ETSI Telecomunicación

Conmutación

Apuntes de Pak

Conmutación

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 4º curso
Curso 2006/2007

Contenido

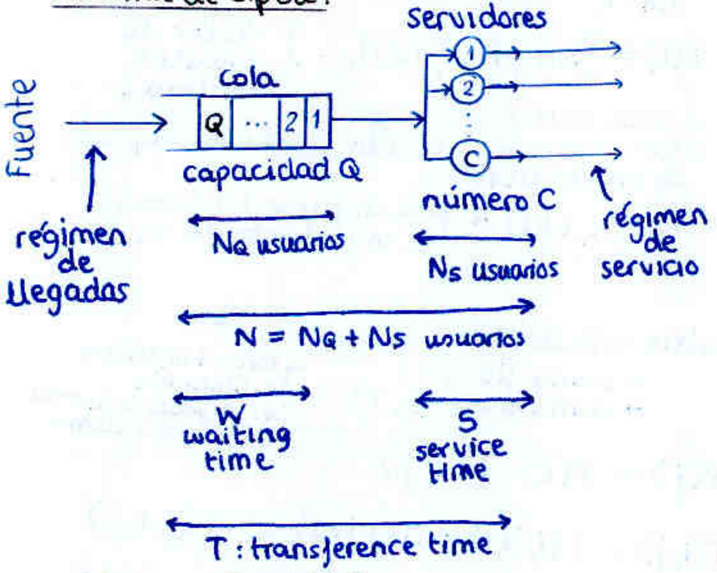
La asignatura se divide en dos partes, correspondiente a los exámenes de antes y después de navidad. Las dos partes están una detrás de otra, y cada parte tiene:

- Referencia rápida
- Apuntes extensos
- Tests resueltos

Fecha de última actualización: 19 Junio 2010

Capitulo 2. Introducción a los sistemas de espera

Sistema de espera:



V.A. : $T = W + S$

fdp : $f_T(t) = f_W(t) * f_S(t)$

Notación de Kendall

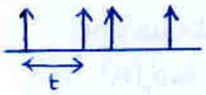
si algún valor es infinito, se omite

$$\underset{\text{M si es Markov}}{\text{régimen llegadas}} / \underset{\text{M si es Markov}}{\text{régimen servicio}} / C / C+Q / \text{fuente} / \text{disciplina de cola (FIFO, LIFO, random...)}$$

sistema de espera: M/M/C

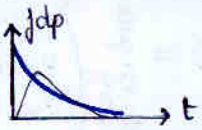
sistema de perdidas: M/M/C/C

Régimen de llegadas M



tiempo entre llegadas: distribución exponencial

ajuste de Poisson:



$\boxed{\lambda e^{-\lambda t}}$ ⇒ valor medio tiempo entre llegadas $= \frac{1}{\lambda}$ ⇒ λ: nº medio de llamadas por unidad de tiempo

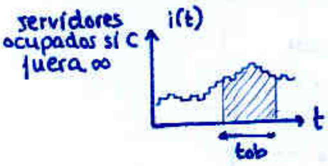
Régimen de servicio M

tiempo de servicio (ej: duración de llamada) exponencial

$\boxed{\mu e^{-\mu t}}$ tiempo medio $= \frac{1}{\mu}$ ⇒ μ: nº medio de servicios por u. de t. en cada servidor

- Prestaciones orientadas al cliente: W, $f_W(t)$
- Prestaciones orientadas al sistema

→ Intensidad de tráfico A [Erlangs] ofrecido



$\boxed{\text{A: número medio de servidores ocupados si el sistema fuera } C \to \infty}$

$$A = \frac{1}{t_{ob}} \int i(t)\,dt$$

$$\boxed{A = \frac{\lambda}{\mu} \text{ [Erlangs]}} = \frac{\text{tiempo medio de servicio}}{\text{tiempo medio entre llegadas}} = A_0$$

↳ Tráfico cursado: si consideramos finitos C servidores:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Tráfico cursado} \quad A_c = \underset{\lambda/\mu}{A_0}(1-\underset{\text{prob pérdidas}}{PP}) \\ TC \equiv A_c \end{array}} \rightarrow \text{solo si el sistema es estable}$$

i.e. la cola no se llenaría infinitamente si Q fuera ∞

si no fuera estable, el tráfico cursado por servidores sería menor que el ofrecido que se queda en la cola.

Además, $A_c = \overline{N_s}$ ← nº medio de servidores ocupados

→ Factor de utilización ρ

$\boxed{\rho\text{: proporción de tiempo en que un servidor al azar está ocupado}}$

$$\rho = \min\left(\frac{A_0}{C}(1-PP), 1\right) = \frac{A_c}{C}$$

λT: media nº llamadas entrantes en tiempo T

dem: $\frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\lambda T}{C}\right)}{T} = \frac{A}{C} = \rho$

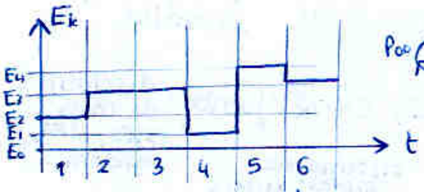
→ Caudal o throughput Th

Th : nº medio de clientes servidos por unidad de tiempo

$$Th = \underset{\text{nº servidores}}{C} \cdot \underset{\text{tasa servicio cada servidor [servicios/s]}}{\mu} \cdot \rho \leftarrow \text{\% tiempo servidor ocupado}$$

Capitulo 3. Cadenas y Procesos de Markov

• Cadenas de Markov



Evolución de estados con las fechas (discretas)

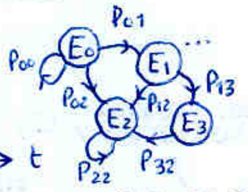


Diagrama de estados

Caso general

$P_m(i)$ = prob. estado m en fecha i

$P(i) = [P_0(i), P_1(i), P_2(i), \dots]$ Vector de estados → suma 1

Hipótesis de Markov

Memoria nula: estado en i+1 sólo depende de estado en i

$P_{mn}(i, i+1)$ = prob. de pasar del estado m en i al estado n en i+1

matriz de probabilidades de transición:

$$T(i, i+1) = \begin{array}{cc} & \text{estado al que voy} \\ \text{estado en que estoy} & \begin{pmatrix} P_{00}(i,i+1) & P_{01}(i,i+1) & \cdots \\ P_{10}(i,i+1) & P_{11}(i,i+1) & \cdots \\ P_{20}(i,i+1) & & \ddots \\ \vdots & & \end{pmatrix} \end{array}$$

permite hacer:

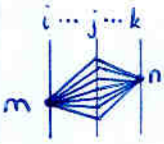
$$P(i+1) = P(i) \cdot T(i, i+1) \xrightarrow{\text{se generaliza a}}$$

- matriz estocástica:
  - ↳ suma filas = 1
  - ↳ elementos $\in [0, 1]$

↳ rango 1 inferior a la dimensión i.e. un grado de libertad al resolver sistema

- $P(j) = P(i) \cdot T(i, j)$
- $T(i,j) = T(i,i+1) \cdot T(i+1,i+2) \cdot \ldots \cdot T(j-1,j)$
- Relación de chapman-kolmogorov

$$T(i,k) = T(i,j) \cdot T(j,k)$$
$$\updownarrow$$
$$P_{mn}(i,k) = \sum_{\ell} P_{m\ell}(i,j) \cdot P_{\ell n}(j,k)$$



Caso homogéneo

↔ Las prob. de transición no dependen de la fecha, sino de la diferencia entre fechas

$$P_{mn}(i,i+1) = P_{mn}(1) = \boxed{P_{mn} : \text{prob. transición del estado m al n}}$$

$$P_{mn}(i,j) = P_{mn}(j-i)$$

$$T(i, i+1) \equiv \Pi = \begin{array}{c|cccc} & \multicolumn{4}{c}{\text{estado siguiente}} \\ \text{estado actual} & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \hline 0 & P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ 1 & P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ 2 & P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

$$P(i+N) = P(i) \cdot \Pi^N$$

Régimen permanente

vector de estados final $P \equiv P(\infty) = [P_0, P_1, P_2, \dots]$

Dos formas de hallarlo:

① $P(\infty) = P(i) \cdot \Pi^\infty$

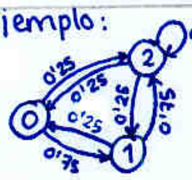
② $\boxed{P(\infty) = P(\infty) \cdot \Pi}$

es un sistema de ecuaciones con rango N-1 → 1 grado libertad

Hay que añadir ecuación

$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots = 1$

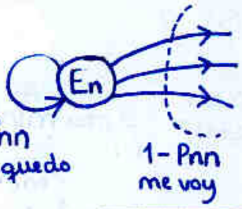
ejemplo:



$$\Rightarrow \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0'75 & 0'25 \\ 0'25 & 0 & 0'75 \\ 0'25 & 0'25 & 0'5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{P(\infty)=P(\infty)\cdot\Pi}{\begin{cases} P_0 = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 \\ P_1 = \frac{3}{4}P_0 + \frac{1}{4}P_2 \\ P_2 = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{2}P_2 \end{cases}}$$

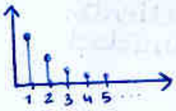
ademas $P_0 + P_1 + P_2 = 1$

Tiempo de estancia en un estado



⚠ no 0

Distribución de probabilidad	Tiempo de estancia	1	2	3	···
	Probabilidad	$1-P_{nn}$	$P_{nn}(1-P_{nn})$	$P_{nn}^2(1-P_{nn})$	···



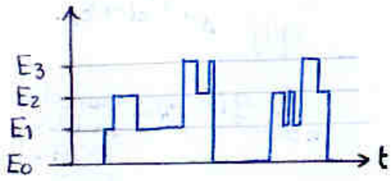
Distribución geometrica de razon $r = P_{nn}$

↓

Tiempo medio de estancia $\overline{T} = \frac{1}{1-r}$

$$\boxed{\overline{T_n} = \frac{1}{1-P_{nn}}}$$

Procesos de Markov



Los estados (que siguen siendo discretos) pueden cambiar de uno a otro en cualquier instante del tiempo continuo t.

se sigue teniendo caso general

vector de estados $P(t) = [P_0(t), P_1(t), \dots]$

$$P(u) = P(t) \cdot T(t,u)$$

relación C-K
$T(s,u) = T(s,t) \cdot T(t,u)$

siendo las componentes de T las probabilidades de transición $P_{mn}(t,u)$

T : matriz de prob de transición
no confundir con
Q : generador infinitesimal

Generador Infinitesimal

Dem:

$$T(s,t+\Delta t) - T(s,t) = T(s,t+\Delta t) - T(s,t)$$

$$T(s,t+\Delta t) - T(s,t) = \overbrace{T(s,t) \cdot T(t,t+\Delta t)} - T(s,t)$$

$$T(s,t+\Delta t) - T(s,t) = T(s,t) \cdot [T(t,t+\Delta t) - I]$$

Dividiendo ambos lados por Δt y haciendo $\Delta t \to 0$

$$\frac{dT(s,t)}{dt} = T(s,t) \cdot \underbrace{\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t,t+\Delta t) - I}{\Delta t}}}_{Q(t)}$$

Ademas:

$$\frac{d}{dt}\Big(P(t) = P(s) \cdot T(s,t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(s) \cdot \frac{\partial T(s,t)}{\partial t}$$

$$= \underbrace{P(s) \cdot \overbrace{T(s,t) \cdot Q(t)}}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \cdot Q(t)$$

Q(t) : generador infinitesimal

- elementos no diagonal:

$$q_{mn}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{mn}(t,t+\Delta t)}{\Delta t} \quad m \neq n$$

representan la tasa de transición de estado m a n

i.e. probabilidad de pasar de estado m a n en tiempo ΔT $\equiv \Delta t \cdot q_{mn}$ si $\Delta t \to 0$

- elementos diagonal

$$q_{mm}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{mm}(t,t+\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

son siempre ≤ 0 ↳ relacionado con tiempo de residencia en estado $\boxed{\bar{T} = -\frac{1}{q_{ii}}}$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} * & q_{01}(t) & q_{02}(t) & \cdots \\ q_{10}(t) & * & q_{12}(t) & \cdots \\ q_{20}(t) & q_{21}(t) & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

siendo los asteriscos de la diagonal el menos sumatorio del resto de elementos de la fila.
i.e. las filas suman 0

el resto de elementos son la tasa de transición entre estados

$$\boxed{\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \cdot Q(t)}$$

⇓

$$\left[\frac{dP_0}{dt}, \frac{dP_1}{dt}, \dots\right] = [P_0, P_1, \dots] \cdot \begin{bmatrix} * & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & * & q_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}$$

⇒ Es un sistema de ecuaciones que junto a la condición inicial nos proporciona la evolución temporal de la probabilidad de cada estado

i.e. nos da P(t) ∀t

- añadir C.I.
- añadir $P_0 + P_1 + \dots = 1$

ver ejemplo pagina III-6 de apuntes ←

En todo instante debe sumar 1

Proceso de Markov homogéneo: $Q(t) = Q$

Tiempo de permanencia en un estado

$T_i \equiv$ Tiempo de permanencia en estado i-ésimo

Función Distribución : $F_{T_i}(t) = Pr(T_i \leq t) = 1 - e^{q_{11}t}$

$$\boxed{\hat{F}_{T_i}(t) = Pr(T_i > t) = e^{q_{11}t}}$$

↘ d/dt →

Función densidad de probabilidad

$$\boxed{f_{T_i}(t) = -q_{11} e^{q_{11}t}}$$

ver dem. pag III-7

$$\frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x} = \hat{H}_i(x) \cdot q_{ii}$$

Como ves. hay memoria nula

$$\hat{H}_i(x+y) = \hat{H}_i(x) \cdot \hat{H}_i(y)$$

distribución exponencial con tasa = suma tasas salida.

$\boxed{\text{Memoria Nula} \longleftrightarrow \text{Distrib. expon.}}$

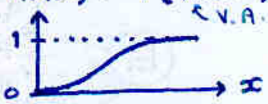
$$\bar{T}_i = \boxed{\text{Tiempo medio de permanencia en estado Ei} = -\frac{1}{q_{ii}}}$$

↗ el menos sumatorio de todas las tasas salientes del estado

recuerda ISA

Funcion Distribucion

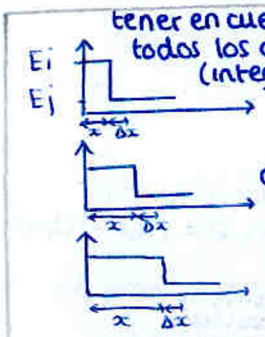
$F_X(x) = P\{X \leq x\}$



↓ d/dx

Funcion densidad de probabilidad (fdp)

P_{ij} = Pr { Siguiente estado E_j | estado actual E_i }



tener en cuenta todos los casos (integral)

Demostración:

$$P_{ij} = \int_0^\infty dP_{ij}$$

$$dP_{ij} = \underset{\downarrow}{e^{q_{ii}x}} \cdot \underbrace{q_{ij} \cdot dx}_{\downarrow}$$

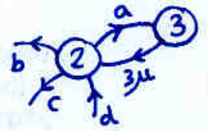
Pr { $T_i \geq x$ } · Pr { cambiar i→j en tiempo dx }

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} = \frac{q_{ij}}{\sum_{k \neq i} q_{ik}}$$

← tasa de salida $E_i \to E_j$

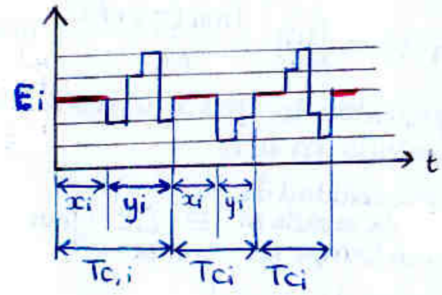
← tasa de salida TOTAL de E_i

ejemplo



$$P_{23} = \frac{a}{a+b+c}$$ ← no incluir las tasas de entrada

Tiempo de ciclo $\overline{T}_{c,i}$



P_i ≡ % de tiempo en el estado i-ésimo

$$\boxed{P_i = \frac{\overline{x_i}}{\underbrace{\overline{x_i} + \overline{y_i}}_{T_{ci}}} = \frac{\text{Tiempo medio de permanencia en } E_i}{\text{Tiempo de ciclo}}}$$

despejando

$$\overline{T}_{ci} = \frac{\overline{T}_i}{P_i} = \frac{-1/q_{ii}}{P_i} = \frac{1}{P_i \sum_{i \neq j} q_{ij}}$$

$$\boxed{\overline{T}_{c,i} = \frac{1}{\text{flujo saliente}}}$$

→ $\boxed{\text{Frecuencia de visitas al estado i} = \frac{1}{\overline{T}_{ci}}} = -P_i \cdot q_{ii} = \boxed{\underbrace{P_i \sum_{j \neq i} q_{ij}}_{\text{flujo saliente de } E_i}}$

frec visitas a Ei = frec salidas desde Ei

→ $\boxed{\text{Frecuencia de transiciones desde } E_i \text{ a } E_j = \underbrace{P_i \cdot q_{ij}}_{\text{flujo de i a j}}}$

Dem:
= frec salidas desde Ei · proporción que van a Ej

$$P_i \cdot \sum_{k \neq i} q_{ik} \cdot \frac{q_{ij}}{\sum_{k \neq i} q_{ik}}$$

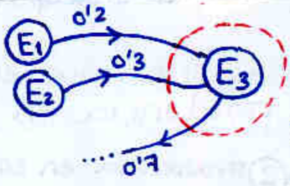
$\boxed{\text{frecuencia transiciones i→j} = \text{flujo i→j}}$

Ecuaciones de balance globales

$$\boxed{\frac{dP_i(t)}{dt} = \underbrace{\text{Flujo entrante}}_{\sum_{j \neq i} P_j \cdot q_{ji}} - \underbrace{\text{Flujo saliente}}_{\sum_{j \neq i} P_i \cdot q_{ij}} \left(= 0 \text{ en regimen permanente} \right)}$$

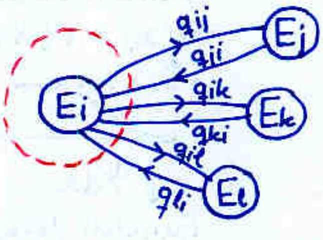
Concepto de flujo:

Flujo entrante = $P_1 \cdot 0'2$



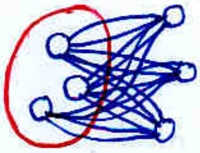
Flujo entrante = $0'2 P_1 + 0'3 P_2$

Flujo saliente = $0'7 P_3$



sistema de ecuaciones diferenciales que permite hallar P(t)

se puede generalizar a un conjunto de varios estados:



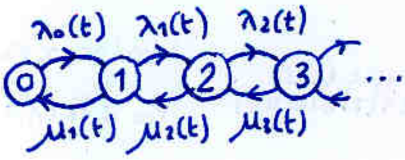
$$\frac{dP_i(t)}{dt} + \frac{dP_j(t)}{dt} + \ldots = \boxed{\text{Flujo Entrante} - \text{Flujo saliente}}$$

$= 0$ en regimen permanente

sistema de ecs (no diferenciales) que permite sacar $P(\infty)$

Capitulo 4. Procesos de nacimiento y muerte

Q(t) es tridiagonal $Q(t) = \begin{bmatrix} * & \lambda_0(t) & & \\ \mu_1(t) & * & \lambda_1(t) & \\ & \mu_2(t) & * & \lambda_2(t) \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$

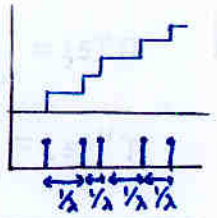


Nacimiento puro: todos $\mu = 0$
Muerte pura: todas $\lambda = 0$

Caso particular: Proceso de Poisson

- homogéneo en tiempo $Q(t) = Q$
- nacimiento puro
- homogéneo en estados $\lambda_i = \lambda$

$Q = \begin{bmatrix} * & \lambda & & \\ & * & \lambda & \\ & & * & \lambda \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$



Cálculo de P(t) (ver pag IV-2)

aplicamos: variación de flujo = flujo entrante − flujo saliente

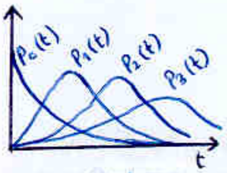
$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \rightsquigarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$\frac{dP_0(t)}{dt} + \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) \rightsquigarrow P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

$\frac{dP_0(t)}{dt} + \frac{dP_1(t)}{dt} + \frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t) \rightsquigarrow P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$

$\vdots$

$$\boxed{P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}}$$



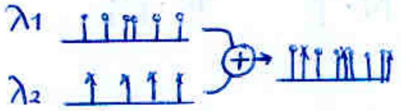
es decir:

$p(t) = \left[e^{-\lambda t}, \lambda t e^{-\lambda t}, \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}, \dots, \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \dots\right]$

la suma de P(t) en cualquier t

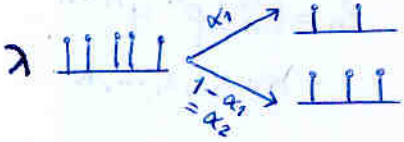
$e^{-\lambda t} \underbrace{\left(1 + \frac{\lambda t}{1} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots\right)}_{e^{\lambda t}} = 1$

Superposición procesos Poisson



$\lambda_T = \lambda_1 + \lambda_2$

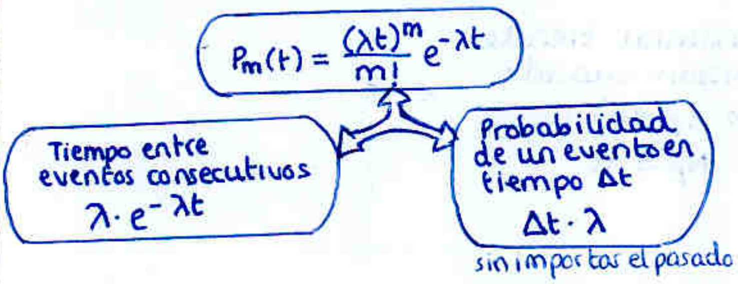
Descomposición procesos de Poisson



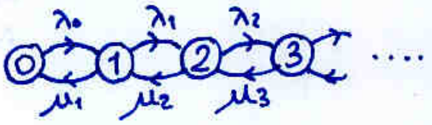
$\lambda_1 = \alpha_1 \cdot \lambda$

$\lambda_2 = \alpha_2 \cdot \lambda$

Triangulo de memoria nula



Regimen estacionario en un proceso de nacimiento y muerte



$t \to \infty \Rightarrow P = [P_0, P_1, P_2, P_3, \dots]$

P_k: % de tiempo que el sistema está en el estado k.

regimen estacionario ⇒ Flujo entrante = Flujo saliente

$k=0 \longrightarrow P_0 = P_0$

k = 1


$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \longrightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$

k = 2


$\mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 \longrightarrow P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0$

$\vdots$

k = m


$\longrightarrow P_m = \frac{\lambda_{m-1} \lambda_{m-2} \cdots \lambda_0}{\mu_m \mu_{m-1} \cdots \mu_1} P_0$

$$\Rightarrow \boxed{P = \left[P_0, \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0, \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \cdot \mu_1} \cdot P_0, \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0, \dots, \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} P_0, \dots\right]}$$

y sabiendo que la suma es 1, despejamos P_0

$$1 = P_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} + \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} + \dots + \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} + \cdots\right)$$

cola no crece indefinidamente $\Leftrightarrow P_0 \neq 0 \Leftrightarrow$ suma converge $\lambda_{k-1} < \mu_k$

Anexo: Función generatriz

Sea una v. A. X discreta. sigue una distribución

valor n	0	1	2	3	...
$P_n \equiv Pr(X=n)$	P_0	P_1	P_2	P_3	...

Defino la función generatriz.

$$\boxed{\Pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot z^n}$$

$$\Pi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n \cdot z^{n-1}$$

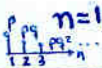
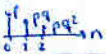
$$\Pi''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P_n \cdot z^{n-2}$$

Permite calcular

$$\boxed{\begin{aligned} E[X] &= \Pi'(1) \\ Var[X] &= \overbrace{\Pi''(1) + \Pi'(1)}^{E[X^2]} - \overbrace{\left(\Pi'(1)\right)^2}^{E[X]^2} \end{aligned}}$$

$$\text{coef dispersión } [X] = \frac{\text{desv. est } [X]}{E[X]} = \frac{\sqrt{Var[X]}}{E[X]}$$

ejemplos:

Distribución	P_n	$\Pi(z)$	med(n)	var(n)
Poisson ej: llegadas tasa λ memoria nula	$P_{n,t} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$	$e^{\lambda t(z-1)}$ usando Taylor de $e^{\lambda t z}$	λt	λt
Geométrica ej: tiempo de permanencia en estado En de cadena de Markov (no proceso)	$P_n = p \cdot q^{n-1}$ $n=1,2,\ldots$ 	$\frac{pz}{1-qz}$ sacando factor común pz	$\frac{1}{p} = \frac{1}{1-q}$ (p ← P_1; razón → q)	$\frac{q}{p^2}$
	$P_n = p \cdot q^n$ $n=0,1,\ldots$ 	$\frac{p}{1-qz}$ y luego aplicando sumatorio progr. geom sacando factor común p	$\frac{q}{p}$ (q ← razón; p ← P_0)	$\frac{q}{p^2}$
Bernouilli ej: cara o cruz	$\begin{cases} P_0 = q \\ P_1 = p \end{cases}$	$q + zp$ trivial	p	pq
Binomial ej: cara o cruz N veces	$P_n = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ $n = 0,1,2,\ldots,N$	$(q+zp)^N$ usando la definición de $(a+b)^N$ directamente	$N \cdot p$	$N \cdot pq$

$p = 1-q$

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

La binomial tiende a poisson cuando $N \to \infty$ $(p \to 0)$ con $Np = \lambda t$ ← recuerda

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!}$$

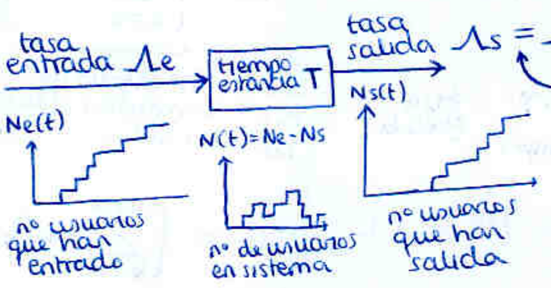
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$$

Capítulo 5. Modelos Markovianos de colas

Teorema de Little

Cualquier sistema (que no sea ni fuente ni sumidero) que ha alcanzado un régimen permanente



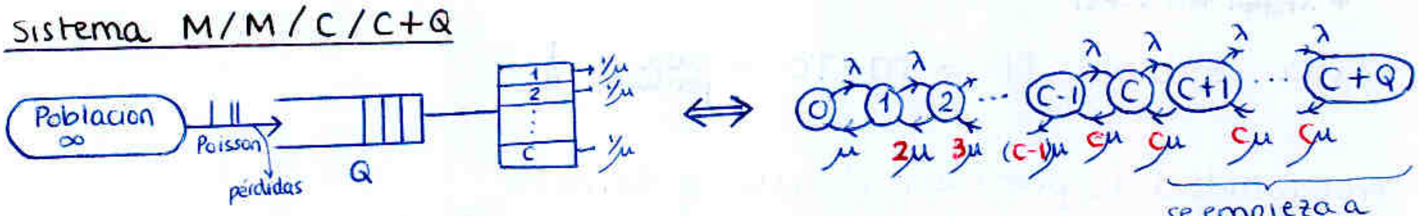
Las tasas de entrada y salida son iguales ya que el sistema no es ni fuente ni sumidero.

$$\boxed{\overline{N} = \Lambda \cdot \overline{T}}$$

nº medio usuarios en sistema — tasa de entrada/salida — tiempo medio en sistema

---

Sistema M/M/C/C+Q



se empieza a llenar la cola (congestión)

estado $P_k \equiv$ k usuarios en el sistema

Regimen permanente: flujo entrada = flujo salida

$0 \rightleftarrows 1 \longrightarrow \mu P_1 = \lambda P_0 \longrightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = A P_0$

$0 \rightleftarrows 1 \rightleftarrows 2 \longrightarrow 2\mu P_2 = \lambda P_1 \longrightarrow P_2 = \frac{A}{2} P_1 = \frac{A^2}{2} P_0$

$0 \rightleftarrows 1 \rightleftarrows 2 \rightleftarrows 3 \xrightarrow{3\mu P_3 = \lambda P_2} P_3 = \frac{A^3}{3!} P_0$

$\vdots$

$P_C = \frac{A^C}{C!} P_0$

$C\mu P_{C+1} = \lambda P_C \longrightarrow P_{C+1} = \frac{A}{C} \cdot \frac{A^C}{C!} P_0$

$C\mu P_{C+2} = \lambda P_{C+1} \longrightarrow P_{C+2} = \left(\frac{A}{C}\right)^2 \frac{A^C}{C!} P_0$

$\vdots$

$P_{C+Q} = \left(\frac{A}{C}\right)^Q \frac{A^C}{C!} P_0$

$\Rightarrow$ Se obtiene el régimen permanente:

$$P_k = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} P_0 & k \leq C \quad \text{servidores llenándose} \\ \left(\frac{A}{C}\right)^{k-C} \frac{A^C}{C!} P_0 & C < k \leq C+Q \quad \text{cola llenándose} \end{cases}$$

$$P = \left[P_0, A P_0, \frac{A^2}{2} P_0, \dots, \frac{A^C}{C!} P_0, \frac{A}{C}\frac{A^C}{C!} P_0, \left(\frac{A}{C}\right)^2 \frac{A^C}{C!} P_0, \dots, \left(\frac{A}{C}\right)^Q \frac{A^C}{C!} P_0\right]$$

la suma debe ser 1, por tanto:

$$1 = P_0 \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!}}_{\substack{\text{sería } e^A \text{ si} \\ C \to \infty}} + \frac{A^C}{C!} \underbrace{\left(1 + \frac{A}{C} + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A}{C}\right)^Q\right)}_{\frac{1 - \left(\frac{A}{C}\right)^{Q+1}}{1 - \left(\frac{A}{C}\right)}} \Big)$$

podemos despejar P_0

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^C}{C!}\left(\frac{1-\left(\frac{A}{C}\right)^{Q+1}}{1-(A/C)}\right)}$$

Ahora ya tenemos P totalmente conocido. Lo cual nos permite obtenerlo casi todo.

El "truquillo" suele ser sumar la probabilidad de los estados ponderada por lo que corresponda

ejemplos

- Nº medio de servidores ocupados: $\overline{N_s}$ → nº medio de servidores ocupados: sumar la prob de cada estado ponderada por el nº de servidores ocupados en cada uno
  $\overline{N_s} = P_0 \cdot 0 + P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \dots + P_C \cdot C + P_{C+1} \cdot C + \dots + P_{C+Q} \cdot C$
- Probabilidad Perdidas = Prob de cola llena = P_{C+Q}
- Probabilidad Bloqueo = Prob de todos servidores llenos = $P_{C+1} + P_{C+2} + \dots + P_{C+Q}$
- Nº medio de usuarios en cola: $\overline{N_Q} = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + \dots + 0 \cdot P_C + 1 \cdot P_{C+1} + 2 \cdot P_{C+2} + \dots + Q P_{C+Q}$
- Tiempo medio de espera en cola: por Little: $\overline{T_w} = \frac{\overline{N_Q}}{\Lambda e} = \frac{\overline{N_Q}}{\lambda}$
  en general Λe será la prob de cada estado ponderada por la tasa de entrada en cada estado

Tráfico ofrecido, cursado y perdido

Tráfico ofrecido $\equiv A_0 \equiv TO$

$$\boxed{TO = \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{C+Q} \lambda_k P_k\right]}_{\text{nº medio de llamadas ofrecidas/ unidad de tiempo}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\mu}}_{\text{duración llamada}}}$$

típicamente los λ_k son iguales y $TO = \frac{\lambda}{\mu} = A$

$\overline{N_0} = CAO \cdot T$ ← nº clientes en tiempo T ofrecidos

tasa ofrecida $= \boxed{CAO}$ = nº medio de llamadas ofrecidas/ unidad de tiempo

Tráfico cursado $\equiv A_c \equiv TC$

$$\boxed{TC = \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{C+Q} \mu_k P_k\right]}_{\text{tasa cursada } \lambda_c} \frac{1}{\mu}} \boxed{= \overline{N_s}}$$

nº medio de servidores en uso

para sistema M/M/C/C+Q donde $\mu_k = \begin{cases} k\mu & k \le C \\ C\mu & k > C \end{cases}$

$\overline{N_c} = \lambda_c \cdot T$

tasa cursada λ_c

Curioso:

$$\left.\begin{aligned} &0 \cdot P_0 + \mu P_1 + 2\mu P_2 + \ldots + C\mu P_C \\ &+ C\mu(P_{C+1} + P_{C+2} + \ldots + P_{C+Q}) \end{aligned}\right\} \text{tasa out cola}$$

$$\|$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda P_0 + \lambda P_1 + \lambda P_2 + \ldots \\ &+ \lambda P_{C+Q-1} + 0 \cdot P_{C+Q} \end{aligned}\right\} \text{tasa in cola}$$

$\xleftarrow{}$ $\boxed{\text{tasa de entrada a la cola} = \text{tasa de salida de la cola}}$ =

- si el sistema es estable $\boxed{TC = TO\,(1 - PP)}$

Tráfico perdido $\equiv TP = TO - TC$ = tasa perdida $\cdot \frac{1}{\mu}$

Probabilidad de perdidas, bloqueo y demora

- Probabilidad de pérdidas: Probabilidad de servidores y cola ocupados

típico (no siempre) $\boxed{PP = P_{C+Q}}$

en general (siempre): $\boxed{PP = \frac{\overline{N_p}}{\overline{N_0}} = 1 - \frac{\overline{N_c}}{\overline{N_0}} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{C+Q} \mu_k P_k}{\sum_{k=0}^{C+Q} \lambda_k P_k}}$

- Probabilidad de bloqueo: Probabilidad de servidores ocupados

$\boxed{PB = \sum_{k=C}^{C+Q} P_k}$ i.e. sumar la prob de los estados con servidores llenos

$$\boxed{\text{sistema de pérdidas} \xrightarrow{?} PP = PB \Rightarrow \text{No siempre: ejemplo: población} = C \Rightarrow \begin{matrix} PP = 0 \\ PB \neq 0 \end{matrix}}$$

- Probabilidad de demora:

$$PD = \frac{\overline{N_D}}{\overline{N_0}} = \frac{\sum_{k=C}^{C+Q-1} \lambda_k P_k}{\sum_{k=0}^{C+Q} \lambda_k P_k}$$

← no incluye la pérdida

es como la PB pero desde el punto de vista de las llamadas i.e. si soy una llamada, que prob hay de tener que esperar. Por eso dividimos por $\overline{N_0}$

$$\boxed{\begin{aligned} TC &= TO\,(1 - PP) \\ TP &= TO \cdot PP \\ TD &= TO \cdot PD \end{aligned}}$$

TD ← tráfico demorado

Factor de utilización ρ:

fracción de tiempo que un servidor al azar está ocupado; hay que ponderar cada estado por la proporción de servidores ocupados

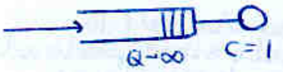
$$\boxed{\rho = \frac{0}{C} \cdot P_0 + \frac{1}{C} P_1 + \frac{2}{C} P_2 + \ldots + \frac{C}{C} P_C + \frac{C}{C} P_{C+1} + \frac{C}{C} P_{C+2} + \ldots + \frac{C}{C} P_{C+Q}}$$

$$= \frac{1}{C}\left(0 \cdot P_0 + P_1 + 2P_2 + \ldots + CP_C + C\,(P_{C+1} + P_{C+2} + \ldots)\right)$$

$$= \frac{\overline{N_S}}{C} = \frac{TC}{C}$$

En sistema monoservidor $P_0 = 1 - \rho$

Sistema M/M/1



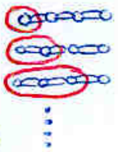
$\boxed{P_k = A^k P_0}$ con $P_0 = 1 - A$

$\rho = P_0 \cdot 0 + P_1 \cdot 1/1 + P_2 \cdot 1/1 + \ldots = 1 - P_0$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= 1 - P_0 \\ \rho &= A = \lambda/\mu \end{aligned}}$$

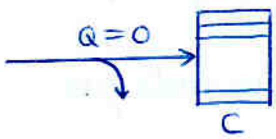
$\boxed{\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}}$ $\quad \overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{\overline{N}}{\mu\rho}$ (↑ Little) $\quad \boxed{\overline{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho}}$ $\quad \overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = T_s \cdot \overline{N}$

Repetir análisis en régimen permanente para cada caso



Flujo entrada = Flujo salida

Sistema de Pérdidas : Erlang-B M/M/C/C



$$P_k = \frac{A^k}{k!} P_0 \quad \text{siendo} \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{C} \frac{A^k}{k!}}$$

$k = 0, 1, \dots, C$ si $\rho = \frac{A}{C} < 1$

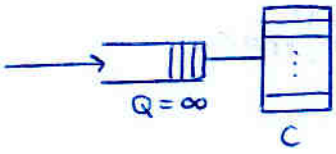
$$\boxed{PB = P_C = Er_1(C,A) \text{ Función de Erlang-B}}$$

$$PP = \frac{\overline{N_P}}{\overline{N_0}} = \frac{\lambda \cdot P_C}{\lambda} = P_C$$

recursivo

$$Er_1(C,A) = \frac{\frac{A}{C} \cdot Er_1(C-1,A)}{1 + \frac{A}{C} Er(C-1,A)}$$

Sistema de espera : Erlang-C M/M/C

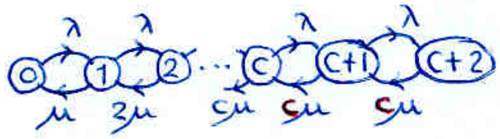


$$P_k = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} P_0 & k \le C \\ \left(\frac{A}{C}\right)^{k-C} \frac{A^C}{C!} P_0 & k > C \end{cases}$$

siendo

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^C}{C!}\left(\frac{1}{1-A/C}\right)}$$

si $\rho < 1$



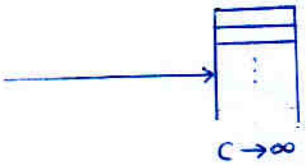
$$PB = \sum_{k=C\cancel{+1}}^{\infty} P_k = \frac{A^C}{C!} P_0 \left[1 + \frac{A}{C} + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \dots\right]$$

incluir k=C

$$= \frac{A^C}{C!} P_0 \frac{1}{1 - A/C}$$

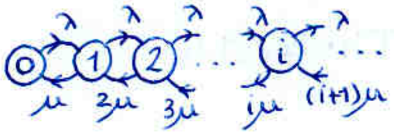
$$= Er_2(C,A) \text{ Función de Erlang-C}$$

Sistema de servidores infinitos : Poisson



$$P_k = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$$

$$PB = 0$$



Los estadounidenses utilizan éste modelo para modelar un sistema de pérdidas con C servidores, en lugar de usar Erlang-B.

Suponen bloqueo cuando P_k ; $k \ge C$

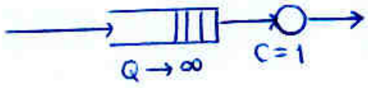
$$PB = \sum_{k=C\cancel{+1}}^{\infty} P_k$$

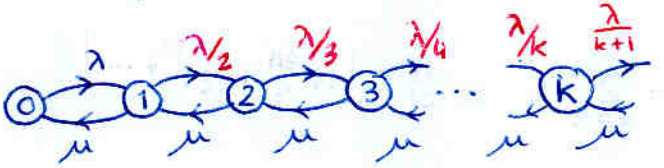
incluir k=C

- más sencillo que E-B
- tiene implícito un margen

Otras situaciones curiosas (cualquiera que se nos ocurra)

· M/M/1 con llegadas desincentivadas





Mismo análisis de siempre:

se obtiene:

$$P_k = \frac{A^k}{k!} e^{-A} \quad \text{¡¡Poisson!!}$$

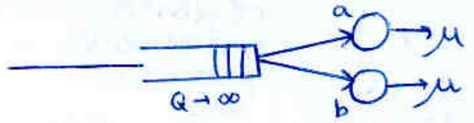
además $\overline{N} = \overline{\lambda_e} \cdot \overline{T}$ (Little en todo el sistema)

para calcular $\overline{\lambda_e}$

$$\overline{\lambda_e} = \lambda P_0 + \frac{\lambda}{2} P_1 + \frac{\lambda}{3} P_2 + \cdots$$

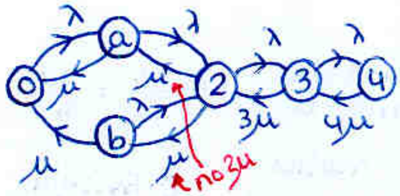
$$= \dots = \mu\left[1 - e^{-A}\right]$$

· M/M/2 con preferencia entre servidores



Por lógica $P_0, P_2, P_3, \ldots$ serán iguales al caso sin preferencia.

