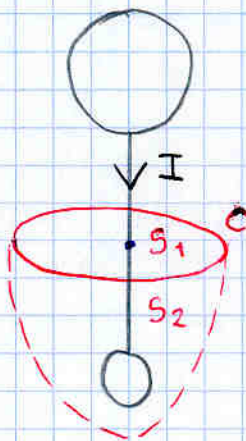
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

A) Propiedades de T^a de campos

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \xrightarrow{\vec{J} = \text{rot } \vec{H}} \quad \text{div}(\text{rot } \vec{H}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

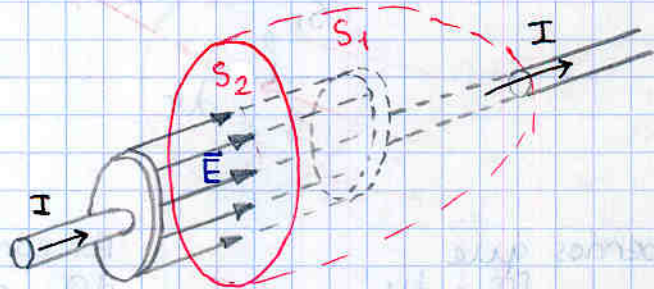
según T^a de campos $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) \equiv 0$

B) Conductores a distinto potencial se unen mediante conductor / c) Condensador



$$T^a \text{ Ampere en } S_1: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$T^a \text{ Ampere en } S_2: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



Ecuación de Ampere - Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{J}$: densidad de corriente de conducción
movimiento real de cargas

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: densidad de corriente de desplazamiento
tiene las dimensiones de $\vec{J}$.

Ambas corrientes crean campos magnéticos

$$A) \text{div}(\text{rot } \vec{H}) = \text{div}(\vec{J}) + \text{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \checkmark$$

$\left(\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \text{div } \vec{D} = \rho \right)$
 $\rightarrow \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

$$C) T^a \text{ Ampere } S_1: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$T^a \text{ Ampere } S_2: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_D = \mu_0 I \quad \checkmark$$

$$\left(I_D = \iint_S \vec{J}_D \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{dQ}{dt} = I_C \right)$$

$$D = \epsilon E = \epsilon \frac{\sigma}{\epsilon} \quad \vec{D} = \sigma$$

se cumplen los casos de arriba

Ecuaciones de Maxwell

Tª Gauss para $\vec{E}$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon} \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

- existen cargas eléctricas aisladas

Tª Gauss para $\vec{B}$ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow \text{div } \vec{B} = 0$

- no existen monopolos magnéticos
- las líneas de campo son cerradas

Ec. Maxwell-Faraday $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

→ explica todos fenómenos de inducción
- campos magnéticos variables tienen asociados campos eléctricos no conservativos

Ec. Ampère-Maxwell $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I + \iint \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

- tanto corrientes reales de cargas como corrientes de desplazamiento crean campos magnéticos
- campos eléctricos variable tienen asociados campos magnéticos

ejercicio: $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin 2\pi f t$ σ, ϵ_r

a) $J_{\text{conducción}}$ y $J_{\text{desplazamiento}}$

$J_{\text{cond}} = \sigma \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}_0 \sin 2\pi f t$

$J_{\text{disp}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \epsilon_r \vec{E}_0 \sin 2\pi f t)$
 $= 2\pi f \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}_0 \cos 2\pi f t$

b) frecuencia a partir de la cual $J_{\text{disp}} > J_{\text{cond}}$

$2\pi f \epsilon_r \epsilon_0 E_0 > \sigma E_0$

$f > \frac{\sigma}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0} = \text{nº muy grande } (\epsilon_0 \ll \sigma)$

casi nunca se dan frecuencias tan altas
⇒ normalmente $J_{\text{cond}} \gg J_{\text{disp}}$

ejercicio. Deducción de que la luz es una onda em.
 sea una onda electromagnética plana y monocromática

$$\vec{E} = E_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c}) \vec{j}$$

$$\vec{B} = B_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c}) \vec{k}$$



$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{E_0 \omega}{c} = B_0 \omega$$

$$(1) \quad c = \frac{E_0}{B_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu (J_{cond} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$- \frac{B_0 \omega}{c} = \mu \epsilon (-\omega E_0)$$

$$(2) \quad c = \frac{B_0}{\mu \epsilon E_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c}) & 0 \end{vmatrix} = \frac{E_0 \omega}{c} \sin \omega(t - \frac{x}{c}) \vec{k}$$

$$- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = B_0 \omega \sin \omega(t - \frac{x}{c}) \vec{k}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c}) \end{vmatrix} = - \frac{B_0 \omega}{c} \sin \omega(t - \frac{x}{c}) \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin \omega(t - \frac{x}{c}) \vec{j}$$

$$J_{cond} = 0 \text{ (no hay cargas)}$$

$$(2) \quad E_0 = \frac{B_0}{\mu \epsilon c} \text{ sust en (1)}$$

$$c = \frac{B_0 / \mu \epsilon c}{B_0}$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu \epsilon}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}}$$

$$\text{en el vacío } \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \\ \epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9}$$

$$c_{vacío} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

ejercicio

$$\vec{E}(x,y,z,t) = mx^2t \vec{i} + ny^2 \vec{j} + py^3 \vec{k}$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = ay^2t \vec{i} + bx^2 \vec{j}$$

a) Hallar $\rho(x,y,z,t)$

$$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\text{div } \vec{E} = 2mx + 2ny$$

$$2mx + 2ny = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rho = 2\epsilon_0(mx + ny)$$

b) Hallar $\vec{J}_{\text{cond}}(x,y,z,t)$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{cond}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{cond}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay^2t & bx^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2bx \vec{k} - 2ayt \vec{k}$$

$$= 2(bx - ayt) \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = mx^2 \vec{i}$$

$$2(bx - ayt) \vec{k} = \mu_0 \vec{J}_{\text{cond}} + \mu_0 \epsilon_0 mx^2 \vec{i}$$

$$\vec{J}_{\text{cond}} = \frac{2}{\mu_0} (bx - ayt) \vec{k} - \epsilon_0 mx^2 \vec{i}$$

c) comprobar la ecuación de continuidad

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{J} = -2\epsilon_0 mx$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 2\epsilon_0 mx$$

$$-2\epsilon_0 mx = -2\epsilon_0 mx \quad \checkmark$$

d) Relación entre ρ y a para que se cumplan todas las ecuaciones de Maxwell

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\forall p)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ mx^2t & ny^2 & py^3 \end{vmatrix} = 3py^2 \vec{i}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = ay^2 \vec{i}$$

$$3py^2 \vec{i} = -ay^2 \vec{i}$$

$$3p = -a$$

$$p = -\frac{a}{3}$$

Energía electromagnética. Vector de Pointing

Densidad de energía electrostática

$$w_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

Densidad de energía magnética

$$w_B = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2\mu} B^2$$

Densidad de energía total

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

Variación de energía con el tiempo en un volumen V

$$W = \iiint_V w \cdot dV \\ = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) dV$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\frac{\partial w_E}{\partial t} + \frac{\partial w_B}{\partial t} \right) dV$$

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{B} \cdot \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{H} \cdot \vec{B}}{\partial t} \\ = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w_B}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{E} \cdot \vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{D} \cdot \vec{E}}{\partial t} \\ = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\frac{dw}{dt} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{J} + \text{rot } \vec{H} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{J} + \underbrace{\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E}}_{\text{nos lo creemos}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{J} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{J} - \text{div } \vec{N}$$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

vector de pointing

$$\frac{[\text{Energía}]}{[\text{tiempo}] \cdot [\text{superficie}]} \\ = \frac{\text{Potencia}}{\text{superficie}}$$

en la dirección de propagación de la onda representa la energía de la onda electromagnética

$$\frac{dW}{dt} = -\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV - \iiint_V \text{div } \vec{N} \cdot dV$$

$$\frac{dW}{dt} = -\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV - \iint_S \vec{N} \cdot d\vec{S} \rightarrow \text{Flujo de energía a través de } S$$

↓
variación de energía en el volumen

↓
Potencia disipada por el efecto Joule

(si sale mas que entra)
(w disminuye)

Vector de Pointing $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$

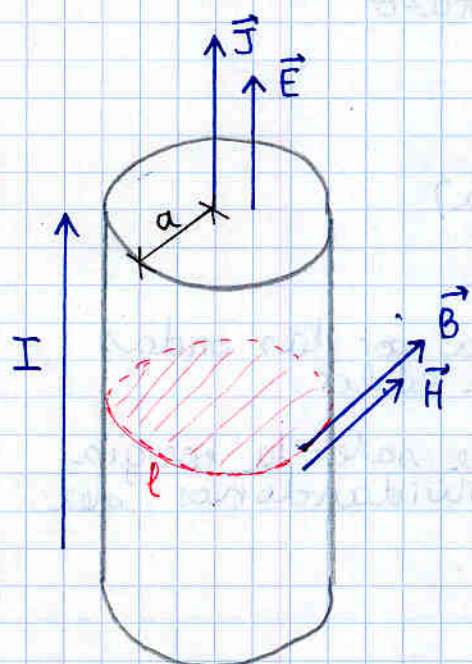
dimensiones $\frac{\text{Energía}}{\text{tiempo} \cdot \text{superficie}} = \frac{\text{Potencia}}{\text{superficie}}$

Representa la energía por s y m^2 que lleva una onda

ejercicio. Vector de Pointing

cilindro conductor: conductancia: σ
radio: a
corriente: I

a) Calcular vector de Pointing sobre la superficie



$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$E: E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I/\pi a^2}{\sigma}$$

$$E = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

$$H: \int \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre enc}}$$

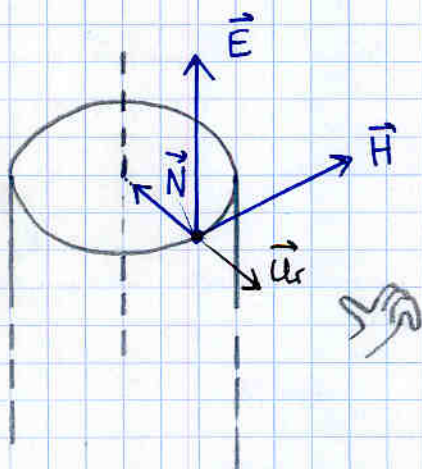
$$H = \frac{I}{l}$$

$$H = \frac{I}{2\pi a}$$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$= \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \cdot \frac{I}{2\pi a} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (-\vec{u}_r)$$

$$\vec{N} = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} (-\vec{u}_r)$$



b) Flujo del vector de Poynting a través de la superficie lateral

$$\begin{aligned}\Phi_{LAT} &= \iint_S \vec{N} \cdot d\vec{S} \\ &= - \int N dS = -N \cdot 2\pi a L \\ &= - \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \cdot 2\pi a L\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_{LAT} = - \frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma}}$$

c) Efecto Joule

$$\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \cdot \frac{I}{\pi a^2} \cdot L\pi a^2 = \frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma}$$

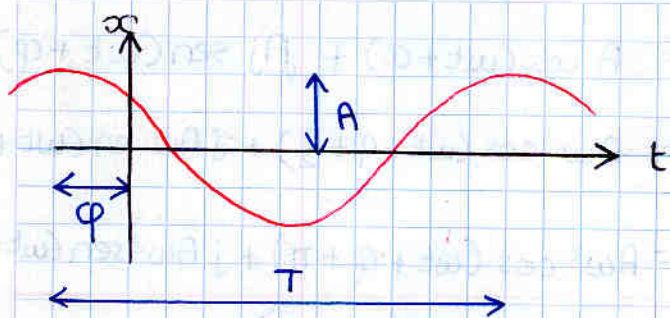
$$d) \frac{dW}{dt} = - \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV - \iint_S \vec{N} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = 0} \quad (\text{corriente continua})$$

Vemos que la energía proporcionada por las ondas electromagnéticas se disipa en calor.

Es una forma de explicar de donde sale la energía en calor de una forma local (colvidándonos del generador)

LECCION 6. EL OSCILADOR ARMONICO



$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

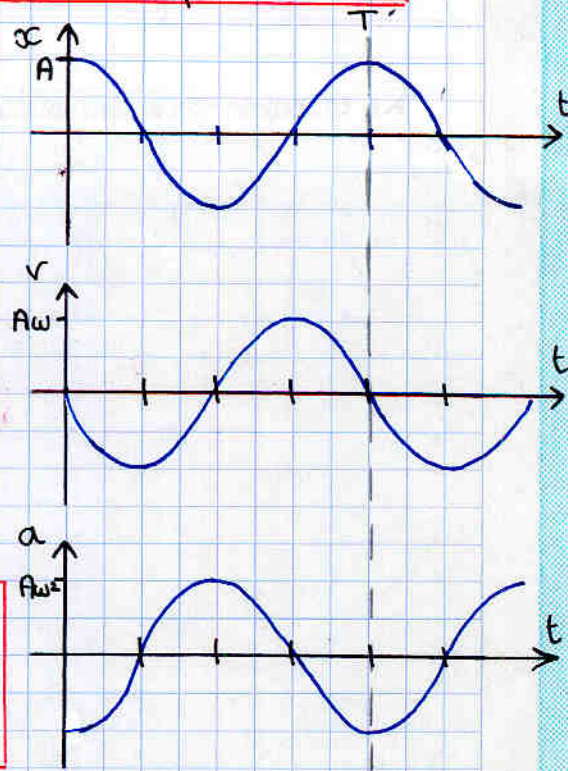
x : elongación
 A : amplitud
 ω : pulsación ($2\pi f$)
 φ : fase inicial
 T : periodo ($T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$)
 f : frecuencia ($\frac{1}{T}$)

Cinemática del movimiento armónico simple (MAS)

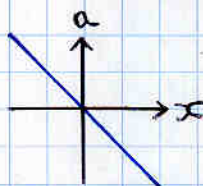
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

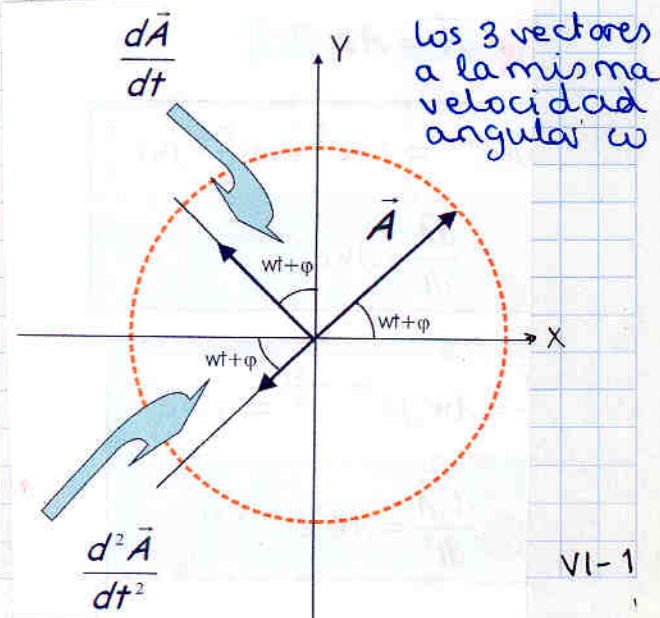
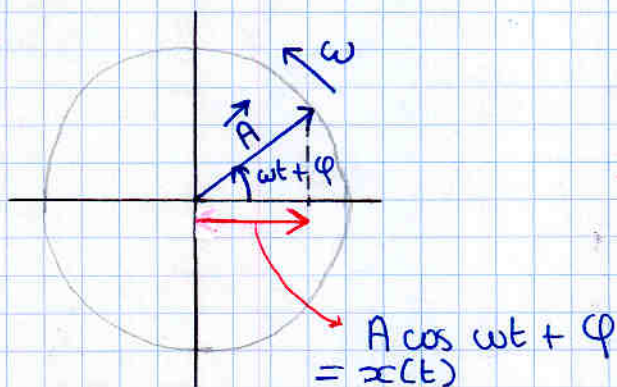
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



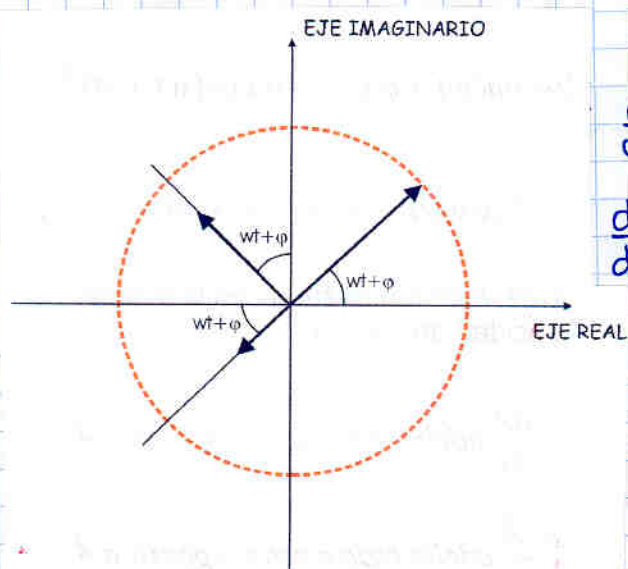
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$