Faltaría obtener P_a y P_b sin más que el flujo en a y en b



tráfico cursado por A $TC_a = P_a + P_2 + P_3 + \ldots$

$TC_a > TC_b$

por B $TC_b = P_b + P_2 + P_3 + \ldots$

$TC = TC_a + TC_b \underset{\uparrow}{=} TO = A$

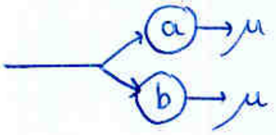
en este caso por ser $Q \to \infty$, $PP = 0$

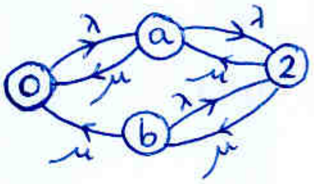
cola de espera

Little: $\overline{N_Q} = \overline{\lambda}_{cola} \cdot \overline{W}$

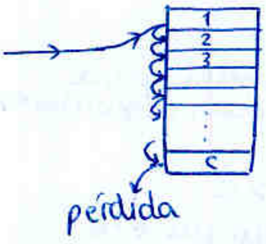
$$\left.\begin{array}{l} \overline{N_Q} = P_3 + 2P_4 + 3P_5 + \ldots \\ \overline{\lambda}_{cola} = P_3 \cdot \lambda + P_4 \cdot \lambda + \ldots \\ \quad = \lambda \end{array}\right\} \overline{W} = \frac{\overline{N_Q}}{\lambda}$$

· M/M/2/2 con preferencia entre servidores





· Generalizando: búsqueda de servidores de forma secuencial



tráfico ofrecido al primer servidor $TO_1 = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = A$

$TP_1 = TO_1 \cdot PB = A \cdot Er_1(1, A)$

$TC_1 = TO_1 - TP_1$

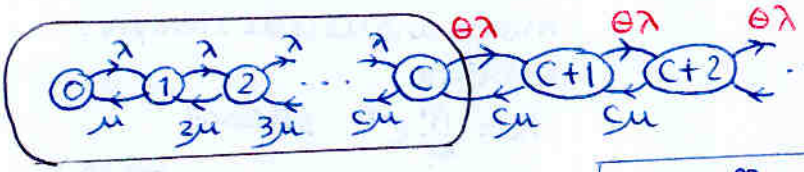
segundo: $TO_2 = TP_1$

$TP_2 = TO_2 \cdot PB = TO_2 \cdot \frac{Er_1(2, A)}{Er_1(1, A)}$

$TC_2 = TO_2 - TP_2 = A\,(Er(1, A) - Er(2, A))$

en general: $\boxed{TC_c = A\,(Er(c-1, A) - Er(c, A))}$

· Entrada en cola desincentivada con factor θ



$\left[\begin{array}{l} \text{si } \theta = 0 \to \text{Erlang B (no cola)} \\ \text{si } \theta = 1 \to \text{Erlang-C } \left(\text{cola } \infty \text{ con } \overline{\lambda}_e = \lambda\right) \end{array}\right.$

$$P_k = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} P_0 & k \le C \\ \frac{A^C}{C!} \left(\frac{\theta A}{C}\right)^{k-C} P_0 & k > C \end{cases}$$

$$\boxed{PB = \sum_{k=C_{\text{no } C+1}}^{\infty} P_k = \frac{A^C}{C!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{\theta A}{C}}} = \begin{cases} Er_1(C, A) \text{ si } \theta = 0 \\ Er_2(C, A) \text{ si } \theta = 1 \end{cases}$$

Tema 7. Modelos de colas para conmutadores de células

Introducción

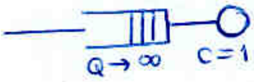
TCP
IP
ATM → células: 53 octetos
SDH → STM-1 ⇒ 150 Mbps útiles

WDM

$$\left.\right\} \rightarrow \frac{53 \times 8}{150 \cdot 10^6} = \boxed{T_s = 2'8 \mu s}$$

Modelo G/D/1

↑ caso general ← servidor determinista { → siempre tarda lo mismo T; → siempre saca la célula en fin de slot



- aunque llegue una célula a mitad slot y el servidor esté libre, sólo se entra al servidor al inicio del siguiente slot
- al final de cada slot salen 0 o 1 células del servidor

$P = [P_0, P_1, \dots]$ $\quad P_k \equiv$ k células en el sistema $\quad$ fecha de observación: $nT+\varepsilon$ justo despues de iniciar slot

$\boxed{\pi_k \equiv \text{prob. de que en un slot lleguen k células}}$

Estados discretos, Tiempo ranurado } → Cadena Markov $\xrightarrow{\text{matriz de transición}}$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ 0 & \pi_0 & \pi_1 & \cdots \\ 0 & 0 & \pi_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}$$

Estado estacionario

P_k	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	$\cdots$
cola: Q_k	Q_0		Q_1	Q_2	Q_3	$\cdots$

$$\rightarrow P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots$$

$$\rightarrow Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^k = Q_0 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \cdots = P_0 + P_1 + P_2 z + P_3 z^2 + \cdots$$

$$\boxed{P(z) = Q(z) \cdot \pi(z)} \qquad \pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$$

Hay que resolver

$$P = P \cdot T \xRightarrow[\text{VIII-2}]{} \qquad P(1) = \Sigma P_k = 1 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} P(z) = \underbrace{P_0 \cdot \dfrac{z-1}{z-\pi(z)}}_{Q(z)} \cdot \pi(z) \\ P_0 = 1 - \pi'(1) \end{cases}}$$

Interpretación de $\pi'(1)$

$\pi'(1) = \overline{\pi_k}$ media de llegadas por slot

$C=1 \Rightarrow P_0 = 1-\rho \Rightarrow \pi'(1) = \rho$

sistema monoservidor

$P_0 > 0 \Leftrightarrow$ no se llena indefinidamente $\Leftrightarrow \boxed{\pi'(1) = \overline{\pi_k} = \rho < 1}$

[celulas/slot]

ya que $Q(z) = \underbrace{(1-\pi'(1))}_{P_0} \dfrac{z-1}{z-\pi(z)} \xrightarrow{\text{dos veces L'Hopital}}$

$$\boxed{\overline{Q} = Q'(1) = \frac{1}{2} \frac{\pi''(1)}{1-\pi'(1)}}$$

$$\overline{N} = \overline{P} = P'(1) \underset{P(z)=Q(z)\cdot\pi(z)}{\overset{\uparrow}{=}} Q'(1) \cdot \underset{1}{\pi(1)} + \underset{1}{Q(1)} \underset{\rho}{\pi'(1)}$$

$$\boxed{\overline{N} = \overline{P} = P'(1) = \overline{Q} + \underset{\rho}{\pi'(1)}}$$

$\boxed{\text{Little: } \text{Tasa} = \pi'(1)}$ ⇒

$$\begin{cases} \overline{W} = \dfrac{\overline{Q}}{\pi'(1)} \quad [\text{slots}] \\ \overline{T} = \dfrac{\overline{N}}{\pi'(1)} \underset{\overline{N} = \overline{Q}+\rho}{\overset{\uparrow}{=}} \overline{W} + 1 \quad [\text{slots}] \end{cases}$$

multiplicar por Ts para obtenerlo en segundos

Todas las fórmulas anteriores (caso general) sirven para cualquier régimen de llegada sin más que sustituir el $\Pi(z)$ correcto

$$\Pi(z)\begin{cases} e^{\lambda T(z-1)} & \text{Poisson} & \begin{pmatrix}\Pi'(1)=\lambda T=\rho \\ \Pi''(1)=(\lambda T)^2=\rho^2\end{pmatrix} \\ \dfrac{p}{1-pz} & \text{Geometrica} & \begin{pmatrix}\Pi'(1)=q/p=\rho \\ \Pi''(1)=2\left(\frac{q}{p}\right)^2=2\rho^2\end{pmatrix} \\ q+pz & \text{Bernouilli} & \begin{pmatrix}\Pi'(1)=p \\ \Pi''(1)=0\end{pmatrix} \\ (q+pz)^N = (1+p(z-1))^N & \text{Binomial} & \begin{matrix}\Pi'(1)=Np \\ \Pi''(1)=N(N-1)p^2\end{matrix}\end{cases}$$

ejemplo M / D / 1

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Poisson}}}{M}/D/1 \qquad \text{Poisson} \longrightarrow \left[\begin{matrix}\Pi''(1)=\rho^2 \\ \Pi'(1)=\rho=\lambda T\end{matrix}\right.$$

$$\overline{Q} = \frac{1}{2}\frac{\Pi''(1)}{1-\Pi'(1)} = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\Lambda e} = \frac{\overline{Q}}{\Pi'(1)} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{1-\rho} \text{ [slots]}$$

$$= \frac{T_s}{2}\frac{\rho}{1-\rho} \text{ [seg]}$$

$$\overline{N} = \overline{Q} + \rho$$

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\Lambda e} = \overline{W}+1 \text{ [slots]}$$

$$\overline{W}+T_s \text{ [seg]}$$

comparando con M/M/1

con $\frac{1}{\mu}=T_s$

$$\overline{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad \overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda} \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda=\mu\rho}}{=} T_s\cdot\frac{\rho}{1-\rho}$$

¡¡el tiempo de espera es el doble en el caso continuo con servicio exponencial!!

ejemplo Geom(N) / D / 1

N puertos de entrada y N de salida cuando cada uno sigue Bernouilly (ρ)

$\Pi_k \Rightarrow$ distribución binomial

$$\Pi_k = \binom{N}{k}\left(\frac{\rho}{N}\right)^k\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k} \qquad \Pi(z) = \left(1+\frac{\rho}{N}(z-1)\right)^N$$

$$\Pi'(1) = N\cdot\frac{\rho}{N} = \rho$$

$$\Pi''(1) = N(N-1)\cdot\frac{\rho}{N} = (N-1)\rho$$

$$\overline{Q} = \frac{1}{2}\frac{\Pi''(1)}{1-\Pi'(1)} = \left(\frac{N-1}{N}\right)\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

Anexo I : Función generatriz
Ejemplos de distribuciones

Función generatriz

Caso discreto

$\{p_n\}$ $p_0, p_1, p_2, \ldots, \ldots$ $n \in [0, 1, \ldots, \infty]$ ← la fdp de n
i.e. $p_0 = \text{prob}(n=0)$

$$\boxed{\Pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot z^n}$$ (nota: es la TZ)

$$\Pi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n \cdot z^{n-1} \longrightarrow \boxed{\Pi'(1) = \text{media}(n)} = \bar{n}$$

$$\Pi''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n z^{n-2} \longrightarrow \Pi''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - \text{med}(n)$$

$$= \overline{n^2} - \bar{n}$$

$$\text{var}(n) = \overline{n^2} - \bar{n}^2$$

$$= \overbrace{\Pi''(1) + \Pi'(1)} - (\Pi'(1))^2$$

$$\boxed{\text{var}(n) = \Pi''(1) + \Pi'(1)(1 - \Pi'(1))}$$

ejemplos:

1 - Distribución de Poisson

$$p_{n,t} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Aspecto de la función generatriz:

desarrollo de Taylor

$$\boxed{\Sigma \frac{(\lambda t z)^n}{n!} = e^{\lambda t z} = 1 + \lambda t z + \frac{(\lambda t z)^2}{2!} + \frac{(\lambda t z)^3}{3!} + \ldots}$$

$$\Pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} z^n$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t z} = e^{\lambda t (z-1)}$$

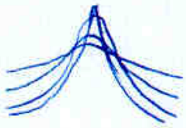
muy fácil de usar:

$$\Pi'(z) = \lambda t \, e^{\lambda t (z-1)} \longrightarrow \Pi'(1) = \lambda t = \text{med}(n) \qquad \boxed{\text{med}(n) = \lambda t}$$

$$\Pi''(z) = (\lambda t)^2 e^{\lambda t (z-1)} \longrightarrow \Pi''(1) = (\lambda t)^2$$

$$\text{var}(n) = (\lambda t)^2 + \lambda t (1 - \lambda t) = \lambda t \qquad \boxed{\text{var}(n) = \lambda t}$$

$$\text{coeficiente de dispersión} = \frac{\sqrt{\text{var}(n)}}{\text{med}(n)} = \frac{\text{desv tip}(n)}{\text{med}(n)} = \frac{\sqrt{\lambda t}}{\lambda t} = \frac{1}{\sqrt{\lambda t}}$$



2 - Distribución geométrica

$\{p_n\}$ Ⓐ $p_n = p \cdot q^{n-1}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ con $q = 1 - p$

Ⓑ $p_n = p \cdot q^n$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ⓐ y Ⓑ son dos formas de expresar lo mismo
Es simplemente un decalaje

Ⓐ $$\Pi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1} \cdot z^n = pz \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} z^{n-1} = \frac{pz}{1-qz}$$

Ⓑ $$\Pi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^n z^n = \frac{p}{1-qz}$$

Date cuenta de que es la TZ.
Por eso un desplazamiento resulta multiplicar por z.

Ⓐ $$\Pi'(z) = \frac{p(1-qz) + q(pz)}{(1-qz)^2} = \frac{p}{(1-qz)^2} \qquad \text{med}(n) = \Pi'(1) = \frac{1}{p} = \frac{q}{p} - 1$$

Ⓑ $$\Pi'(z) = \frac{pq}{(1-qz)^2} \qquad \text{med}(n) = \Pi'(1) = \frac{q}{p}$$

un desplaz. en la media

Ⓐ $\Pi''(z) = -2p(1-qz)^{-3}(-q) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}$ $\Pi''(1) = \frac{2q}{p^2}$

Ⓑ $\Pi''(z) = -2pq(1-qz)^{-3}(-q) = \frac{2pq^2}{(1-qz)^3}$ $\Pi''(1) = \frac{2q^2}{p^2}$

Ⓐ $\text{var}(n) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{q}{p^2}$

Ⓑ $\text{var}(n) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}\left(1-\frac{q}{p}\right) = \frac{q}{p^2}$

Obviamenta la varianza no se ha visto afectada por el decalamiento de la fdp, ya que es un momento respecto a la media

---

Ⓐ $\text{coef de dispersion} = \frac{\text{desv tip}(n)}{\text{media}(n)} = \frac{\sqrt{q}/p}{1/p} = \sqrt{q}$

Ⓑ $\text{coef de dispersion} = \frac{\text{desv tip}(n)}{\text{media}(n)} = \frac{\frac{p/q}{p}}{q/p} = \frac{1}{\sqrt{q}}$

Tiene sentido ej $q \to 0$ la distribucion tiende a $n \to 0$ o a $n \to 1$ según el decalado

3 - Distribución de Bernouilli (ej: verdadero o falso)

$p_n / n = 0,1 \Rightarrow \{p_0, p_1\} \equiv \{q, p\}$ con $q+p=1$

$$\left.\begin{aligned} \Pi(z) &= q + zp \\ \Pi'(z) &= p \\ \Pi''(z) &= 0 \end{aligned}\right]$$

$\text{med}(n) = p$

$\text{var}(n) = 0 + p(1-p) = pq$

$\text{coef. de dis}(n) = \frac{\sqrt{\text{var}(n)}}{\text{med}(n)} = \sqrt{\frac{q}{p}}$

4 - Distribución binomial

$$p_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N \qquad q = 1-p$$

$$\Pi(z) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} z^n = (q + pz)^N$$

por def:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0} a^0 b^k + \binom{k}{1} a^1 b^{k-1} + \binom{k}{2} a^2 b^{k-2} \vdots$$

$$\Pi'(z) = N (q + pz)^{N-1} p \qquad \Pi'(1) = Np$$

$$\Pi''(z) = N(N-1)(q+pz)^{N-2} p^2 \qquad \Pi''(1) = N(N-1)p^2$$

$$\boxed{\text{med}(n) = N \cdot p}$$

$$\boxed{\text{var}(n) = N(N-1)p^2 + Np(1-Np) = Npq}$$

$$\text{coef de disp}(n) = \frac{\sqrt{\text{var}(n)}}{\text{med}(n)} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{Np}}$$

Podría pensarse, y es así, que la distribución binomial tiende a la de Poisson cuando $N \to \infty$ (manteniendo $N \cdot p = \lambda$) (i.e. $p \to 0$)

Dem:

$$p_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{n!} p^n (1-p)^{N-n}$$

$$\underset{N \uparrow\uparrow}{\overset{\uparrow}{\simeq}} \frac{(Np)^n}{n!} (1-p)^N \underset{\lambda = Np}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\lambda^n}{n!} \underset{p \to 0}{\underbrace{(1-p)^{\frac{\lambda}{p}}}_{\to e^{-\lambda}}} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

se puede ver tambien en $\Pi(z)$

$$(q+pz)^N = (q + p - p + pz)^N = (1 + p(z-1))^N \underset{\lambda = Np}{\overset{\uparrow}{=}} (1 + \underbrace{p(z-1)}_{y})^{\frac{\lambda}{p}}$$

$$= (1+y)^{\frac{\lambda(z-1)}{y}} \underset{y \to 0}{\overset{\uparrow}{=}} e^{\lambda(z-1)}$$

por def: $e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$

Anexo II : Fórmulas conocidas que hay que recordar

Durante la asignatura se usan algunos resultados / truquillos que muchas veces no recordábamos.

- Valor medio de variable aleatoria continua

$$E[X] = \int_0^{\infty} t \cdot \underset{\uparrow \text{fdp}}{f_X(t)}\, dt$$

- Valor medio de V.A. discreta

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \Pr\{X=x\}$$

- suma de progresión geométrica

$$S = a_0 + \underbrace{a_0 \cdot r}_{a_1} + \underbrace{\underbrace{a_0 \cdot r^2}_{a_1 \cdot r}}_{a_2} + \dots + \underbrace{a_0 \cdot r^n}_{a_n}$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} a_0 \cdot r^k$$

$$r \cdot S = a_0 r + a_0 r^2 + a_0 r^3 + \dots + \overbrace{a_0 r^{n+1}}^{a_n \cdot r}$$

restando ambas: se van los términos intermedios

$$S - rS = a_0 - a_n \cdot r$$

despejando S

$$\rightarrow S = \frac{a_0 - a_n \cdot r}{1-r}$$

- Truco:

$$\sum_n n \cdot p^{n-1} = \sum_n \frac{d}{dn}(p^n) = \frac{d}{dn} \sum_n p^n$$

- Desarrollo de taylor de la exponencial

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Número e

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

- combinatoria

$\binom{n}{k} \equiv nC_k \equiv C_n^k$: posibles combinaciones de escoger k elementos de entre un total de n, sin considerar el orden

ej: posibles formas de elegir k personas de un total de n

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- $(a+b)^k = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b) = \binom{k}{0}a^0 b^k + \binom{k}{1}a^1 b^{k-1} + \binom{k}{2}a^2 b^{k-2} + \dots$

Capítulo 2. Introducción a los sistemas de espera

Régimen de llegadas → Sistema que facilita servicios

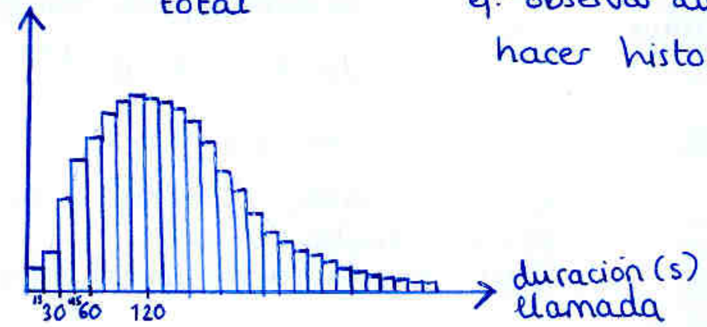
Regimen de Servicio

El tiempo que se tarda en dar el servicio puede variar
ej: duración de llamada, tiempo taquillero en darte billete, ...

frecuencia $= \frac{\text{nº llamadas}}{\text{total}}$

Se puede caracterizar mediante observación
ej: observar duración de 1000 llamadas

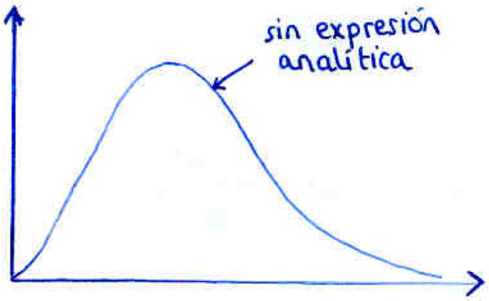
hacer histograma



función densidad de medida

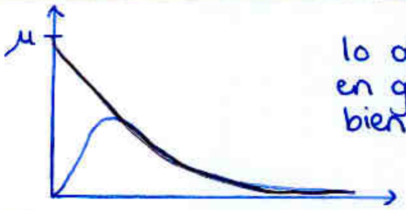
$f_m(t)$

Le hacemos tratamiento de V.A. continua.



Para tener expresión analítica utilizamos una función ajuste

típicamente: $f_m(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$
llamada Poisson



lo ajusta en general bien

nota: se cumple $\int_0^\infty f_m(t)\,dt = 1$

otras veces $f_m(t) = \overset{\uparrow}{A} \cdot t \cdot e^{-\mu t}$

cte de ajuste tal que $\int_0^\infty = 1$
$A = \mu^2$

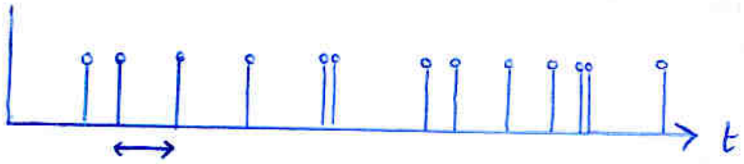
$$\int_0^\infty A \cdot t \cdot e^{-\mu t}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por partes}}}{=} A \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{\mu} e^{-\mu t} \cdot t\right]_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty -\frac{1}{\mu} e^{-\mu t}\,dt$$

$$= A \cdot \left[-\frac{1}{\mu^2} e^{-\mu t}\right]_0^\infty = A \cdot \frac{1}{\mu^2} = 1 \Rightarrow A = \mu^2$$

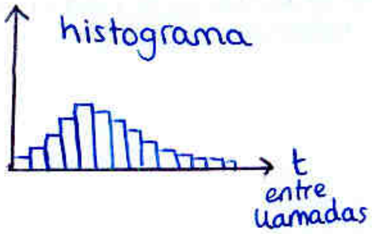
y otras veces $f_m(t) = \text{cte} \cdot p(t) \cdot e^{-\mu t}$

Régimen de llamadas

ej: observar los descuelgues de llamantes en el tiempo. Consideramos que nunca pueden venir 2 llamadas EXACTAMENTE a la vez.



consideramos el tiempo entre una llamada y la siguiente como una V. A. X y hacemos lo mismo que antes



ajuste típico Poisson

$f_a(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$

En este caso, el ajuste de Poisson suele ser una MUY buena aproximación.

Recuerda:

Valor medio de función densidad de probabilidad de una V.A. X $= \int_0^\infty t \cdot f_x(t)\, dt$

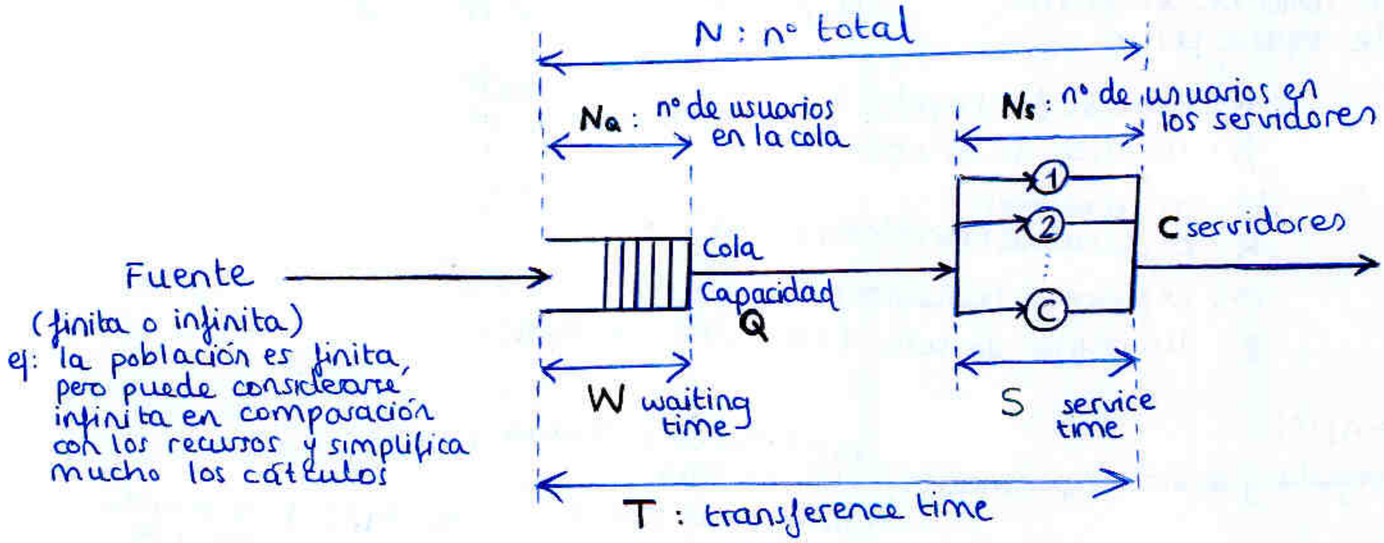
Para el ajuste de Poisson:

$$\int_0^\infty \underset{u}{t} \cdot \underset{dv}{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}\, dt \underset{\text{por partes}}{\overset{\uparrow}{=}} \underbrace{t \cdot e^{-\lambda t}\Big|_\infty^0}_{0} -- \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

por tanto

$$\boxed{\text{Ajuste de Poisson } \lambda \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \text{valor medio} = \frac{1}{\lambda}}$$

Modelo de sistema de espera



Datos:

- régimen de llegadas (Poisson: $\lambda e^{-\lambda t}$)
- régimen de servicios (Poisson: $\mu e^{-\mu t}$)
- nº servidores C
- capacidad buffer Q

Incógnitas:

- nº de servidores ocupados en un instante dado
- nº de usuarios en la cola en un instante dado
- tiempo de tránsito T de un usuario al azar $T = W + S$

Recuerda: función densidad de probabilidad de una V.A. $T = W + S$ siendo W y S V.A.'s independientes es:

$$f_T(t) = f_W(t) * f_S(t)$$

Puesto que el tiempo de espera en cola y de servicio son independientes, se tiene:

$$T = W + S$$

$$f_T(t) = f_W(t) * f_S(t) \quad \Downarrow \mathcal{L} \text{ (transformada de Laplace)}$$

convierte la convolución en producto

$$f_T^*(s) = f_W^*(s) \cdot f_S^*(s)$$

Notación de Kendall

se describe un sistema de espera como : A / B / C / k / m / Z

$$\left.\begin{array}{l}A: \text{régimen de llegadas}\\ B: \text{régimen de servicio}\end{array}\right\} = M \text{ si es Markov } \begin{array}{l}(\lambda e^{-\lambda t})\\ (\mu e^{-\mu t})\end{array}$$

C : nº servidores
K : capacidad (servidores + cola)
m : nº fuentes (usuarios)
Z : disciplina de cola (FIFO, LIFO, random, ...)

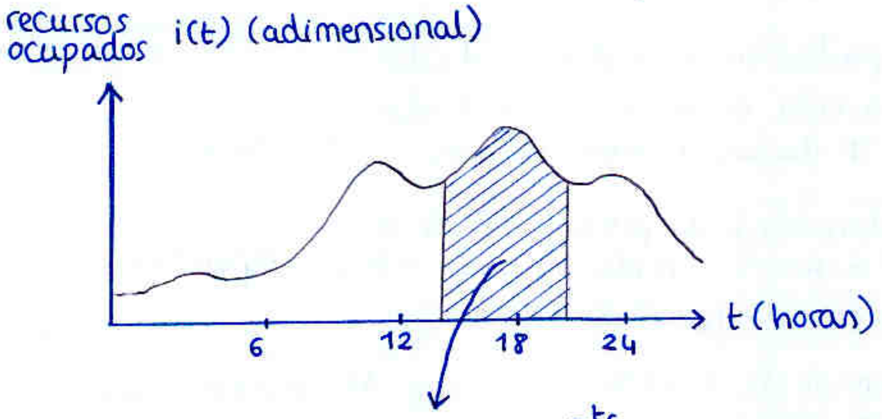
ejemplos:

llegada y servicio exponencial: ↗ sistema de pérdidas i.e. sin cola — M/M/C/C
↳ sistema de espera i.e. cola ∞ — M/M/C ← no se suele poner ∞

Prestaciones orientadas al sistema

Volumen de tráfico

ej: llamadas Madrid-Valencia. Supongamos $C \to \infty$



Volumen de Tráfico : $V = \int_{t_i}^{t_f} i(t)\,dt$ [tiempo]

Intensidad de tráfico A

consiste en calcular el valor medio en un tiempo de observación

$$A = \frac{1}{t_{ob}} \int_{t_{ob}} i(t)\,dt \quad [\text{adimensional}] = [\text{Erlangs}]$$

Definición : hora cargada : El periodo de 60 minutos consecutivos donde se registra un mayor volumen de tráfico

Nosotros consideramos estacionariedad en cuanto a que la actividad de la hora cargada se mantiene durante todo el día.

A : número medio de servidores ocupados si nuestro sistema fuera $C \to \infty$

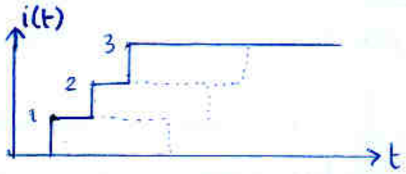
La intensidad de tráfico se suele expresar como

$$A = \frac{\text{tiempo medio de servicio}}{\text{tiempo medio entre llegadas}} = \frac{1/\mu}{1/\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \boxed{A = \frac{\lambda}{\mu} \ \text{[Erlangs]}}$$

ejemplo determinista

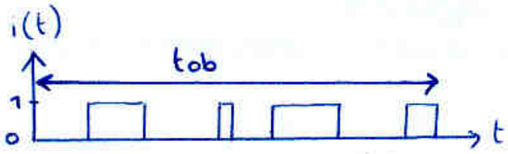
$1/\mu$ = 3 minutos

$1/\lambda$ = 1 minuto



$$A = \frac{\lambda}{\mu} = \underset{\frac{1}{t_{ob}}\int_{t_{ob}} i(t)dt}{\text{media}} = 3$$

En el caso de un único servidor C = 1



A coincide con la proporción de tiempo en que el servidor está ocupado

Factor de utilización ρ

ρ = La proporción de tiempo en que un servidor al azar está ocupado

$$\boxed{\rho = \min\left(\frac{A}{C}, 1\right)}$$

Dem:

nº llamadas entrantes al sistema en T (media)

nº llamadas entrantes a un servidor en T

tiempo de servicio de una llamada

$$\frac{1}{T}\underbrace{\left[\frac{\lambda\cdot T}{C}\cdot\frac{1}{\mu}\right]}_{\text{tiempo total en que un servidor está atendiendo llamadas en T}} = \frac{A}{C}$$

para hallar la proporcion dividimos por T

Caudal o throughput Th

Th: número medio de clientes servidos por unidad de tiempo
mide la productividad del sistema

$$\boxed{Th = C \cdot \mu \cdot \rho}$$

nº servidores

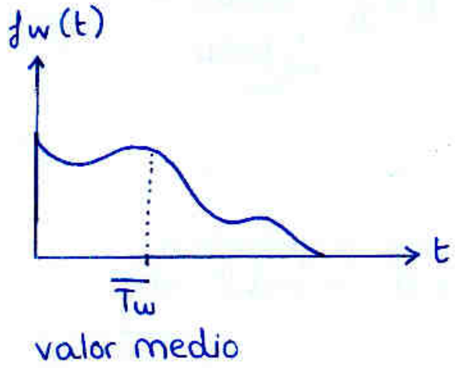
tasa de servicio [servicio/s]

% de tiempo servidor ocupado

Prestaciones orientadas al cliente

Tiempo de espera en cola

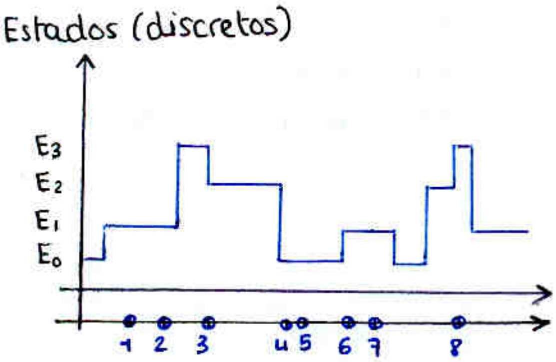
Es una función de densidad de probabilidad. (En posteriores capítulos la hallaremos para distintos sistemas)



Podemos estar interesados en
- media: $\overline{T_w}$
- percentiles w_p : $P(W \leq w_p) = p$

ej: $P(W \leqslant w_{90}) = 0'9$
el 90% de usuarios esperan menos de w_{90}

Capítulo 3. Cadenas y Procesos de Markov



Un sistema que va cambiando entre distintos estados discretos con el tiempo.

t continuo → proceso markov

t discreto → cadena markov

↳ fechas numerables

↳ no tienen porque ser equidistantes

Cadenas de Markov

Probabilidad de encontrar el sistema en estado $E_{\textcircled{m}}$ en una fecha $\textcircled{i}$

$$\equiv \boxed{P_m(i)}$$

Vector de estados:

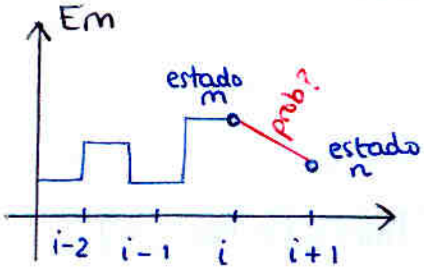
En una fecha i $\boxed{P(i) = \{ P_0(i), P_1(i), P_2(i), \dots \}}$

un vector que contiene las prob. de estar en cada uno de los estados en una fecha i.

Es un vector estocástico:
- suma de elementos = 1
- cada elemento está entre 0 y 1

Hipótesis de Markov

Suponer que el próximo estado sólo depende del estado actual y no de todos los estados pasados (memoria nula)



$$Pr\{ E_n(i+1) \mid E_m(i) \}$$

Prob. de que el estado sea n en i+1 dado que es m en i.

$$\equiv \boxed{P_{mn}(i, i+1)}$$

Éstos serán los datos que definirán la cadena de Markov $\forall m, n, i$

$$0 \leq P_{mn}(i, i+1) \leq 1$$

$$\sum_n P_{mn}(i, i+1) = 1$$

Matriz de Probabilidades de transición

$$T(i,i+1) = \begin{pmatrix} P_{00}(i,i+1) & P_{01}(i,i+1) & \cdots \\ P_{10}(i,i+1) & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

matriz estocástica
- ↳ suma filas = 1
- ↳ elementos $\in [0,1]$

Esta notación permite hacer:

$$\boxed{P(i+1) = P(i) \cdot T(i,i+1)}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} P_0(i+1) & P_1(i+1) & P_2(i+1) & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0(i) & P_1(i) & P_2(i) \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00}(i,i+1) & P_{01}(i,i+1) \cdots \\ P_{10}(i,i+1) & \ddots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

de hecho se puede repetir:

$$P(i+2) = \overbrace{P(i) \cdot T(i,i+1)}^{P(i+1)} \cdot T(i+1,i+2)$$

$$\underbrace{T(i,i+1) \cdot T(i+1,i+2)}_{T(i,i+2)}$$

$$P(i+3) = P(i) \cdot \underbrace{T(i,i+1) \cdot T(i+1,i+2) \cdot T(i+2,i+3)}_{T(i,i+3)}$$

Producto de matrices estocásticas

A y B son estocásticas $\Rightarrow$ $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ suma de filas

$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$C = A \cdot B \Rightarrow C \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \cdot \underbrace{B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \underbrace{A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

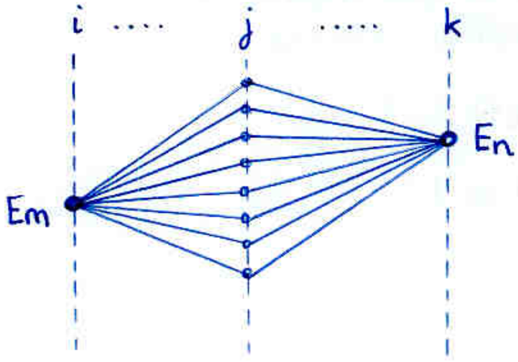
C tb es estocástica $\Leftarrow$ $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

En general:

$$\boxed{P(j) = P(i) \cdot \underbrace{T(i,i+1) \cdot \ldots \cdot T(j-1,j)}_{T(i,j) = \prod_{k=1}^{j-1} T(k,k+1)}}$$

Relación de Chapman - Kolmogorov

$$\boxed{T(i,j) \cdot T(j,k) = T(i,k)} \equiv P_{mn}(i,k) = \sum_{\ell} P_{m\ell}(i,j) \cdot P_{\ell n}(j,k)$$



cada trayectoria es un producto de probabilidades $\Rightarrow$ [i,j] independiente de [j,k] memoria nula

la suma de trayectorias es la suma de probabilidades $\Rightarrow$ independencia entre trayectorias

Cadena de Markov homogénea

Cadena de Markov Homogénea $\Rightarrow$ Las T no dependen de la fecha, sino de la diferencia entre fechas

en general: $T(i,j) = T_h(j-i) = \Pi^{j-i}$

para fechas consecutivas: $T(i,i+1) = T_h(1) = \Pi$

Por tanto: $\boxed{P(j) = P(i)\cdot \Pi^{j-i}}$

Vector de estados final (régimen permanente)

¿ Se estabilizará $P(j)$? $\qquad P(\infty) = \lim_{j\to\infty} P(j)$

Dos métodos para hallar $P(\infty)$

① $\boxed{P(\infty) = P(i)\cdot \Pi^{\infty}} \longrightarrow$ siendo $\Pi^{\infty} = \begin{pmatrix} P_0(\infty) & P_1(\infty) & \cdots \\ P_0(\infty) & P_1(\infty) & \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$

se puede comprobar fácilmente

② $\boxed{P(\infty) = P(\infty)\cdot \Pi} \longrightarrow$ No es más que un sistema de ecuaciones

ejemplo pag 32 del libro Hippy paseando

Estado
E_0 : Almácera
E_1 : Tabernes
E_2 : Alboraya

$$\Pi = \begin{array}{c|ccc} & E_0 & E_1 & E_2 \\ \hline E_0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ E_1 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ E_2 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array} \longleftarrow$$

estando en Almácera
quedarse : 0%
ir a Tabernes : 75%
ir a Alboraya : 25%

$$P(0) = (1\ 0\ 0)$$
$$P(1) = P(0)\cdot\Pi = (0\ 3/4\ 1/4)$$
$$P(2) = P(1)\cdot\Pi = (0'25, 0'062, 0'682) = P(0)\cdot\Pi^2$$
$$P(3) = P(2)\cdot\Pi = (0'187, 0'359, 0'454) = P(0)\cdot\Pi^3 = P(1)\cdot\Pi^2$$
$$P(4) = P(3)\cdot\Pi = (0'203, 0'254, 0'543) = P(0)\cdot\Pi^4 = P(1)\cdot\Pi^3 = P(2)\cdot\Pi^2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$P(\infty) = P(\infty)\cdot\Pi = (P_0\ \ P_1\ \ P_2)$$ simplificando notación

$$(P_0\ \ P_1\ \ P_2) = (P_0\ \ P_1\ \ P_2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = 1/4\,P_1 + 1/4\,P_2 \\ P_1 = 3/4\,P_0 + 1/4\,P_2 \\ P_2 = 1/4\,P_0 + 3/4\,P_1 + 1/2\,P_2 \end{array}\right\}$$ resolver:

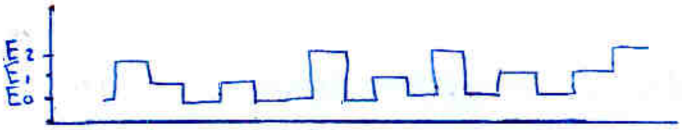
matriz estocástica $\Rightarrow$ rango es 1 inferior a la dimensión.
$\Rightarrow$ 1 grado de libertad

Añadiendo la condición
$P_0 + P_1 + P_2 = 1$

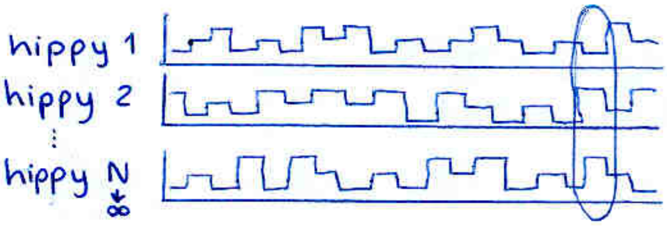
$P_0 = 0'20$
$P_1 = 0'28$
$P_2 = 0'52$

$$P(\infty) = (0'20\ \ 0'28\ \ 0'52)$$

Significado de $P(\infty)$



- En un punto alejado del inicio, contamos las veces que estamos en cada estado y coincidirá en proporción con $P(\infty)$



- Dada una fecha, el número de hippys (si muchos hacen el ´experimento) en cada pueblo coincidirá en proporción con $P(\infty)$

⇓

Ergodicidad

Ejercicio:

Tenemos una hurna con bolas blancas y negras

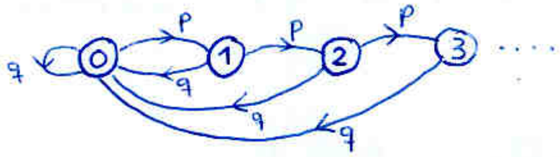
Bolas blancas: Nb

Bolas negras: Nn

Extracción con reposición

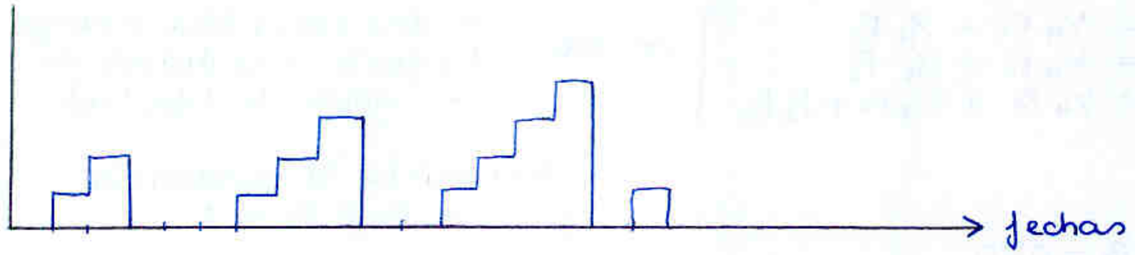
$$\text{Resultado} \begin{cases} \text{Bola blanca: éxito} & p = \frac{Nb}{Nb+Nn} \\ \text{Bola negra: fracaso} & q = 1-p \end{cases}$$

- Diremos que en la fecha i nos encontramos en el estado E_n $\{n = 1, 2, 3, \dots\}$ si la extracción i-ésima ha sido un éxito precedido de $n-1$ exitos consecutivos.
- Si la extracción es un fracaso volvemos al estado E_0



Construimos la matriz de transición

$$\Pi = \begin{array}{c|cccc} & E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \cdots \\ \hline E_0 & q & p & 0 & 0 \cdots \\ E_1 & q & 0 & p & 0 \\ E_2 & q & 0 & 0 & p \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}$$



Queremos obtener $P(\infty) = (P_0 \ P_1 \ P_2 \cdots)$

$$P(\infty) = P(\infty) \cdot \Pi$$

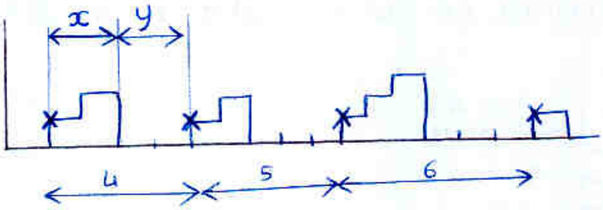
$$\Rightarrow \begin{cases} P_0 = P_0 q + P_1 q + P_2 q + \dots = q \\ P_1 = P_0 \cdot p = q \cdot p \\ P_2 = P_1 \cdot p = q p^2 \\ \vdots \\ P_n = q p^n \end{cases}$$

comprobación $\sum_n P_n = q \cdot \frac{1}{1-p} = 1$

¿Tiempo entre visitas al estado E_1?

será una V.A. discreta

si definimos x e y



$$z = x + y$$

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{x} = 1 \cdot q + 2pq + 3p^2 q + \dots$$

la prob de que $\overline{x}$ dure 1slot, o 2, o 3, ...