Fasores:



Fasores: Plano complejo



$$\vec{A} = A \cos(\omega t + \phi) + j A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) + j A\omega \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = A\omega^2 \cos(\omega t + \phi + \pi) + j A\omega^2 \sin(\omega t + \phi + \pi)$$

$$\vec{A} = A e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A\omega e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = A\omega^2 e^{j(\omega t + \phi + \pi)}$$

NOTA

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} (A e^{j(\omega t + \phi)})$$

$$= A j \omega e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$(j = 1 e^{j\frac{\pi}{2}})$$

$$= A\omega e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$= A\omega e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})}$$

Dinámica del MAS

El MAS es producido por fuerzas proporcionales a la elongación y dirigidas hacia el origen que tienden a llevar a la partícula a la pos. equilibrio

$$F = -Kx$$

DEM:

$$F = m \cdot a = m(-\omega^2 x) = -(\omega^2 m)x = -Kx$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Ecuación diferencial del MAS

$$F = m \ddot{x} = -Kx$$

$$m \ddot{x} = -Kx$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0$$

$$\omega^2$$

Podemos
conocer ω con sólo
plantear la E.D.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

sol del tipo

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{rt} \\ \dot{x} &= r e^{rt} \\ \ddot{x} &= r^2 e^{rt} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 e^{rt} + \omega^2 e^{rt} &= 0 \\ e^{rt} (r^2 + \omega^2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ecuación característica:

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

$$\rightarrow r = \pm \sqrt{-\omega^2} = \pm \omega j$$

sol. general

$$x(t) = A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}$$

$$= A_1 [\cos \omega t + j \sin \omega t] + A_2 [\cos \omega t - j \sin \omega t]$$

$$= (A_1 + A_2) \cos \omega t + j(A_1 - A_2) \sin \omega t$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= A \cos \varphi \\ j(A_1 - A_2) &= -A \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$= \cos \omega t A \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Energética del MAS

Energía Cinética: $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

Energía Potencial: $U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

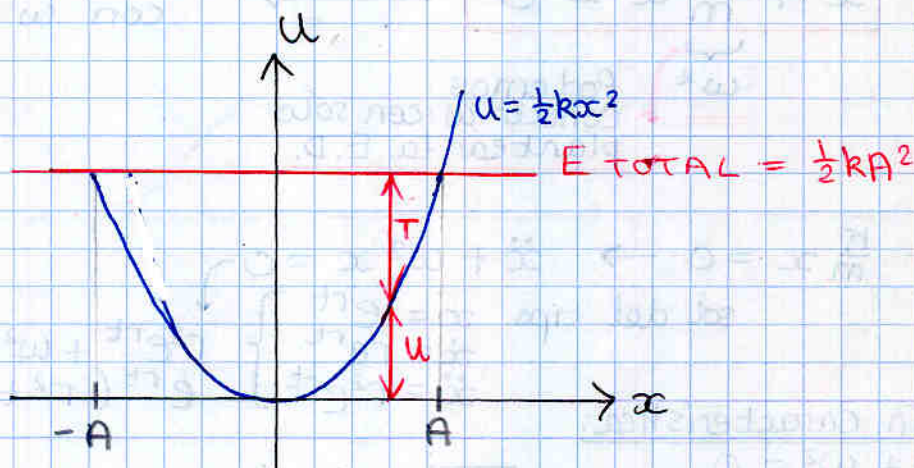
$$\begin{pmatrix} \frac{dU}{dx} = -F \\ dU = -F dx \\ dU = kx dx \\ U = \frac{1}{2} k x^2 \end{pmatrix}$$

Energía mecánica (total)

$$E = T + U$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

si $T=0 \rightarrow U = U_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$
 $\rightarrow E = \frac{1}{2} k A^2$

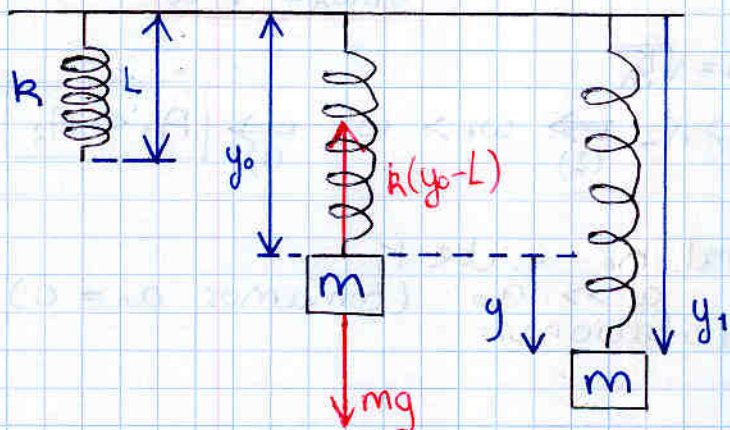


ejercicio

long. natural

pos
equilibrio

Pos equilibrio



$$mg = k(y_0 - L)$$

$$(1) y_0 = L + \frac{mg}{k}$$

Oscilación

Dos formas de plantear las fuerzas:

$$\Sigma \vec{F} = m\ddot{y}$$

$$mg - k(y_1 - L) = m\ddot{y}$$

$$(1) -k(y_1 - L - \frac{mg}{k}) = m\ddot{y}$$

$$\rightarrow -k(y_1 - y_0) = m\ddot{y}$$

llamamos $y = y_1 - y_0$

$$\boxed{-Ky = m\ddot{y}}$$

tomamos y_0 como longitud natural y no tenemos en cuenta el peso

$$\boxed{-Ky = m\ddot{y}}$$

es una forma rápida de llegar al mismo resultado

Ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \frac{K}{m}y = 0 \xrightarrow{\text{resolviendo}} y = B \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Condiciones iniciales

$$\left. \begin{array}{l} y(t=0) = A \\ v(t=0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} B \cos \varphi = A \\ -B\omega \sin \varphi = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} B = A \\ \varphi = 0 \end{array}$$

$$y = A \cos(\omega t)$$

$$y_1 = A \cos(\omega t) + y_0$$

$$\text{siendo } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Problema dos muelles con misma masa
 $K_1 > K_2$ y $v_{\max 1} = v_{\max 2}$

¿cual tiene mayor amplitud?

$$v = A\omega \cos(\dots)$$

$$v_{\max} = A\omega$$

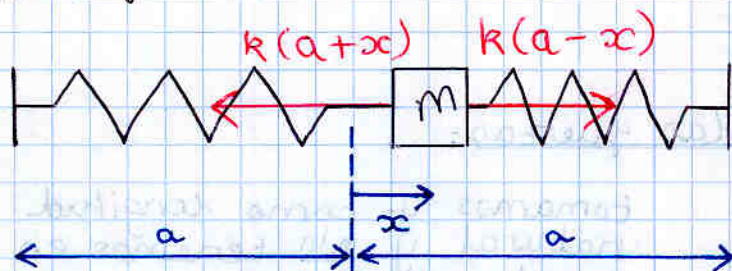
$$(1) A_1 \omega_1 = A_2 \omega_2 \quad (2) \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$K_1 > K_2 \xRightarrow{(2)} \omega_1 > \omega_2 \xRightarrow{(1)} A_1 < A_2$$

Problema

Dos muelles long. natural a_0 y de k
 Están muy estirados, $a \gg a_0$ (tomamos $a_0 = 0$)
 Calcular periodo de oscilaciones:

(1) longitudinales



$$-k(a+x) + k(a-x) = m\ddot{x}$$

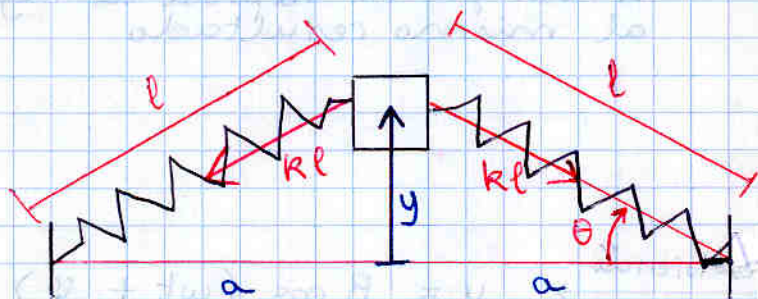
$$-2kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

(2) transversales



eje horizontal:

$$-kl \cos \theta + kl \cos \theta = m\ddot{x}$$

$$0 = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = 0$$

eje vertical:

$$-kl \sin \theta - kl \sin \theta = m\ddot{y}$$

$$-2kl \sin \theta = m\ddot{y}$$

$$-2ky = m\ddot{y}$$

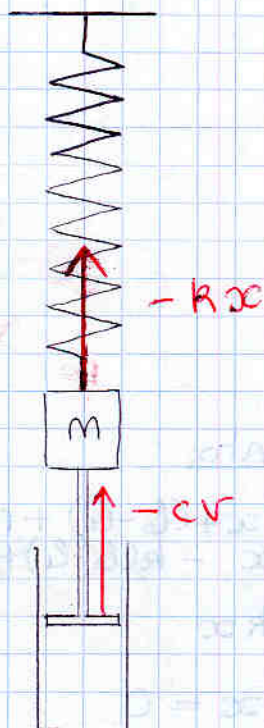
$$l \sin \theta = y$$

$$\ddot{y} + \frac{2k}{m}y = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Oscilaciones amortiguadas



$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\lambda = \frac{c}{2m} \text{ factor de amortiguamiento}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ Pulsación de oscilaciones sin amortiguamiento}$$

se dan tres casos:

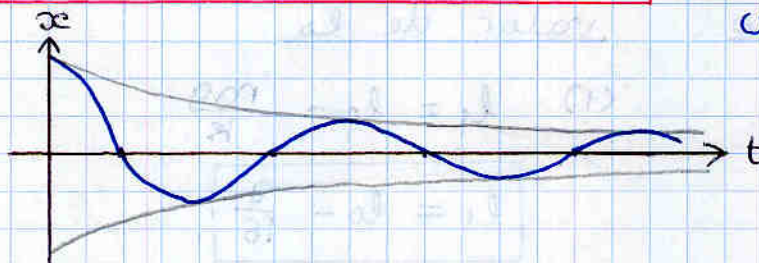
$$\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2$$

- $\Delta < 0$: Movimiento oscilatorio subamortiguado ($\lambda < \omega_0$)

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\omega_1 < \omega_0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

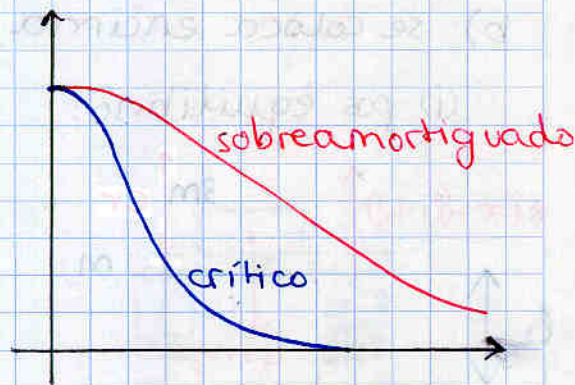


- $\Delta = 0$: Movimiento aperiódico crítico ($\lambda = \omega_0$)

$$x(t) = [A + Bt]e^{-\lambda t}$$

- $\Delta > 0$: Movimiento aperiódico o sobreamortiguado

$$x(t) = [A_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t}] e^{-\lambda t}$$

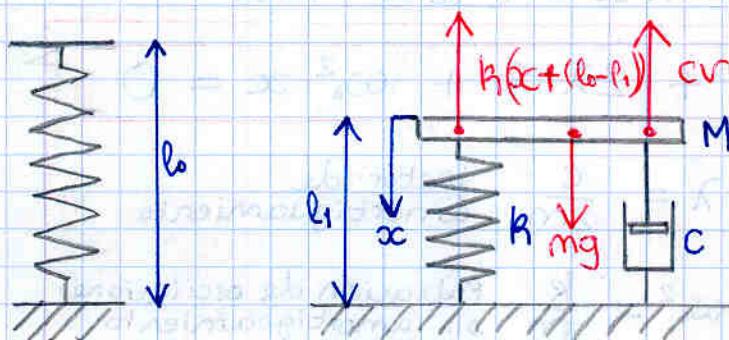


el crítico es el que más rápido tiende a cero.

ejercicio

- a) - masa M
 - $k = 16 \cdot m \text{ (Nm}^{-1}\text{)}$
 - long. natural: l_0
 - amortiguamiento crítico

se pide
 $\dot{c}$?
 c l_1 ?



pos equilibrio

$$m\ddot{x} = -k(l_0 - l_1) + mg = 0$$

$$(1) \boxed{mg = k(l_0 - l_1)}$$

en movimiento:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - k(x + (l_0 - l_1)) + mg$$

$$(1) \left\{ \begin{aligned} m\ddot{x} &= -c\dot{x} - kx - k(l_0 - l_1) + mg \\ m\ddot{x} &= -c\dot{x} - kx \end{aligned} \right.$$

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\lambda = \frac{c}{2m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

por ser amort. crítico

$$\lambda = \omega_0$$

$$\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c = \sqrt{4km}$$

$$\boxed{c = 8m}$$

valor de l_1

$$(1) \quad l_1 = l_0 - \frac{mg}{k}$$

$$\boxed{l_1 = l_0 - \frac{g}{16}}$$

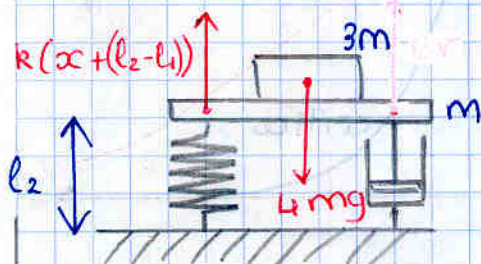
b) se coloca encima una masa $3m$

(i) pos equilibrio:

$$m\ddot{x} = 4mg - k(l_0 - l_2) = 0$$

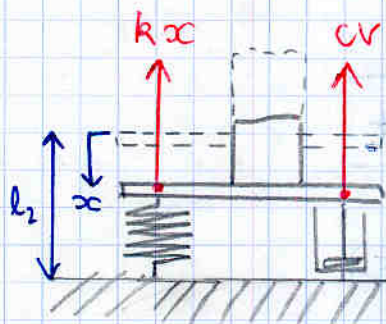
$$4mg = k(l_0 - l_2)$$

$$\boxed{l_2 = l_0 - \frac{1}{4}g}$$



(ii) oscilando

antes en (a) hemos tenido en cuenta la masa y contado el Δx desde la pos natural. Ahora lo haremos del otro método, considerando l_2 como longitud inicial y sin contar la masa



$$(4m)\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{4m}\dot{x} + \frac{k}{4m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

$$\lambda = \frac{c}{8m} = \frac{8m}{8m} = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4m}} = \sqrt{\frac{16m}{4m}} = 2$$

caso $\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \rightarrow$ osc. subamortiguadas

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\text{donde } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{3}$$

$$\lambda = 1, \omega_1 = \sqrt{3} \Rightarrow x(t) = Ae^{-t} \cos(\sqrt{3}t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = Ae^{-t} \sqrt{3} (-\sin \sqrt{3}t + \varphi) + A \cos(\sqrt{3}t + \varphi) (-1)(e^{-t})$$

condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \sqrt{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A \cos \varphi = 0 \\ -A\sqrt{3} \sin \varphi + A \cos \varphi = \sqrt{3} \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A \cos \varphi = 0 \\ -A\sqrt{3} \sin \varphi = \sqrt{3} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A \cos \varphi = 0 \\ A \sin \varphi = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 1 \\ \varphi = -\pi/2 \end{array}$$