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q \cdot p^{n-1} = q \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p^{n-1}}$$

$$= q \cdot \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^{\infty} p^n$$

es la derivada de una serie ⓘ

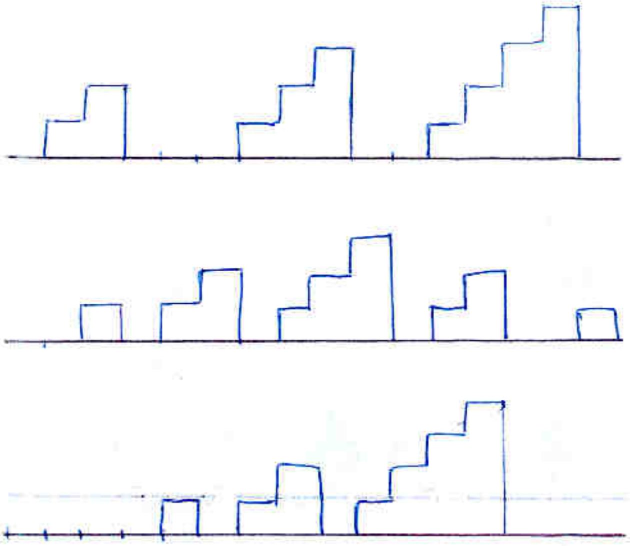
$$= q \cdot \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right) = q \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{q} \ //$$

$$\overline{y} = 1p + 2qp + 3q^2 p + 4q^3 p + \dots = \frac{1}{p}$$

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{qp}$$

cuidado, las fdp serán, para V.A. $z = x + y$

$$f_z(t) = f_x(t) * f_y(t)$$

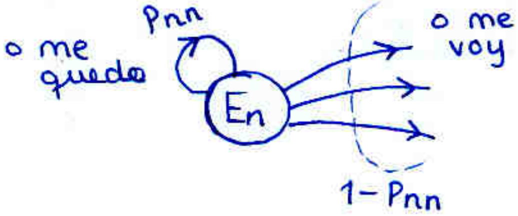


Ergodicidad:

- cuando los estadísticos en el tiempo (horizontal)
- coinciden con los estadísticos en el conjunto (vertical)

Se cumple siempre en cadenas de Markov homogéneas. (CMH)

Tiempo de estancia en un estado cualquiera en una C.M.H



Tiempo de estancia	1	2	3	...
Probabilidad	$1-P_{nn}$	$P_{nn}(1-P_{nn})$	$P_{nn}^2(1-P_{nn})$	...

La V.A. sigue una distribución geométrica

podemos hallar:
- media
- varianza
- etc...

distribución geométrica
⇕
memoria nula

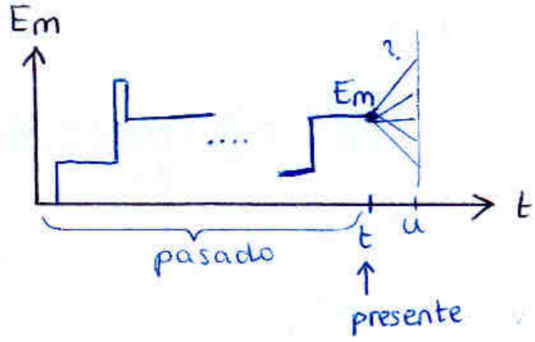
$$P_r(T_n) = r^{n-1}(1-r) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{T} &= 1(1-r) + 2\cdot r(1-r) + 3\cdot r^2(1-r) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, r^{n-1}(1-r) = (1-r)\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \overset{\frac{d}{dn} r^n}{\boxed{n\cdot r^{n-1}}} \\ &= (1-r)\frac{d}{dr}\sum_{n=1}^{\infty} r^n = (1-r)\cdot\left(\frac{1}{1-r}\right)' = \frac{1}{1-r}\end{aligned}}$$

$\overline{T} = \frac{1}{1-r}$ siempre mayor que 1 salvo $r = 0$

Procesos de Markov

- nº de estados: finito o infinito numerable
- observación: el colectivo de los números reales



$$\boxed{P_r\{E_m(t)\} = P_m(t)}$$

$$\boxed{P(t) = [P_0(t)\ P_1(t)\ P_2(t) \ldots]}$$ vector de Estados

Probabilidades a tener en cuenta

$$P_r(E_n(u) / E_m(t), E_p(s), E_q(r) \ldots \}$$
$$r < s < t < u$$

Hipótesis de markov: El futuro sólo depende del presente, no del pasado.

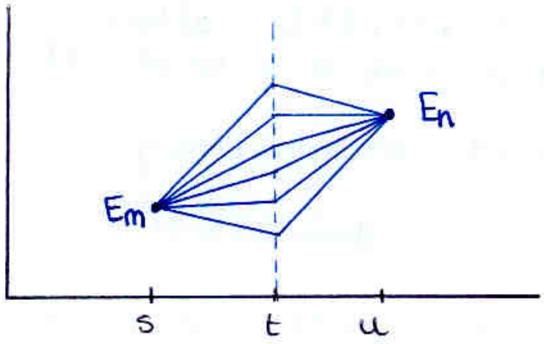
$$= \boxed{P_r(E_n(u) | E_m(t)) = P_{m,n}(t,u)}$$

Entonces:

$$P(u) = P(t) \cdot T(t,u) \qquad T(t,u) = \begin{bmatrix} P_{00}(t,u) & P_{01}(t,u) & \cdots \\ P_{10}(t,u) & P_{11}(t,u) & \cdots \\ P_{20}(t,u) & \vdots & \ddots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

es una matriz estocástica

Relación de chapman-Kolmogorov



$$\boxed{T(s,u) = T(s,t) \cdot T(t,u)}$$
$$\Downarrow$$
$$P_{mn}(s,u) = \sum_{\ell} P_{m\ell}(s,t) \cdot P_{\ell n}(t,u)$$

Con la misma explicación que en cadenas de Markov

Los datos: $T(t,u) \equiv P_{mn}(t,u)$

¿cómo aportamos los datos en un proceso de Markov?

sea $u = t + \Delta t$

$$T(s,t+\Delta t) = T(s,t)\cdot T(t,t+\Delta t)$$

hacemos:

$$\frac{T(s,t+\Delta t) - T(s,t)}{\Delta t} = T(s,t)\cdot\left[\frac{T(t,t+\Delta t) - I}{\Delta t}\right]$$

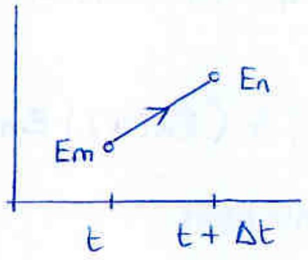
si tomamos $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ $\Downarrow$ $\downarrow$ $\Downarrow$

$$\frac{\partial T(s,t)}{\partial t} = T(s,t)\cdot \underbrace{\boxed{\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{T(t+\Delta t)-I}{\Delta t}\right]}}_{Q(t)}$$

Q(t): generador infinitesimal
si analizamos sus elementos q_{mn}

$Q(t) \Rightarrow \Bigg\{$

$$q_{mn}(t) = \lim_{\Delta t - 0} \frac{P_{mn}(t,t+\Delta t)}{\Delta t} \quad m \neq n$$



¿En tan poco tiempo Δt, le da tiempo a cambiar de estado?
Cabe esperar que la prob tiende a cero junto a Δt

Si la probabilidad es:
infinitésimo orden 2 : $q_{mn}(t) = 0$
infinitésimo orden 1 : $q_{mn}(t) > 0$

$$q_{mm}(t) = \lim_{\Delta t - 0} \frac{P_{mm}(t,t+\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

Cabe esperar que $P_{mm}(t,t+\Delta t)$, al tener poco tiempo, sea cercana a 1, en general algo menor.
El signo del numerador será negativo y rara vez cero

$$q_{mm}(t) \leqslant 0$$

Los elementos de Q(t) son probabilidad partido tiempo, es decir, serán una tasa

La suma de las filas de Q(t) es

$$\sum_n q_{mn}(t) = \lim_{\Delta t > 0} \frac{\sum P_{mn}(t,t+\Delta t) - 1}{\Delta t} = 0$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} * & q_{01}(t) & q_{02}(t) & \cdots \\ q_{10}(t) & * & q_{12}(t) & \cdots \\ q_{20}(t) & q_{21}(t) & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} \to * = q_{00}(t) = -\sum_n q_{0n}(t) \\ \to * = q_{11}(t) = -\sum_n q_{1n}(t) \\ \to * = q_{22}(t) = -\sum_n q_{2n}(t) \\ \end{matrix}$$

Además se cumple que:

$$\boxed{\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(t) \cdot Q(t)}$$

significado de cada elemento $q_{ij}(t)$.
Prob. de pasar de estado $\textcircled{E_i} \to \textcircled{E_j}$ en un intervalo de observación ΔT viene dada por:
$$\Delta T \cdot q_{ij}$$

Dem :

$$P(t) = P(s) \cdot T(s,t) \quad \Big) \, \partial/\partial t$$

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(s) \cdot \frac{\partial T(s,t)}{\partial t}$$

$$= \underbrace{P(s) \cdot T(s,t)} \cdot Q(t)$$

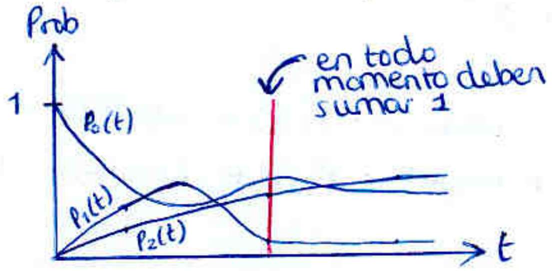
$$= P(t) \cdot Q(t)$$

En realidad esa ecuación es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(t) \cdot Q(t)$$

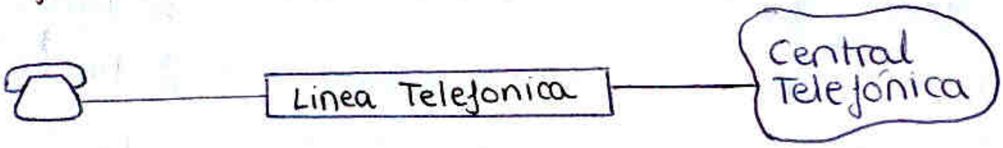
$$\begin{cases} P_0'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\, q_{n0}(t) \\ P_1'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\, q_{n1}(t) \\ P_2'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot q_{n2}(t) \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

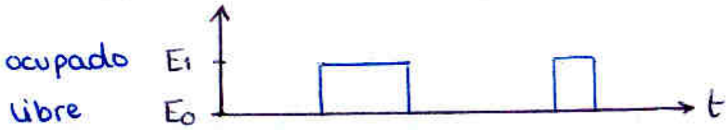
que si resolvemos, nos proporciona ni más ni menos que la evolución temporal de la probabilidad de cada estado (sabiendo el estado inicial)



en todo momento deben sumar 1

ejemplo :





$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{00}(t) & q_{01}(t) \\ q_{10}(t) & q_{11}(t) \end{pmatrix}$$

Nos interesan los elementos fuera de la diagonal, de los cuales se obtiene inmediatamente los de la diagonal (con el $-\Sigma$)

Además los suponemos constantes para simplificar (aunque en realidad no es así : ej : pasar a llamada activa en Δt es más probable a las 9:00 que a las 03:00 de la mañana)

$$q_{01}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{01}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = \lambda$$

y ademas

$$q_{01}(t) \cdot \Delta t = P_{01}(t, t+\Delta t)$$
$$q_{10}(t) \cdot \Delta t = P_{10}(t, t+\Delta t)$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Proceso de Markov homogéneo

Hacemos

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \cdot Q(t)$$

$$\left[\frac{dP_0(t)}{dt} \quad \frac{dP_1(t)}{dt}\right] = \left[P_0(t) \quad P_1(t)\right]\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t) \end{cases}$$

junto a la condición de normalización

$$P_0(t) + P_1(t) = 1$$

y junto a la CI

$$P(0) = [1, 0]$$

queda :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu(1 - P_0(t))$$
$$= -(\lambda + \mu) P_0(t) + \mu$$

$$\boxed{P_0'(t) + (\lambda+\mu) P_0(t) = \mu}$$

homogenea : $P_0'(t) + (\lambda+\mu) P_0(t) = 0$

completa : $P_0'(t) + (\lambda+\mu) P_0(t) = \mu$

1°: solución de la ecuación homogénea (sin término independiente)

$$P_0'(t) = -(\lambda+\mu)P_0(t) \quad \Rightarrow \quad P_0(t) = K \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}$$

2°: Añadir una solución particular de la completa

$$P_0'(t) = -(\lambda+\mu)P_0(t) + \mu$$

$$\underset{\text{particular}}{P_0(t)} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

la más sencilla es que sea una constante

3°: Solución:

$$P_0(t) = k \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

con la CI $P_0(0) = 1 \Rightarrow k = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

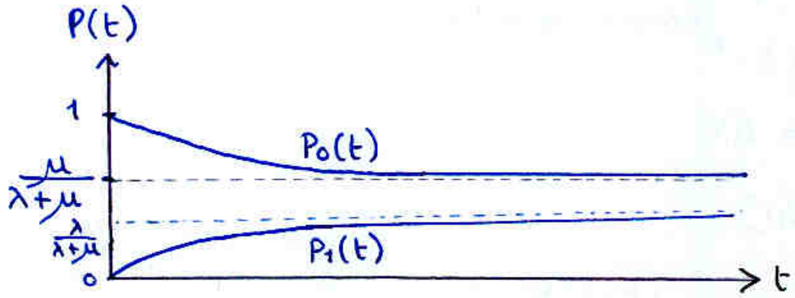
Por tanto

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t)$$

$$P(t) = \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \ , \ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right]$$

Representándolo:



$$P_0(\infty) = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_1(\infty) = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

λ: tasa relacionado con predisposición a llamar

μ: tasa relacionada con colgar, o con la duración de las llamadas

ejemplo:

$\lambda = \frac{1}{3600}$ llamadas/s

$\mu = \frac{1}{180}$ llamadas/s

⇓

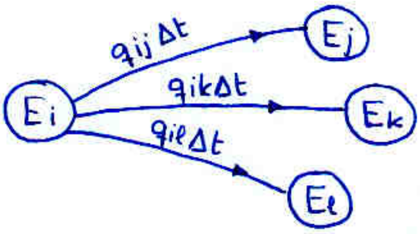
$P_0 = 96\%$

$P_1 = 4\%$

Proceso de Markov homogéneo

Cuando $Q(t) = Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Tiempo de residencia en un estado



Tiempo de residencia en Ei : V. A. τ_i

Distribución $\hat{H}_i(x)$

$$\hat{H}_i(x) = Pr(\tau_i > x)$$
$$= 1 - H_i(x)$$
$$= 1 - Pr(\tau_i \leq x)$$

Si hacemos:

$$\hat{H}_i(X+Y) = Pr(\tau_i > x+y)$$
$$= \hat{H}_i(x) \cdot \hat{H}_i(y)$$

memoria nula

Si ahora hacemos $y = \Delta x$

$$\hat{H}_i(x+\Delta x) = \hat{H}_i(x) \cdot \hat{H}_i(\Delta x)$$

$$\frac{\hat{H}_i(x+\Delta x) - \hat{H}_i(x)}{\Delta x} = \hat{H}_i(x) \cdot \frac{(\hat{H}_i(\Delta x) - 1)}{\Delta x}$$

$$\Big\downarrow \; \Delta x \to 0$$

$$\frac{\partial \hat{H}_i(x)}{\partial x} = \hat{H}_i(x) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{Pr(\tau_i > \Delta)}{\hat{H}_i(\Delta x)} - 1}{\Delta x}}_{q_{ii}}$$

$$\frac{\partial \hat{H}_i(x)}{\partial x} = \hat{H}_i(x) \cdot q_{ii}$$

Por lo tanto:

$$\hat{H}i(x) = cte \cdot e^{q_{11} x}$$

resulta que $cte = 1$ ya que $\hat{H}i(0) = Pr(T_i > 0) = 1$

$$\hat{H}i(x) = e^{q_{11} x}$$

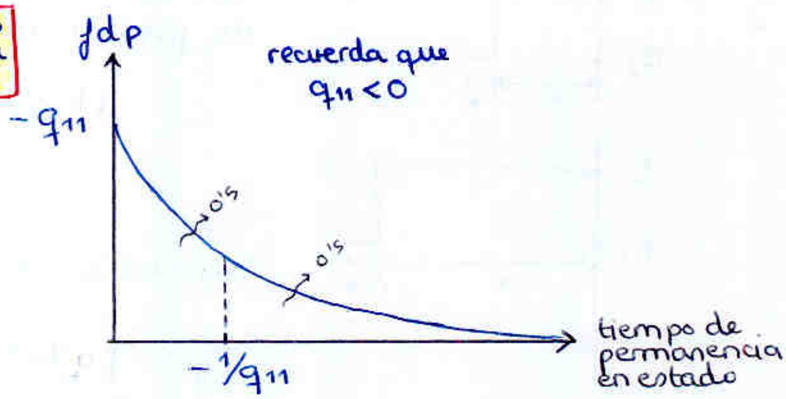
$$Hi(x) = 1 - e^{q_{11} x}$$

↓ la derivada de la función de distribución es la función de densidad

$$\boxed{hi(x) = -q_{11} e^{q_{11} x}}$$ fdp del tiempo de permanencia en un estado

Por tanto el valor medio

$$\boxed{\text{Tiempo medio de permanencia en un estado} = \frac{-1}{q_{11}}}$$



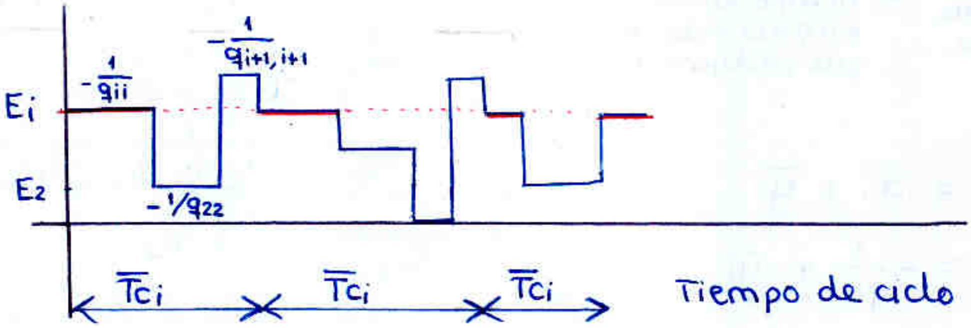
Resumen: proceso de Markov

Generador infinitesimal $Q(t) = Q = \begin{pmatrix} * & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & * & q_{12} & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$ donde los elementos de la diagonal son el menos sumatorio del resto de la fila

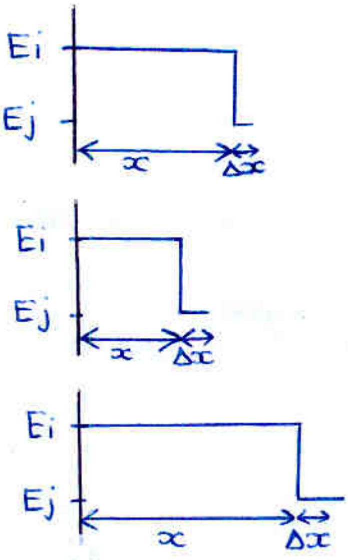
condiciones Iniciales $P(0) = [P_0(0) \ P_1(0) \ P_2(0) \cdots]$

con esas 2 datos podemos obtener $P(t)$

Tiempo medio de permanencia en un estado: $-\frac{1}{q_{ii}}$



$P_{ij} \equiv$ Prob(sig. estado E_j | estoy en E_i)



Cada uno de estos casos (para los posibles valores de x) habrá que sumarlos (será la integral)

Para cada x determinada, el diferencial de probabilidad es:

$$dP_{ij}(x) = \underbrace{e^{q_{ii}x}}_{\text{prob. de permanecer en } E_i \text{ durante tiempo } x} \cdot \overbrace{q_{ij}\quad dx}^{\text{prob de cambiar a } j \text{ en tiempo } dx}$$

Sumando los casos:

$$P_{ij} = \int_0^\infty e^{q_{ii}x} \cdot q_{ij}\,dx = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} \geq 0$$

$$\boxed{P_{ij} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}}} = \frac{q_{ij}}{\sum_{k\neq i} q_{ik}}$$

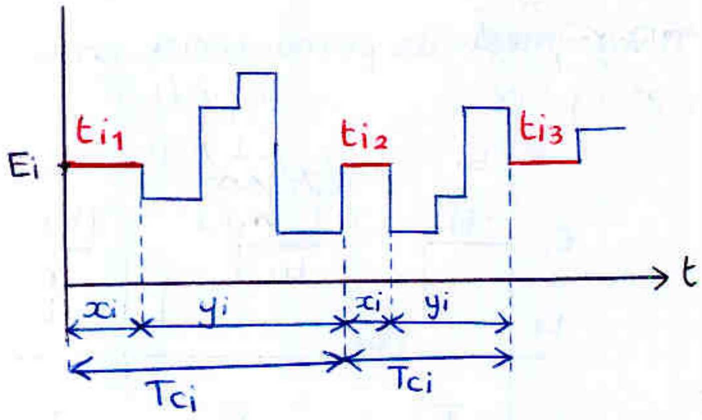
Ademas tiene sentido pues se cumple : $\sum_{j\neq i} P_{ij} = \frac{\sum_j q_{ij}}{-q_{ii}} = \frac{-q_{ii}}{-q_{ii}} = 1$

Tiempo de ciclo

$$T_{c_i} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tiempo que} \\ \text{me quedo} \\ \text{en } E_i}}{x_i} + \underset{\substack{\nwarrow \text{ tiempo en otros} \\ \text{estados hasta} \\ \text{que vuelvo a } E_i}}{y_i}$$

valor medio : $\overline{T_{c_i}} = \overline{x_i} + \overline{y_i}$

$$= -\frac{1}{q_{ii}} + \overline{y_i}$$



Hacemos uso de : $P_i(\infty) = P_i = Pr$(Encontrar el sistema en E_i en régimen permanente)

= % de tiempo en que el sistema está en E_i

$$P_i = \lim_{Tob \to \infty} \frac{\sum_n t_{i,n}}{Tob} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \left(-\frac{1}{q_{ii}}\right)}{n \cdot \left(-\frac{1}{q_{ii}} + \overline{y_i}\right)} = \frac{-1/q_{ii}}{\underbrace{-\frac{1}{q_{ii}} + \overline{y_i}}_{\substack{\text{coincide con el} \\ \text{tiempo de ciclo} \\ T_{c,i}}}}$$

Podemos por tanto despejar Tc, i

$$\boxed{\overline{T_{c,i}} = -\frac{1}{q_{ii}} \cdot \frac{1}{P_i}} \quad \boxed{\text{Tiempo de ciclo}}$$

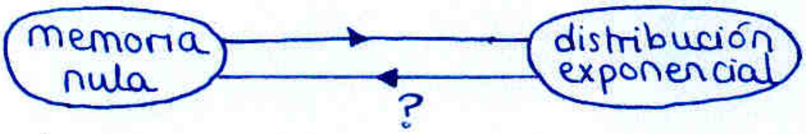
$$\boxed{\text{Frecuencia de visitas al estado } E_i = \frac{1}{\overline{T_{c,i}}} = -q_{ii} P_i = P_i \sum_{j \neq i} q_{ij}}$$

Frecuencia de transiciones $E_i \to E_j$ $=$ frec. visitas al estado E_i $\cdot$ fracción de veces que cambio $i \to j$ respecto al total

$$= -q_{ii} \cdot P_i \cdot \frac{q_{ij}}{\underbrace{\sum_{k \neq i} q_{ik}}_{-q_{ii}}}$$

$$\boxed{\text{Frecuencia de transiciones desde } E_i \text{ a } E_j = P_i \cdot q_{ij}}$$

Volvamos a la idea de memoria nula

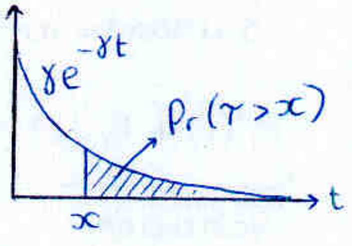


En efecto, sea T la v. a. tiempo de duración de un evento

supongamos que es exponencial de parámetro γ : $(\gamma \cdot e^{-\gamma t})$

$$Pr(T > x+y \mid T > x) = Pr(A \mid B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

$$= \frac{Pr(T > x+y \cap T > x)}{Pr(T > x)} = \frac{Pr(T > x+y)}{Pr(T > x)}$$



$$= \frac{e^{-\gamma(x+y)}}{e^{-\gamma x}} = e^{-\gamma y}$$ ¡independiente del pasado!

$$Pr(T > x+y \mid T > x) = e^{-\gamma y}$$

Ecuaciones de balance globales

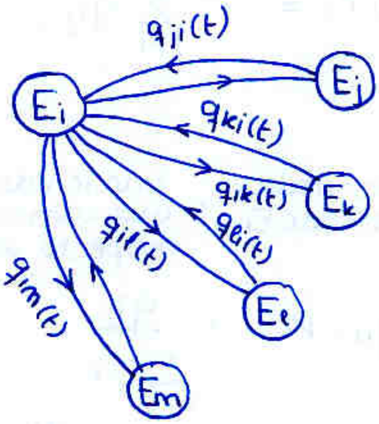
En un proceso de Markov: (sin tener porque ser homogéneo)

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\cdot Q(t)$$

$$(E_i):\quad \frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_j P_j(t)\, q_{ji}(t) = \sum_{j\neq i} P_j(t)\, q_{ji}(t) + P_i(t)\cdot q_{ii}(t)$$

$q_{ii} = -\sum_{k\neq i} q_{ik}$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \underbrace{\sum_{j\neq i} P_j(t)\, q_{ji}(t)}_{\text{Flujo entrante}} - \underbrace{P_i(t)\sum_{m\neq i} q_{im}(t)}_{\text{Flujo saliente}} = 0$$



sistema ecuaciones diferenciales para hallar P(t)

$\frac{dP_i(t)}{dt} = 0$ si estamos en regimen permanente

Flujo entrante = Flujo saliente ⇐

sistema de ecuaciones no diferenciales para hallar P(∞)

Generalizadas

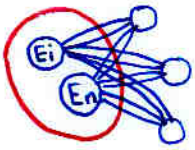
$$\begin{cases} (E_i) & P_i'(t) = \sum_{j\neq i} P_j(t) q_{ji}(t) - P_i(t)\sum_{m\neq i} q_{im}(t) \\ (E_n) & P_n'(t) = \sum_{j\neq n} P_j(t)\cdot q_{jn}(t) - P_n(t)\sum_{m\neq n} q_{nm}(t) \end{cases}$$

Desarrollando:

$$\begin{cases} (E_i) & P_i'(t) = \sum_{j\neq i} P_j(t) q_{ji}(t) + \cancel{P_n(t) q_{ni}(t)} - P_i(t)\left[\sum_{\substack{m\neq i\\ \neq n}} q_{im}(t) + \cancel{q_{in}(t)}\right] \\ (E_n) & P_n'(t) = \sum_{j\neq n} P_j(t) q_{jn}(t) + P_i(t) q_{in}(t) - P_n(t)\left[\sum_{\substack{m\neq i\\ \neq n}} q_{nm}(t) + \cancel{q_{ni}(t)}\right] \end{cases}$$

Sumando ambas:

$$\underbrace{P_i'(t) + P_n'(t)}_{\text{Variación de flujo}} = \underbrace{\sum_{\substack{j\neq n\\ \neq i}} P_j(t)\left(q_{ji}(t) + q_{jn}(t)\right)}_{\text{Flujo entrante}} - \underbrace{\left[P_i(t)\sum_{\substack{m\neq i\\ \neq n}} q_{im}(t) + P_n(t)\sum_{\substack{m\neq i\\ \neq n}} q_{nm}(t)\right]}_{\text{Flujo saliente}}$$



Podemos agrupar tantos estados como queramos

Capitulo 4 : Procesos de nacimiento y muerte

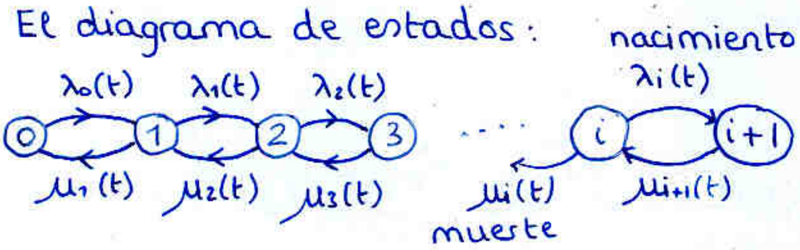
Un PM es un proceso de nacimiento y muerte si el generador infiniterimal Q(t) es tridiagonal

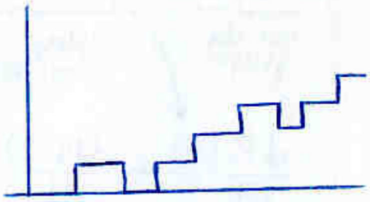
$$Q(t) = \begin{pmatrix} * & q_{01}(t) & 0 & 0 & 0 \cdots \\ q_{10}(t) & * & q_{12}(t) & 0 & 0 \cdots \\ 0 & q_{21}(t) & * & q_{23}(t) & 0 \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Utilizamos la notación

$$= \begin{pmatrix} * & \lambda_0(t) & & & \\ \mu_1(t) & * & \lambda_1(t) & & \\ & \mu_2(t) & * & \lambda_2(t) & \\ & & \mu_3(t) & * & \lambda_3(t) \\ & & & & \end{pmatrix}$$

El diagrama de estados:





Casos particulares:

- Proceso de nacimiento puro ⟶ todas las $\mu = 0$
- Proceso de muerte pura ⟶ todas las $\lambda = 0$
- Proceso de Poisson

Proceso de Poisson

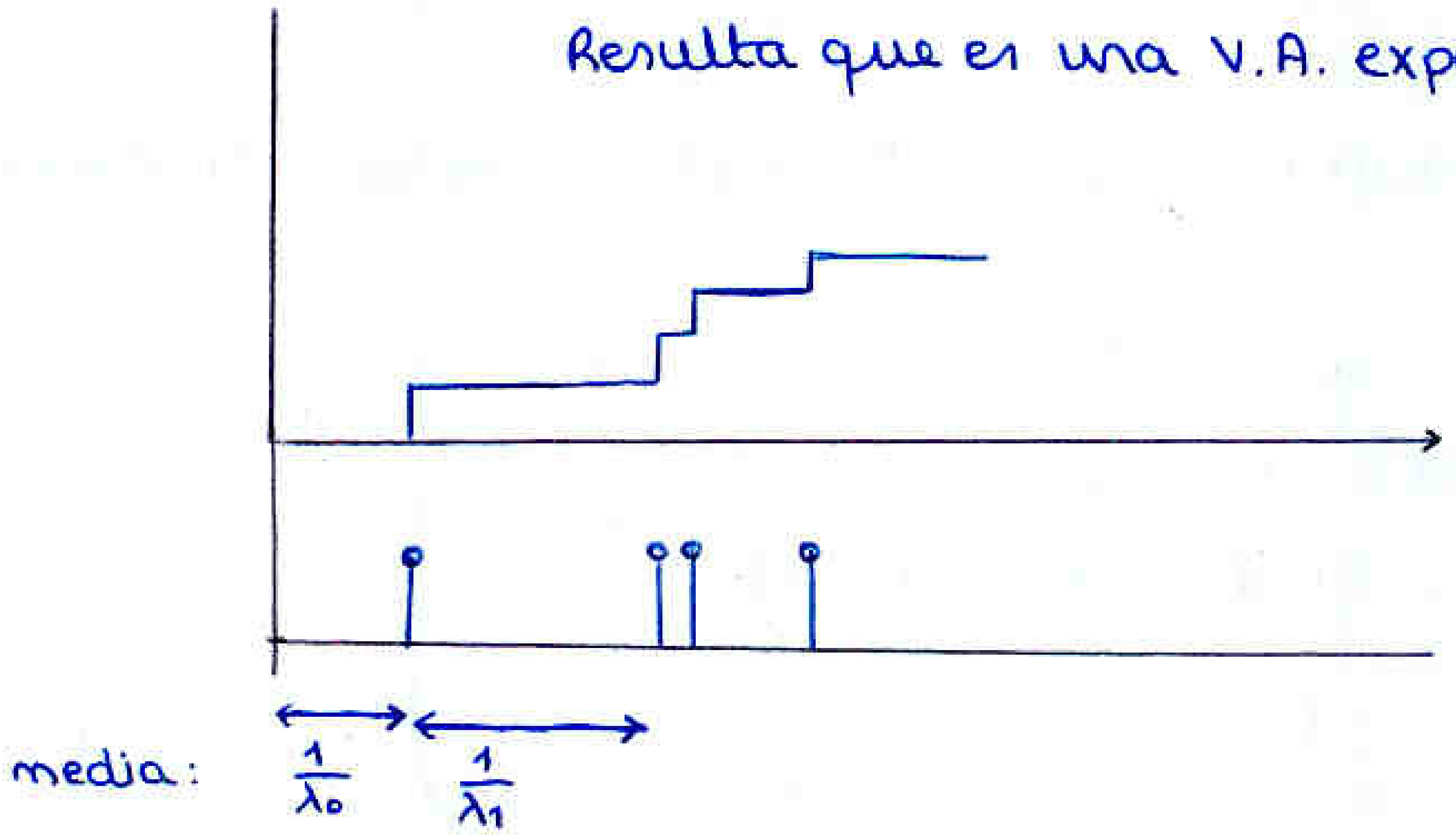
Es un proceso de nacimiento puro, homogéneo con tiempo y estados

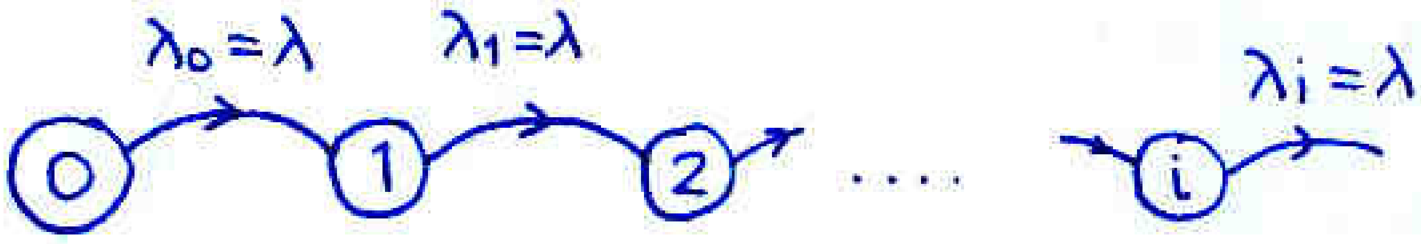
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogeneo} \\ \text{en tiempo}}}{Q(t)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nacimiento} \\ \text{puro}}}{Q} = \begin{pmatrix} * & \lambda_0 & 0 & 0 \cdots \\ 0 & * & \lambda_1 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & * & \lambda_2 \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogeneo} \\ \text{con los} \\ \text{estados}}}{=} \begin{pmatrix} * & \lambda & 0 & 0 \cdots \\ 0 & * & \lambda & 0 \cdots \\ 0 & 0 & * & \lambda \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\lambda_i = \lambda$

ej: contar paquetes a la entrada de un router ej: llamadas generadas en una central telefónica

Resulta que es una V.A. exponencial



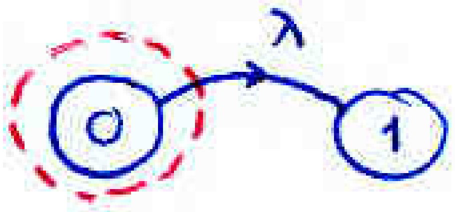


Nos preguntamos por P(t)

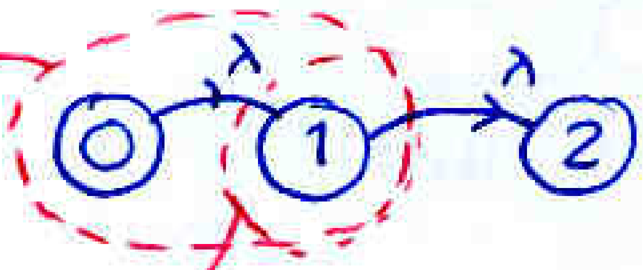
$$\boxed{\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\cdot Q}$$

Es un sistema de ecuaciones:

$$\underbrace{\frac{dP_0(t)}{dt}}_{\text{var. de flujo}} = \underbrace{-\lambda P_0(t)}_{\text{flujo saliente}} \xrightarrow[\text{resolver}]{} P_0(t) = e^{-\lambda t}$$



$$\frac{dP_0(t)}{dt}+\frac{dP_1(t)}{dt} = \underbrace{-\lambda P_1(t)}$$



$$\Downarrow$$

$$\boxed{P_1'(t) = \underbrace{-\lambda P_1(t)}_{\text{flujo saliente}} + \underbrace{\lambda \overset{e^{-\lambda t}}{\overset{\parallel}{P_0(t)}}}_{\text{flujo entrante}}} \xrightarrow[\text{resolver}]{} P_1(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t}$$

ver en detalle

$$\frac{dP_0(t)}{dt}+\frac{dP_1(t)}{dt}+\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t)$$

$$P_2'(t) = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t) \Longrightarrow P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}$$

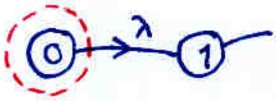
$$\boxed{P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}}$$

Ley de Poisson

Anexo:

Hallando la ley de Poisson
(resolviendo sistema de ecuaciones diferenciales)

Aplicamos : $\boxed{\text{variacion de flujo} = \text{flujo entrante} - \text{flujo saliente}}$



$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\Downarrow$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$P_0'(t) + \lambda P_0(t) = 0$

ec. diferencial lineal con coefs. ctes

→ ecuación característica

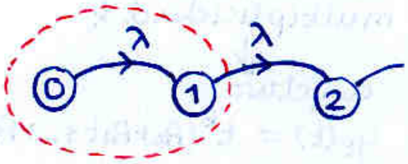
$\alpha + \lambda = 0$

raices : $\alpha = -\lambda$

por tanto $SFS = \{e^{-\lambda t}\}$

→ solución general $\left(\text{como } P_0(t) \leq 1 \ \forall t \text{ ya que es una prob } A = 1\right)$