$$x(t) = e^{-t} \cos(\sqrt{3}t - \pi/2)$$

Oscilaciones Forzadas

Sobre el sistema oscilante actúa una fuerza exterior periódica



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

casos vistos
anteriormente.
Si hay amort.
tienden a cero

$$x(t) = x_h(t) + D \sin(\omega t - \varphi)$$

$$D = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \lambda^2}}$$

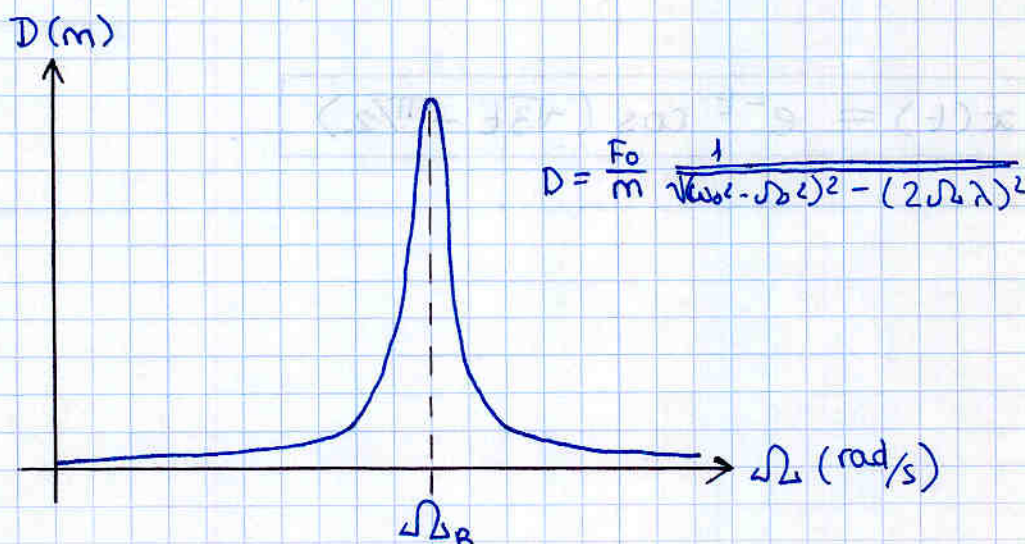
$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Resonancia

Existe una pulsación de la fuerza exterior para la cual la amplitud es máxima

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

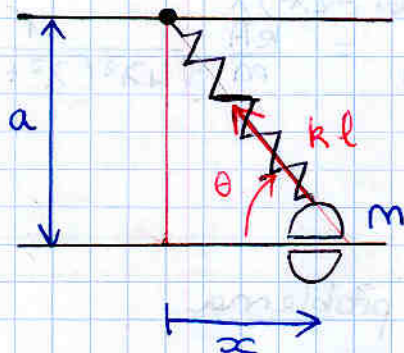
solo hay resonancia si $\omega_0 > \lambda$



Problema

considerando long. natural nula
calcular el periodo de las oscilaciones.

a)



eje vertical
 $m\ddot{x} = kl \sin \theta - F_{\text{guia}} = 0$

eje horizontal

$$m\ddot{x} = -kl \cos \theta$$

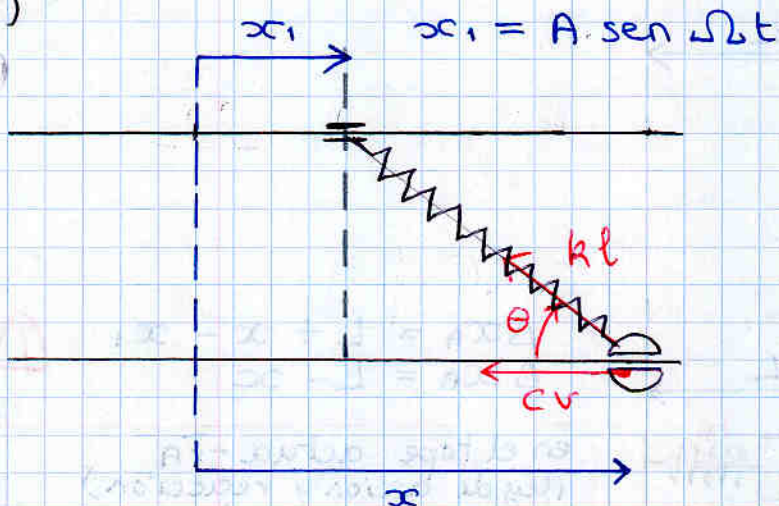
$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0 = \frac{k}{m}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

b)



$$m\ddot{x} = -kl \cos \theta - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -k(x - x_1) - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - kx_1 = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_1 = \frac{kA}{m} \sin \Omega t$$

solución de
regimen permanente

$$x(t) = D \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$D = \frac{kA}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\Omega\lambda)^2}}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\Omega\lambda}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

c) Calcular amplitud de resonancia

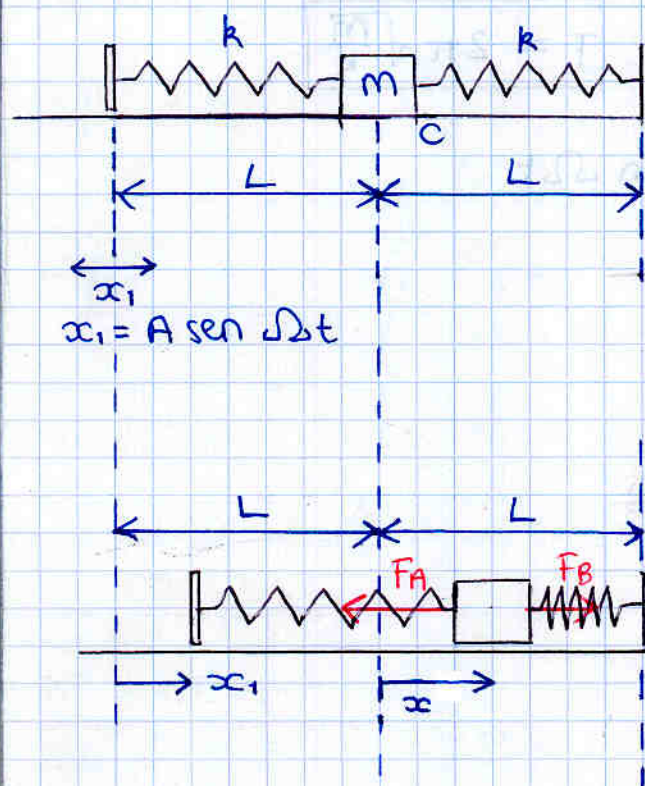
$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

$$D(\omega = \omega_R) = \frac{kA}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2)^2 + 4(\omega_0^2 - 2\lambda^2)\lambda^2}}$$

$$= \frac{kA}{m} \frac{1}{\sqrt{4\lambda^4 + 4\lambda^2\omega_0^2 - 8\lambda^4}} = \frac{kA}{m} \frac{1}{\sqrt{4\lambda^2(\lambda^2 + \omega_0^2 - 2\lambda^2)}}$$

$$D_{\max} = \frac{kA}{2\lambda m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)}}$$

Ejercicio: Hallar ED del siguiente problema pos. equilibrio:



$$K \cdot L = K \cdot L$$

$$\Delta x_A = L + x - x_1$$

$$\Delta x_B = L - x$$



en el tope actúa $-F_A$
(ley de acción y reacción)
 $F = k \Delta x_A = k(L + x - x_1)$

$$m\ddot{x} = -k\Delta x_A + k\Delta x_B - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -k(L + x - x_1) + k(L - x) - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = k(x_1 - 2x) - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -2kx - c\dot{x} + kx_1$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx = kx_1$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\lambda} \dot{x} + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{\omega_0^2} x = \frac{kA}{m} \sin \omega t$$

$$x(t) = D \sin(\omega t - \phi)$$

$$D = \frac{kA}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\lambda)^2}}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

TEMA 7. ONDAS I

Movimiento ondulatorio: transporte de energía
 ↳ sin existir

transporte de masa

↳ Mecánicas: - necesita soporte material
 - velocidad de propagación depende de propiedades elásticas y másicas del medio

↳ Electromagnéticas: - no es necesario soporte material
 - velocidad de propagación depende de constante dieléctrica y de permeabilidad del medio.

En una región se produce una perturbación de las condiciones físicas, la perturbación se propaga a lo largo del medio transportando energía.

Toda perturbación está caracterizada por una magnitud escalar o vectorial (desplazamiento, presión, campo eléctrico)

ONDA LONGITUDINAL:



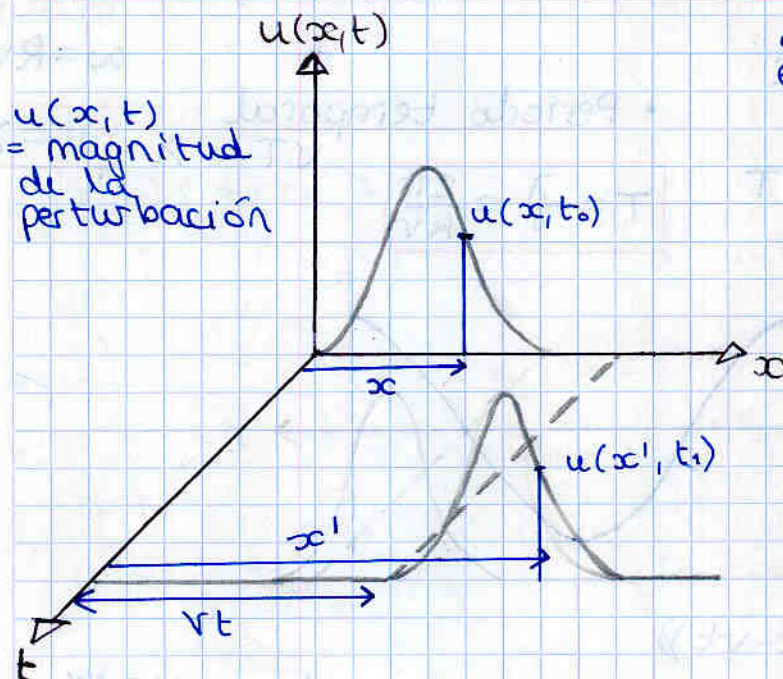
La magnitud que caracteriza la propagación varía en la dirección de la propagación

ONDA TRANSVERSAL:



La dirección de variación de la magnitud es perpendicular a la propagación

MOVIMIENTO ONDULATORIO 1-D NO AMORTIGUADO



en $t_0 \rightarrow x \rightarrow u(x, t_0)$

en $t_1 \rightarrow x' \rightarrow u(x', t_1)$

$u(x, t_0) = u(x', t_1)$

$x' = x - vt$ según dirección

$u(x, t) = f(x - vt)$

$u(x, t) = f(x \mp vt)$

ej:

• $A \cos k(x - vt)$

• $Ax^2 - 2Axvt + Av^2t^2$
 $= A(x - vt)^2$

Ecuación diferencial del mov. ondulatorio

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial(x \pm vt)} \underbrace{\frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x}}_1 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial(x \pm vt)} \underbrace{\frac{\partial(x \pm vt)}{\partial t}}_{\pm v}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial(x \pm vt)} \quad = \pm v \frac{\partial f}{\partial(x \pm vt)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial(x \pm vt)^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial(x \pm vt)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

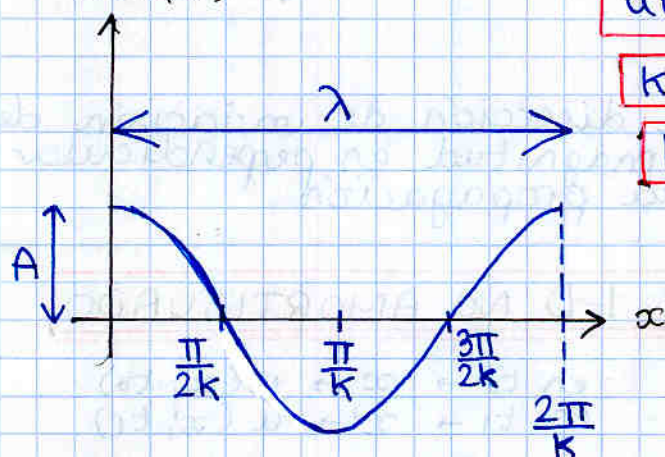
ecuación de ondas (1 dimensión)

↓ sol. general

$$u(x, t) = \alpha f_1(x + vt) + \beta f_2(x - vt)$$

FUNCIONES SENOIDALES

$u(x, t)$



$$u(x, t) = A \cos k(x - vt)$$

k : número de ondas en 2π m [m^{-1}]

$k(x - vt)$ = fase onda

• Periodo espacial

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$2\pi = k\lambda$$

$$2\pi f = k\lambda f$$

$$\omega = k\lambda f$$

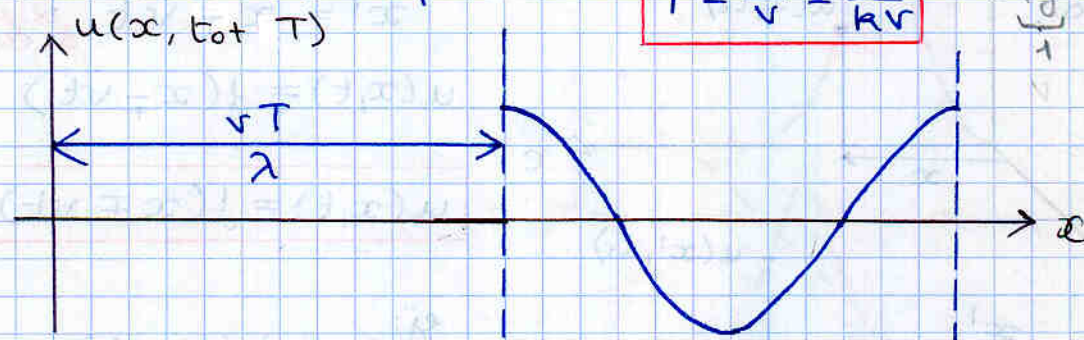
$$\omega = kv$$

• Periodo temporal

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2\pi}{kv}$$

$$v = \lambda f$$

al cabo de un tiempo T



$$u(x, t) = A \cos(k(x - vt))$$

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$= A \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$$

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\omega = kv$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{1}{T}$$

Ejercicio: Sea una onda electromagnética de frecuencia 50 Hz que se propaga por un cable de longitud $L = 2 \text{ km}$

- a) Número de cables de long L que se necesitarían para contener un periodo espacial completo

$$\frac{\lambda}{L}$$

$$v = f \cdot \lambda$$

$$c = f \cdot \lambda$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = 6 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{6 \times 10^6}{2 \times 10^3} = 3 \times 10^3$$

- b) Diferencia de fases a la salida y a la entrada del cable

$$\varphi = k(x - vt)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(L) - \varphi(0) \\ &= k(L - vt) - k(-vt) \\ &= kL \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L \end{aligned}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.05 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$$

$$\varphi = 2.1 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

- c) Frecuencia que debería tener una onda para que la diferencia de fases fuese 5°

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} L = \frac{5\pi}{180}$$

$$\frac{2}{\lambda} L = \frac{5}{180}$$

$$\frac{2}{c/f} L = \frac{5}{180}$$

$$\frac{2fL}{c} = \frac{5}{180}$$

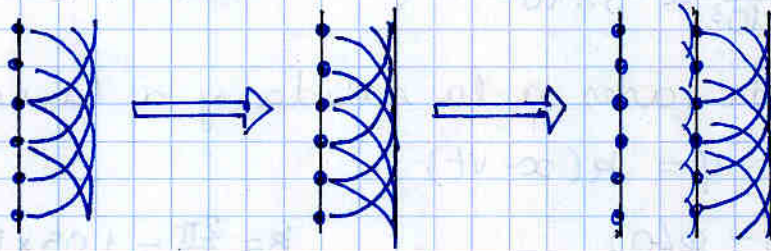
$$f = \frac{5c}{180 \times 2 \times L} = 2083.3 \text{ Hz}$$

Frente de onda

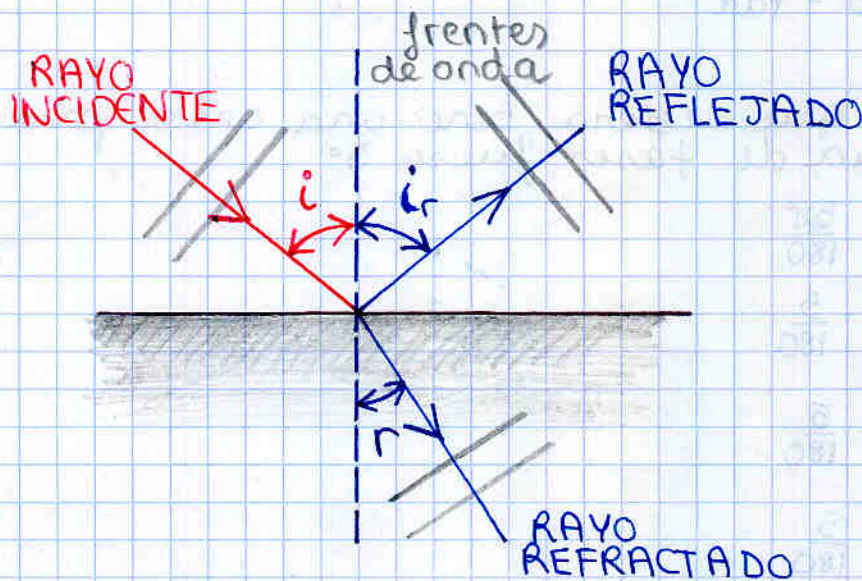
lugar geométrico de los puntos del medio con el mismo estado de perturbación

la velocidad de propagación es perpendicular al frente de ondas

Principio de Huygens: Cada punto de un frente de ondas es un nuevo foco puntual, que emite ondas secundarias. La envolvente común de estas ondas es, en cada instante, el nuevo frente de ondas.