$P_0(t) = A \cdot e^{-\lambda t}$



$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t)$$

Como ya sabemos $\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$

$P_1'(t) + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ecuacion completa

$P_{1_H}'(t) + \lambda P_{1_H}(t) = 0$ ecuación homogénea

→ ec. característica

$\alpha + \lambda = 0$ → raices: $\alpha = -\lambda$

$SFS = \{e^{-\lambda t}\}$

→ solución homogenea

$P_{1H}(t) = B \cdot e^{-\lambda t}$

→ solución particular : método coeficientes indeterminadas

el término independiente es de la forma

$b(t) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t}$

conjeturamos

$P_{1P}(t) = A \cdot t \cdot e^{-\lambda t}$

sustituyendo en la ecuación para obtener A

$[Ate^{-\lambda t}]' + \lambda[Ate^{-\lambda t}] = \lambda e^{-\lambda t}$

$[Ae^{-\lambda t} \cancel{- A\lambda te^{-\lambda t}}] + \cancel{\lambda Ate^{-\lambda t}} = \lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow A = \lambda$

recuerda

si $b(t) = e^{\lambda t}$

siendo λ raiz de la ec característica con multiplicidad k

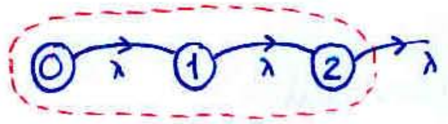
$\Downarrow$

$y_P = A \cdot t^k e^{\lambda t}$

solución general

$y = y_H + y_P \Rightarrow$

$$P_1(t) = \lambda te^{-\lambda t} + Be^{-\lambda t} \xrightarrow[P_1(0)=0 \ \rightarrow \ B=0]{C.I} P_1(t) = \lambda te^{-\lambda t}$$



$$\frac{dP_0(t)}{dt}+\frac{dP_1(t)}{dt}+\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda\cdot P_2(t)$$

sabiendo

$$\frac{dP_0(t)}{dt}+\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) = -\lambda t e^{-\lambda t}$$

la ec queda:

$$P_2'(t)+\lambda P_2(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

solución homogénea

$$P_{2H}'(t)+\lambda P_{2H}(t) = 0$$

$$P_{2H}(t) = B\cdot e^{-\lambda t}$$

solución particular:

$$b(t) = \lambda\cdot t\cdot e^{-\lambda t}$$

conjeturamos

$$P_{2p}(t) = (A_1+A_2t)\cdot te^{-\lambda t}$$

sustituyendo en la ecuación para hallar A_1 y A_2

(....) $A_1 = 0$

$A_2 = \frac{\lambda^2}{2!}$

$$P_{2p}(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}$$

recuerda

$b(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_m t^m$

polinomio orden m

con $\lambda = 0$ raiz de la ec. característica de multiplicidad k

⇓

conjetura

$y_p(t) = t^k(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m)$

solucion general:

$$P_2(t) = B\cdot e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t} \leftarrow$$ toda la familia de funciones que cumplen la ecuación

condición Inicial

$P_2(0) = 0 \rightarrow B = 0$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t}$$

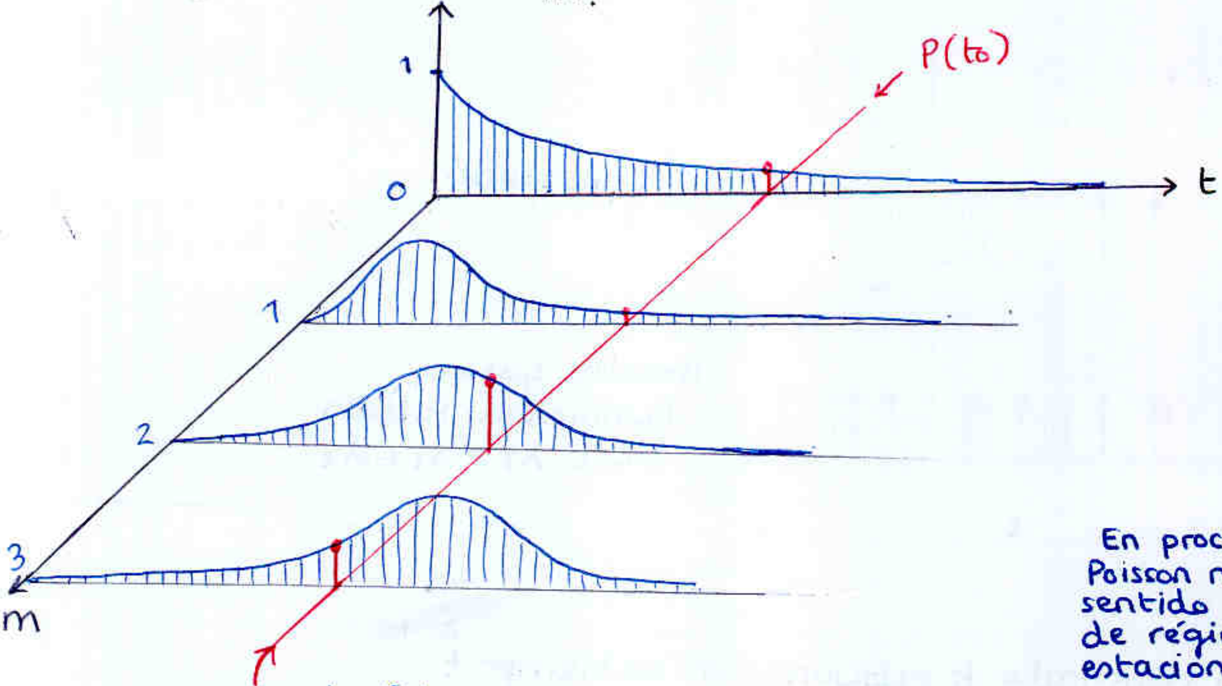
Así sucesivamente; se obtiene:

$$\boxed{P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}}$$ Ley de Poisson

¡conocemos la probabilidad de estar en cualquier estado en cualquier instante!

$$P(t) = \left[\ e^{-\lambda t},\ \lambda t e^{-\lambda t},\ \frac{(\lambda t)^2}{2!}e^{-\lambda t},\ \frac{(\lambda t)^3}{3!}e^{-\lambda t},\ \dots,\ \frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}\dots\right]$$

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$$



la suma dará 1

En proceso de Poisson no tiene sentido hablar de régimen estacionario

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) = e^{-\lambda t} \underbrace{\left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots\right]}_{e^{\lambda t}} = 1$$

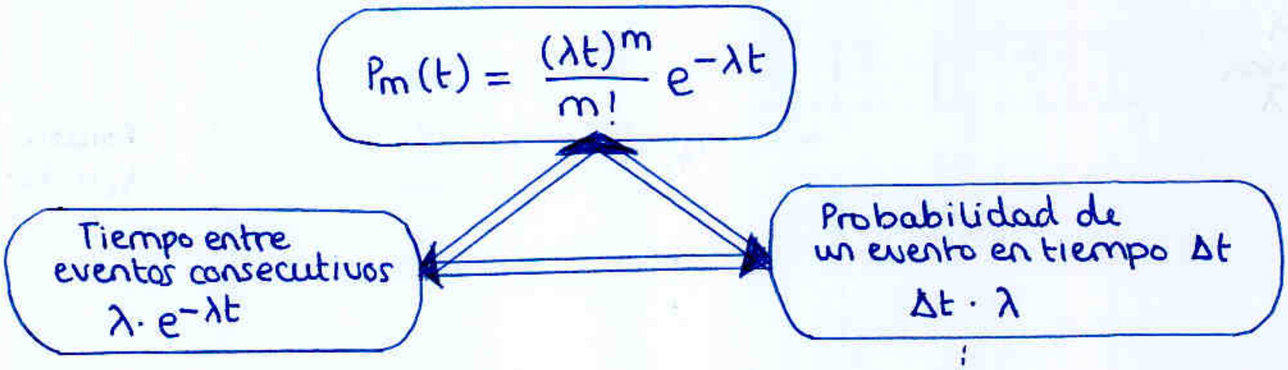
¿valor medio del contador al cabo de t segundos?

$$E\{N(t)\} = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot P_m(t) = \lambda \cdot t$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda t \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t}$$

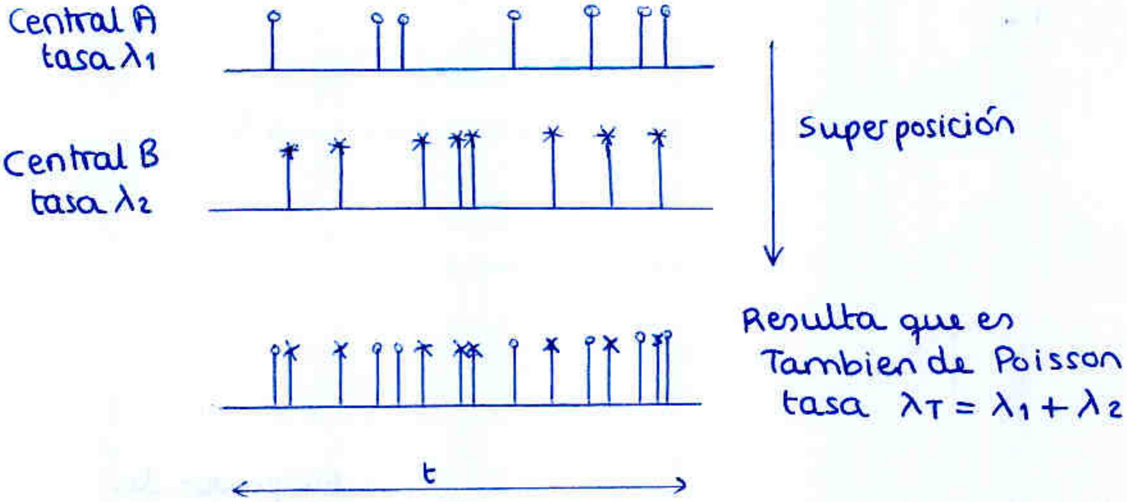
$$= \lambda t \left[\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!}}_{e^{\lambda t}} \right] e^{-\lambda t} = \lambda t$$

Triángulo de memoria nula:



independientemente de TODO lo anterior
i.e. si llevamos un siglo sin llegar un paquete, es igual de probable que llegue que si lleváramos un segundo

Superposición de procesos de Poisson



Dem:

se han registrado k peticiones en un tiempo t
- ↳ J de central A
- ↳ k−J de central B

Hay que considerar todas las posibilidades:

$$P_n(t) = \sum_{J=0}^{k} \left[\frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_1 t} \cdot \frac{(\lambda_2 t)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2 t} \right]$$

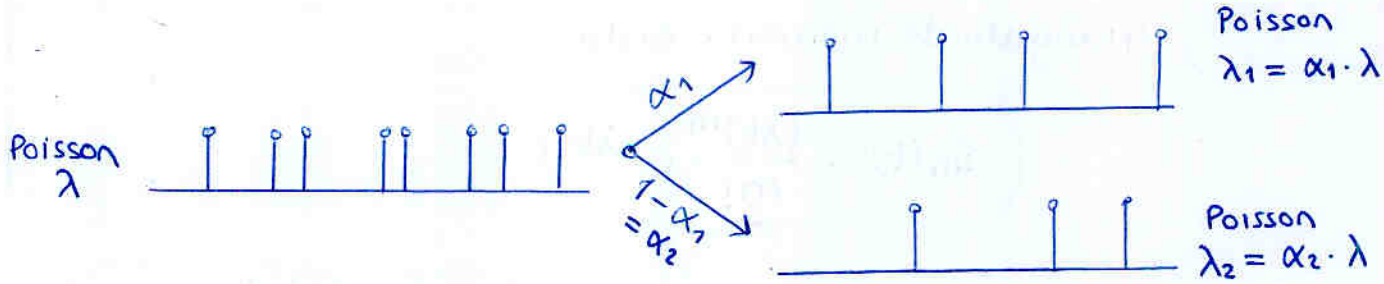
$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{j!(k-j)!} (\lambda_1 t)^j (\lambda_2 t)^{k-j}}_{(\lambda_1 t + \lambda_2 t)^k} e^{-\lambda_T t} = \frac{(\lambda_T t)^k}{k!} e^{-\lambda_T t}$$

recuerda:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0} a^0 b^k + \binom{k}{1} a^1 b^{k-1} + \binom{k}{2} a^2 b^{k-2} + \dots$$

$$\frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b}$$

Descomposición de un proceso de Poisson



Dem

$$\Pr\{N_1(t)=a_1,\ N_2(t)=a_2\}$$

Prob de que a_1 eventos sean de tipo 1 y a_2 eventos de tipo 2

$$= \Pr\{N_1(t)=a_1,\ N_2(t)=a_2 \mid N(t)=a_1+a_2\}\cdot \Pr(N(t)=a_1+a_2)$$

$$= \underbrace{\binom{a_1+a_2}{a_1}}_{\text{posibles combinaciones sin importar el orden}} \underbrace{\alpha_1^{a_1}\,\alpha_2^{a_2}}_{\text{prob de cada combinacion}} \cdot \underbrace{\frac{(\lambda t)^{a_1+a_2}}{(a_1+a_2)!}}_{\text{prob de que lleguen justamente } a_1+a_2 \text{ eventos}} e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{\cancel{(a_1+a_2)!}}{a_1!\cdot a_2!}\ \frac{(\alpha_1\lambda)^{a_1}(\alpha_2\lambda)^{a_2}}{\cancel{(a_1+a_2)!}}\ e^{-(\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda)t}$$

$$= \frac{(\alpha_1\lambda)^{a_1}}{a_1!}e^{-\alpha_1\lambda t}\cdot \frac{(\alpha_2\lambda)^{a_2}}{a_2!}e^{-\alpha_2\lambda t}$$

recuerda

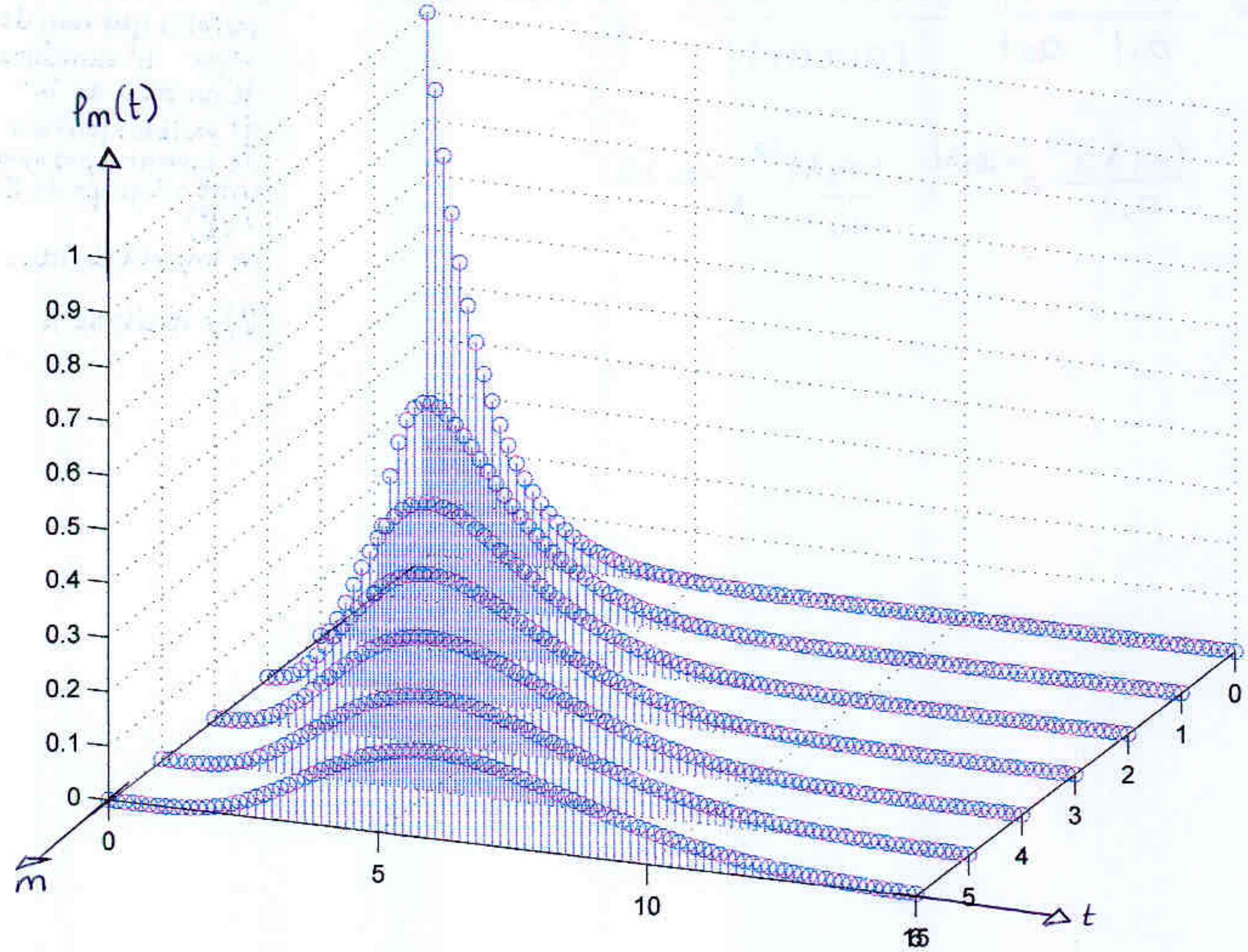
$$\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!\,(a-b)!}$$

$\binom{a}{b}\equiv$ combinaciones posibles que hay de coger 'b' elementos de un total de 'a'

ej: posibles formas de escoger 3 personas entre un grupo de 15 $=\binom{15}{3}$

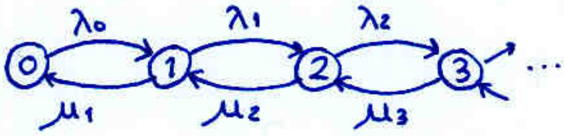
no importa el orden

$\binom{n}{k}\equiv$ n choose k


$p_m(t)$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
0
1
2
3
4
5
t
m

Procesos de nacimiento y muerte (continuación)

- Q(t) es tridiagonal



Q(t) = Q : P. de N.M homogéneo

en este caso tiene sentido hablar de regimen estacionario

$$P(\infty) = \lim_{t\to\infty} P(t)$$
$$= \lim_{t\to\infty} (P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t))$$
$$= [P_0, P_1, \dots, P_N]$$

$P_k \Rightarrow$ % de tiempo que el sistema está en E_k

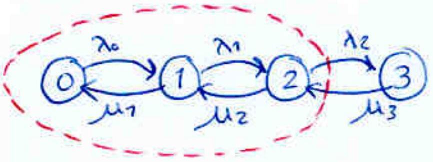
$$\underbrace{\text{Variación de flujo}}_{\substack{\text{derivadas de}\\ \text{probabilidades}}} = \underbrace{\text{flujo entrante}}_{\substack{\text{tasas entrantes}\\ \times \text{probabilidades}}} - \underbrace{\text{flujo saliente}}_{\substack{\text{tasas salientes}\\ \times\\ \text{probabilidades}}}$$

⇓

es igual a cero en regimen permanente

$\boxed{\text{Regimen permanente}} \Rightarrow$ flujo entrante = flujo saliente

ejemplo:



$$\mu_3 \cdot P_3 = \lambda_2 \cdot P_2$$

en general $\boxed{\mu_k \cdot P_k = \lambda_{k-1} \cdot P_{k-1}}$

con k=1 $\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$

k = 2 $\mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 \longrightarrow P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$

k = 3 $\mu_3 P_3 = \lambda_2 P_2 \longrightarrow P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0$

⋮

En general podemos poner todo en función de P_0

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} P_0$$

Por tanto

$$P(\infty) = \left[P_0 \quad \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0 \quad \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}P_0 \quad \cdots \quad \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}P_0 \quad \cdots\cdots \right]$$

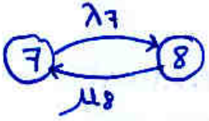
La suma de los elementos debe ser 1

$$1 = P_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}+\cdots+\underbrace{\frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}}_{\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}+\cdots\cdots\right)$$

en general se busca
$P_0 \neq 0$
ya que $P_0 = 0$ significa que no hay NINGUNA probabilidad de estar en el estado cero; lo que significa que los estados crecen irremediablemente

← este sumatorio deberia converger (a no ser que $P_0 \to 0$)

para que converga, intuitivamente

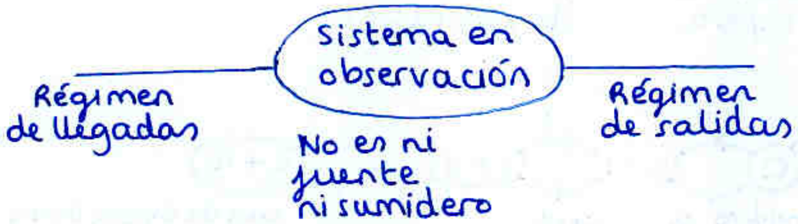


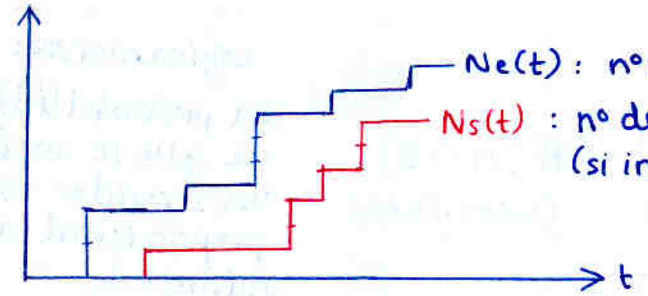
$\lambda_7 < \mu_8$ para que no crezca indefinidamente

Capítulo 5. Modelos Markovianos de colas

Teorema de Little

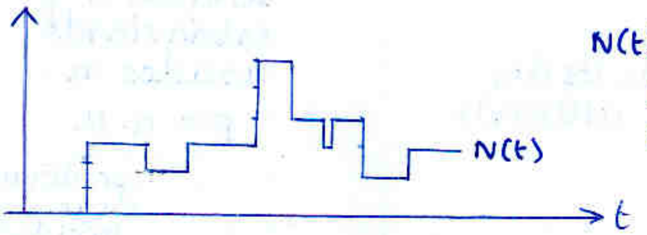
se aplica a cualquier sistema que ha alcanzado un régimen permanente. En consecuencia, también es de aplicación a los P.M.H.





$N_e(t)$: nº de usuarios que han entrado desde $t=0$

$N_s(t)$: nº de usuarios que han salido (si inicialmente vacío, será menor)



$N(t) = N_e(t) - N_s(t)$

la diferencia es el nº de usuarios dentro del sistema

Tasa entrante: media en los últimos t segundos $\frac{N_e(t)}{t} \overset{(1)}{=} \Lambda_e(t)$

Tasa saliente: $\frac{N_s(t)}{t} = \Lambda_s(t)$

Parece lógico que tienden a ser iguales si $t \to \infty$ ya que no es ni fuente ni sumidero

$\boxed{\Lambda = \lambda \text{ para llegada exponencial poisson}}$ → a no ser que hayan pérdidas

Cantidad de trabajo [seg.] $\int_0^t N(\tau)\,d\tau = \int_0^t N_e(\tau) - N_s(\tau)\,d\tau$ ← es como el tiempo de estancia de todos los usuarios sumadas aunque estén simultaneamente en el sistema

Tiempo de estancia por usuario $W_e(t) \underset{(2)}{=} \frac{\int_0^t N(\tau)\,d\tau}{N_e(t)}$

$$(1)\times(2):\quad \left.\begin{array}{l} \Lambda_e(t)\cdot W_e(t) = \frac{N_e(t)}{t}\frac{\int_0^t N(\tau)d\tau}{N_e(t)} = \frac{\int_0^t N(\tau)\,d\tau}{t} \\ \Lambda_s(t)\cdot W_s(t) = \qquad\qquad\qquad = \frac{\int_0^t N(\tau)\,d\tau}{t} \end{array}\right\} = \bar{N}(t)$$

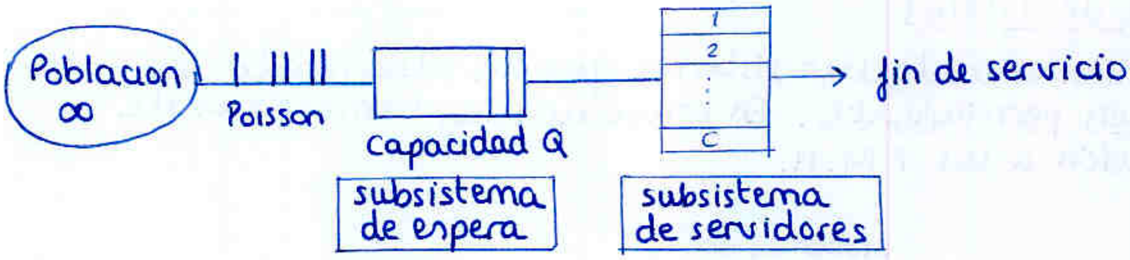
para $t \to \infty$: $\boxed{\underset{\text{nº usuarios}}{N} = \underset{\text{tasa de entrada o salida}}{\Lambda} \cdot \underset{\text{tiempo de estancia}}{W}}$ **Teorema de Little**

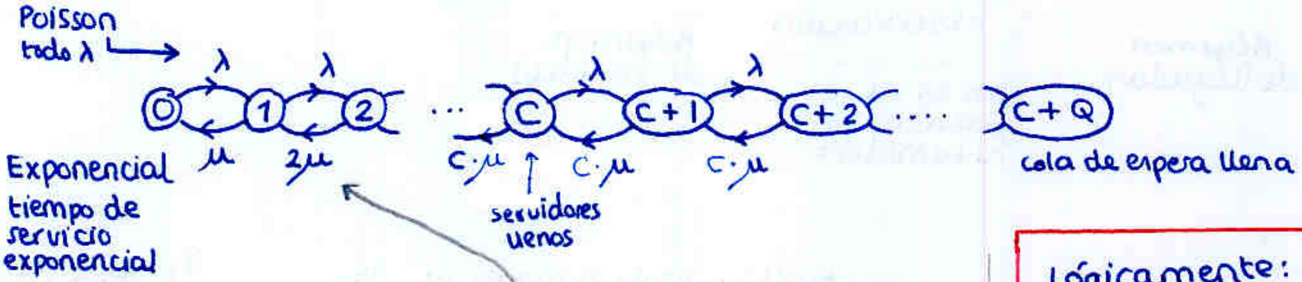
CUALQUIER sistema en régimen permanente

↑ ejemplo: sistema completo M/M/c/c+Q

↑ la cola de espera de un sistema ($\Lambda = \lambda$)

Estudio de casos particulares de procesos de nacim. y muerte





$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$\underset{\text{q. acabe servidor 1}}{A} \qquad \underset{\text{q. acabe servidor 2}}{B}$$

$$= \mu\Delta t + \mu\Delta t - (\mu\Delta t)\cdot(\mu\Delta t)$$

$$= 2\mu\Delta t - \mu^2\Delta t^2$$

$$\simeq 2\mu\Delta t$$

prob de que acabe uno de los dos servidores que se están utilizando (estando en el estado ②)

Lógicamente:
La probabilidad de que se vacíe un servidor es proporcional al número de servidores que están siendo usados n

$$P = n\cdot\underset{\text{pr. de que se vacíe un servidor determinado}}{\mu}$$

Una vez los servidores están llenos, la prob de pasar $(C+i) \xleftarrow{C\cdot\mu} (C+i+1)$ es la prob de que acabe uno de los C servidores, igual que $(C-1) \leftarrow (C)$

Por tanto ya podemos obtener P(∞) usando flujo entrante = flujo saliente

$k=0 \quad P_0 = P_0$

$k=1 \quad \mu P_1 = \lambda P_0 \rightarrow P_1 = A P_0 \qquad A = \frac{\lambda}{\mu}$

$k=2 \quad 2\mu P_2 = \lambda P_1 \rightarrow P_2 = \frac{A}{2} P_1 = \frac{A^2}{2} P_0$

$k=3 \quad 3\mu P_3 = \lambda P_2 \rightarrow P_3 = \frac{A}{3} P_2 = \frac{A^3}{3!} P_0$

$\vdots \qquad \vdots$

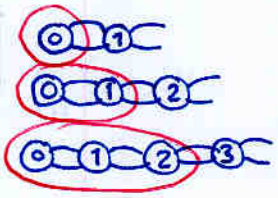
$k=c \qquad P_c = \frac{A^c}{c!} P_0$

$k=c+1 \quad c\mu P_{c+1} = \lambda P_c \rightarrow P_{c+1} = \frac{A}{c} P_c = \frac{A}{c} \cdot \frac{A^c}{c!} P_0$

$k=c+2 \quad c\mu P_{c+2} = \lambda P_{c+1} \rightarrow P_{c+2} = \frac{A}{c} \cdot P_{c+1} = \left(\frac{A}{c}\right)^2 \frac{A^c}{c!} P_0$

$\vdots$

$k=c+Q \qquad P_{c+Q} = \left(\frac{A}{c}\right)^Q \frac{A^c}{c!} P_0$



$$\boxed{A = \frac{\lambda}{\mu}}$$

$$P_k = \frac{A^k}{k!} P_0 \qquad k \leq C \leftarrow \text{servidores llenandose}$$

$$\underset{=k}{P_{C+q}} = \frac{A^C}{C!} \cdot \left(\frac{A}{C}\right)^{\overset{k-C}{\overset{\shortparallel}{q}}} \cdot P_0 \qquad \underset{C \leq k \leq C+Q}{q \leq Q} \qquad \leftarrow \text{cola llenandose}$$

CASO GENERAL M/M/C/C+Q

Por tanto

$$P(\infty) = \left[P_0 , AP_0 , \frac{A^2}{2!}P_0 , \frac{A^3}{3!}P_0 \;\cdots\; \frac{A^c}{c!}P_0 , \left(\frac{A}{C}\right)\frac{A^c}{c!}P_0 , \left(\frac{A}{C}\right)^2\frac{A^c}{c!}P_0 , \dots , \left(\frac{A}{C}\right)^Q\frac{A^c}{c!}P_0 \right]$$

la suma debe ser 1 :

$$1 = P_0 \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!}}_{e^A \text{ si } c\to\infty} + \frac{A^c}{c!} \underbrace{\left(1 + \frac{A}{C} + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A}{C}\right)^Q\right)}_{\frac{1-\left(\frac{A}{C}\right)^{Q+1}}{1-\frac{A}{C}}} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = \left[e^A + \frac{A^c}{c!}\left(\frac{1-\left(\frac{A}{C}\right)^{Q+1}}{1-\left(\frac{A}{C}\right)}\right)\right]^{-1}}$$

Esta serie debe tender a cero, para que no deba ser $P_0 \to 0$ ⇒ la cola se llena indefinidamente

por tanto :

$$Q \to \infty \Rightarrow \boxed{A < C} \Rightarrow \boxed{\lambda < C\mu \quad \text{para que no se llene indefinidamente}}$$

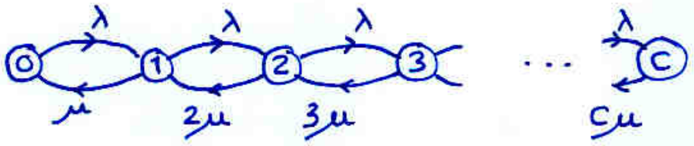
Casos particulares

Q : tamaño máximo de la cola de espera

si $Q = 0$ → sistema de pérdida PURO (Erlang-B)

si $Q = \infty$ → sistema de espera PURO (Erlang-C)

Sistema de Erlang-B



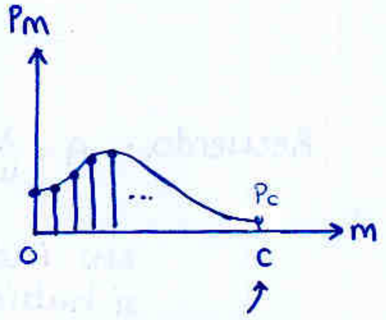
$$1 = P_0 \cdot \sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!}$$

Por tanto

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!}$$

y entonces:

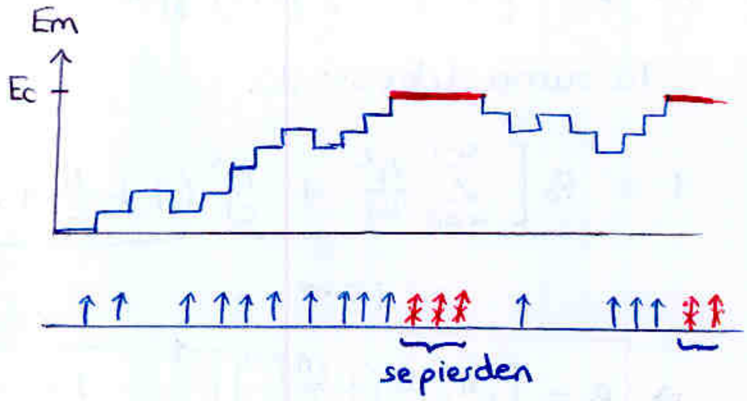
$$\boxed{P_m = \frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!}} \quad \text{Distribución de Erlang B}}$$



P_c = % de tiempo sistema ocupado
= Prob. Bloqueo

El valor P_m para $m=c$ i.e. porcentage del tiempo con el sistema saturado

Funcion de Erlang-B $Er_1(C,A)$ $$P_c = \frac{\frac{A^c}{c!}}{\sum_{k=0}^{c} \frac{A^k}{k!}}$$



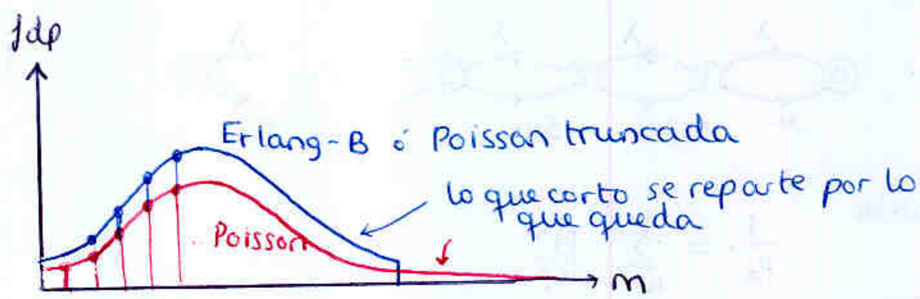
Expresión recursiva

$$Er_1(C,A) = P_c = \frac{\frac{A^c}{c!}}{\sum_0^c \frac{A^k}{k!}} = \frac{\frac{A^{c-1}}{(c-1)!}\cdot\frac{A}{c}}{\sum_0^{c-1}\frac{A^k}{k!}+\frac{A}{c}\frac{A^{c-1}}{(c-1)!}} = \frac{\frac{A}{C}\cdot Er_1(C-1,A)}{1+\frac{A}{C}Er_1(C-1,A)}$$

ej:
$$Er_1(0,A) = 1$$
$$Er_1(1,A) = \frac{A}{1+A}$$
$$Er_1(2,A) = \frac{\frac{A}{2}\otimes}{1+\frac{A}{2}\otimes}$$

La distribución de Erlang-B tiende a la de Poisson cuando hay ∞ servidores

Dem:
$$P_k = \frac{A^k/k!}{\sum_{m=0}^{c}\frac{A^m}{m!}} \xrightarrow[c\to\infty]{} P_k = \frac{A^k/k!}{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}} = \frac{A^k}{k!}e^{-A} \qquad \text{con } A=\frac{\lambda}{\mu}$$



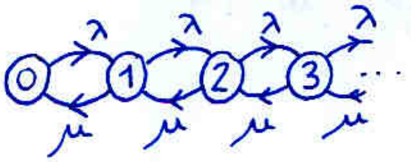
Recuerda: $A = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/\mu}{1/\lambda} = \frac{\text{duración media de servicio}}{\text{intervalo medio entre llegadas}}$

Nos indica el numero medio de recursos ocupados si hubieran infinitos servidores

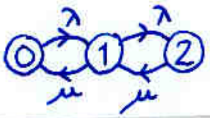
$C<A$ → no es conveniente

$C>A$ → puede ser derroche

Sistema M / M / 1



Régimen permanente ⇒ Flujo entrada = Flujo salida



$$\longrightarrow \quad P_0 = P_0$$

$$\rightsquigarrow P_0\lambda = P_1\mu \longrightarrow \quad P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0 = A\cdot P_0$$

$$\rightsquigarrow P_1\lambda = P_2\mu \longrightarrow P_2 = \frac{\lambda}{\mu}P_1 = AP_1 = A^2P_0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{P_k = A^k P_0}$$

$$P = [P_0 \quad AP_0 \quad A^2P_0 \quad A^3P_0 \quad \cdots]$$

la suma debe ser 1.

$$1 = P_0 \,(1 + A + A^2 + A^3 + \ldots)$$
$$1 = P_0 \, \frac{1}{1-A}$$

$$\boxed{P_0 = (1-A)} \quad \rightarrow \quad P_k = (1-A)A^k$$

- **Factor de utilización:**

$$\rho = \frac{0}{1}P_0 + \frac{1}{1}P_1 + \frac{1}{1}P_2 + \cdots$$

cada estado ponderado por la proporción de servidores activos

$$= P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$$
$$\rho = 1 - P_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\rho = A = \frac{\lambda}{\mu} = 1 - P_0}$$

- Número medio de usuarios en sistema:

$$\overline{N} = 0\cdot P_0 + 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3P_3 + \cdots$$
$$= P_0\left[A + 2A^2 + 3A^3 + \ldots\right]$$
$$= P_0A\left[1 + 2A + 3A^2 + \ldots\right]$$
$$= P_0A\frac{d}{dA}\left[A + A^2 + A^3 + \ldots\right]$$
$$= P_0A\frac{d}{dA}\left[\frac{1}{1-A}\right] = P_0A\cdot\frac{(1-A)\cdot 0 - 1\cdot(-1)}{(1-A)^2} -$$
$$= P_0A\frac{1}{(1-A)^2} = (1-A)\cdot A\cdot\frac{1}{(1-A)^2} = \frac{A}{(1-A)} \qquad \boxed{\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

- Tiempo medio en el sistema:

$$\overline{T} \underset{\uparrow}{=} \frac{\overline{N}}{\lambda} \underset{\uparrow}{=} \frac{\overline{N}}{\mu\rho} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\rho} \qquad \boxed{\overline{T} = \frac{1}{\mu}\,\frac{1}{1-\rho}}$$

por Little $\quad A=\rho=\frac{\lambda}{\mu}$

- Número medio de usuarios en cola:

$$\begin{aligned}
\overline{Q} &= 1\cdot P_2 + 2P_3 + 3P_4 + 4P_5 + \dots \\
&= P_0\,(A^2 + 2A^3 + 3A^4 + 4A^5 + \dots) \\
&= P_0 A^2 (1 + 2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots) \\
&= P_0 A^2 \frac{d}{dA}(A + A^2 + A^3 + \dots) \\
&= P_0 A^2 \frac{d}{dA}\left(\frac{1}{1-A}\right) \\
&= P_0 \cdot A^2 \cdot \frac{1}{(1-A)^2} = (1-A)\cdot A^2 \cdot \frac{1}{(1-A)^2} = \frac{A^2}{1-A}
\end{aligned} \qquad \overline{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- Tiempo medio en cola:

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda} = \frac{\overline{Q}}{\mu\rho} = \frac{1}{\mu}\,\frac{\rho}{1-\rho} \qquad \boxed{\overline{W} = \underbrace{\frac{1}{\mu}}_{\overline{T_s}}\cdot\underbrace{\frac{\rho}{1-\rho}}_{\overline{N}}}$$

- Nota acerca de Little

según Little debería ser igual $\quad \overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\Lambda_e} = \frac{\overline{Q}}{\Lambda_s}$

¡¿cómo es posible si $\Lambda_e = \lambda$ y $\Lambda_s = \mu$ pero $\lambda \neq \mu$?!