Leyes de Reflexión y Refracción



obedecen las siguientes leyes:

- los rayos incidente, reflejado y refractado definen un mismo plano
- $i = i_r$ el ángulo incidente es igual al reflejado
- la relación entre el ángulo incidente y refractado es

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

se define en el caso de luz

Ley de Snell:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

índice de refracción

Reflexión total

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

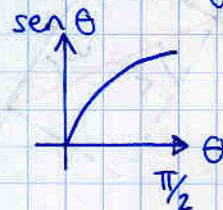
$$v_1 > v_2 \Rightarrow r < i$$

$$v_1 < v_2 \Rightarrow r > i$$

nota:

entre 0 y $\pi/2$ rad
(los ángulos con que se trabaja)

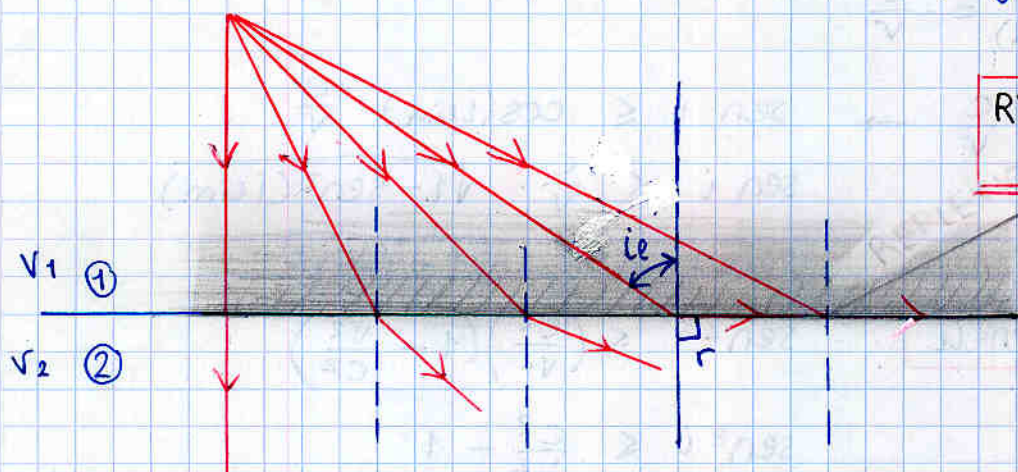
$$\sin x > \sin y \Leftrightarrow x > y$$



Caso $v_1 < v_2$

existe un ángulo crítico

a partir del cual toda la onda se refleja



REFLEXION TOTAL
 $i > i_c$

el ángulo crítico se da cuando $r = \pi/2$

RECUERDA: Solo existe
ángulo crítico si
 $v_2 > v_1$

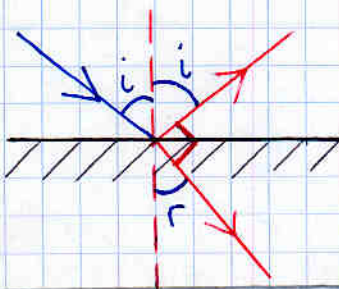
$$\sin r = 1$$

$$\sin i_{\text{lim}} = \frac{v_1}{v_2}$$

$i_{\text{lim}} = \arcsen\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$

ejercicio: si $v_1 > v_2$, condiciones para $i = 90^\circ - r$

$$v_1 > v_2 \Rightarrow i > r$$



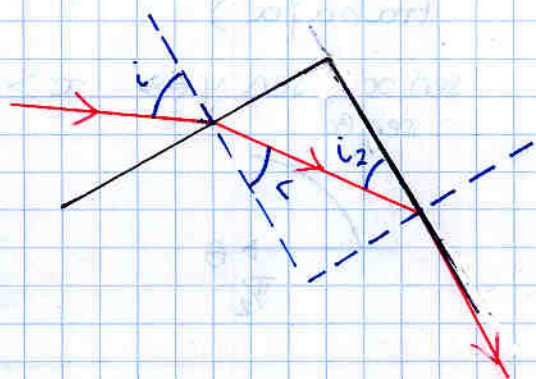
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{\sin i}{\sin (90 - i)} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{\sin i}{\cos i} = \frac{v_1}{v_2}$$

$\text{tg } i = \frac{v_1}{v_2}$

ejercicio: que velocidad debe tener la luz en el vidrio para que la luz no salga por la cara 2 sea cual sea i .



Buscamos $i_2 > i_{lim}$ para reflexión total

$$i_{lim} = 90^\circ - r_{lim}$$

$$r_{lim} = 90^\circ - i_{lim}$$

$$\frac{\sin i_{lim}}{\sin \pi/2} = \frac{v}{c}$$

$$\sin i_{lim} = \frac{v}{c}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r_{lim}} = \frac{c}{v}$$

$$\frac{\sin i}{\sin (90^\circ - i_{lim})} = \frac{c}{v}$$

$$\frac{\sin i}{\cos i_{lim}} = \frac{c}{v} \rightarrow$$

$$\sin i \leq \cos(i_{lim}) \cdot \frac{c}{v}$$

$$\sin i \leq \frac{c}{v} \cdot \sqrt{1 - \sin^2(i_{lim})}$$

$$\sin i \leq \frac{c}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\sin^2 i \leq \left(\frac{c^2}{v^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\sin^2 i \leq \frac{c^2}{v^2} - 1$$

$$v^2 \leq \frac{c^2}{\sin^2 i + 1} \quad \forall i$$

caso peor: $\frac{c^2}{\sin^2 i + 1} \downarrow \rightarrow \sin^2 i \uparrow = 1$

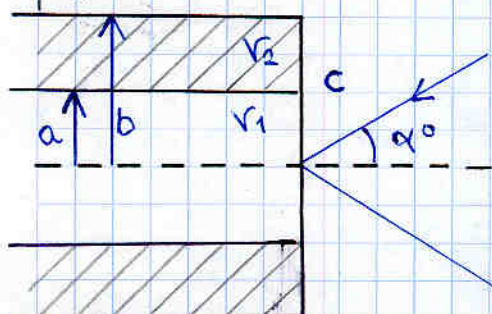
$$v^2 \leq \frac{c^2}{1+1}$$

$$v \leq \frac{c}{\sqrt{2}}$$

TRUco:
 $\sin(90 - i_e) = \cos i_e$
 $= \sqrt{1 - \sin^2 i_e}$

ejercicio:

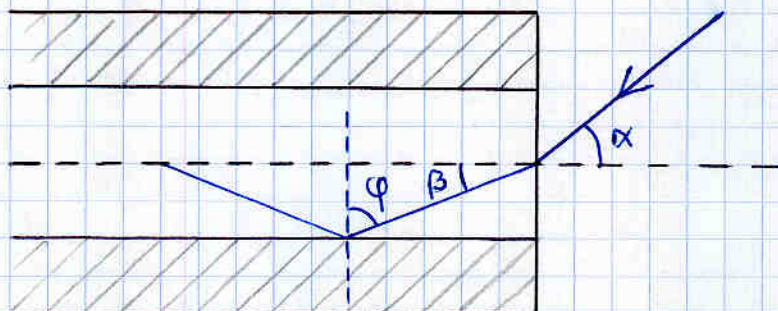
El ángulo de máxima aceptación de una fibra óptica es el ángulo del cono de revolución alrededor del eje de la fibra de forma que el rayo sea guiado.



a) condiciones para la reflexión total

- $\text{sen } i > \text{sen } i_{\text{lim}} = \frac{n_1}{n_2}$
- $n_2 > n_1$

b) calcular el ángulo de máxima aceptación (tomamos el caso límite)



- φ debe ser crítico

$$\text{sen } \varphi > \frac{n_1}{n_2}$$

- $\varphi = 90^\circ - \beta$

$$\text{sen } \varphi > \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \cos \beta > \frac{n_1}{n_2}$$

- Snell

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{n_2}{n_1} \text{sen } \beta$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$$