Lo que ocurre es que la tasa de salida no es μ.
Piensa que en E_0 no hay tasa de salida de la cola
i.e. hay momentos en los que la tasa de salida es nula
Habría que calcular la tasa de salida con

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda_s} &= 0\cdot P_0 + \mu\,[P_1 + P_2 + P_3 + \dots] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k P_k \\
&= \mu\,[1-P_0] = \mu\rho = \lambda
\end{aligned}$$

$\overline{\Lambda_s} = \lambda = \overline{\Lambda_e}$ ← Little vuelve a tener razón

- Tráfico ofrecido:

$$TO = \frac{1}{\mu}\cdot\sum \lambda_k P_k = \frac{\lambda}{\mu}\sum P_k = \frac{\lambda}{\mu} = A$$

- Prob pérdidas

$$PP = \frac{\overline{N_p}^{\leftarrow 0}}{\overline{N_o}} = 1 - \frac{\overline{N_c}}{\overline{N_o}} = 1 - \frac{\sum \mu_k P_k}{\sum \lambda_k P_k} = 1 - \frac{\mu\overset{\overset{A=\lambda/\mu}{\uparrow}}{\boxed{(1-P_0)}}}{\lambda} = 0 \qquad \boxed{PP=0}$$

- Tráfico cursado

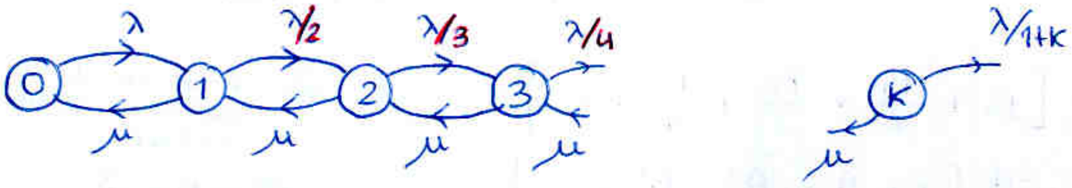
$$TC = \frac{1}{\mu}\cdot\sum \mu_k P_k = \frac{1}{\mu}\cdot\mu(1-P_0) = A \qquad \boxed{TC = A}$$

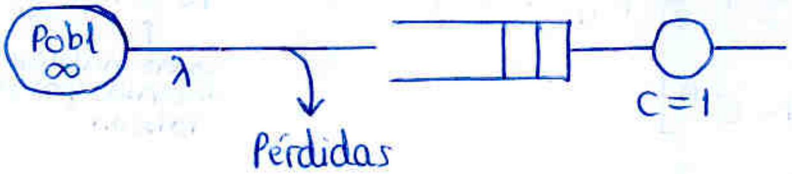
- Prob bloqueo

$$PB = \sum_{k=C}^{\infty} P_k = P_0(A + A^2 + \dots) = P_0\cdot\frac{A}{1-A} \qquad \boxed{PB = A = \rho = 1-P_0}$$

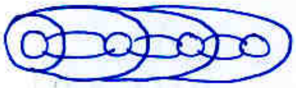
Sistema M/M/1 con llegadas desincentivadas

Si el usuario ve mucha cola, decide no entrar con una cierta probabilidad





Usando igualdad de flujos



$$P_0 = P_0$$

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \longrightarrow P_1 = A P_0$$

$$\frac{\lambda}{2} P_1 = \mu P_2 \longrightarrow P_2 = \frac{A}{2} P_1 = \frac{A^2}{2} P_0$$

$$\frac{\lambda}{3} P_1 = \mu P_3 \longrightarrow P_3 = \frac{A}{3} P_2 = \frac{A^3}{3!} P_0$$

$$\frac{\lambda}{4} P_1 = \mu P_4 \longrightarrow P_4 = \frac{A}{4} P_3 = \frac{A^4}{4!} P_0$$

la suma es 1 → podemos obtener P_0

$$1 = P_0 \cdot e^{A} \longrightarrow P_0 = e^{-A}$$

Por tanto:

$$P_k = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$$

Es la ley de Poisson que utilizamos con C → ∞! Ahora nos ha aparecido con C = 1 y llegadas desincentivadas

Función característica para hallar la media

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} e^{-A} z^k = e^{-A} e^{Az} = e^{A(z-1)}$$

$$\Pi'(z) = A \cdot e^{A(z-1)}$$

$$\Pi'(1) = A$$

$$E[k] \underset{\substack{\uparrow \\ P_k = \frac{A^k}{k!} e^{-A}}}{=} A$$

por ser Poisson

quiero calcular $E(\bar{W}) \Rightarrow$ por LITTLE

$$\bar{N} = \Lambda_e \cdot \bar{T}$$

↳ tasa de entrada a la cola
(contando sólo los que deciden entrar)

$$\Lambda_e = \lambda \cdot \left[P_0 + \frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{3} + \frac{P_3}{4} + \dots \right]$$

$$= \lambda \cdot e^{-A} \left[1 + \frac{A}{2} + \frac{A^2}{3!} + \frac{A^3}{4!} + \dots \right]$$

$$= \dots = \mu \cdot \left[1 - e^{-A} \right]$$

$\bar{N}$: nº medio de usuarios en el sistema

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{como habíamos obtenido por ser Poisson}}}{\bar{N} = A} = \frac{\lambda}{\mu}$$

Por tanto el tiempo de permanencia: (servicio + espera)

$$\bar{T} = \frac{A}{\mu(1-e^{-A})} = \frac{\lambda}{\mu^2 [1-e^{-A}]}$$

en teoría

$$\bar{T} > \frac{1}{\underset{\uparrow \text{ tiempo servicio}}{\mu}}$$

$$\frac{A}{\mu(1-e^{-A})} > \frac{1}{\mu} \text{ ?}$$

$$A > 1-e^{-A}$$

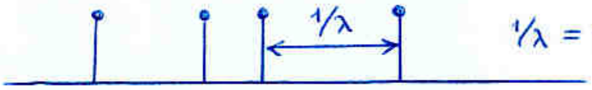
Problemas:

Diciembre 2005

1. El numero de contagios por una cierta variante del virus de la gripe aviaria sigue un proceso de Poisson. Los contagios se producen a razón de un nuevo contagio cada 10 minutos. El tiempo de vida de un ave infectada con el virus, a partir del momento en que ha contraído éste, está distribuido exponencialmente y su media es 1 hora. La probabilidad de que en un instante cualquiera haya, como máximo, 2 aves enfermas vale (utilizando 3 decimales con redondeo):

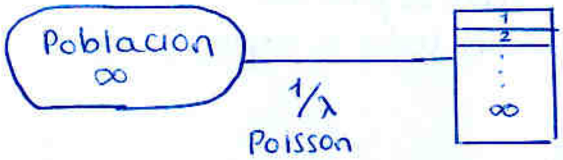
   a) 0,062. b) 0,017. c) 0,045. d) 1.

Nota: considera que la población mundial de aves es infinita y que aunque en un determinado momento no haya aves enfermas SÍ pueden producirse contagios debido a la mutación de otra variantes del virus.



$1/\lambda = 10$ minutos

esas entradas entra a los "servidores de la muerte" donde tras 1 hora de media se mueren



$$A = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/\mu}{1/\lambda} = 6$$

$\frac{1}{\lambda} = 10$ minutos $\frac{1}{\mu} = 1$ hora

Por tanto, hay que aplicar Erlang-B cuando $C \rightarrow \infty$, que corresponde con Poisson.

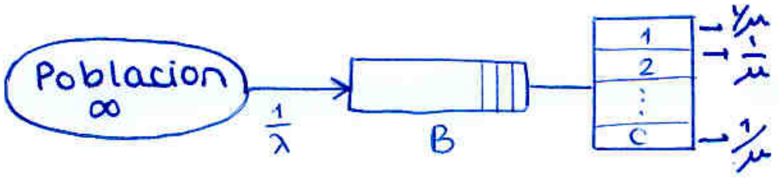
$$P_k = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$$

$$P_r = P_0 + P_1 + P_2 = \left(1 + A + \frac{A^2}{2}\right) e^{-A}$$

$$= 0'062$$

2. Considera un sistema $M/M/c/c+B$ en el que λ es la tasa de llegadas; μ es la tasa de servicio; las variables aleatorias N y Q representan, respectivamente, el número de clientes en el sistema y en la cola; y ρ es el factor de utilización. Señala la opción CORRECTA:

   a) Si $\lambda = c\mu$ el sistema nunca alcanzará el equilibrio.
   b) $P[Q = n] = P[N = n+1]$.
   c) Para este sistema siempre se cumple que $\rho < 1$.
   d) Si la disciplina de servicio es FIFO, el tiempo medio de espera en la cola del cliente que ocupa la última posición en la cola será $(B-1)/\mu$.



Q : nº clientes en cola
N : nº clientes en sistema
ρ : factor de utilización

a) sería verdadero si $B \to \infty$
pero como B es finito, lo que no cabe se pierde
(se puede alcanzar un equilibrio con todo a tope)

b)
$$N = \underbrace{0, 1, 2, \dots, c}, c+1, \dots, c+B$$
$$Q = \qquad 0 \qquad , 1, \dots, B$$

sería cierto $P(Q=n) = P(N=n+c)$ sólo para $n \neq 0$ $n > 0$

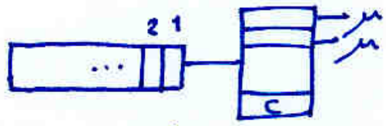
ya que $P(Q=0) = P(N = 0, 1, 2, \dots c)$

c) siempre se cumple que $\rho < 1$

$\rho = \min\left[\frac{A}{c}, 1\right]$ en sistemas de espera puros

En un sistema con pérdidas, no tiene porque entrar alguien a la cola justo cuando un servidor acaba y sale alguien de la cola, habrá un intervalo donde la cola no estará llena

d)



- Para el primero en cola, esperará en media $\frac{1}{c\mu}$
- para el segundo será (aunque llegue cuando el primero lleva ya 1 año, hay memoria nula) $\frac{1}{c\mu} + \frac{1}{c\mu} = \frac{2}{c\mu}$

- k-ésimo : $\frac{B}{c\mu}$

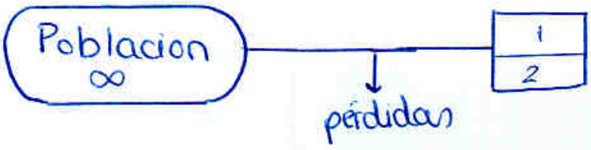
3. Se tiene un modelo de pérdidas caracterizado por el sistema $M/M/2/2$. Si denotamos por A_0 el valor mínimo del tráfico ofrecido para el que se cumple que la probabilidad de bloqueo (todos los servidores ocupados) supera a la probabilidad de no bloqueo, entonces (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $A_0 = 1{,}281$. b) $A_0 = 2{,}553$. c) $A_0 = 2{,}732$. d) $A_0 = 3{,}128$.

M / M / 2 / 2

↑ llegada Markov (Poisson)

↑ servicio Markov (Exponencial)



Erlang - B

$$P_k = \frac{A^k/k!}{1 + A + \frac{A^2}{2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{bloqueo} = PB = P_c = P_2 &= \frac{A^2/2}{1+A+A^2/2} \\ PNB &= 1 - PB \end{aligned}}$$

se pide $PB > PNB$

$PB > 0'5$

$$\frac{A^2/2}{1+A+A^2/2} > 0'5$$

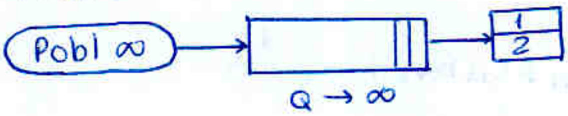
$$A_0^2 - 2A_0 - 2 > 0 \begin{cases} \rightarrow 1+\sqrt{3} = 2'732 \quad \text{la ⓒ} \\ \rightarrow 1-\sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

---

4. Se tiene un modelo de espera caracterizado por el sistema $M/M/2$. Si denotamos por A_0 el valor mínimo del tráfico ofrecido para el que se cumple que la probabilidad de bloqueo (todos los servidores ocupados) supera a la probabilidad de no bloqueo, entonces (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $A_0 = 1{,}281$. b) $A_0 = 2{,}553$. c) $A_0 = 2{,}732$. d) $A_0 = 3{,}128$.

M / M / 2



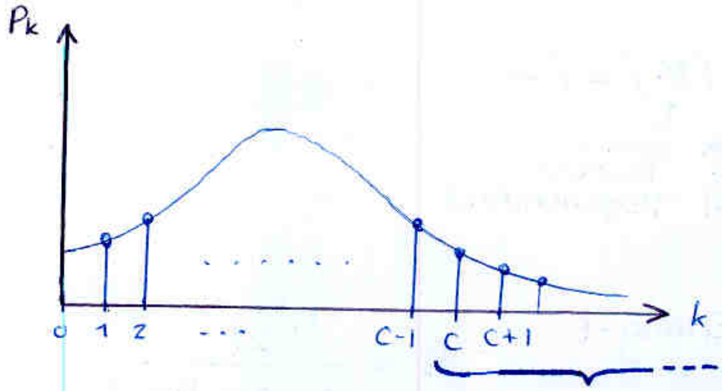
$$\frac{1}{P_0} = \sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!} \frac{1-\left(\frac{A}{c}\right)^{Q+1}}{1-\frac{A}{c}}$$

si $Q \rightarrow \infty \Rightarrow$ Erlang C

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-\frac{A}{c}}$$

$$\left(\begin{aligned} P_0 &= P_0 \\ P_1 &= A P_0 \\ P_2 &= \frac{A^2}{2} P_0 \\ &\vdots \\ P_c &= \frac{A^c}{c!} P_0 \\ &\vdots \\ P_{c+m} &= \left(\frac{A}{c}\right)^m \frac{A^c}{c!} P_0 \end{aligned} \right)$$

Es la distribución de Erlang-C



Contribuyen al bloqueo
(con Erlang-C no es bloqueo, es necesidad de esperar, i.e. servicio no instantáneo)

$$PB = \frac{A^c}{c!} P_0 \left[1 + \frac{A}{c} + \left(\frac{A}{c}\right)^2 + \dots \right]$$

$$\boxed{PB = \frac{A^c}{c!} P_0 \frac{1}{1-A/c}}$$

Función de Erlang-C

sust. P_0

$$\boxed{PB = \frac{\frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-A/c}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-\frac{A}{c}}}} = Er_2(C, A)$$

Para $C = 2$: $Er_2(2, A) = \frac{A^2/2}{1+A/2} = PB \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exigimos}}}{\geq} PNB = 1 - \frac{A^2/2}{1+A/2}$

$$\frac{A_0^2/2}{1+A_0/2} \geq \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{2° grado}]{\text{ec de}} A_0 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \longrightarrow 1'2807$$

Tráfico cursado en Erlang-C

$$TC = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P_k\right) \frac{1}{\mu}$$

$$= (0 \cdot P_0 + \cancel{\mu} P_1 + 2\cancel{\mu} P_2 + \dots + c\cancel{\mu} P_c + c\cancel{\mu} P_{c+1} + c\cancel{\mu} P_{c+2} + \dots) \cancel{1/\mu}$$

$$= (0 \cdot P_0 + P_1 + 2P_2 + \dots + CP_c + CP_{c+1} + CP_{c+2} + \dots)$$

$$= P_0 \left(0 \cdot 1 + 1 \cdot A + 2 \cdot \frac{A^2}{2!} + \dots + c\frac{A^c}{c!} + c\frac{A^c}{c!} \left(\frac{A}{c} + \left(\frac{A}{c}\right)^2 + \left(\frac{A}{c}\right)^3 + \dots\right)\right)$$

$$= P_0 \left(A + \frac{A^2}{1} + \frac{A^3}{2!} + \dots + \frac{A^c}{c-1!} + \frac{A^c}{c-1!} \left(\frac{A}{c} + \left(\frac{A}{c}\right)^2 + \left(\frac{A}{c}\right)^3 + \dots\right)\right)$$

$$= A P_0 \underbrace{\left(1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{c-1}}{c-1!} + \frac{A^c}{c!} \left(1 + \left(\frac{A}{c}\right) + \left(\frac{A}{c}\right)^2 + \dots\right)\right)}_{1/P_0}$$

$$= A$$

TC = A = TO
lógico, pues
PP = 0

5. La llegada de pacientes a la consulta de un médico sigue un proceso de Poisson de tasa 2 pacientes por hora. El tiempo que el médico tarda en atender a cada paciente sigue una distribución exponencial de media $\overline{T}_s$ (en minutos). En la sala de espera cabe un número ilimitado de pacientes pero sólo hay 4 sillas. Si se fija el como objetivo de calidad que la probabilidad de que alguien tenga que esperar de pie sea como máximo un 1 %, indique cuál de las siguientes condiciones garantiza que se cumple siempre el objetivo:

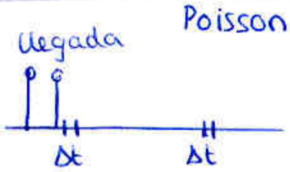
a) $\overline{T}_s < 15$. **b)** $\overline{T}_s > 15$. **c)** $\overline{T}_s < 10$. **d)** $\overline{T}_s > 10$.

Poisson; $\lambda = 2$ pacientes/hora

Tiempo de atención a un paciente: exponencial

$$\frac{1}{\mu} = \overline{T_s}$$

Objetivo: probabilidad de que un paciente espere de pie sea menor de un 1%.



Poisson: tráfico AL AZAR

la prob. de una llegada es igual en ambos casos ($\lambda \cdot \Delta t$)

he ahí el concepto de memoria nula

Imaginemos que cada paciente hace una foto al llegar y se mira el nº de pacientes que hay delante (incluyendo el siendo atendido)

	0 pacientes	1 paciente	2 pacientes	3 pacientes	....
en %	$f_0 = P_0$	$f_1 = P_1$	$f_2 = P_2$	$f_3 = P_3$	....

propiedad PASTA

$$P_k = A^k(1-A)$$
$$= \rho^k(1-\rho) \quad \rho = A < 1$$

la probabilidad que nos piden

$$P_r(\text{esperar de pie}) = P_5 + P_6 + P_7 + \dots$$
$$= A^5(1-A) + A^6(1-A) + A^7(1-A) + \dots$$
$$= \frac{A^5}{1-A} \cdot (1-A) = A^5$$

Exigimos

$$A^5 < 0'01 \qquad A = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{60}\overline{T_s}$$

$$\left(\frac{2\overline{T_s}}{60}\right)^5 < 0'01$$

$$\overline{T_s} < 11'943 \text{ minutos....}$$

6. Sea X una v.a. geométrica definida como el número de repeticiones independiente de un experimento de Bernouilli (con probabilidad de éxito p) hasta que ocurre el primer éxito. Se pide E[X^2]. (Nota. Es claro que los valores posibles de la v.a. son $1, 2, 3, \ldots$)

a) $(2-p)/p^2$.

b) $p^2/(2-p)$.

c) $1/(1-p^2)$.

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

X V.A. geométrica (según experimento de Bernouilly → (p, q))

Exito la 1ª vez : p

" " 2ª vez : $p \cdot q$

3ª : $p \cdot q^2$

⋮ ⋮

Se pide $E(\bar{X}^2)$

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$$

siendo

$$g_n = p \cdot q^{n-1}$$

$$G'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot g_n \cdot z^{n-1}$$

$$G''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n-1)\, g_n \cdot z^{n-2}$$

· por tanto:

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot q^{n-1} z^n = \frac{p}{q} \frac{qz}{1-qz} = \frac{pz}{1-qz}$$

$$G'(z) = p \cdot (1-qz)^{-2}$$

$$G''(z) = 2pq\, (1-qz)^{-3}$$

· entonces:

$$E[X^2] = G''(1) + G'(1) = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

7. En un sistema M/M/2/4 los clientes que llegan en estado 2 se incorporan con probabilidad 1/2, mientras que los que llegan en el 3 lo hacen con probabilidad 1/3. Si denotamos por TC al tráfico cursado en Erlangs y por E[W] el tiempo medio de espera en cola en segundos, cuando $\lambda = 2$ y $\mu = 1$ en clientes/s entonces:

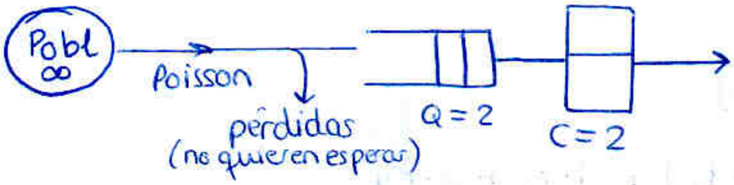
a) $TC < 1{,}4$ y $E[W] < 0{,}2$.

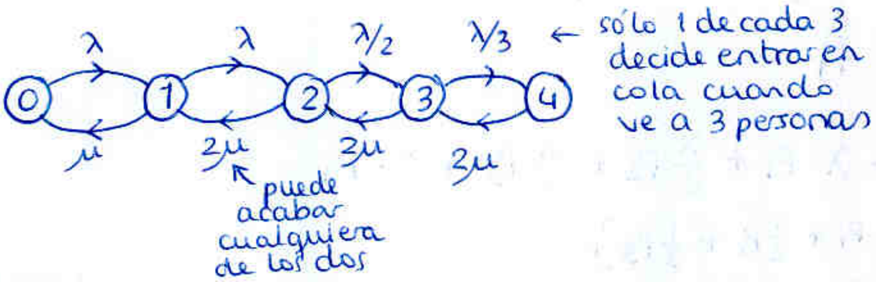
b) $TC < 1{,}4$ y $E[W] \geq 0{,}2$.

c) $TC \geq 1{,}4$ y $E[W] < 0{,}2$.

d) $TC \geq 1{,}4$ y $E[W] \geq 0{,}2$.

Sistema M/M/2/4





TC = tráfico cursado

$E(\bar{W})$ = tiempo medio de espera en cola

Si $\lambda = 2$ y $\mu = 1$ en clientes/seg $\quad A = \frac{\lambda}{\mu} = 2$

$$TC = A\cdot\left[P_0 + P_1 + P_2\cdot\tfrac{1}{2} + P_3\cdot\tfrac{1}{3} + P_4\cdot 0\right] \left(= A\cdot[1-\overset{\text{prob pérdidas}}{PP}] = A\cdot[\overset{\text{prob de no pérdidas}}{P.noP}]\right)$$

En los casos normales en que los usuarios siempre entran a la cola

$$TC = A\cdot[P_0+P_1+P_2+P_3] = A\cdot[1-P_4] = A[1-PP]$$

Utilizando
flujo entrante = flujo saliente

$\lambda P_0 = \mu P_1 \longrightarrow P_1 = A P_0$

$\lambda P_1 = 2\mu P_2 \longrightarrow P_2 = \frac{A}{2}P_1 = \frac{A^2}{2}P_0$

$\frac{\lambda}{2}P_2 = 3\mu P_3 \longrightarrow P_3 = \frac{A}{4}P_2 = \frac{A^3}{8}P_0$

$\frac{\lambda}{3}P_3 = 4\mu P_4 \longrightarrow P_4 = \frac{A}{6}P_3 = \frac{A^4}{48}P_0$

$P = [P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4]$

$= [P_0 \;\; AP_0, \;\; \frac{A^2}{2}P_0 \cdot \;\; \frac{A^3}{8}P_0 \;\; \frac{A^4}{48}P_0]$ ⓘ $= 1 \longrightarrow$ despejamos P_0

$P_0 = \frac{3}{19} \quad P_1 = \frac{6}{19} \quad P_2 = \frac{6}{19} \quad P_3 = \frac{3}{19} \quad P_4 = \frac{1}{19}$

portanto :

$$TC = A \cdot \left[P_0 + P_1 + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{3} \right]$$
$$= 2 \cdot \left[\frac{3}{19} + \frac{6}{19} + \frac{3}{19} + \frac{1}{19} \right] = \frac{26}{19} = 1'365 \text{ Erlangs}$$

Por LITTLE :

$$\overline{N_Q} = \Lambda_e \cdot E[\overline{W}]$$
$$= 0\,[P_0 + P_1 + P_2] + 1 \cdot P_3 + 2 \cdot P_4$$
$$= \frac{5}{19}$$

$$\Lambda_e = \lambda \cdot P_0 + \lambda \cdot P_1 + \frac{\lambda}{2} P_2 + \frac{\lambda}{3} P_3 + 0 \cdot P_4$$
$$= \lambda \left[P_0 + P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{3} P_3 \right]$$
$$= \lambda \left[\frac{3}{19} + \frac{6}{19} + \frac{3}{19} + \frac{1}{19} \right] = \underset{\lambda = 2}{\lambda} \frac{13}{19} \text{ clientes/seg}$$

← no ofrecidos, los que entrán al sistema

$$E[\overline{W}] = \frac{\overline{N_a}}{\Lambda_e} = \frac{5/19}{26/19} = \frac{5}{26} = 0'19 \text{ s} < 0'2 \text{ s}$$

---

8. Utilizando la notación habitual, para un sistema $M/M/c/c$ se cumple que:

a) $\overline{W} = 1/(c\mu)$.

b) $\overline{T} = 1/(c\mu)$.

c) $\overline{W} = \rho/(c\mu)$.

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

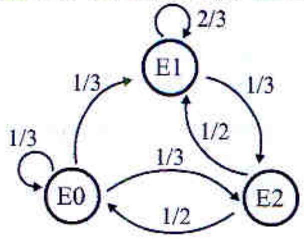
$M/M/c/c$

a) $\overline{W} = \frac{1}{c\mu}$ → Falso ya que no hay espera

c) $\overline{W} = \frac{\rho}{c\mu}$ ↗

b) $\overline{T} = \frac{1}{c\mu}$ falsa ya que el tiempo de servicio medio es $\overline{T} = \frac{1}{\mu}$ (independiente del número de servidores)

9. Si $\{P_k\}$ es la distribución estacionaria de probabilidades de estado y $\overline{TR_k}$ el tiempo medio de residencia en el estado k, entonces



a) $P_1 < 0{,}5$ y $\overline{TR_1} < 2{,}78$.
b) $P_1 < 0{,}5$ y $\overline{TR_1} \geq 2{,}78$.
c) $P_1 \geq 0{,}5$ y $\overline{TR_1} < 2{,}78$.
d) $P_1 \geq 0{,}5$ y $\overline{TR_1} \geq 2{,}78$.

La matriz Π es:

$$\Pi = \begin{array}{c|ccc} & E_0 & E_1 & E_2 \\ E_0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ E_1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ E_2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}$$

$$[P_0 \;\; P_1 \;\; P_2] = [P_0 \;\; P_1 \;\; P_2]\,\Pi$$

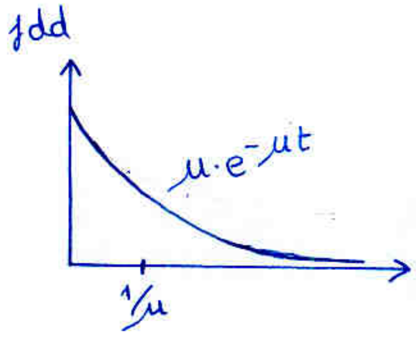
$$\left.\begin{array}{l} P_0 = \frac{P_0}{3} + \frac{P_2}{2} \\ P_1 = \frac{P_0}{3} + \frac{2}{3}P_1 + \frac{P_2}{2} \\ P_2 = \frac{P_0}{3} + \frac{P_1}{3} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} P_0 = 3/16 \\ P_1 = 9/16 \\ P_2 = 4/16 \end{array}$$

$$\sum P_1 = 1$$

$$\overline{TR_1} = \frac{1}{\text{Tasa saliente de } E_1} = \frac{1}{1/3} = 3$$

10. La duración de una conversación telefónica sigue una distribución exponencial de parámetro $\mu = 0{,}4$ conversaciones/minuto. ¿Qué porcentaje de conversaciones, P_{cn}, tienen una duración superior al doble de la media?:

a) $P_{cn} < 5\,\%$.
b) $5\,\% \leq P_{cn} < 10\,\%$.
c) $10\,\% \leq P_{cn} < 15\,\%$.
d) $15\,\% \leq P_{cn}\,\%$.



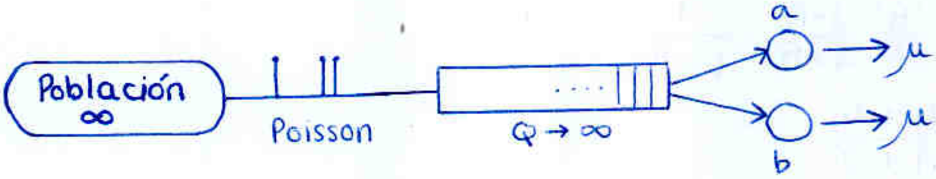
$$\int_0^\infty \mu e^{-\mu t}\,dt = 1$$

$$P_{CN} = \left(\begin{array}{c}\text{\% de conversaciones} \\ \text{en duración superior} \\ \text{al doble de } 1/\mu\end{array}\right) = \int_{\frac{2}{\mu}}^{\infty} \mu e^{-\mu t}\,dt = e^{-\mu\frac{2}{\mu}} = e^{-2} = 0'1353$$

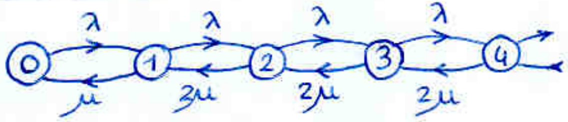
Preferencia entre servidores

Sistema M/M/2 con preferencia de un servidor respecto del otro

ej: dos ascensores, coges el más cercano



. Si no hay preferencia:



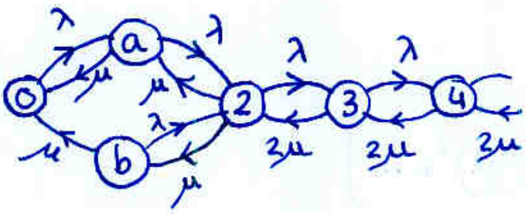
$$P_k = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} P_0 & 0 \le k \le C = 2 \\ \left(\frac{A}{C}\right)^{k-C} \frac{A^C}{C!} P_0 & C \le k \end{cases}$$

$$\Sigma P_k = 1 \Rightarrow P_0^{-1} = 1 + A + \frac{A^2}{2} \underbrace{\left[1 + \frac{A}{2} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \dots\right]}_{\frac{1}{1-A/2}} = \frac{2+A}{2-A}$$

. Si hay preferencia de un servidor respecto del otro

Parece lógico que P_0 será la misma, y parece que $P_2, P_3, \dots$ tambien

Desglosamos el estado inicial: Pensarlo logicamente.



Flujo en b: $(\lambda+\mu) P_b = \mu P_2$

$$\Rightarrow (A+1) P_b = P_2 \Rightarrow P_b = \frac{P_2}{A+1} = \boxed{\frac{A^2}{2} \frac{2-A}{(2+A)(1+A)} = P_b}$$

Flujo en a: $P_1 = P_a + P_b = A P_0 = A \frac{2-A}{2+A}$

$$\Rightarrow \boxed{P_a = \frac{A}{2} \frac{2-A}{1+A}}$$

$$P_b = P_a \cdot \frac{A}{2+A}$$

TCa = % tiempo que el servicio @ está ocupado = tráfico cursado

nota: tambien serviría $TC_a = 1 - P_0 - P_b$

$$= P_a + P_2 + P_3 + \dots$$

$$= \frac{A}{2}\,\frac{2-A}{1+A} + \frac{A^2}{2}\,\frac{2-A}{2+A}\left[1 + \frac{A}{2} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \frac{A}{2}\,\frac{2-A}{1+A} + \frac{A^2}{2}\,\frac{2-A}{2+A}\cdot\frac{1}{1-A/2}$$

$$= \frac{A}{2}\,\frac{A^2+2A+4}{A^2+3A+2}$$

$$TC_b = P_b + P_2 + P_3 + \dots$$

$$= \dots = \frac{A}{2}\,\frac{A^2+4A}{A^2+3A+2}$$

$TC_a + TC_b = A$ como es lógico

Hallemos $\overline{W}$ (por Little) aplicando Little a la cola de espera (i.e. tal que $\Lambda = \lambda$)

$$\underbrace{\overline{N_Q}}_{\text{nº medio de usuarios en cola}} = \underbrace{\lambda}_{\text{tasa de entrada a cola}} \times \cdot \underbrace{\overline{W}}_{\text{tiempo medio de espera en cola}}$$

Hallemos $\overline{N_Q}$

N_Q:	0	1	2	3	...
Prob:	$P_0 + [P_a + P_b] + P_2$	P_3	P_4	P_5	...

$$\overline{N_Q} = P_3 + 2P_4 + 3P_5 + \dots$$

$$= \frac{A^2}{2}\,\frac{2-A}{2+A}\left[\frac{A}{2} + 2\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{A}{2}\right)^3 + \dots\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\,\frac{A}{2}\,\frac{2-A}{2+A}\,\underbrace{\left[1 + 2\frac{A}{c} + 3\left(\frac{A}{c}\right)^2 + \dots\right]}$$

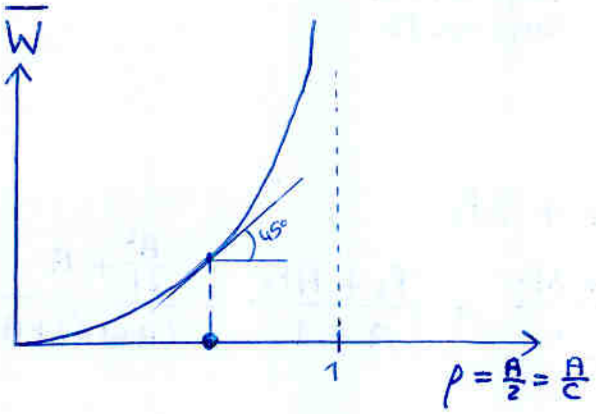
$$\boxed{\frac{d}{d(A/c)}\left[1 + \frac{A}{c} + \left(\frac{A}{c}\right)^2 + \dots\right] = \frac{d}{d(A/c)}\left[\frac{1}{1-A/c}\right] = \frac{1}{(1-A/c)^2}}$$

$$= \frac{A^2}{2}\,\frac{A}{2}\,\frac{2-A}{2+A}\,\frac{4}{(2-A)^2} = \frac{A^3}{(2+A)(2-A)}$$

entonces

$$\overline{W} = \frac{\overline{N_a}}{\lambda} = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{A^2}{(2+A)(2-A)} = \frac{1}{\mu} \frac{A^2}{(2+A)(2-A)}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{\mu} \frac{(A/2)^2}{(1+\frac{A}{2})(1-\frac{A}{2})}$$



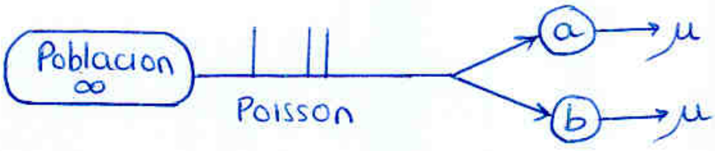
Podemos tomar un criterio para $\overline{W}$ y ρ

- si tomamos ρ bajo
  → se desaprovecha
- si tomamos ρ alto
  → pequeña variación puede ser desastroso

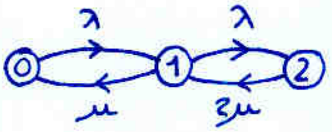
Posible criterio: asíntota 45°

Ejercicio teórico 2

Sistema M/M/2/2
con preferencia de un servidor respecto al otro



Recordemos: sin preferencia



$$P_k = \frac{\frac{A^k}{k!}}{1 + A + \frac{A^2}{2}}$$

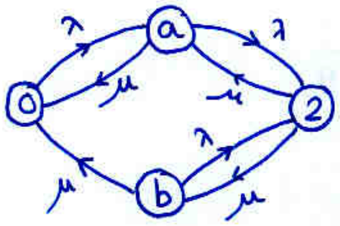
es Erlang-B

$$P(\infty) = P = \left[\frac{1}{1+A+\frac{A^2}{2}} , \frac{A}{1+A+\frac{A^2}{2}} , \frac{A^2/2}{1+A+A^2/2} \right]$$

$$= \left[P_0 \quad , \quad P_1 \quad , \quad \underset{PB}{\overset{}{P_2}} \right]$$

$P_2 = PB$

con preferencia



$\Rightarrow$

P_0 y P_2 igual que Erlang-B

$P_a + P_b = P_1$

se procede igual que en el ejercicio anterior.

flujo en P_a
flujo en P_b

$TC_a = P_a + P_2$

$TC_b = P_b + P_2$

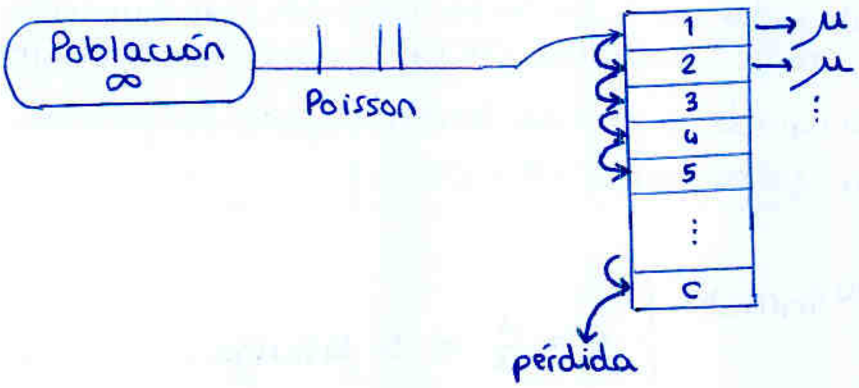
Flujo en P_a: $(\lambda+\mu)P_a = \mu P_2 + \lambda P_0$

$$P_a = \frac{\mu P_2 + \lambda P_0}{\lambda+\mu} = \frac{P_2 + A P_0}{A+1} = \frac{\frac{A^2}{2!}+A}{(A+1)(1+A+\frac{A^2}{2})}$$

Flujo en P_b: $(\lambda+\mu)P_b = \mu P_2$

$$P_b = \frac{\mu P_2}{\lambda+\mu} = \frac{P_2}{A+1} = \frac{\frac{A^2}{2!}}{(A+1)(1+A+\frac{A^2}{2})}$$

Sobre la búsqueda de servidores en forma secuencial (caso general)(sistema de pérdidas)



Preguntemonos por el trafico cursado por cada servidor

Trafico ofrecido $TO_1 = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = A$ ← tráfico ofrecido: nº clientes q intentan entrar multiplicado por tiempo q. consumirian TO [Erlangs] tb es igual al % de tiempo q estaría el servidor ocupado

Tráfico Perdido $TP_1 = TO_1 \cdot \underbrace{Er_1(1, A)}_{\text{prob. bloqueo}} = A \cdot \frac{A}{1+A}$

Tráfico cursado: $TC_1 = TO_1 - TP_1 = A[1 - Er_1(1,A)] = \frac{A}{1+A}$

Para el colectivo de servidores 1… C-1

$TO_{1+2+3+\ldots+C-1} = A$ ← lo que se ofrece a todo el bloque

$TP_{1+2+3+\ldots+C-1} = A \cdot \underbrace{Er_1(C-1, A)}_{\text{prob bloqueo}}$

i.e. los C-1 estén al completo

Para el colectivo de todos

$TP_{1+2+\ldots+C} = A \cdot Er_1(C, A)$

Por tanto, el tráfico cursado será la diferencia:

$$\boxed{TC_C = A\left(Er_1(C-1, A) - Er_1(C, A)\right)}$$

caso general de trafico cursado por el servidor C-ésimo.

El efecto de la ganancia estadística

Ejercicio:

- Se estima 100 llamadas durante la hora cargada con duración media de 3 minutos, en la centralita de una agencia de viajes
- Se recibe señal de ocupado si no hay linea alguna disponible

a) · ¿cuantas lineas hacen falta para PB = 0'001 ?

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{100}{60} \text{ llamadas/minuto} \\ \frac{1}{\mu} = 3 \text{ minutos} \end{array}\right\} A = \frac{\lambda}{\mu} = 5 \text{ Erlangs}$$

$$PB = Er_1(C, A) = Er_1(C, 5) = 0'001$$

en tablas, iterativamente obtenemos C

$$\boxed{C = 14}$$

b) Suponga que las fuentes de tráfico estén divididas en 5 partes iguales ¿sería bueno dedicar servidores a cada grupo?

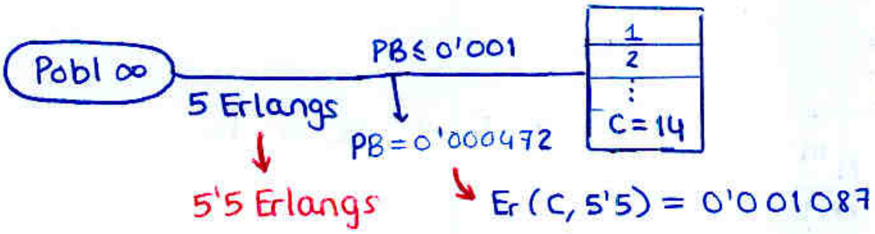
i.e. 1 Erlang

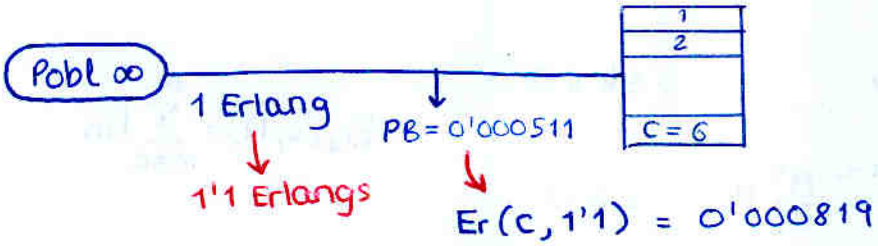
$$Er_1(C', 1) = 0'001 \Rightarrow \boxed{C' = 6}$$

En total necesitariamos 30 servidores, lo cual es peor

⇒ Multiplexación estadística:
se optimiza el uso si agrupamos recursos

Supongamos un incremento en el tráfico del 10%





El incremento relativo:

$$\left.\begin{array}{l} Er_1(C, A_i) = Er_1(14, 5'5) = 0'001087 \\ Er_1(C, A) = Er_1(14, 5) = 0'000472 \end{array}\right\} \frac{Er(C,A_i) - Er(C,A)}{Er(C,A)} = 1'3029$$

+ 130%

$$\left.\begin{array}{l} Er_1(C, A_i) = Er_1(6, 1'1) = 0'000819 \\ Er_1(C, A) = Er_1(6, 1) = 0'000511 \end{array}\right\} \frac{Er(C,A_i) - Er(C,A)}{Er(C,A)} = 0'6027$$

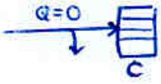
+ 60%

⇒ si agrupamos recursos: pequeñas variaciones de tráfico tienen efecto mucho mayor

Comparativa entre Erlang-B, Erlang-C y Poisson

Erlang-B

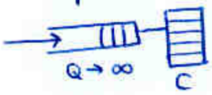
pérdida



$$P_k = \frac{\frac{A^k}{k!}}{\sum_{m=0}^{c} \frac{A^m}{m!}} \Rightarrow Er_1(c,A) = P_c$$

Erlang-C

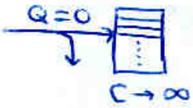
espera



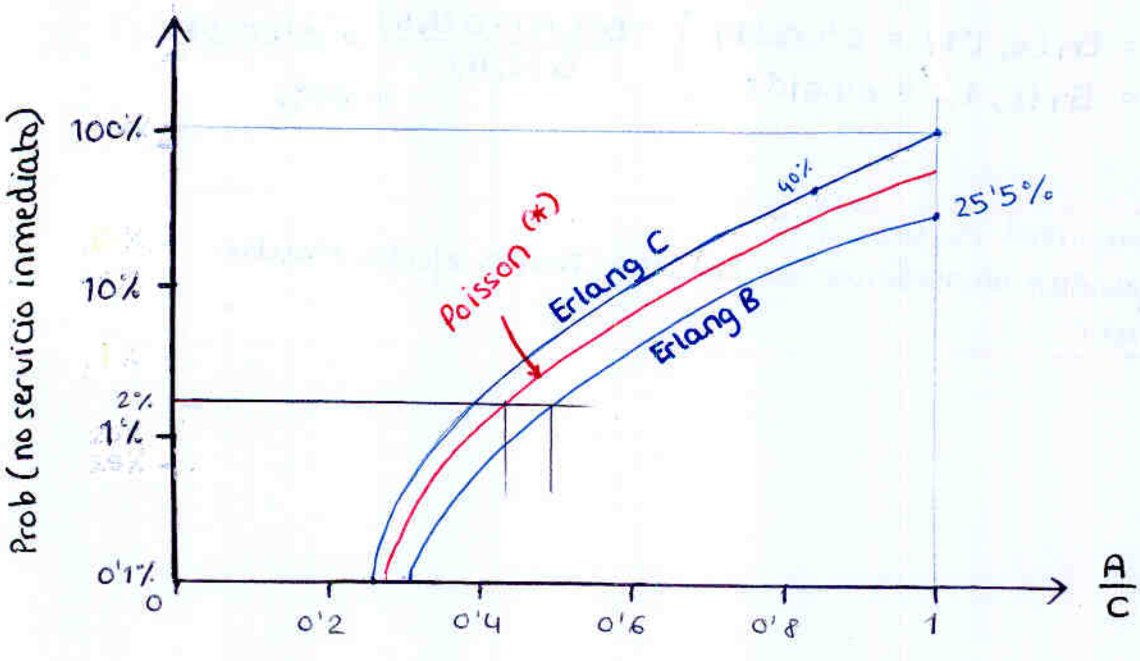
$$P_k = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} P_0 & 0 \leq k \leq c \\ \left(\frac{A}{c}\right)^{k-c} \frac{A^c}{c!} P_0 & k \geq c \end{cases} \Rightarrow Er_2(c,A) = \sum_{m=c}^{\infty} P_m$$

$k - c = q$ = usuarios en cola

Poisson



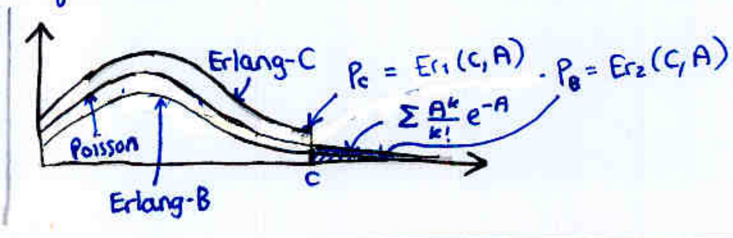
$$P_k = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$$



(*) Con Poisson, aunque C→∞, en realidad no lo son; supondré que tengo C servidores

Defino la congestión en Poisson con $\sum_{k=C}^{\infty} \frac{A^k}{k!} e^{-A} = 1 - \sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!} e^{-A}$

Los americanos usan Poisson en lugar de Erlang-B, y de esa forma tienen implícito un margen de seguridad



```
function [k,Erb,Erc,Poisson,Exacto]=ErlangPoisson(C,CmasQ,A)

% function [Erb,Erc,Poisson,Exacto]=ErlangPoisson(C,CmasQ,A)
%
% Devuelve P[k]=vector de estados
% en regimen permanente=probabilidad de cada estado.
% Para un sistema de servidores y colas:
%   M/M/C/CmasQ
% Con una A = lambda/mu dada
% En los casos
%   Erlang-B [i.e. Pérdida pura, Q=0, no hay cola]
%            Obviamente P_Erb[k>C]=0
%            Erb[k] representa la probabilidad de
%               que k servidores estén ocupados
%   Erlang-C [i.e. Espera pura Q->inf]
%            Para Erlang-C suponemos P0 finito
%            (es decir, A/C < 1 -> (A/C)^(Q+1) = 0)
%            Por tanto, cabe esperar resultados absurdos
%            si haces un A>C.
%   Poisson [i.e. Infinitos servidores C->inf]
%            Obviamente MATLAB no devuelve vector
%            infinito, asi que vemos la grafica
%            para unos pocos k, y la suma de Pk no será 1
%            sino que será un poco menor en los casos
%            de Erlang-C y Poisson.
%   Exacto : el caso exacto con C servidores y
%            Q huecos en la cola


Q = CmasQ - C;

k = 0:C+Q; %(Estados totales P0,P1,...,P(C+Q-1),P(C+Q))
kC = 0:C; %(Estados con cola vacia P0,P1,...,PC-1,PC)
kQ = [C+1:C+Q]; %(Estados con servidores ocupados)

P0_Erb = 1./(sum((A.^kC)./(factorial(kC))))

P0_Erc = 1./((sum((A.^(0:(C-1)))./(factorial(0:(C-1)))))+(((A^C)/(factorial(C))).*(1./(1-(A/C)))));

P0_Exacto = 1./((sum((A.^(0:(C-1)))./(factorial(0:(C-1)))))+(((A^C)/(factorial(C))).*((1-(A/C)^(Q+1))./(1-(A/C)))));

Erb = [P0_Erb.*((A.^kC)./(factorial(kC))),zeros(1,Q)];

Erc = [P0_Erc.*((A.^kC)./(factorial(kC))),P0_Erc.*((A.^C)./(factorial(C))).*(A/C).^(kQ-C)];

Poisson = ((A.^k)./(factorial(k))).*exp(-A);

Exacto = [P0_Exacto.*((A.^kC)./(factorial(kC))),P0_Exacto.*((A.^C)./(factorial(C))).*(A/C).^(kQ-C)];

plot(k,Erb,'.-r',k,Erc,'.-g',k,Poisson,'.-b',k,Exacto,'.-y')
title('Vector de estados')
xlabel('k : numero de estado');
ylabel('P[k] : probabilidad de estado k-ésimo');
text(C,max(Erb),'(Erlang-B:Rojo)(Erlang-C:Verde)(Poisson:Azul)(Exacto:Amarillo)')

 PB_Erb = Erb(C+1) %Cuidado P[C] es el indice C+1 en MATLAB
 P_noservicio_Erc = 1-sum(Erc(1:C+1))
 disp('En teoria en Poisson C->Inf y no hay probabilidad de congestion, pero en la práctica C no será infinito y
 y definimos una probabilidad de congestion como el sumatorio de P[k] con k>C')
 P_congestion_Poisson = 1-sum(Poisson(1:C+1))
 P noservicio Exacto = 1-sum(Exacto(1:C+1))
```

Exacto (caso general)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^C}{C!}\left(\frac{1-(A/C)^{Q+1}}{1-(A/C)}\right)}$$

$$P[k] = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} P_0 & k \leq C \\ \left(\frac{A}{C}\right)^{k-C} \frac{A^C}{C!} P_0 & C < k \leq C+Q \end{cases}$$

Erlang-B (Q=0)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{C} \frac{A^k}{k!}}$$

$$P[k] = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} \cdot P_0 & \text{si } k \leq C \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Erlang-C (Q→∞)

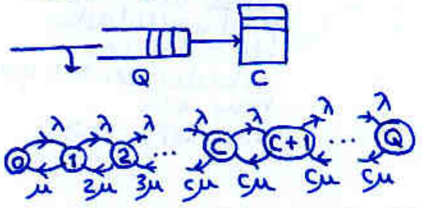
$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^C}{C!}\left(\frac{1}{1-(A/C)}\right)}$$

$$P[k] = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} P_0 & \text{si } k \leq C \\ \left(\frac{A}{C}\right)^{k-C} \frac{A^C}{C!} P_0 & \text{si } k > C \text{ (hasta } \infty) \end{cases}$$

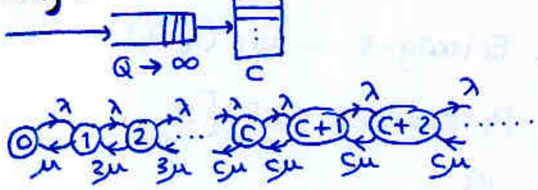
Poisson (C→∞)

$$P[k] = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$$

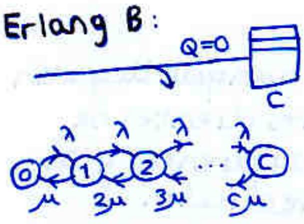
Exacto (general)



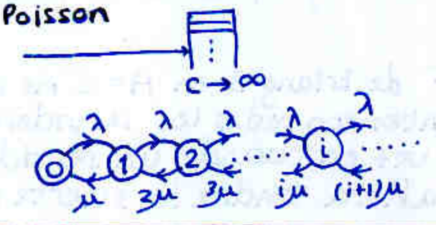
Erlang C



Erlang B:



Poisson

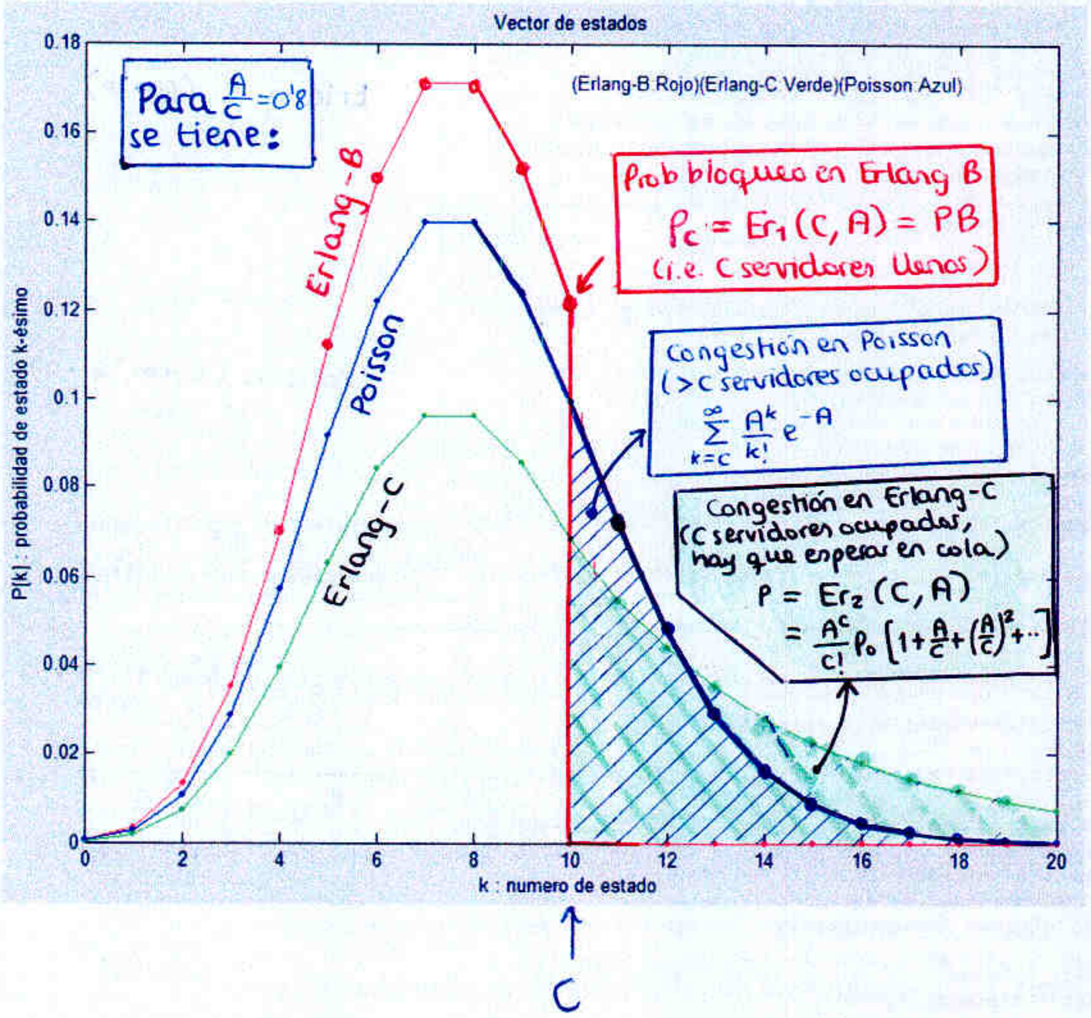


```
>> [k,Erb,Erc,Poisson]=ErlangPoisson(10,20,8);

PB_Erb =
    0.1217

P_noservicio_Erc =
    0.3273
```

C = 10
Q = 10
A = 8

En teoria en Poisson C->Inf y no hay probabilidad de congestion, pero en la práctica C no será infinito y definimos una probabilidad de congestion como el sumatorio de P[k] con k = C+1, C+2, ...

```
P_congestion_Poisson =
    0.1841
```



Para $\frac{A}{C} = 0'8$ se tiene:

Prob bloqueo en Erlang B
$P_C = Er_1(C, A) = PB$
(i.e. C servidores llenos)

Congestión en Poisson
(> C servidores ocupados)
$\sum_{k=C}^{\infty} \frac{A^k}{k!} e^{-A}$

Congestión en Erlang-C
(C servidores ocupados, hay que esperar en cola)
$P = Er_2(C, A)$
$= \frac{A^C}{C!} P_0 \left[1 + \frac{A}{C} + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \cdots\right]$

Nota: cuando represento el area, en realidad hay que hacer el sumatorio ya que P[k] es discreto

Si representamos la probabilidad de no servicio inmediato:

Para Erlang-B = $Er_1(C, A) = \frac{A^C}{C!} \cdot P_0$ ← prob estado c-ésimo

Para Erlang-C = $Er_2(C, A) = \frac{A^C}{C!} P_0 \left[1 + \frac{A}{C} + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \cdots\right]$

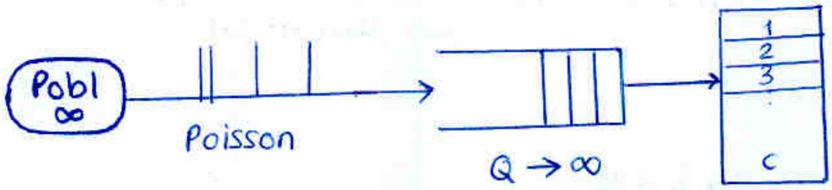
Para Poisson = $e^{-A} \cdot \sum_{k=C}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

sumar las probabilidades de todos los estados en los que hay cola
i.e. $\Sigma P_k \quad k > C$

frente a $\frac{A}{C}$
entonces se obtiene la gráfica de la página anterior

Nota/curiosidad: PB de Erlang B en A=C no es 100% ya que, aunque llegarán la mayoría de clientes con todos los servidores ocupados, estos clientes se irán perdiendo. De vez en cuando un servidor acabará con su cliente, y el cliente que venga ahora tendrá la suerte de servicio inmediato.

Ejercicio teórico (Erlang-B vs. Erlang-C)

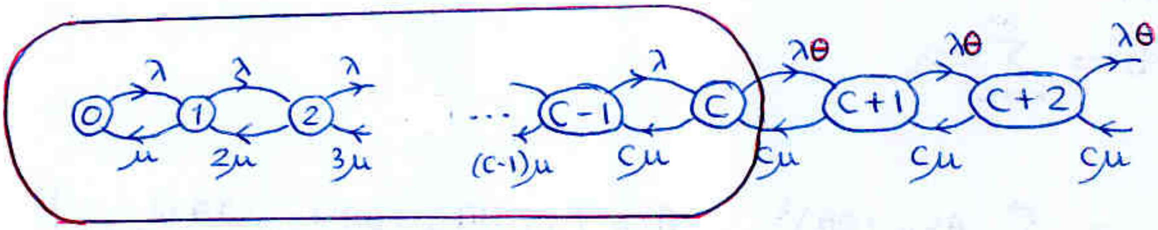


si servidores están llenos me meto en la cola con prob. θ o me voy con $1-\theta$

Es un caso general

Caso general

casos particulares : $\begin{cases} \theta = 0 \rightarrow \text{Erlang B} \\ \theta = 1 \rightarrow \text{Erlang C} \end{cases}$



se tiene que $PB = \sum_{k=c}^{\infty} P_k$

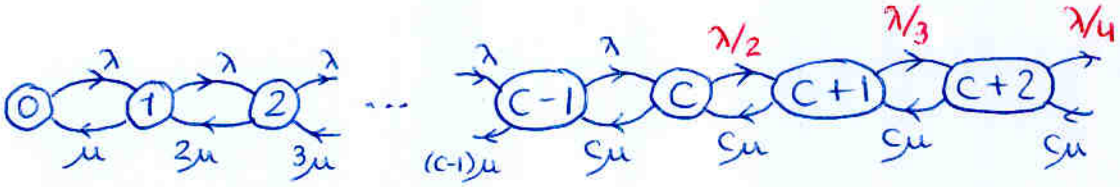
se puede escribir:

$$\boxed{\frac{1}{PB} = \frac{1-\theta}{Er_1(C,A)} + \frac{\theta}{Er_2(C,A)}}$$

Demostrarlo como ejercicio → ver detrás

- Otro ejemplo de desincentivación de llegadas

M/M/C con llegadas desincentivadas



igualando $\text{flujo}_{\text{entrada}} = \text{flujo}_{\text{salida}}$

o bien pensando la fórmula general $P_k = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1} P_0$

se obtiene :

$$P_k = \begin{cases} \frac{A^k}{k!} P_0 & 0 \leq k \leq C \\ \frac{A^C}{C!} P_0 \cdot \left(\frac{\theta A}{C}\right)^{k-C} & k > C \end{cases}$$

entonces :

$$PB = \sum_{\underset{\nwarrow \text{incluir } k=C}{k=C}}^{\infty} P_k$$

$$= \sum_{k=C}^{\infty} \frac{A^C}{C!} P_0 \left(\frac{\theta A}{C}\right)^k = \frac{A^C}{C!} P_0 \left[1 + \frac{\theta A}{C} + \left(\frac{\theta A}{C}\right)^2 + \left(\frac{\theta A}{C}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$\boxed{PB = \frac{A^C}{C!} P_0 \frac{1}{1 - \left(\theta \frac{A}{C}\right)}} = \begin{cases} Er_1(C,A) \text{ si } \theta = 0 \\ Er_2(C,A) \text{ si } \theta = 1 \end{cases}$$

Entonces se puede demostrar:

$$\frac{1}{PB} = \frac{1-\theta}{Er_1(C,A)} + \frac{\theta}{Er_2(C,A)}$$

$$= \frac{1-\theta}{\frac{A^C}{C!}P_0} + \frac{\theta}{\frac{A^C}{C!}P_0\left(\frac{1}{1-\frac{A}{C}}\right)} = \frac{(1-\theta)\left(\frac{1}{1-A/C}\right) + \theta}{\frac{A^C}{C!}P_0\left(\frac{1}{1-A/C}\right)}$$

$$= \frac{(1-\theta) + \theta\left(1 - A/C\right)}{\frac{A^C}{C!}P_0} = \frac{1 - A\theta/C}{\frac{A^C}{C!}P_0}$$

$$= \frac{1}{\frac{A^C}{C!}P_0 \frac{1}{1-\frac{\theta A}{C}}} \quad ///$$

CONMUTACIÓN

ENERO 2006

Rellene sus datos personales en la hoja resumen.

- El número del DNI deberá estas justificado a la derecha
- Nunca escriba fuera del los casilleros. No doble la hoja resumen.

Realización del examen

- No arranque ninguna hoja del cuadernillo de hojas de examen.
- Responda a las preguntas sobre el cuadernillo del examen.
- Sólo cuando haya terminado y esté seguro, pase las respuestas a la hoja de resumen.
- Las respuestas incorrectas restan (1/3 de su valor).

No está permitido el uso de datos o programas almacenados en la calculadora que tengan alguna relación con los contenidos del examen.

MODELO ⇒ A

Respuestas correctas son: 1c, 2b, 3c, 4c, 5c, 6b, 7c, 8c, 9a, 10a, 11c, 12b, 13d, 14a, 15d, 16d, 17b, 18d

1. Considera el sistema $G/D/1$ discreto, donde la variable aleatoria A representa el número de llegadas en una ranura, N el número de células en el sistema, T el tiempo de permanencia en el sistema expresado en ranuras y ρ es el factor de utilización. Señala la opción FALSA:

a) Conocidos los valores de $E[A]$ y $E[A^2]$ el valor de $E[N]$ está completamente determinado.

b) Si $E[A] > 1$ el sistema es inestable.

c) $P[T < 1] = 1 - e^{-E[A]}$.

d) $\rho = E[A]$.

2. Se tiene una Cadena de Markov Homogénea de tres estado, E_0, E_1 y E_2, cuya matriz de probabilidades de transición vienen dadas por:

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}8 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

Claramente el estado E_2 es un estado absorbente. Si inicialmente la cadena se encuentra en el estado E_1, entonces la probabilidad $P_{1;0,2}$ de terminar en E_2, siendo la última transición la de E_0 a E_2 resulta ser:

a) $P_{1;\,0,2} \leq 0{,}06$.

b) $0{,}06 < P_{1;\,0,2} \leq 0{,}125$.

c) $0{,}125 < P_{1;\,0,2} \leq 0{,}25$.

d) $0{,}25 < P_{1;\,0,2}$.

3. A un cierto estudiante le quedan dos asignaturas para terminar la carrera. En cada convocatoria el alumno se presenta a todas las asignaturas que le quedan. Si se presenta a dos asignaturas la probabilidad de que le suspendan las dos es 0,2, la probabilidad de que apruebe una y le suspendan la otra es 0,6 y la probabilidad de que apruebe las dos 0,2. Si sólo se presenta a una asignatura la probabilidad de que apruebe es 0,8 y de que le suspendan 0,2. Elige la respuesta FALSA:

a) La probabilidad de que después de tres convocatorias todavía no haya terminado la carrera es 0,08.

b) La probabilidad de que después de dos convocatorias sólo le quede una asignatura es 0,24.

c) Suponiendo que se ha aprobado una asignatura, el número medio de convocatorias que necesitaría para aprobar la otra es 5.

d) La probabilidad de no haber aprobado ninguna de las dos después de diez convocatorias es $1{,}024 \cdot 10^{-7}$.

4. Para un sistema $M/M/c/c+B$, cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA:

a) El tráfico cursado aumenta si aumenta el valor de B.

b) $PB = \sum_{n=c}^{c+B} \pi_n$.

c) $\rho = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{c+B} n\pi_n$.

d) $\overline{Q} = \sum_{n=1}^{B} n\pi_{n+c}$.

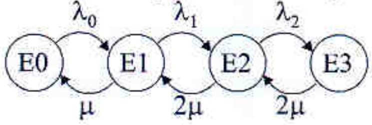
Nota: π_n es la probabilidad en equilibrio del estado n y PB la probabilidad de bloqueo.

V-15

5. A un sistema monoservidor S llegan clientes según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 3$ y demandan un servicio exponencial de tasa $\mu = 4$. El servidor trabaja a la velocidad nominal (μ) cuando hay $m-1$ clientes o menos y al doble de ésta (2μ) cuando hay m o más, en cuyo caso consume el doble de energía eléctrica. Para un sistema M/M/1 convencional al que se le ofrece el mismo tráfico que al sistema S, denotamos por P(0) el porcentaje de tiempo que el sistema esta vacío. Si denotamos por PS(0) al porcentaje de tiempo que el sistema S esta vacío, ¿cuál de ser el valor de m para que se cumpla que PS(0)$\geq$ 1,5 P(0) y se consuma la menor energía posible?:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

6. El proceso de Markov de la figura modela la evolución del número de clientes en un sistema de espera con dos servidores, para el que $\lambda_k = (3-k)\lambda$, $0 \leq k \leq 3$. Si denotamos por PB la probabilidad de bloqueo, por CAO el número medio de clientes ofrecidos al sistema por segundo y por TC el tráfico cursado en Erlangs, cuando $\lambda = 1$ y $\mu = 1$ clientes/s entonces:



a) $PB \leq 0{,}5$

b) $CAO \geq 1{,}4$

c) $TC > 1{,}5$

d) Ninguna de las anteriores es correcta

7. Respecto al sistema monoservidor que modela un puerto de salida de un conmutador de células N×N cuyos puertos de entrada y salida están sincronizados y al que se le ofrece un tráfico de Bernouilli de parámetro $p = 1/2$, indique la respuesta FALSA:

a) Si $N = 5$, el número medio de ranuras consecutivas que el sistema permanece vacío, cada vez que se vacía, es superior a 2,4.

b) Si N=4, $P_{53} = 0$

c) Si N=2, $P_{35} = 6{,}2510^{-2}$

d) El sistema es estable sólo si $p < 1$

8. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA:

a) En un sistema de espera se verifica siempre que la intensidad de tráfico ofrecida es igual al número medio de servidores ocupados.

b) El factor de utilización de los servidores de un sistema M/M/∞ es mayor que el número medio de clientes en el sistema.

c) Para un sistema en equilibrio, el teorema de Little asegura que el número medio de clientes que llegan al sistema durante el tiempo medio residencia de uno de ellos, es igual al número medio de clientes que hay habitualmente en él.

d) Los elementos $q_{ij}(t)$ del generador infinitesimal verifican que $0 \leq q_{ij}(t) \leq 1 \ \forall i, j$

9. En un sistema $M/M/2/3$ con parámetros $\lambda = \mu = 2$ clientes/s, cuando se alcanza el estado E_1, la probabilidad de abandonarlo en un tiempo inferior o igual a 1 s., p, y la probabilidad de transitar a E_0, P_{10}, valen:

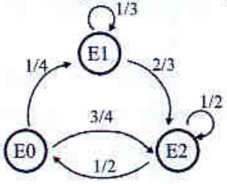
a) $p > 0{,}88$ y $P_{10} > 0{,}45$

b) $p > 0{,}88$ y $P_{10} \leq 0{,}45$

c) $p \leq 0{,}88$ y $P_{10} > 0{,}45$

d) $p \leq 0{,}88$ y $P_{10} \leq 0{,}45$

10. Para la cadena de la figura, el tiempo medio de residencia en E1 expresado en ranuras, m, vale:



a) $1{,}25 < m$

b) $0{,}75 < m \leq 1{,}25$

c) $0{,}2 < m \leq 0{,}75$

d) $0 < m \leq 0{,}2$

11. Se tiene un conmutador $N \times N$ con $N \rightarrow \infty$, con arquitectura por división espacial monoetapa, con memoria infinita en los puerto de entrada, en el que se utiliza la técnica *Virtual Output Queueing* y en el que la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro p. Respecto al caudal cursado por puerto de salida (γ_i), expresado en células por ranura, cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA:

a) Siempre se cumple que $\gamma_i = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$.

b) Siempre se cumple que $\gamma_i = 1$.

c) Siempre se cumple que $\gamma_i = p$.

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

12. Considere un conmutador 512×512 de arquitectura por división espacial sin memoria en el que la matriz espacial utiliza una red Batcher-Banyan. Si la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}2$, la probabilidad de pérdidas (P_L) que se observa cumple que:

a) $0 \leq P_L \leq 0{,}05$

b) $0{,}05 < P_L \leq 0{,}1$

c) $0{,}1 < P_L \leq 0{,}2$

d) $0{,}2 < P_L \leq 1$

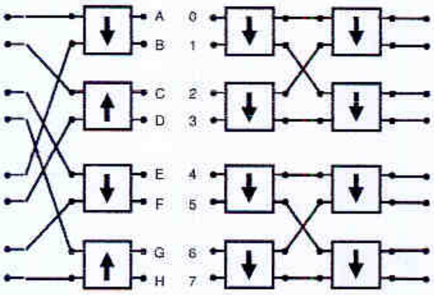
13. La red de la figura es capaz de obtener una secuencia ordenada a partir de una secuencia bitónica. ¿Qué conexiones entre la primera y la segunda etapa son correctas?

a) A-0,B-1,C-2,D-3

b) A-0,B-2,C-3,D-1

c) E-4,F-6,G-7,H-5

d) A-0,D-2,E-1,H-3



14. A una red Batcher-Banyan 32×32 en la que la red Batcher ordena las etiquetas de forma creciente de arriba hacia abajo, llega la siguiente secuencia $(31, 30, \ldots, 2, 1, 0)$. ¿Cuántas matrices de la red Banyan estarán en estado *bar*?

a) 80

b) 40

c) 0

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

15. A un conmutador de células $N \times N$, siendo $N = 128$, se le ofrece un tráfico de Bernouilli de parámetro $p = 0{,}5$. Respecto al caudal (CA) cursado por puerto de salida, expresado en células/ranura, indique la respuesta FALSA: (RI es la red de interconexión)

a) Si la RI se implementa como una matriz espacial monoetapa con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}50$.

b) Si la RI se implementa como una red de 3 etapas ($n < k < 2n$) que implementa reorganización y con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.

c) Si la RI se implementa como una red de 3 etapas ($k = 2n$) y con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.

d) Si la RI se implementa como una red de Benes sin memoria y que no implementa reorganización, entonces $0{,}45 < CA \leq 0{,}5$.

16. En un conmutador $M \times N$ de arquitectura por división espacial monoetapa sin memoria, en el que la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro p, a_k representa la probabilidad de que en una ranura lleguen k células a un determinado puerto de salida, entonces se cumple que:

a) $a_k = \binom{M}{k} (p/M)^k (1 - p/M)^{M-k}$

b) $a_k = \binom{N}{k} (p/N)^k (1 - p/N)^{N-k}$

c) $a_k = \binom{N}{k} (p/N)^k (1 - p/M)^{M-k}$

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

17. Para un conmutador monoetapa 4×4 crossbar sin memoria al que se le ofrece un tráfico de Bernouilli con $p = 0{,}5$, la probabilidad de que por un puerto de salida salgan exáctamente 2 células en 10 ranuras consecutivas, q, vale (utilizando tres decimales con redondeo):

a) 0,012 **b)** 0,107 **c)** 0,267 **d)** 0,339

18. Respecto a las siguientes afirmaciones sobre redes de interconexión multietapa de células $N \times N$, N$= 2^m$, indique la respuesta FALSA:

a) Si N=128, el número de etapas de una red de Benes es 13.

b) Si N=64, el número de puntos de cruce de una red de Benes es 22×64.

c) Si N=128, el número de etapas de una red Batcher es 28.

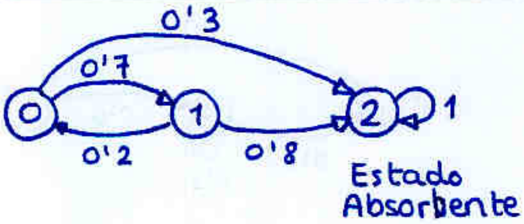
d) Si N=64, de puntos de cruce de una red Banyan es 11×64.

V-16

Problemas Examen Enero 2006

2

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0'7 & 0'3 \\ 0'2 & 0 & 0'8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$



Inicialmente en el estado 1

Calcular:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{empezando} \\ \text{en } 1}}{P_1}\ ;\ \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{acabando con} \\ \text{la tranvición } 0\to 2}}{0,2}$$

Formas de que ocurra:

①→⓪→② $\quad 0'2 \cdot 0'3$

①→⓪→①→⓪→② $\quad 0'2 \cdot 0'3 \cdot (0'7 \cdot 0'2)$

$\vdots \quad 0'2 \cdot 0'3 \cdot (0'7 \cdot 0'2)^2$

$\vdots$

$0'2 \cdot 0'3 \cdot (0'7 \cdot 0'2)^i$

Por tanto

$$P_{1;0,2} = \sum_{i=0}^{\infty} 0'2 \cdot 0'3 \cdot (0'2 \cdot 0'7)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 0'06 \cdot (0'14)^i$$

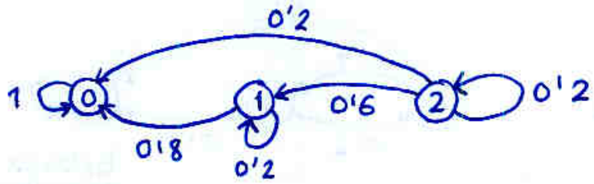
$$= 0'06 \cdot \frac{1}{1-0'14} = 0'069$$

Se puede hacer de otra forma más rápida

$$P_{1;0-2} = 0'2 \cdot 0'3 + 0'2 \cdot 0'7 \cdot P_{1;0-2}$$

$$P_{1;0-2} = \frac{0'2 \cdot 0'3}{1 - 0'2 \cdot 0'7}$$

3. $N \equiv$ nº de asignaturas que le quedan



$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0'8 & 0'2 & 0 \\ 0'2 & 0'6 & 0'2 \end{bmatrix}$$

$$P(u) = P(0) \cdot \Pi^u$$

$$\downarrow$$

$$P(0) = [0, 0, 1]$$

El dato que se pide es

$$P_1(3) + P_2(3) = 1 - P_0(3)$$

En lugar de hacer Π^u, lo simplificamos haciendo

$$P(u) = ((\cdots(P(0) \cdot \Pi) \cdot \Pi) \cdot \Pi) \cdots)$$

$$P(3) = \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(P(0) \cdot \Pi)}_{P(1)} \cdot \Pi)}_{P(2)} \cdot \Pi)}_{P(3)}$$

$$P(1) = [0'2, 0'6, 0'2]$$

$$P(2) = [0'72, 0'24, 0'04]$$

$$P(3) = [0'92, 0'072, 0'008]$$

a) $1 - P_0(3) = 1 - 0'92 = 0'08$

b) $P_1(2) = 0'24$

c) Tiempo medio de residencia en ①

· El tiempo de residencia en un estado de una cadena de Markov sigue una progresión geométrica.

· El tiempo medio es:

$$\overline{T}_1 = \frac{1}{\underset{\uparrow \text{ prob de quedarse}}{1 - 0'2}} = \frac{1}{0'8} = 1'25$$

d) $P_2(10)$

$$P(10) = P_0 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{habrá una} \\ \text{forma más} \\ \text{facil}}}{\Pi^{10}}$$

$$P_2(10) = 0'2^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = \frac{1024}{10^{10}}$$

4. M/M/C/C+B

a) Tráfico cursado → $A_c = \underset{\overset{\Vert}{\frac{\lambda}{\mu}}}{A_0}\,(1-\underset{\overset{\Vert}{P_{C+B}}}{PP})$

$\uparrow$ Tráfico ofrecido

Probabilidad Pérdida $PP = P_{C+B}$

Probabilidad Bloqueo $PB = P_C + \ldots + P_{C+B}$

$$B\uparrow \rightarrow P_{C+B}\downarrow \longrightarrow (1-PP)\uparrow \longrightarrow A_c\uparrow$$

b) $$PB = \sum_{u=C}^{C+B} P_u$$

$$= P_C + P_{C+1} + \ldots + P_{C+B}$$

c) Factor de utilización: fracción de tiempo que un servidor está ocupado

$\rho = \cancel{P_1 + P_2 + \ldots + P_{C+B}}$ ← falso, eso es la prob de que haya ALGUN servidor ocupado

$$\rho = P_1 \cdot \frac{1}{C} + P_2 \cdot \frac{2}{C} + \ldots + P_C \underbrace{\frac{C}{C}}_{1} + P_{C+1} + \ldots + P_{C+B}$$

$$= \sum_{u=1}^{C+B} \frac{\min(u,C)}{C} \cdot P_u$$ hay que ponderar cada estado

Sólo sería cierto que

$$\rho = \sum_{u=1}^{C+B} \frac{u}{C} P_u = \frac{\overline{N}}{C}$$ si la longitud de la cola es cero $B=0$

d) $$\overline{Q} = \underbrace{\sum_{k=C+1}^{C+B} u \cdot P_k}_{} \underset{\overset{\uparrow}{u=k-C}}{=} \sum_{u=1}^{B} u \cdot P_{C+u}$$

la suma de estados donde existe cola, ponderado por la cantidad de gente en cola

5. $\lambda = 3$

$\mu = 4$

M/M/1 modificado

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & u \leq m-1 \\ 2\mu & u \geq m \end{cases}$$

P_{s_0} : fracción de tiempo con el sistema vacío

Además en otro sistema M/M/1 convencional

P_0

Hallar el m que cumpla (con el mayor ahorro posible de energía, i.e. mayor m) que: $P_{s_0} \geq 1'5\, P_0$

recuerda

en M/M/1

$\rho = P_0 \cdot \frac{0}{1} + P_1 \cdot \frac{1}{1} + P_2 \cdot \frac{1}{1} + \dots$

prob de estado ponderado por (nº de servidores ocupados partido total de servidores)

para M/M/1 : $P_0 = 1 - \rho \underset{\uparrow}{=} 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

(cola infinita)

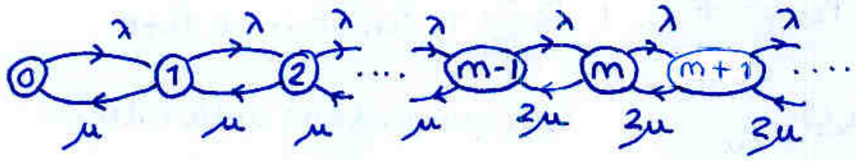
en M/M/1

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ En otros casos NO

nota: trafico ofrecido $A = \frac{\lambda}{\mu}$

Por tanto

queremos hallar: $P_{s_0} \geq 1'5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$



Hallemos el vector $P[\infty]$

P_0

$P_1 = A \cdot P_0$

$P_2 = A^2 \cdot P_0$

$\vdots$

$P_{m-1} = A^{m-1} P_0$

$P_m = A^{m-1} \frac{A}{2} P_0$

$P_{m+1} = A^{m-1} \left(\frac{A}{2}\right)^2 P_0$

$\vdots$

$P_u = A^{m-1} \left(\frac{A}{2}\right)^{u-(m-1)} \cdot P_0$

Sabiendo que la suma es 1, se puede despejar P_0

$$1 = P_0\left[1+A+A^2+\dots+A^{m-2}+A^{m-1}\left(1+\frac{A}{2}+\left(\frac{A}{2}\right)^2+\dots\right)\right]$$

$$= P_0\left[\frac{1-A^{m-1}}{1-A}+A^{m-1}\frac{1}{1-A/2}\right]$$

$$= P_0\left[\frac{1-A^{m-1}}{1-A}+\frac{2A^{m-1}}{2-A}\right]$$

$$= P_0\left[\frac{2-A-2A^{m-1}+A^m+2A^{m-1}-2A^m}{(1-A)(2-A)}\right] = \left(\frac{2-A-A^m}{(1-A)(2-A)}\right)P_0$$

$$= P_0\left(\frac{5/4-(3/4)^m}{1/4\cdot 5/4}\right) = P_0\,\frac{20-16(3/4)^m}{5}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \frac{5}{20-16(3/4)^m} \geq \frac{3}{8}$$

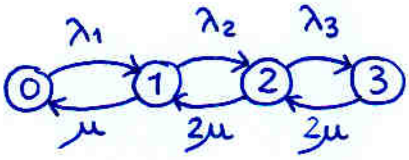
$$40 \geq 60 - 48(3/4)^m$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^m \geq \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

$$m\,\underbrace{\log 3/4}_{<0\ !!!} \geq \log 5/12$$

$$m \leq \frac{\log 5/12}{\log 3/4} \simeq 3'043$$

6.



$-/M/2/3$

$\lambda=\mu=1$

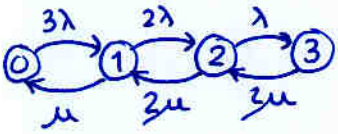
El proceso de llegada no es de Poisson puro

$\lambda_k = (3-k)\lambda$

Se pide: PB, CAO, TC

nota: usamos notacion $A=\frac{\lambda}{\mu}$ aunque ahora ni siquiera representa el tráfico ofrecido.

$$\left.\begin{aligned} &P_0 \\ &P_1 = 3P_0 \\ &P_2 = 3P_0 \\ &P_3 = \tfrac{3}{2}P_0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &1 = P_0\left(1+3+3+\tfrac{3}{2}\right) \\ &1 = P_0\,\tfrac{17}{2} \\ &P_0 = \tfrac{2}{17} \end{aligned}$$



$$P = \begin{array}{cccc} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ \left[\frac{2}{17}, \right. & \frac{6}{17}, & \frac{6}{17}, & \left.\frac{3}{17}\right] \end{array}$$

a) $PB = P_2 + P_3 = 9/17$

b) CAO : media de clientes que se ofrecen por unidad de tiempo

en este caso cambia según el estado

$$CAO = 3\lambda P_0 + 2\lambda P_1 + \lambda P_2 + \underset{\uparrow}{0} P_3$$

$$= \frac{24}{17}$$

Cuidado

En los sistemas M/M, los clientes que se ofrecen cuando estamos en último estado no es cero (por eso hay probabilidad de pérdidas)

En este ejemplo extraño la prob. pérdida es cero, ya que $\lambda_3 = 0$

normalmente (clientes llegan sin importarles el estado)

$CAO = \lambda P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda P_n$

$= \lambda$

lógico; $\frac{1}{\lambda}$: tiempo medio entre llegadas

λ : llegadas por unidad de tiempo

c) TC : tráfico cursado

$$TC = \underset{\uparrow}{\lambda_c} \cdot \frac{1}{\mu} = CAO \cdot \frac{1}{\mu}$$

tasa cursada

En este caso no hay pérdidas

$\lambda_c = CAO$

Otra forma es calcular la media de servidores ocupados

$$\boxed{TC = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 2 \cdot P_3 = \overline{N_s}}$$

$$= \gamma \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right) = \left[\cancel{\mu} P_1 + 2\cancel{\mu} P_2 + 2\cancel{\mu} P_3\right] \frac{1}{\cancel{\mu}}$$

8 a) ¿En un sistema de espera se cumple siempre $A_0 = \overline{N_s}$?

se cumple que : Tráfico cursado $A_c = \overline{N_s}$

y ademas

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tráfico} \\ \text{cursado}}}{A_c} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tráfico} \\ \text{ofrecido}}}{A_0}(1 - PP)$$

Por tanto si $PP \neq 0 \rightarrow A_0 \neq \overline{N_s}$

¿Y si es un sistema de espera puro (cola infinita)?