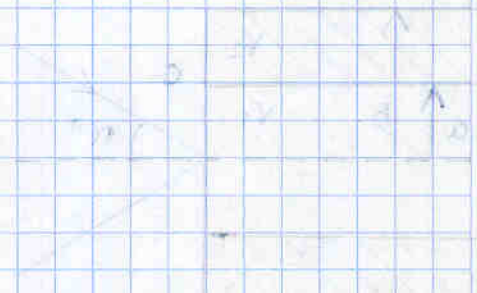
$$= \frac{n_2}{n_1} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}}$$

$$\alpha = \arcsen \frac{n_2}{n_1} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}}$$

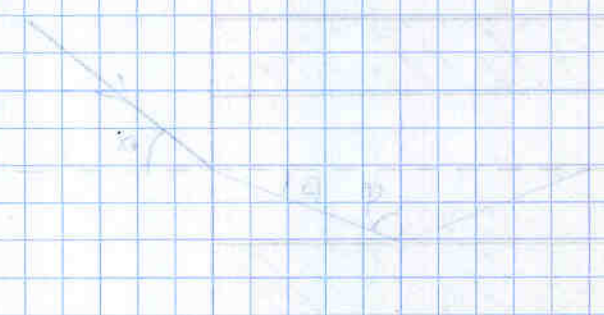
and the following condition is satisfied
 the following condition is satisfied
 the following condition is satisfied

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \theta < \sin \theta$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{2}$$



the following condition is satisfied
 the following condition is satisfied



$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin \theta < \sin \theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin \theta < \sin \theta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \sin \theta < \sin \theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \theta = \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \theta = \sin \theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \theta = \sin \theta$$

TEMA 8. ONDAS II

Interferencia constructiva y destructiva

expresando las ondas en notación compleja, al encontrarse se suman (supongamos misma amplitud)

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= A e^{j(kr_1 - \omega t)} \\ \bar{u}_2 &= A e^{j(kr_2 - \omega t)} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_p = A_p e^{-j\omega t}$$

¿Cuánto vale A_p ?

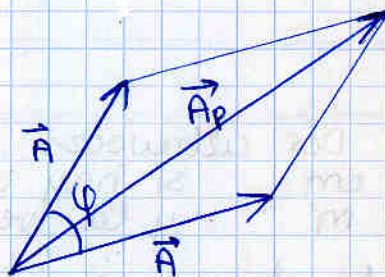
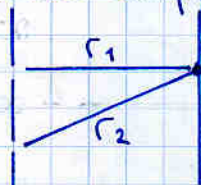
Teorema de pitágoras generalizado

$$A_p = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi}$$

$$A_p = \sqrt{2A^2 + 2A^2 \cos \varphi}$$

$$\text{si } \cos \varphi = 1 \rightarrow A_p = 2A$$

$$\text{si } \cos \varphi = -1 \rightarrow A_p = 0$$

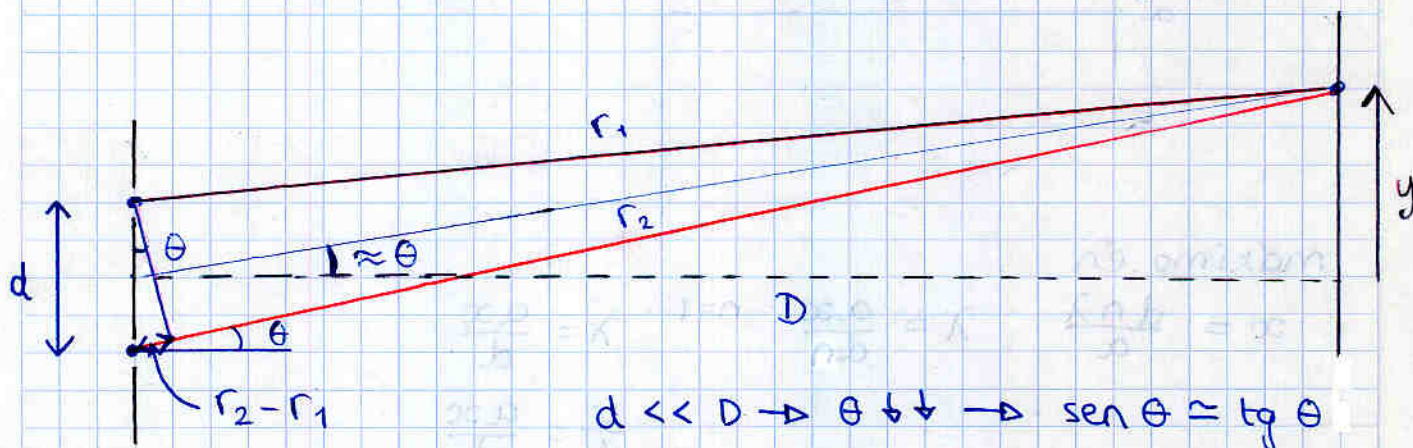


todo depende de la fase

$$\varphi = k(r_2 - r_1)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)$$

Interferencia de dos focos



$$r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$$

$$\approx d \operatorname{tg} \theta$$

$$r_2 - r_1 \approx \frac{d}{D} y$$

$$\operatorname{tg} \theta \approx \frac{y}{D}$$

$$\boxed{y = \frac{D(r_2 - r_1)}{d}}$$

máximos
 $r_2 - r_1 = n\lambda$
 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n\lambda) = 2\pi n$
 $\cos \varphi = 1$

$$\text{MÁXIMOS } y_n = D \frac{n\lambda}{d}$$

mínimos
 $r_2 - r_1 = (2n+1)\lambda$
 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (2n+1)\lambda = 2\pi(2n+1)$
 $\cos \varphi = -1$

$$\text{MÍNIMOS } y_n = D \frac{(2n+1)\lambda}{d}$$

Problema: Dos focos emitiendo en fase $l \ll a \gg \lambda$

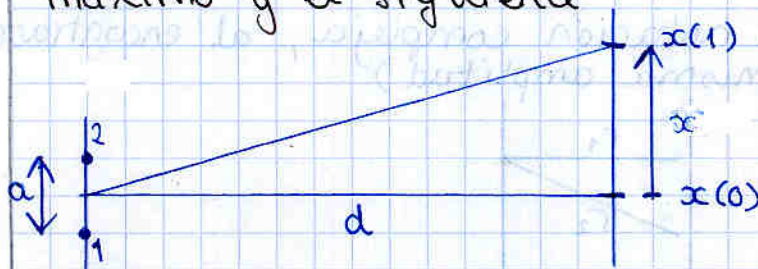
$$a = 0.1 \text{ mm}$$

$$d = 0.5 \text{ m}$$

$$\lambda = 5460 \text{ \AA} \quad 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

Determinar x entre el punto máximo y el siguiente

NOTA: Por estar los focos muy cerca, θ es el mismo para ambos



máximos:

$$x = \frac{d n \lambda}{a}$$

$$x(1) - x(0) = \frac{d \lambda}{a}$$

$$x = 2.73 \text{ mm}$$

Problema: Dos altavoces O_1 y O_2 tono puro en fase

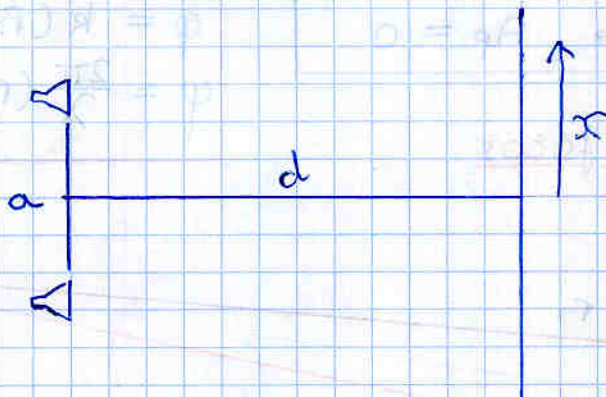
$$a = 75 \text{ cm}$$

$$d = 15 \text{ m}$$

si hay un máximo en $x = 1.8 \text{ m}$

y la velocidad del sonido es 340 m/s

Calcular la frecuencia del sonido:



máximo en

$$x = \frac{d n \lambda}{a}$$

$$\lambda = \frac{a x}{d n} \quad n=1$$

$$\lambda = \frac{a x}{d}$$

$$\frac{v}{f} = \frac{a x}{d}$$

$$f = \frac{v d}{a x} = \frac{340 \cdot 15}{0.75 \cdot 1.8} = 3777.77 \text{ Hz}$$