$A_c = \overline{N_s}$

pero $A_c = A_0$ sólo si el sistema es estable

b) ¿En M/M/∞ se cumple $\rho \geq \overline{N}$?

en M/M/C se tiene $\rho = \frac{\overline{N_s}}{C}$ ← usuarios en servidores

en M/M/C/C $\Rightarrow N_s = N \Rightarrow \rho = \frac{\overline{N}}{C}$ ← usuarios totales en sistema

$\rho \leq \overline{N}$

en M/M/∞ $\Rightarrow \rho = 0$

c) sistema en equilibrio. Teorema de Little

$$\underbrace{\overline{N}}_{\substack{\text{nº de clientes} \\ \text{medio en el} \\ \text{sistema}}} = \underbrace{\lambda \cdot \overline{T}}_{\substack{\text{nº medio de clientes que} \\ \text{llegan al sistema durante} \\ \text{el tiempo medio de} \\ \text{residencia de uno de ellos}}}$$

d) ¿Es cierto: $0 \leq q_{ij}(t) \leq 1$?

Los q_{ij} no son probabilidades (a diferencia de los elementos de Π)

Ademas q_{ij} $i \neq j$ ≤ 0

y q_{ii} ≥ 0 (y puede ser mayor que uno)

9. M / M / 2 / 3

$\lambda = \mu = 2$ clientes/s

Calcular P (prob de salir de ① en menos de 1s)

P_{10} (prob de que al salir de ① vaya a ⓪)

$$P_{10} = \frac{\text{tasa } 1 \to 0}{\text{tasa total de salida de } 1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1}{2}$$

P : tiempo de residencia en un estado de Markov sigue una distribución exponencial

$$\boxed{f_{T_1}(t) = k \cdot e^{-kt} \quad \text{con } k = \text{tasa total de salida del estado}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{tiempo medio de residencia} \quad \overline{T}_{T_1} = \frac{1}{k}}$$

en este caso:

$$f_{T_1}(t) = (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} = \int_0^t f_{T_1}(\tau)\, d\tau$$

$$p = P(T_1 \leq t) = F_{T_1}(t)$$

para $t = 1$ $\quad P(T_1 \leq 1) = F_{T_1}(1) = 1 - e^{-4 \cdot 1} = 0'982$

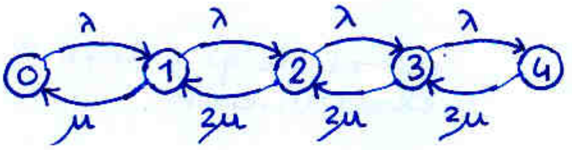
Problemas Julio 2006

2. M / M / 2 / 4

$\lambda = \mu = 2$

Hallar P_2^s (prob que que un cliente salga del sistema cuando el sistema está en ②)

Hallar P_1^t (prob de que el sistema cambie de estado en 0'5 segundos o antes desde que un observador ve el sistema en el estado ②)



· Puesto que la distribución exponencial tiene memoria nula, el tiempo de residencia que le queda al mirar el observador es el mismo que le quedaba desde el principio

$$P_1^t = P(T_2^R \le 0'5) = P(T_2 \le 0'5) = 1 - e^{-\underbrace{(\lambda + 2\mu)}_{\text{tasa total de salida del estado}} 0'5}$$

· Para P_2^s

→ ¿cual es la prob de que un observador mire y vea el sistema en el estado ② ? P_2

Propiedad PASTA: Ambas son iguales si llegada Poisson

→ ¿cual es la prob de que un cliente que llega vea el sistema en el estado ② ?

(en general si la llegada no es de Poisson no es igual, imagina que los clientes llegan siempre 3 seguidos)

→ ¿cual es la prob de que un cliente salga del sistema cuando el sistema está en ② ?

$$P_2^s = \frac{\text{clientes que abandonan estado 2 en tiempo T}}{\text{clientes totales que abandonan el sistema en tiempo T}} = \frac{P_2 \cdot 2\mu \cdot T}{\mu P_1 T + 2\mu P_2 T + 2\mu P_3 T + 2\mu P_4 T}$$

$$= \frac{2P_2}{P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4} = \frac{4}{11}$$

4. Sistema M / D / 1 con $T = 2s$

$\lambda = 0'5$ clientes/s

Calcular la prob P de que lleguen 2 clientes o más durante el tiempo de servicio de un cliente.

M / D / 1

↳ ↳ tiempo de servicio determinista (por eso dicen que el tiempo de servicio es 2 segundos, y no dan el tiempo medio)

llegadas de poisson

|||

tiempo entre llegadas exponencial

$$P(N(t) = u) = \frac{(\lambda t)^u}{u!} e^{-\lambda t}$$

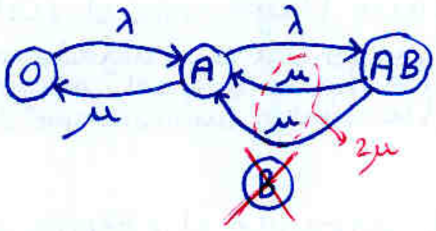
$$P(N(2) = 2) = \frac{1^2}{2!} e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{e^{-1}}{2}$$ ← la prob de que lleguen exactamente 2

$$P(N(2) \geq 2) = 1 - P(N(2) < 2)$$
$$= 1 - [P(N(2) = 0) + P(N(2) = 1)]$$
$$= 1 - \left[\frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1}\right] = 1 - 2e^{-1} = 0'264$$

9. Sistema M / M / 2 / 2

Dos servidores a y b

- clientes prefieren el servidor a si estan ambos libres
- clientes entran al b si está a ocupado
- Los clientes en b se cambian a a para terminar su servicio si a queda libre



$$A_0 = \frac{\lambda}{\mu} = 1$$

$\rho_A \geq \rho_B$

$$\begin{cases} \rho_A = P_A + P_{AB} \\ \rho_B = P_{AB} \end{cases}$$

se calcula

$P_0 = \frac{2}{5}$

$P_A = \frac{2}{5}$

$P_B = \frac{1}{5}$

Tema 7. Modelos de colas para conmutadores de células

Introducción

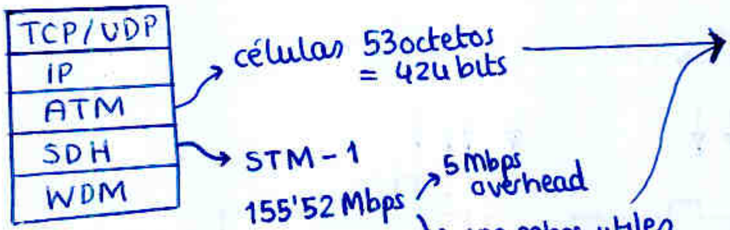
Queremos un modelo analítico para un conmutador de celdas (paquetes de longitud constante). En telecomunicación predominan los sistemas síncronos (suponemos los enlaces ranurados.

ejemplos:

redes de acceso: GSM (Redes Publicas I)

redes de transporte:

ej:



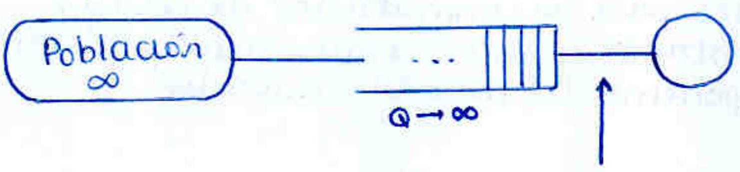
Tiempo de célula $\frac{424 \text{bits}}{150 \cdot 10^6 \text{b/s}} = \boxed{2'8 \mu s}$

estos son los tiempos con los que trabajamos

Modelo G/D/1

$$\underset{\substack{\text{llegadas}\\ \text{sin memoria}\\ \text{entre slots}}}{\overset{\text{General}}{G}} \;/\; \underset{\text{servicio}}{\overset{\text{Determinista}}{D}} \;/\; \underset{\text{servidor}}{1}$$

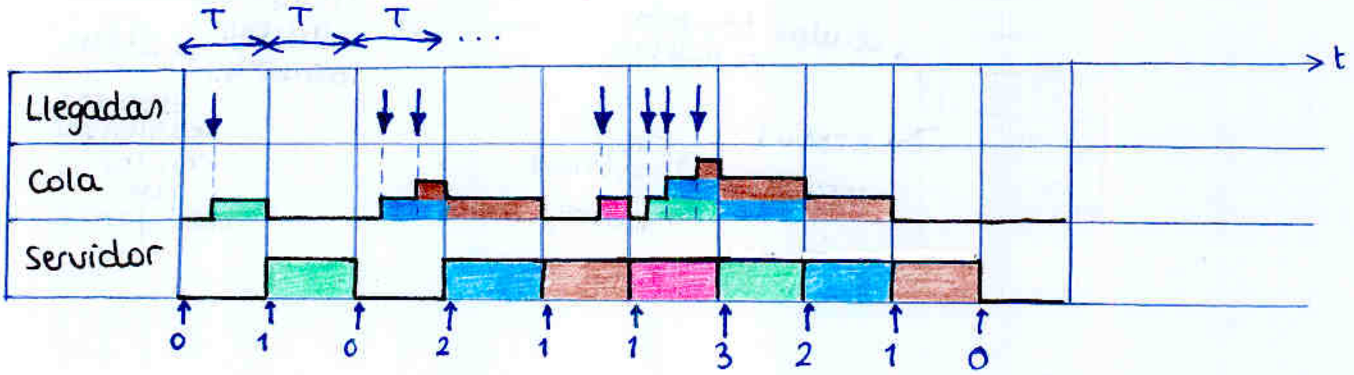
buffer de capacidad infinita



Servidor determinista:
- Siempre tarda lo mismo (T)
- Siempre saca la célula en el fin de slot

En cada final de slot, sale una o cero células.

aunque llegue una célula a mitad slot y el servidor esté libre sólo se entra al servidor al inicio del siguiente slot



Podemos verlo como una cadena de Markov:

- Puntos de observación:
  ponemos el criterio de observar un instante despues del comienzo del slot $(nT+\varepsilon)$
  (es simplemente un criterio, podriamos coger cualquier otro)

- Estados
  En el instante de observación: $E_k \equiv k$ células en el sistema

$$P = [P_0, P_1, P_2, \ldots]$$

vector de estados estacionario

$\boxed{P_k : \text{prob de encontrar } k \text{ unidades en el sistema}}$

- matriz estocástica de la cadena de Markov Homogénea

usamos $\boxed{\Pi_k : \text{prob de que en un slot lleguen } k \text{ células}}$

$$T = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ \text{en que} \\ \text{estamos} \end{array} \begin{array}{c|ccccc|} & \multicolumn{5}{c}{\text{Estado al que voy}} \\ & E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & \cdots \\ E_0 & \Pi_0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \cdots \\ E_1 & \Pi_0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \cdots \\ E_2 & 0 & \Pi_0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \cdots \\ E_3 & 0 & 0 & \Pi_0 & \Pi_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}$$

Curiosamente las dos primeras filas son iguales, pero es todo muy lógico si se piensa un poco

Para hallar el vector de estados final (estacionario) hay que solucionar

$$\boxed{P = P \cdot T}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} P_0 = (P_0+P_1)\pi_0 & (0) \times z^0 \\ P_1 = (P_0+P_1)\pi_1 + P_2\pi_0 & (1) \times z^1 \\ P_2 = (P_0+P_1)\pi_2 + P_2\pi_1 + P_3\pi_0 & (2) \times z^2 \\ P_3 = (P_0+P_1)\pi_3 + P_2\pi_2 + P_3\pi_1 + P_4\pi_0 & (3) \times z^3 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad + \end{array}\right.$$

multiplicando la ecuación k-ésima por z^k y sumando y recordando función generatriz

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k$$

$$\pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k \longleftrightarrow$$ Depende del régimen de llegadas

se obtiene:

$$\begin{aligned} P(z) &= (P_0+P_1)\cdot\pi(z) + zP_2\pi(z) + z^2P_3\pi(z) + \dots \\ &= \pi(z)\left[P_0 + P_1 + zP_2 + z^2P_3 + z^3P_4 + \dots\right] \\ &= \pi(z)\left[P_0 + z^{-1}(zP_1 + z^2P_2 + z^3P_3 + z^4P_4 + \dots)\right] \\ &= \pi(z)\left[P_0 + z^{-1}\left[P(z) - P(0)\right]\right] \quad \leftarrow P(z) = P_0 + zP_1 + z^2P_2 + \dots \\ &= \pi(z)P_0 + z^{-1}\pi(z)\left[P(z) - P(0)\right] \quad P(0) = P_0 \\ &= \pi(z)P_0(1 - z^{-1}) + z^{-1}\pi(z)P(z) \end{aligned}$$

$$P(z)\left[1 - z^{-1}\pi(z)\right] = \pi(z)(1 - z^{-1})P_0$$

$$P(z) = \frac{P_0\,\pi(z)(1 - z^{-1})}{1 - z^{-1}\pi(z)}$$

$$\boxed{P(z) = P_0 \cdot \frac{z-1}{z - \pi(z)} \cdot \pi(z)}$$

Falta obtener P_0 haciendo uso de $\sum P_k = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \underset{\uparrow}{\Rightarrow} P(1) = 1 \Longrightarrow P(1) = P_0 \cdot \frac{1-1}{1-\pi(1)} \cdot \pi(1) \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$P(1) = \sum P_k \cdot 1^k = \sum P_k$

$\pi(1) = \sum \pi_k = 1$

se resuelve la indeterminación por L'Hopital

$$P(1) = \lim_{z\to 1} P(z) \underset{\overset{\uparrow}{L'H}}{=} \lim_{z=0} \cdot P_0 \cdot \frac{\pi(z) + (z-1)\pi'(z)}{1 - \pi'(z)}$$

$$= \frac{\pi(1)}{1-\pi'(1)} P_0 = 1 \longrightarrow \text{despejar } P_0$$

$$\boxed{P_0 = 1 - \pi'(1)}$$

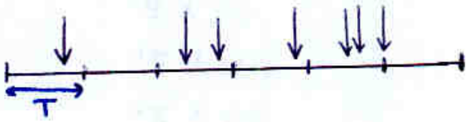
$\pi'(1) = \sum k \cdot \pi_k =$ media de llegadas por slot $\boxed{\pi'(1) = \bar{\pi}_k}$

exigimos por lógica $P_0 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\pi'(1) < 1}$ para que la cola no se alargue indefinidamente

además: $c = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \rho \Rightarrow \boxed{\rho = \pi'(1)}$

Casos Particulares de $\Pi(z)$

1. Poisson



tiempo entre llegadas exponencial $\lambda e^{-\lambda t}$

$$\pi_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

$$\boxed{\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} z^k = e^{-\lambda T} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^k}{k!}}_{e^{\lambda T z}}}$$

$$\Pi(z) = e^{\lambda T(z-1)}$$

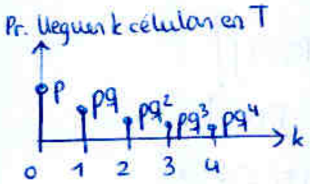
$$\rightarrow \Pi'(z) = \lambda T e^{\lambda T(z-1)}$$

$$\Pi'(1) = \lambda T < 1$$

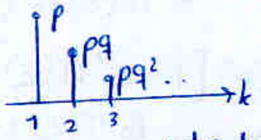
2. Distribución geométrica

$$\pi_k = p \cdot q^k$$

con $q=1-p$



nota: en la distribución geométrica decalada en comparación con la que tiene el tiempo de permanencia en un estado de una cadena de Markov



donde no existe $k=0$ porque como mínimo estamos 1.

$$\boxed{\begin{aligned}\Pi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} p q^k z^k \\ &= p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (zq)^k \\ &= p \cdot \left[1 + zq + (zq)^2 + \dots\right]\end{aligned}}$$

$$\Pi(z) = p \cdot \frac{1}{1-zq}$$

$$\longrightarrow \Pi'(z) = p \cdot \frac{q}{(1-zq)^2} \qquad \Pi''(z) = \frac{2pq^2}{(1-zq)^3}$$

$$\Pi'(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ p=1-q}}{=} \frac{q}{p} < 1 \qquad \Pi''(1) = 2\left(\frac{q^2}{p^2}\right)$$

3. Bernouilli

$$\Pi_k = \begin{cases} q & k=0 \\ p & k=1 \end{cases} \qquad p+q=1$$

por ejemplo una fuente (en cada slot o llega una célula o nada)

$$\Pi(z) = q + pz$$

$$\Pi'(z) = p$$

$$\Pi'(1) = p < 1$$

4. Binomial

$$\Pi_k = \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} p^k q^{N-k} \qquad \begin{matrix} 0 \le k \le N \\ p+q=1 \end{matrix}$$

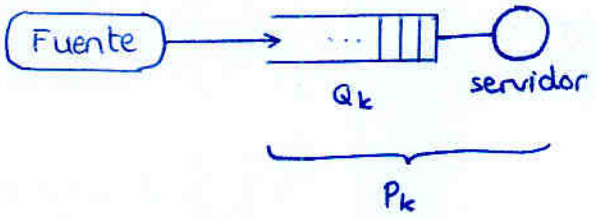
por ejemplo N fuentes

$$\Pi(z) = \sum_{k=0} \Pi_k z^k = (pz+q)^N$$

$$\Pi'(z) = N \cdot (pz+q)^{N-1} \cdot p$$

$$\Pi'(1) = Np < 1$$

¿Distribución de las unidades en cola en el sistema G/D/1 discreto?



$$\begin{matrix} P_k & : & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots \\ Q_k & : & \multicolumn{2}{c}{Q_0} & Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots \end{matrix}$$

$$\underbrace{P_0 \quad P_1}_{Q_0}$$

$$Q(z) = Q_0 + Q_1 z + Q_2 z^2 + Q_3 z^3 + \dots$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 z + P_3 z^2 + P_4 z^3 + \dots$$

$\downarrow$ ejercicio

$$\boxed{Q(z) = \frac{P(z)}{\Pi(z)} = \underbrace{(1-\Pi'(1))}_{P_0} \frac{z-1}{z-\Pi(z)}}$$

$$= \overbrace{z^{-1}P(z) - P_0 z^{-1}}^{P_1 + P_2 z + P_3 z^2 + \dots} + P_0$$

$$= \frac{1}{z}\left[P(z) + P_0(z-1)\right]$$

$$= \frac{1}{z} P_0 (z-1)\left[\frac{\Pi(z)}{z-\Pi(z)} + 1\right]$$

$$= \frac{P_0(z-1)\cdot \cancel{z}}{\cancel{z}\cdot(z-\Pi(z))}$$

¿Número medio de unidades en cola ?

$$\overline{Q} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot Q = Q'(1)$$

$$Q'(z) = P_0 \cdot \frac{z - \Pi(z) - (z-1)(1-\Pi'(z))}{(z - \Pi(z))^2}$$

$$= P_0 \left[\frac{1}{z - \Pi(z)} - \frac{(z-1)}{z - \Pi(z)} \cdot \frac{1 - \Pi'(z)}{(z - \Pi(z))} \right]$$

$$= P_0 \frac{1}{z - \Pi(z)} - Q(z) \frac{1 - \Pi'(z)}{1 - \Pi(z)}$$

$$Q'(z) = \frac{1}{z - \Pi(z)} \left[P_0 - Q(z)(1 - \Pi'(z)) \right]$$

Si intentamos hallar

$$Q'(1) = \frac{1}{1-1} \left[P_0 - 1 (\underbrace{1 - \Pi'(1)}_{P_0}) \right] \rightarrow \text{indeterminación}$$

resolvemos por L'Hopital

$$Q'(z)\Big|_{z=1} = \lim_{z \to 1} \frac{P_0 - Q(z)(1 - \Pi'(z))}{z - \Pi(z)} \underset{\substack{\uparrow \\ L'H}}{=} \lim_{z \to 1} - \frac{Q'(z)(1 - \Pi'(z)) - Q(z)\Pi'(z)}{(1 - \Pi'(z))}$$

$$= \lim_{z \to 1} - Q'(z) + \lim_{z \to 1} \frac{Q(z)\Pi''(z)}{1 - \Pi'(z)}$$

$$2Q'(1) = \frac{\Pi''(1)}{1 - \Pi'(1)}$$

$$\overline{Q} = \boxed{Q'(z)\Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \frac{\Pi''(1)}{1 - \Pi'(1)}}$$

Para cualquier distribución $\Pi(z)$

Nota: significados de $\Pi'(1)$

$$\Pi'(1) = \left(\sum_k \pi_k z^k\right)'\Big|_{z=1} = \sum_k k \cdot \Pi_k \longrightarrow \Pi'(1) = \overline{\Pi_k}$$

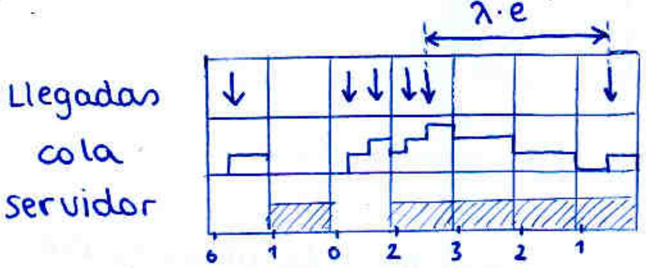
media de llegadas en un slot

$$P_0 = 1 - \Pi'(1) \longrightarrow \Pi'(1) = 1 - P_0$$

$$= P_1 + P_2 + P_3 + \ldots.$$

$$= \rho$$

Sistema G/D/1 Discreto



En poisson
Tiempo entre
llegadas exponencial

$$\boxed{\begin{array}{l} P(z) = \underbrace{\left[1-\Pi'(1)\right]\frac{z-1}{z-\Pi(z)}}_{Q(z)}\Pi(z) = Q(z)\Pi(z) \\[2ex] Q'(z)\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}\frac{\Pi''(1)}{1-\Pi'(1)} \qquad \text{siendo } \Pi(z) = \begin{cases} e^{\lambda T(z-1)} & \text{Poisson} \\ \frac{p}{1-pz} & \text{Geométrica} \\ q+pz & \text{Bernoulli} \\ (pz+q)^n & \text{Binomial} \end{cases} \end{array}}$$

$$\overset{\substack{\text{valor medio de unidades}\\ \text{en el sistema}}}{\bar N} = \overset{\substack{\text{valor medio}\\ \text{del estado}}}{\bar P} = \lim_{z\to 1} P'(z)$$

$\Pi'(1)$ = tasa de entrada [paquetes/slot]

$$= Q'(z)\Pi(z) + Q(z)\cdot\Pi'(z)\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Pi''(1)}{1-\Pi'(1)}\cdot 1 + 1\cdot\Pi'(1) \Big) \ \Pi'(1) = \rho \underset{\substack{\uparrow\\ \text{si es}\\ \text{Poisson}}}{=} \lambda T$$

(si suponemos $\Pi'(1) < 1$ para que no desborde)

$$= \bar Q + \rho$$

$$\boxed{\bar N = \bar P = \bar Q + \rho}$$

Relación de Little

nº medio de unidades en el subsistema = tasa de entrada × tiempo medio de estancia

nº medio de unidades en el subsistema → $\bar N$

tasa de entrada → $\Pi'(1)$ [pag/slot]

tiempo medio de estancia →

$$\bar T = \frac{\bar N}{\Pi'(1)} \quad [\text{slots}]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Pi'(1) = 1 - P_0 \\ = P_1 + P_2 + P_3 + \dots\end{array}}$$

$$= \frac{\bar Q}{\Pi'(1)} + 1$$

$$\boxed{\bar T = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\Pi''(1)}{1-\Pi'(1)}\cdot\frac{1}{\Pi'(1)}}_{\bar W = \frac{\bar Q}{\Pi'(1)}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{tiempo que}\\ \text{tarda el}\\ \text{servidor}}}{1}}$$

Comparativa $M/D/1$ discreto con $M/M/1$ continuo

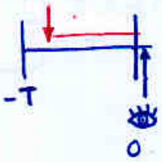
M ↓ llegada Poisson

dos posibles casos

- **1ª suposición: llegadas al azar en el tiempo continuo.**

$$\underset{\uparrow\ \text{discreto}}{\overline{W_0}} = \underbrace{\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}\frac{\Pi''(1)}{1-\Pi'(1)}}^{\overline{Q}}\cdot\frac{1}{\Pi'(1)}}_{[\text{slots}]}\cdot T}_{[\text{seg}]} + \underline{\frac{T}{2}}$$

→ compensamos el hecho de que mirábamos sólo al empezar el slot, en realidad puede haber estado esperando desde hace un tiempo $\in [0, T[$ por eso sumamos $T/2$.



$$= \frac{1}{2}\frac{\lambda T^2}{(1-\lambda T)}\frac{1}{(\lambda T)}T + \frac{T}{2}$$

$$= \frac{T}{2(1-\lambda T)} = \frac{T}{2(1-\rho)}$$

comparando con $M/M/1$ continuo: (con servidor no determinista que tarde de media $\frac{1}{\mu} = T$)

$$\overline{W_c} = \frac{\overline{Q}}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)\cdot\frac{\rho^2}{1-\rho} \overset{\text{en } M/M/1\ \rho = \lambda/\mu}{\downarrow =} \left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{\rho}{1-\rho} = T_s\frac{\rho}{1-\rho}$$

La comparación es:

$$\overline{W_D} = \frac{T}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho}$$

$$\overline{W_c} = T\cdot\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\boxed{\begin{cases}\overline{W_D} > \overline{W_c} & \text{si } \rho < \frac{1}{2}\\ \overline{W_D} < \overline{W_c} & \text{si } \rho > \frac{1}{2}\end{cases}}$$

Si la carga es baja, el ser discreto es peor, porque hay que esperar inutilmente al comienzo del slot cuando está todo vacío.

Si la carga es alta, ser discreto es favorable (mejor que el servicio sea determinista)

- **2ª suposición para el $M/D/1$ discreto: llegadas al final del slot**

$$\overline{W_D} = \frac{1}{2}\frac{\lambda T}{1-\lambda T}\cdot T \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ya no}\\ \text{sumamos } T/2}}{=} \frac{T}{2}\cdot\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\overline{W_c} = \frac{T\rho}{1-\rho}$$

$$\boxed{\overline{W_D} < \overline{W_c} \quad \text{siempre}}$$

Prestaciones M/M/1 vs M/D/1 discreto (usando 2ª suposición; que llegan al final)

	$\overline{N}$	$\overline{Q}$
M/M/1	$\frac{\rho}{1-\rho}$	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$
M/D/1 discreto	$\frac{\rho}{1-\rho}(1-\frac{\rho}{2})$	$\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$ ↓ ¡la mitad de tiempo de espera!

CONMUTACIÓN

JULIO 2006

Rellene sus datos personales en la hoja resumen.

- El número del DNI deberá estas justificado a la derecha
- Nunca escriba fuera del los casilleros. No doble la hoja resumen.

Realización del examen

- No arranque ninguna hoja del cuadernillo de hojas de examen.
- Responda a las preguntas sobre el cuadernillo del examen.
- Sólo cuando haya terminado y esté seguro, pase las respuestas a la hoja de resumen.
- Las respuestas incorrectas restan (1/3 de su valor).

No está permitido el uso de datos o programas almacenados en la calculadora que tengan alguna relación con los contenidos del examen.

Respuestas correctas son: 1c; 2a; 3c; 4b; 5b; 6d; 7a ; 8c; 9b; 10d; 11b; 12c; 13d; 14b; 15d; 16d; 17c; 18a;
MODELO ⇒ A

1. Dada una cadena de Markov de dos estados A y B, cuyas probabilidades de estado estacionarias son P_A y P_B y sus probabilidades de transición de A a B y de B a A son P_{AB} y P_{BA} respectivamente, entonces la relación CORRECTA entre estas probabilidades es:

a) $P_{AB}/P_{BA} = (1-P_A)/P_B$.
c) $P_{AB}/P_{BA} = P_B/(1-P_B)$.
b) $P_{AB}/P_{BA} = (1-P_B)/P_A$.
d) $P_{AB}/P_{BA} = P_A/(1-P_B)$.

2. Dado un sistema M/M/2/4, con $\lambda = 2$ y $\mu = 2$ ambas en clientes/s, se denota por P_2^s la probabilidad de que un clientes termine su servicio en el estado 2 (considere que el servicio finaliza primero y que luego el sistema cambia de estado). Cuando un observador aleatorio encuentra dos clientes en el sistema, denotamos por P_1^f la probabilidad de que el sistema cambie de estado en 0,5 s o antes. Indique la respuesta CORRECTA (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $P_2^s = 0{,}364$, $P_1^f = 0{,}950$.
c) $P_2^s = 0{,}308$, $P_1^f = 0{,}766$.
b) $P_2^s = 0{,}437$, $P_1^f = 0{,}874$.
d) $P_2^s = 0{,}417$, $P_1^f = 0{,}903$.

3. De las siguientes afirmaciones, indique la respuesta CORRECTA :

a) En un proceso Markov de tiempo discreto, los elementos de la diagonal principal de la matriz de transición son nulos.

b) En un sistema M/M/C con factor de utilización inferior a la unidad, el estado E_C no se alcanzará.

c) En un proceso M/M/1 se verifica que $P[N \geq k] = \rho^k$, siendo N la variable aleatoria número de clientes en sistema y ρ el factor de utilización.

d) Para un proceso de nacimiento y muerte, el valor de las probabilidades de estado en régimen permanente dependerán de las condiciones iniciales del sistema.

4. Dado un sistema M/D/1 con tiempo de servicio $T = 2$ s y tasa de llegadas 0,5 clientes/s, la probabilidad p de que lleguen dos o más clientes mientras un cliente permece en servicio vale (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $p = 0{,}195$.
b) $p = 0{,}264$.
c) $p = 0{,}288$.
d) $p = 0{,}307$.

5. Dado un sistema M/M/2/3 se sabe que su probabilidad de bloqueo vale $PB = 3/11$ y que estando en el estado 0 (E0), la probabilidad de realizar la trayectoria E0⇒E1⇒E0 en dos transiciones consecutivas vale 1/2. Entonces, la probabilidad de encontrar el sistema vacío P_0 vale (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $P_0 = 0{,}304$
b) $P_0 = 0{,}364$
c) $P_0 = 0{,}414$
d) $P_0 = 0{,}446$

Julio 2006

6. Para que el porcentaje de tiempo en el que todos los servidores de un sistema M/M/3 permanecen inactivos no supere el 50 %, el factor de utilización mínimo de los servidores ρ debe valer (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $\rho = 0{,}690$ **b)** $\rho = 0{,}500$ **c)** $\rho = 0{,}348$ **d)** $\rho = 0{,}230$

7. Un conjunto de terminales N comparten un enlace ascendente TDM a un satélite. Los terminales generan paquetes de longitud constante que encajan perfectamente en una ranura TDM. Se desean estudiar dos escenarios A y B. En el A se considera que $N = 12$ y que la probabilidad de que un terminal genere un paquete en una ranura vale $p = 0{,}05$. En el B se considera un conjunto infinito de terminales, pero que generan el mismo número medio de paquetes por ranura que en el primero. Los porcentajes de paquetes perdidos en ambos escenarios PP_A y PP_B valen (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $PP_A = 0{,}234$, $PP_B = 0{,}248$. **c)** $PP_A = 0{,}351$, $PP_B = 0{,}371$.

b) $PP_A = 0{,}234$, $PP_B = 0{,}371$. **d)** $PP_A = 0{,}351$, $PP_B = 0{,}248$.

8. El numero de contagios por una cierta variante del virus de la gripe aviaria sigue un proceso de Poisson. Los contagios se producen a razón de un nuevo contagio cada 10 minutos. El tiempo de vida de un ave infectada con el virus, a partir del momento en que ha contraído éste, esta distribuido exponencialmente y su medía es 1 hora. En un determinado instante hay 10 aves enfermas y se sabe que la última muerte ocurrió 1 minuto antes. La probabilidad de que se produzca el siguiente contagio antes de que haya habido alguna muerte más, vale (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) 0 **b)** 0,016 **c)** 0,375 **d)** 0,983

Nota: considera que la población mundial de aves es infinita y que aunque en un determinado momento no haya aves enfermas SÍ pueden producirse contagios debido a la mutación de otras variantes del virus.

9. A un sistema de dos servidores (A y B) sin cola llegan clientes según un proceso de Poisson demandando un servicio exponencial. El servidor B sólo entra en funcionamiento cuando llega un cliente y encuentra el servidor A ocupado. Además, cuando se vacía el servidor A, el cliente que estuviera en el B lo abandona y termina su servicio en el A. Si el tráfico ofrecido es de 1 Er, los factores de utilización de los servidores A y B valen (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $\rho_A = 0{,}600$, $\rho_B = 0{,}389$. **c)** $\rho_A = 0,554$, $\rho_B = 0,200$.

b) $\rho_A = 0,600$, $\rho_B = 0,200$. **d)** $\rho_A = 0,554$, $\rho_B = 0,389$.

10. Dadas dos distribuciones discretas de Poisson A$\sim$ Poisson(a) y B$\sim$ Poisson(b) independientes, se define la distribución $Z = A + B$, entonces $E[Z^2]$ vale:

a) $E[Z^2] = (a+b)^2$. **c)** $E[Z^2] = (a+b)^2/(a-b)$.

b) $E[Z^2] = (a+b)/[1-(a+b)^2]$. **d)** $E[Z^2] = (a+b)^2 + (a+b)$.

11. Respecto a la capacidad de conmutar sin conflictos de las siguientes redes de interconexión, indique la afirmación CORRECTA:

a) Una red Banyan $N \times N$ es capaz de conmutar cualquier permutación de k ($k \leq N$) etiquetas.

b) Una red Batcher $N \times N$ es capaz de conmutar cualquier permutación de exactamente N etiquetas.

c) Una red Batcher-Banyan $N \times N$ es capaz de conmutar cualquier secuencia de exactamente N etiquetas.

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

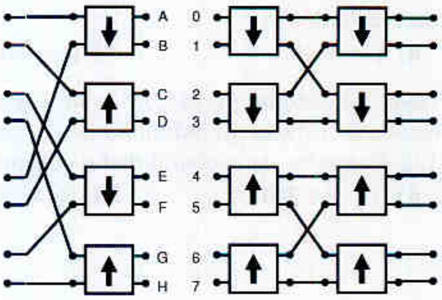
12. La red de la figura es capaz de obtener una secuencia bitónica a partir de una secuencia cualquiera. ¿Qué conexiones entre la primera y la segunda etapa son correctas?

a) A-0,B-4,C-2,D-6

b) E-1,F-5,G-3,H-7

c) E-4,F-6,G-5,H-7

d) A-0,D-2,E-1,H-3



13. Considera un conmutador *knockout* 4×4 en el que los concentradores tienen 2 salidas. Si la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro $p = 1$, la probabilidad que en una ranura salga 4 células de un *shifter* determinado es, (utilizando tres decimales con redondeo):

a) 0,211

b) 0,258

c) 0,262

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

14. Considera un conmutador de células 4×4 de memoria compartida en el que el tamaño **total** de la memoria es de 40 células. Si la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro p, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) La probabilidad de pérdidas será mayor si el espacio de memoria se comparte entre todos lo puertos que si cada puerto tiene su parte independiente.

b) La probabilidad de pérdidas será menor si el espacio de memoria se comparte entre todos lo puertos que si cada puerto tiene su parte independiente.

c) La probabilidad de pérdidas será igual si el espacio de memoria se comparte entre todos lo puertos que si cada puerto tiene su parte independiente.

d) La probabilidad de pérdidas cuando el espacio de memoria se comparte entre todos lo puertos puede ser tanto mayor como menor que si cada puerto tiene su parte independiente; dependerá del valor de p.

15. A un conmutador $M \times 10$, $M \to \infty$, de arquitectura por división espacial monoetapa sin memoria se le ofrece un tráfico de Bernoulli, siendo el número medio de células ofrecidas por ranura de 10. El caudal cursado por puerto de salida vale (utilizando tres decimales con redondeo):

a) $0,455$. **b)** $0,482$. **c)** $0,556$. **d)** $0,632$.

16. Respecto a las siguientes afirmaciones sobre el factor de utilización (ρ) y el caudal (Th) de un puerto de salida de un conmutadores de células, indique la respuesta FALSA:

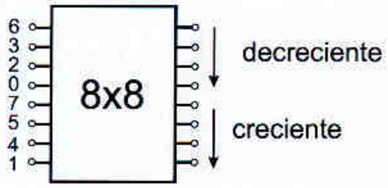
a) El caudal se define como el número medio de células transferidas por unidad de tiempo.

b) El factor de utilización de un puerto de salida se define como el número medio de células transferidas por ranura temporal.

c) $Th = \rho/T$ (células/s), siendo T el tiempo de transmisión de una célula.

d) El factor de utilización de un puerto de salida es la inversa de la probabilidad de que una ranura temporal esté ocupada.

17. La red de la figura representa un ordenador 8×8 que convierte una secuencia desordenada en otra bitónica. Suponiendo que las células que entran por los cuatro puertos superiores salen también por los cuatro puertos superiores y que lo mismo sucede para los cuatro puertos inferiores, el valor de las etiquetas de encaminamiento a la entrada de las dos matrices superiores de la segunda etapa, comenzando por arriba son:



a) 6,5,2,1

b) 1,3,2,6

c) 6,0,3,2

d) 3,7,1,2

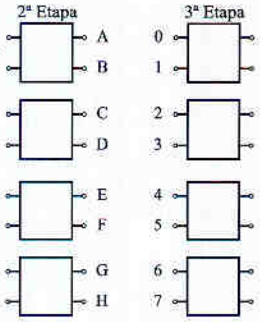
18. En una red Banyan 16×16 se han seleccionado las 4 matrices superiores de la segunda y tercera etapa. Indique cual de las siguientes conexiones es la correcta para que la red conmute la permutación identidad sin conflictos.

a) E-1,F-5,G-3,H-7

b) C-2,E-1,F-6,H-7

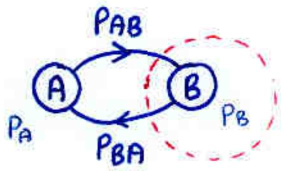
c) B-4,C-2,E-1,F-6

d) A-0,C-1,D-2,G-3



P - 2

Examen Julio 2006

① 

$P = [P_A, P_B]$

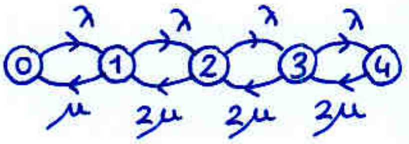
estacionario ⇒ Ecuaciones de balance
flujo entrante = flujo saliente

$$P_A \cdot P_{AB} = P_B \cdot P_{BA}$$

$$\frac{P_{AB}}{P_{BA}} = \frac{P_B}{P_A} \underset{\uparrow}{=} \frac{P_B}{1-P_B} \rightarrow \text{(a c)}$$

$$P_A + P_B = 1$$

② M / M / 2 / 4



P_2^s ≡ prob. de que un cliente termine su servicio en el estado 2

P_1^d ≡ prob de que habiendo 2 clientes en el sistema, se cambie de estado en 0'5 segundos o antes

$\lambda = 2$
$\mu = 2$ $\quad A = \frac{\lambda}{\mu} = 1$

$$P = \left[P_0 \quad AP_0 \quad \frac{A^2}{2}P_0 \quad \frac{A^2}{2}\frac{A}{2}P_0 \quad \frac{A^2}{2}\left(\frac{A}{2}\right)^2 P_0 \right]$$

$$= \left[P_0 \quad P_0 \quad \tfrac{1}{2}P_0 \quad \tfrac{1}{4}P_0 \quad \tfrac{1}{8}P_0 \right]$$

$$1 = P_0 \left(1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \right) = P_0 \frac{23}{8} \Rightarrow P_0 = \frac{8}{23}$$

$$\boxed{P = \left[\underset{P_0}{\frac{8}{23}} \quad \underset{P_1}{\frac{8}{23}} \quad \underset{P_2}{\frac{4}{23}} \quad \underset{P_3}{\frac{2}{23}} \quad \underset{P_4}{\frac{1}{23}} \right]}$$

La prob. de que un cliente termine su servicio en el estado 2

$$\frac{2\mu P_2}{\mu P_1 + 2\mu P_2 + 2\mu P_3 + 2\mu P_4}$$

La prob de que se salga del estado ② en 0'5 s o menos

El tiempo de residencia en un estado sigue una distribución exponencial con tasa igual a $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$

tasa salida de ② = $2\mu + \lambda = 6$

$$f_{T_2}(t) = 6\, e^{-6t}$$

$$P_r(T_2 \leq 0'5) = \int_0^{0'5} f_{T_2}(t)\, dt = \int_0^{0'5} 6e^{-6t}\, dt = \left[-e^{-6t} \right]_0^{0'5} = 1 - e^{-3}$$

$$= 0'950$$

③ M/M/1 de teoría:

$$P_k = A^k P_0 \quad \big\} \; P_0 = (1-A)$$
$$= A^k (1-A) \quad \big\} \; \text{en } C=1, \; \rho = A$$
$$= \rho^k (1-\rho)$$

$$Pr\{N \geq k\} = \sum_{m=k}^{\infty} \cdot P_m = P_0 \left[A^k + A^{k+1} + \dots\right]$$
$$= P_0 \frac{A^k}{1-A} = (1-A)\frac{A^k}{1-A} = A^k$$

④ Probabilidad de que lleguen dos o mas clientes mientras un cliente permanece en servicio

$$\begin{array}{c} M \;/\; D \;/\; 1 \\ \swarrow \qquad \searrow T = 2s \\ \lambda = 0'5 \text{ clie/s} \end{array}$$

La probabilidad de que lleguen k clientes en T segundos es:

$$P_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

Por tanto la probabilidad de 2 o más

$$Pr\{X \geq 2\} = \sum_{k=2}^{\infty} P_k = e^{-\lambda T} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda T}\left[\underset{\uparrow \atop \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{k!}}{e^{\lambda T}} - \lambda T - 1\right]$$

con λT
$= 0'5 \cdot 2$
$= 1$

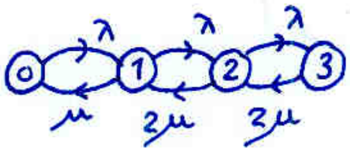
$$Pr\{X \geq 2\} = e^{-1}\left[e^1 - 1 - 1\right] = 0'264$$

⑤ M / M / 2 / 3

Hallar P_o

$$PB = \frac{3}{11}$$

$$Pr\{E_0 \Rightarrow E_1 \Rightarrow E_0 \mid E_0\} = \frac{1}{2}$$



$$\Longrightarrow \quad P = \left[P_o \quad AP_o \quad \frac{A^2}{2}P_o \quad \frac{A^3}{4}P_o\right]$$

- $PB = 1 - P_{\cap B} = \frac{3}{11}$

$$P_{\cap B} = \frac{8}{11} = P_o + P_1$$

Prob No Bloqueo ↗

$$\frac{8}{11} = P_o(1+A)$$

$$P_o = \frac{8/11}{1+A}$$

- $Pr\{E_0 \Rightarrow E_1 \Rightarrow E_0 \mid E_0\} = \frac{\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{2}$

$$\mu = \lambda$$
$$A = 1$$

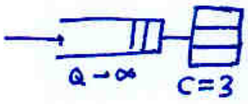
por tanto $P_o = \frac{8/11}{1+A} = \frac{4}{11} \simeq 0'364$

⑥ M / M / 3

% Tiempo con todos los servidores inactivos $\leqslant 50\% \Rightarrow$ hallar ρ

% Tiempo con todos los servidores inactivos $\equiv P_o \leqslant 50\%$

M/M/3



$$P_k = \begin{cases} \frac{A^k}{k!}P_o & 0 \leqslant k \leqslant 3 \\ \frac{A^3}{3!}\left(\frac{A}{3}\right)^{k-3}P_o & k > 3 \end{cases}$$

$$1 = P_o\left[1 + A + \frac{A^2}{2}\left[1 + \frac{A}{3} + \left(\frac{A}{3}\right)^2 + \cdots\right]\right]$$

$$1 = P_o\left[1 + A + \frac{A^2}{2}\frac{1}{1-A/3}\right]$$

$$P_o = \frac{1}{1 + A + \frac{A^2}{2}\frac{1}{1-A/3}}$$

Factor de utilización

$$\rho = \frac{0}{3}\cdot P_0 + \frac{1}{3}\cdot P_1 + \frac{2}{3}\cdot P_2 + \frac{3}{3}\cdot P_3 + \frac{3}{3}\cdot P_4 + \frac{3}{3}\cdot P_5 + \dots$$

$$\rho = P_0\left(\frac{1}{3}\cdot A + \frac{A^2}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{A^2}{2}\left[\left(\frac{A}{3}\right)+\left(\frac{A}{3}\right)^2+\left(\frac{A}{3}\right)^3+\dots\right]\right)$$

$$= \frac{A}{3}\cdot P_0 \underbrace{\left(1 + A + \frac{A^2}{2}\left[1+\frac{A}{3}+\left(\frac{A}{3}\right)^2+\dots\right]\right)}_{P_0^{-1}}$$

$\rho = \frac{A}{3}$ ← cálculo estúpido porque ya sabemos $\rho = \min\left(\frac{A}{C}, 1\right)$

Por tanto basta obtener A a partir de P_0

$$P_0 = \frac{1}{1+A+\frac{A^2}{2}\frac{1}{1-A/3}} < 0'5$$

$$1 + A + \frac{A^2/2}{1-A/3} > 2$$

$$A + \frac{A^2}{2}\frac{1}{1-A/3} > 1$$

$$\frac{A^2}{2} > (1-A)\cdot\left(1-\frac{A}{3}\right) = 1-\frac{A}{3}-A+\frac{A^2}{3} = 1-\frac{4}{3}A+\frac{A^2}{3}$$

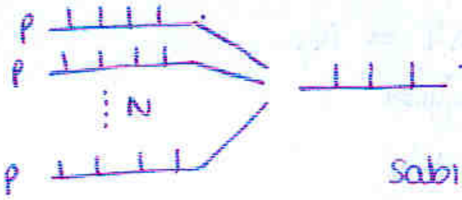
$$\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{3}+\frac{4}{3}A-1 > 0$$

$$\frac{1}{6}A^2+\frac{4}{3}A-1 > 0 \longrightarrow A = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \begin{cases} \to 0'6904 \\ \to -8'6904 \end{cases}$$

$A > 0'6904$

$\rho > \frac{A}{3} = 0'230$

⑦



Π_k : prob de k paquetes por slot

Sabiendo Π_k

$PP = 1 - \Pi_0 - \Pi_1$? ¡NO! → No tenemos en cuenta que en algunos k se pierden más paquetes que en otros

$$PP = \frac{\overline{N_p}}{\overline{N_o}} = \frac{0\cdot\Pi_0 + 0\cdot\Pi_1 + 1\cdot\Pi_2 + 2\cdot\Pi_3 + \dots + (N-1)\cdot\Pi_N}{0\cdot\Pi_0 + 1\cdot\Pi_1 + 2\cdot\Pi_2 + 3\Pi_3 + \dots + N\,\Pi_N} \rightarrow \neq \overline{Q} \text{ porque no hay cola}$$

$\bar{x}$ — celdas perdidas

$\bar{x}$ ofrecidas

$$= 1 - \frac{\overline{N_c}}{\overline{N_o}}$$

$$= 1 - \frac{0\cdot\Pi_0 + 1\cdot\Pi_1 + 1\cdot\Pi_2 + \cdots}{0\cdot\Pi_0 + 1\cdot\Pi_1 + 2\cdot\Pi_2 + \cdots} = 1 - \frac{1-\Pi_0}{\overline{\Pi_k}}$$

$$= 1 - \frac{1-\Pi_0}{\Pi'(1)}$$

Caso A $N = 12$
$p = 0'05$

La repetición N veces de un experimento de Bernouilly sigue una distribución binomial

$$\Pi_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \qquad k = 0, 1, \dots, N$$

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{N} \Pi_k z^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (pz)^k (1-p)^{N-k}$$

sabiendo:

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

$$= (pz + (1-p))^N$$

$$= (1 + p(z-1))^N$$

$$\Pi'(z) = N\cdot p\cdot (1+p(z-1))^{N-1}$$

$$\Pi'(1) = Np$$

$$\Pi''(z) = N\cdot(N-1)\cdot p^2\cdot(1+p(z-1))^{N-2}$$

$$\Pi''(1) = N(N-1)\cdot p^2$$

$$PP = 1 - \frac{1-\Pi_0}{\Pi'(1)} = 1 - \frac{1-\binom{N}{0}p^0(1-p)^N}{Np} = 1 - \frac{1-(1-p)^N}{Np} = 0'234$$

Caso B

Binomial tiende a Poisson si $N \to \infty$ con $\underbrace{\lambda T}_{\text{media paquetes por ranura}} = Np$

$$\pi_k = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k = e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^k}{k!} = e^{-\lambda T} \cdot e^{\lambda T z} = e^{\lambda T (z-1)}$$

$$\Pi'(z) = \lambda T \, e^{\lambda T (z-1)}$$

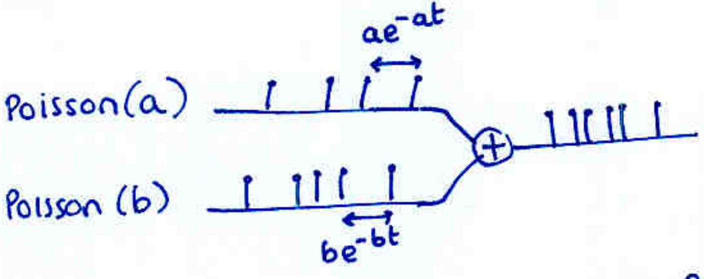
$$\Pi'(1) = \overline{\pi_k} = \lambda T \quad \text{(como ya sabíamos)}$$

$$PP = \frac{\overline{N_p}}{\overline{N_o}} = 1 - \frac{\overline{N_c}}{\overline{N_o}} = 1 - \frac{1-\pi_o}{\overline{\pi_k}} = 1 - \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T}$$

con $\lambda T = Np = 12 \cdot 0'05 = 0'6$

$PP = 0'248$

⑩ (8 y 9 los hago luego)



Poisson $(a+b)$
las tasas se suman, como sabemos de teoría

$$P_{k,T} = \frac{((a+b)T)^k}{k!} e^{-(a+b)T}$$

$$P_{k,T} = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cdot z^k = e^{-\lambda T} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^k}{k!} = e^{-\lambda T} e^{\lambda T z} = e^{\lambda T (z-1)}$$

$$P'(z) = \lambda T e^{\lambda T (z-1)} \qquad P'(1) = \lambda T$$

$$P''(z) = (\lambda T)^2 e^{\lambda T (z-1)} \qquad P''(1) = (\lambda T)^2$$

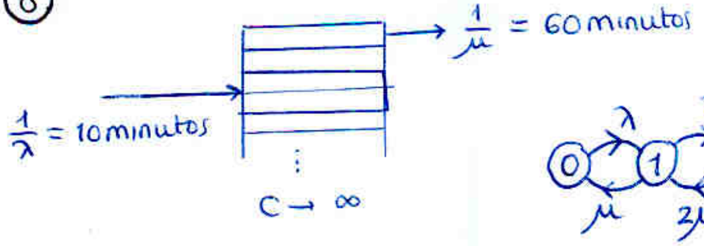
$E[X] = P'(1) = \lambda T$

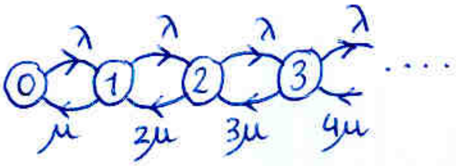
$var[X] = P''(1) + P'(1)[1 - P'(1)]$
$= \lambda T$

$E[X^2] = P''(1) + P'(1) = \lambda T + (\lambda T)^2$

Por tanto en nuestro caso: $E[X^2] = (a+b) + (a+b)^2$

⑧

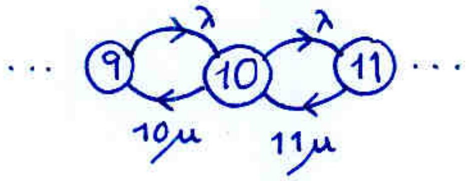




En cierto instante hay 10 aves enfermas (última muerte hace 1 minuto)
Calcular la probabilidad de que se produzca el siguiente contagio antes de haber una muerte más.

↓ irrelevante, memoria nula (distribuido exponencialmente)

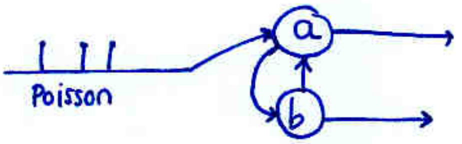
i.e. probabilidad de que la transición próxima sea $E_{10} \Rightarrow E_{11}$ y no $E_{10} \Rightarrow E_9$



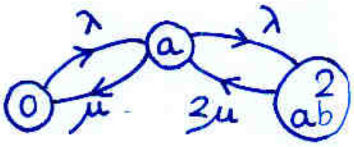
$$Pr\{E_{10} \Rightarrow E_{11} \mid E_{10}\} = \frac{\lambda}{\lambda + 10\mu} \Big\} \text{ tasa total salida}$$

$$= \frac{1/10}{\frac{1}{10} + 10 \cdot \frac{1}{60}} = 0'375$$

⑨



$A_0 = 1$ Er



. no existe estado b) porque nunca trabaja sólo.

ρ_A = porcentaje tiempo en que A trabaja

$= P_a + P_2$

$\rho_B = P_2$

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= P_0 \\ P_a &= A \cdot P_0 \\ P_2 &= \frac{A^2}{2} P_0 \end{aligned}\right\} \quad 1 = P_0\left(1 + A + \frac{A^2}{2}\right) \qquad P_0 = \frac{1}{1 + A + \frac{A^2}{2}}$$

$$\rho_A = P_a + P_2 = P_0\left(A + \frac{A^2}{2}\right) = \frac{A + A^2/2}{1 + A + A^2/2} \overset{A=1}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1 + 1/2}{1 + 1 + 1/2} = 0'6$$

$$\rho_B = P_2 = \frac{A^2}{2} P_0 = \frac{A^2/2}{1 + A + A^2/2} = \frac{1/2}{1 + 1 + 1/2} = 0'2$$

CONMUTACIÓN

ENERO 2006

Rellene sus datos personales en la hoja resumen.

- El número del DNI deberá estas justificado a la derecha
- Nunca escriba fuera del los casilleros. No doble la hoja resumen.

Realización del examen

- No arranque ninguna hoja del cuadernillo de hojas de examen.
- Responda a las preguntas sobre el cuadernillo del examen.
- Sólo cuando haya terminado y esté seguro, pase las respuestas a la hoja de resumen.
- Las respuestas incorrectas restan (1/3 de su valor).

No está permitido el uso de datos o programas almacenados en la calculadora que tengan alguna relación con los contenidos del examen.

MODELO ⇒ A

Respuestas correctas son: 1c, 2b, 3c, 4c, 5c, 6b, 7c, 8c, 9a, 10a, 11c, 12b, 13d, 14a, 15d, 16d, 17b, 18d

1. Considera el sistema $G/D/1$ discreto, donde la variable aleatoria A representa el número de llegadas en una ranura, N el número de células en el sistema, T el tiempo de permanencia en el sistema expresado en ranuras y ρ es el factor de utilización. Señala la opción FALSA:

a) Conocidos los valores de $E[A]$ y $E[A^2]$ el valor de $E[N]$ está completamente determinado.

b) Si $E[A] > 1$ el sistema es inestable.

c) $P[T < 1] = 1 - e^{-E[A]}$.

d) $\rho = E[A]$.

2. Se tiene una Cadena de Markov Homogénea de tres estado, E_0, E_1 y E_2, cuya matriz de probabilidades de transición vienen dadas por:

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}8 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

Claramente el estado E_2 es un estado absorbente. Si inicialmente la cadena se encuentra en el estado E_1, entonces la probabilidad $P_{1;0,2}$ de terminar en E_2, siendo la última transición la de E_0 a E_2 resulta ser:

a) $P_{1;\,0,2} \leq 0{,}06$.

b) $0{,}06 < P_{1;\,0,2} \leq 0{,}125$.

c) $0{,}125 < P_{1;\,0,2} \leq 0{,}25$.

d) $0{,}25 < P_{1;\,0,2}$.

3. A un cierto estudiante le quedan dos asignaturas para terminar la carrera. En cada convocatoria el alumno se presenta a todas las asignaturas que le quedan. Si se presenta a dos asignaturas la probabilidad de que le suspendan las dos es 0,2, la probabilidad de que apruebe una y le suspendan la otra es 0,6 y la probabilidad de que apruebe las dos 0,2. Si sólo se presenta a una asignatura la probabilidad de que apruebe es 0,8 y de que le suspendan 0,2. Elige la respuesta FALSA:

a) La probabilidad de que después de tres convocatorias todavía no haya terminado la carrera es 0,08.

b) La probabilidad de que después de dos convocatorias sólo le quede una asignatura es 0,24.

c) Suponiendo que se ha aprobado una asignatura, el número medio de convocatorias que necesitaría para aprobar la otra es 5.

d) La probabilidad de no haber aprobado ninguna de las dos después de diez convocatorias es $1{,}024 \cdot 10^{-7}$.

4. Para un sistema $M/M/c/c+B$, cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA:

a) El tráfico cursado aumenta si aumenta el valor de B.

b) $PB = \sum_{n=c}^{c+B} \pi_n$.

c) $\rho = \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{c+B} n\pi_n$.

d) $\overline{Q} = \sum_{n=1}^{B} n\pi_{n+c}$.

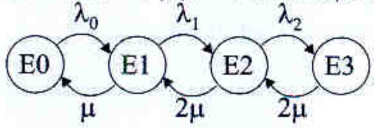
Nota: π_n es la probabilidad en equilibrio del estado n y PB la probabilidad de bloqueo.

Enero 2006

5. A un sistema monoservidor S llegan clientes según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 3$ y demandan un servicio exponencial de tasa $\mu = 4$. El servidor trabaja a la velocidad nominal (μ) cuando hay $m-1$ clientes o menos y al doble de ésta (2μ) cuando hay m o más, en cuyo caso consume el doble de energía eléctrica. Para un sistema M/M/1 convencional al que se le ofrece el mismo tráfico que al sistema S, denotamos por P(0) el porcentaje de tiempo que el sistema esta vacío. Si denotamos por PS(0) al porcentaje de tiempo que el sistema S esta vacío, ¿cuál de ser el valor de m para que se cumpla que PS(0)$\geq$ 1,5 P(0) y se consuma la menor energía posible?:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

6. El proceso de Markov de la figura modela la evolución del número de clientes en un sistema de espera con dos servidores, para el que $\lambda_k = (3-k)\lambda$, $0 \leq k \leq 3$. Si denotamos por PB la probabilidad de bloqueo, por CAO el número medio de clientes ofrecidos al sistema por segundo y por TC el tráfico cursado en Erlangs, cuando $\lambda = 1$ y $\mu = 1$ clientes/s entonces:



a) $PB \leq 0{,}5$

b) $CAO \geq 1{,}4$

c) $TC > 1{,}5$

d) Ninguna de las anteriores es correcta

7. Respecto al sistema monoservidor que modela un puerto de salida de un conmutador de células N×N cuyos puertos de entrada y salida están sincronizados y al que se le ofrece un tráfico de Bernouilli de parámetro $p = 1/2$, indique la respuesta FALSA:

a) Si $N = 5$, el número medio de ranuras consecutivas que el sistema permanece vacío, cada vez que se vacía, es superior a 2,4.

b) Si N=4, $P_{53} = 0$

c) Si N=2, $P_{35} = 6{,}2510^{-2}$

d) El sistema es estable sólo si $p < 1$

8. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA:

a) En un sistema de espera se verifica siempre que la intensidad de tráfico ofrecida es igual al número medio de servidores ocupados.

b) El factor de utilización de los servidores de un sistema M/M/∞ es mayor que el número medio de clientes en el sistema.

c) Para un sistema en equilibrio, el teorema de Little asegura que el número medio de clientes que llegan al sistema durante el tiempo medio residencia de uno de ellos, es igual al número medio de clientes que hay habitualmente en él.

d) Los elementos $q_{ij}(t)$ del generador infinitesimal verifican que $0 \leq q_{ij}(t) \leq 1 \ \forall i, j$

9. En un sistema $M/M/2/3$ con parámetros $\lambda = \mu = 2$ clientes/s, cuando se alcanza el estado E_1, la probabilidad de abandonarlo en un tiempo inferior o igual a 1 s., p, y la probabilidad de transitar a E_0, P_{10}, valen:

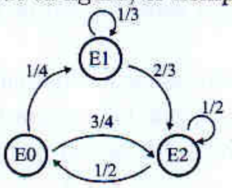
a) $p > 0{,}88$ y $P_{10} > 0{,}45$

b) $p > 0{,}88$ y $P_{10} \leq 0{,}45$

c) $p \leq 0{,}88$ y $P_{10} > 0{,}45$

d) $p \leq 0{,}88$ y $P_{10} \leq 0{,}45$

10. Para la cadena de la figura, el tiempo medio de residencia en E1 expresado en ranuras, m, vale:



a) $1{,}25 < m$

b) $0{,}75 < m \leq 1{,}25$

c) $0{,}2 < m \leq 0{,}75$

d) $0 < m \leq 0{,}2$

11. Se tiene un conmutador $N \times N$ con $N \to \infty$, con arquitectura por división espacial monoetapa, con memoria infinita en los puerto de entrada, en el que se utiliza la técnica *Virtual Output Queueing* y en el que la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro p. Respecto al caudal cursado por puerto de salida (γ_i), expresado en células por ranura, cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA:

a) Siempre se cumple que $\gamma_i = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$.

b) Siempre se cumple que $\gamma_i = 1$.

c) Siempre se cumple que $\gamma_i = p$.

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

12. Considere un conmutador 512×512 de arquitectura por división espacial sin memoria en el que la matriz espacial utiliza una red Batcher-Banyan. Si la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}2$, la probabilidad de pérdidas (P_L) que se observa cumple que:

a) $0 \leq P_L \leq 0{,}05$

b) $0{,}05 < P_L \leq 0{,}1$

c) $0{,}1 < P_L \leq 0{,}2$

d) $0{,}2 < P_L \leq 1$

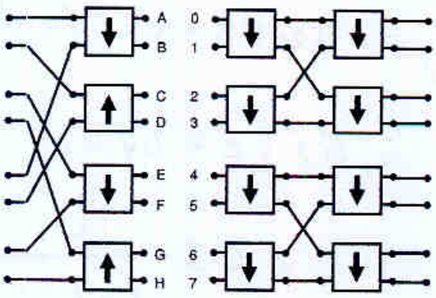
13. La red de la figura es capaz de obtener una secuencia ordenada a partir de una secuencia bitónica. ¿Qué conexiones entre la primera y la segunda etapa son correctas?

a) A-0,B-1,C-2,D-3

b) A-0,B-2,C-3,D-1

c) E-4,F-6,G-7,H-5

d) A-0,D-2,E-1,H-3



14. A una red Batcher-Banyan 32×32 en la que la red Batcher ordena las etiquetas de forma creciente de arriba hacia abajo, llega la siguiente secuencia $(31, 30, \ldots, 2, 1, 0)$. ¿Cuántas matrices de la red Banyan estarán en estado *bar*?

a) 80

b) 40

c) 0

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

15. A un conmutador de células $N \times N$, siendo $N = 128$, se le ofrece un tráfico de Bernouilli de parámetro $p = 0{,}5$. Respecto al caudal (CA) cursado por puerto de salida, expresado en células/ranura, indique la respuesta FALSA: (RI es la red de interconexión)

a) Si la RI se implementa como una matriz espacial monoetapa con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}50$.

b) Si la RI se implementa como una red de 3 etapas ($n < k < 2n$) que implementa reorganización y con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.

c) Si la RI se implementa como una red de 3 etapas ($k = 2n$) y con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.

d) Si la RI se implementa como una red de Benes sin memoria y que no implementa reorganización, entonces $0{,}45 < CA \leq 0{,}5$.

16. En un conmutador $M \times N$ de arquitectura por división espacial monoetapa sin memoria, en el que la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro p, a_k representa la probabilidad de que en una ranura lleguen k células a un determinado puerto de salida, entonces se cumple que:

a) $a_k = \binom{M}{k} (p/M)^k (1 - p/M)^{M-k}$

b) $a_k = \binom{N}{k} (p/N)^k (1 - p/N)^{N-k}$

c) $a_k = \binom{N}{k} (p/N)^k (1 - p/M)^{M-k}$

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

17. Para un conmutador monoetapa 4×4 crossbar sin memoria al que se le ofrece un tráfico de Bernouilli con $p = 0{,}5$, la probabilidad de que por un puerto de salida salgan exáctamente 2 células en 10 ranuras consecutivas, q, vale (utilizando tres decimales con redondeo):

a) 0,012

b) 0,107

c) 0,267

d) 0,339

18. Respecto a las siguientes afirmaciones sobre redes de interconexión multietapa de células $N \times N$, N= 2^m, indique la respuesta FALSA:

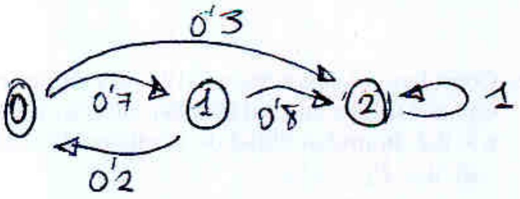
a) Si N=128, el número de etapas de una red de Benes es 13.

b) Si N=64, el número de puntos de cruce de una red de Benes es 22×64.

c) Si N=128, el número de etapas de una red Batcher es 28.

d) Si N=64, de puntos de cruce de una red Banyan es 11×64.

②
$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0'7 & 0'3 \\ 0'2 & 0 & 0'8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

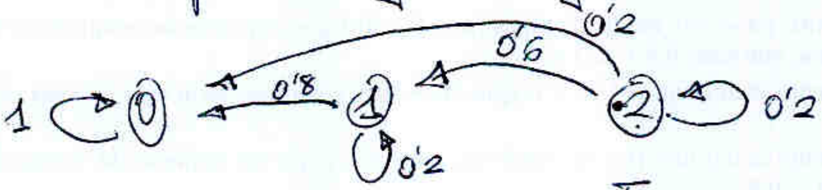


$$P_{1;0,2} = 0'2\cdot 0'3 + 0'2\cdot 0'7\cdot 0'2\cdot 0'3 + \dots =$$
$$= 0'2\left[1 + 0'7\cdot 0'2 + (0'7\cdot 0'2)^2 + \dots\right]\cdot 0'3 =$$
$$= 0'2\cdot 0'3\,\frac{1}{1-0'2\cdot 0'7} = \frac{0'06}{0'86} = \boxed{\frac{3}{43} = 0'0698}$$

Otra forma:

$$P_{1;0,2} = 0'2\cdot 0'3 + 0'2\cdot 0'7\cdot P_{1;0,2} \longrightarrow P_{1;0,2} = \frac{0'2\cdot 0'3}{1-0'2\cdot 0'7} = \frac{3}{43}$$

③ • N= nº asignaturas que le quedan



$$P(0) = [0 \;\; 0 \;\; 1] \qquad \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0'8 & 0'2 & 0 \\ 0'2 & 0'6 & 0'2 \end{bmatrix}$$

a) $P_1(3) + P_2(3) = 0'08 = 1 - P_0(3)$?

$$P(3) = P(0)\Pi^3 = \Big(\underbrace{\big(\overbrace{P(0)\Pi}^{P(1)}\big)\cdot\Pi}_{P(2)}\Big)\cdot\Pi =$$
$$= [0'2 \;\; 0'6 \;\; 0'2]\,\Pi\cdot\Pi = [0'72 \;\; 0'24 \;\; 0'04]\,\Pi =$$
$$= [0'92 \;\; 0'072 \;\; 0'008] \rightsquigarrow 1 - P_0(3) = 0'08$$ ✓

b) $P_1(2) = 0'24$

c) $T_1 = \frac{1}{1-0'2} = 1'25$ ✗

d) $P_2(10) = (0'2)^{10} = 1024\cdot 10^{-10} = 1'024\cdot 10^{-7}$ ✓

Examen Enero 2006

① G / D / 1 discreto

V.A. A : nº llegadas / ranura
V.A. N : nº células en sistema
V.A. T : tiempo permanencia [ranuras]
ρ : factor de utilización

a) $$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

$$\left.\begin{aligned} E[A] &= A'(1) \\ E[A^2] &= A''(1) + A'(1) \end{aligned}\right\}$$ podemos obtener $A'(1) = E[A]$, $A''(1) = E[A^2] - E[A]$

$$E[N] = E[Q] + \rho \quad \searrow \rho = A'(1)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{A''(1)}{1 - A'(1)} + A'(1)$$ por tanto la a) es cierta

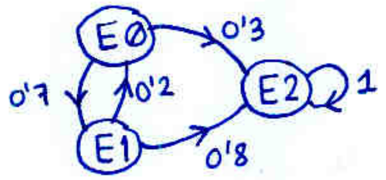
b) sistema estable $\Longleftrightarrow$ $E[A] = \rho = A'(1) < 1$

c) $P[T<1] = 0$ ya que $T = W + 1 \geq 1$ la c) es falsa

d) $\rho = E[A]$ es cierto

② Cadena Markov Homogénea

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0'7 & 0'3 \\ 0'2 & 0 & 0'8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



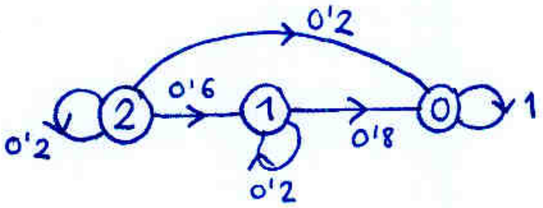
$P_{1;0,2}$: Probabilidad de terminar en E2 siendo la última transición E0 ⇒ E2 inicialmente estado E1

$$\begin{aligned} P_{1;02} = {} & P_{1,0} \cdot P_{02} \\ & + (P_{1,0} \cdot P_{0,1}) \cdot P_{1,0} \cdot P_{02} \\ & + (P_{1,0} \cdot P_{01})(P_{10} \cdot P_{01})\, P_{1,0} \cdot P_{02} \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$= P_{1,0} \cdot P_{0,2} \cdot \left(1 + (P_{10} \cdot P_{01}) + (P_{10} \cdot P_{01})^2 + \dots\right)$$
$$= 0'2 \cdot 0'3 \cdot (1 + (0'2 \cdot 0'7) + (0'2 \cdot 0'7)^2 + \dots)$$

$$= 0'06 (1 + 0'14 + 0'14^2 + ..)$$
$$= 0'06 \frac{1 - 0}{1 - 0'14}$$
$$= 0'0698$$ la b)

③



a) Probabilidad de que despues de 3 convocatorias todavía no haya aprobado la carrera

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0'8 & 0'2 & 0 \\ 0'2 & 0'6 & 0'2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P(0) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

$$P(3) = P(0)\cdot\Pi\cdot\Pi\cdot\Pi$$

$$(0 \quad 0 \quad 1)\underset{(0'2\ \ 0'6\ \ 0'2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0'8 & 0'2 & 0 \\ 0'2 & 0'6 & 0'2 \end{pmatrix}}\underset{(0'72\ \ 0'24\ \ 0'04)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0'8 & 0'2 & 0 \\ 0'2 & 0'6 & 0'2 \end{pmatrix}}\underset{(0'92\ \ 0'072\ \ 0'008)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0'8 & 0'2 & 0 \\ 0'2 & 0'6 & 0'2 \end{pmatrix}}$$

$P(3) = (0'92 \quad 0'072 \quad 0'008)$ comprobación: suma 1

La prob de no haber acabado: $1 - 0'92 = 0'072 + 0'008 = 0'08$

b) Probabilidad de que tras dos convocatorias sólo le quede una asignatura

$$P(2) = (0'72\ \boxed{0'24}\ 0'04)$$

c) Suponiendo que se ha aprobado una asignatura, el número medio de convocatorias que necesita para aprobar la otra es 5

V.A. nº de convocatorias para aprobar	0	1	2	3	4	...
probabilidad	0	0'8	$0'2\cdot 0'8$	$0'2^2\, 0'8$	$0'2^3\cdot 0'8$	...

En realidad se pregunta por el tiempo medio de permanencia en ①

$$\overline{T}_1 = \frac{1}{1-P_{11}} = \frac{1}{0'8} = 1'25$$

d) Prob. de no haber aprobado ninguna de las 2 tras 10 convocatorias $\quad 0'2^{10} = 1'024\times 10^{-7}$

④ M / M / c / c+B

π_n : prob. en equilibrio del estado n

a) TC aumenta si aumenta B

$$TC = \left[\sum_{k=0}^{c+B} \mu_k P_k\right] \frac{1}{\mu}$$

$TC = TO\,(1 - PP)$

si aumenta B disminuye π_{c+B} y por tanto $PP = \pi_{c+B}$

por tanto aumenta TC

b) $$PB = \sum_{k=c}^{c+B} \pi_n$$

c) $$\rho = 0\pi_0 + \frac{1}{c}\pi_1 + \frac{2}{c}\pi_2 + .. + \frac{c}{c}\left(\pi_c + \pi_{c+1} + \pi_{c+2} + \dots + \pi_{c+B}\right)$$

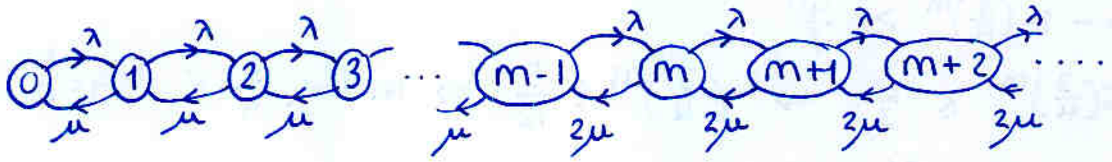
$$= \frac{1}{c}\left[\sum_{n=1}^{c} n\pi_n\right] + \sum_{n=c+1}^{c+B} \pi_n$$

la c) es falsa

d) $$\overline{Q} = 1\cdot\pi_{c+1} + 2\cdot\pi_{c+2} + \dots + B\cdot\pi_{c+B}$$

$$= \sum_{n=1}^{B} n\cdot\pi_{n+c}$$

⑤ Sistema S : M/M/1 donde μ cuando $N \leq m-1$, 2μ cuando $N \geq m$



$$P_k = \begin{cases} A^k P_0 & k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ A^{m-1}\cdot\left(\frac{A}{2}\right)^{k-m+1} P_0 & k = m, m+1, \dots \end{cases}$$

$$P_k = \left[P_0,\ AP_0,\ A^2P_0,\ \dots,\ A^{m-1}P_0,\ A^{m-1}\cdot\left(\frac{A}{2}\right)P_0,\ A^{m-1}\left(\frac{A}{2}\right)^2 P_0,\ \dots\right]$$

$$1 = P_0\left[\underbrace{1 + A + A^2 + \dots + A^{m-2}} + A^{m-1}\underbrace{\left[1 + \frac{A}{2} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \dots\right]}\right]$$

$$= P_0\left[\frac{1 - A^{m-1}}{1 - A} + A^{m-1}\cdot\frac{1}{1 - A/2}\right]$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1-A^{m-1}}{1-A} + A^{m-1}\cdot\frac{1}{1-A/2}}$$

en un M/M/1 normal

$$P = \left[P_0 ,\ AP_0 ,\ A^2 P_0 , \dots \right]$$

$$1 = P_0 \left(1 + A + A^2 + \dots \right)$$

$$1 = P_0 \frac{1}{1-A}$$

$$P_0 = 1 - A$$

Queremos $P_{s0} \geqslant 1'5 \, P_0$

$$\frac{1}{\frac{1-A^{m-1}}{1-A} + \frac{A^{m-1}}{1-\frac{A}{2}}} \geqslant 1'5 \, (1-A)$$

como $\lambda = 3$, $\mu = 4$ $\Rightarrow$ $A = 3/4$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1-(3/4)^{m-1}}{1/4} + \frac{(3/4)^{m-1}}{5/8}} \geqslant 3/8 \Rightarrow \frac{1}{\frac{5/2 + (3/4)^{m-1}\left[1 - 5/2\right]}{5/8}} \geqslant 3/8$$

$$\Rightarrow \frac{5/8}{\frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\left[1-\frac{5}{2}\right]} \geqslant \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{5/8}{\frac{5}{2} - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{m}} \geqslant \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{5}{20 - 16\left(\frac{3}{4}\right)^{m}} \geqslant \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow 20 - 16\left(\frac{3}{4}\right)^{m} \geqslant \frac{40}{3}$$

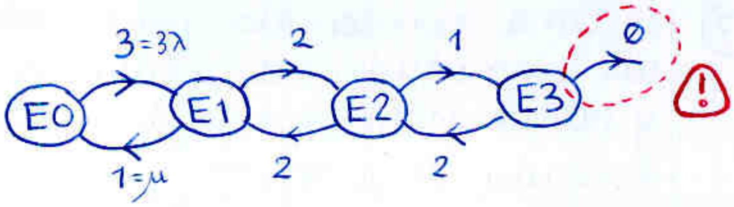
$$\Rightarrow 16\left(\frac{3}{4}\right)^{m} \leqslant \frac{20}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{m} \leqslant \frac{5}{12} \Rightarrow m \log_2 \frac{3}{4} \leqslant \log_2 \frac{5}{12}$$

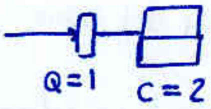
$$\Rightarrow m \leqslant \frac{\log_2 5/12}{\log_2 3/4} = 3'043$$

⑥ $\lambda_k = (3-k)\lambda$

$\lambda_0 = 3\lambda$
$\lambda_1 = 2\lambda$
$\lambda_2 = \lambda$
$\lambda_3 = 0$

$\lambda = 1$
$\mu = 1$





Estacionario ⇔ Flujo entrada = Flujo salida

$3P_0 = P_1 \rightarrow \quad P_1 = 3P_0$
$2P_1 = 2P_2 \rightarrow \quad P_2 = 3P_0$
$1P_2 = 2P_3 \rightarrow \quad P_3 = \frac{3}{2}P_0$

$$1 = P_0\left(1+3+3+\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{2}P_0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{2}{17}$$

$$P = \left[\underset{P_0}{\frac{2}{17}}, \underset{P_1}{\frac{6}{17}}, \underset{P_2}{\frac{6}{17}}, \underset{P_3}{\frac{3}{17}}\right]$$

⚠ Tb tiene los servidores llenos!!

a) $PB \leq 0'5 \qquad PB = P_3 \overbrace{+ P_2} = 0'529$

b) $CAO = \lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$
$= 3P_0 + 2P_1 + 1P_2 + 0 = 1'412$

c) $TC = (\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3) \cdot \frac{1}{\mu}$
$= 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 2 \cdot P_3$
$= \frac{24}{17} = 1'412$

Alternativamente

$\lambda_c \cdot \frac{1}{\mu} = TC$

↑
tasa cursada
||
CAO

mismo resultado

⑦ Sistema monoservidor que modela un puerto de salida de un conmutador de células NXN cuyos puertos de entrada y salida están sincronizados ya al que se ofrece un tráfico de Bernouilly de parámetro $p = 1/2$

ver página 104 del libro → se modela con distribución binomial usando $\frac{p}{N}$ y $1-\frac{p}{N}$

π_k: prob. lleguen k células en un slot

$$\pi_k = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{N}\right)^k\left(1-\frac{p}{N}\right)^{N-k}$$

$$\pi(z) = \sum_{k=0}^{N} \pi_k \cdot z^k = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{pz}{N}\right)^k\left(1-\frac{p}{N}\right)^{N-k}$$

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{N-k}$$

$$= \left(\frac{pz}{N} + \left(1-\frac{p}{N}\right)\right)^N$$

$$= \left(1+\frac{p}{N}(z-1)\right)^N$$

$$\pi'(z) = N\cdot\frac{p}{N}\cdot\left(1+\frac{p}{N}(z-1)\right)^{N-1}$$

$$\hookrightarrow \pi'(1) = \overline{\pi_k} = p$$

$$\pi''(z) = (N-1)\cdot N\cdot\left(\frac{p}{N}\right)^2\left(1+\frac{p}{N}(z-1)\right)^{N-2}$$

$$\hookrightarrow \pi''(1) = \frac{N-1}{N}\,p^2$$

a)
N=5

nº ranuras vacías	1	2	3	...
prob	$(1-\pi_0)$	$\pi_0(1-\pi_0)$	$\pi_0^2(1-\pi_0)$	

$$A_k = \pi_0^{k-1}\cdot(1-\pi_0)$$

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

$$= z\cdot(1-\pi_0)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(z\pi_0)^{k-1}$$

$$= \frac{z\cdot(1-\pi_0)}{1-z\pi_0} \quad \left(=\frac{pz}{1-qz}\right)$$

$$A'(z) = \frac{(1-\pi_0)(1-z\pi_0)+\pi_0(z(1-\pi_0))}{(1-z\pi_0)^2}$$

$$A'(1) = \overline{A_k} = \frac{(1-\pi_0)\left[\pi_0+1-\pi_0\right)}{(1-\pi_0)^2} = \frac{1}{1-\pi_0}$$

en realidad piden el tiempo medio de permanencia en P_0 en una cadena de Markov

$$\overline{T_0} = \frac{1}{1-\pi_0} = \frac{1}{1-\binom{5}{0}\left(\frac{1/2}{5}\right)^0\left(1-\frac{1/2}{5}\right)^5} = \frac{1}{1-\left(\frac{9}{10}\right)^5}$$

$$\overline{T_0} = 2'442$$

b) Si $N=4$, P_{53} ?

En una cadena de Markov; P_{ij} es dato para matriz de transición

por lógica $P_{53} = 0$ ya que como máximo sale una célula, nunca 2

c) si $N=2$, P_{35} ?

$$P_{35} = \pi_3 \quad \text{(i.e. una célula sale y 3 entran)}$$
$$= 0 \text{ ya que } N=2 \text{!! (No pueden entrar 3 células)}$$

d) El sistema sólo es estable si

$$\pi'(1) = \overline{\pi_k} = \rho < 1$$

en este caso $\pi'(1) = p$

⑧ a) Sistema de espera:

$TO = \overline{N_s}$?

$$TO = TC(1-PP)$$
$$= \overline{N_s}(1-PP)$$

en sistema de espera $PP=0$

$$TO = \overline{N_s}$$

pero sólo si el sistema es estable ($TO<C$) ⚠
no siempre → ejeeeem; yo lo habría supuesto que era estable ⍨

b) en M/M/∞

$\rho > \overline{N}$?

en M/M/∞ : $\rho = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots$

$\rho = \overline{N}$

d) Elementos $q_{ij}(t)$ del generador infinitesimal verifican $0 \leq q_{ij}(t) \leq 1$

Eso es cierto para los elementos fuera de la diagonal.
En la diagonal $q_{ii} < 0$

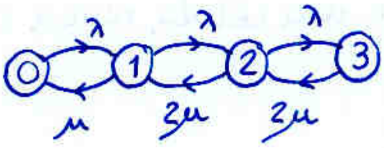
c) Sistema en equilibrio. Teorema de Little:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{número medio de clientes en el sistema}}}{\overline{N}} = \underbrace{\lambda \cdot \overline{T}}_{\text{nº medio de clientes que llegan al sistema durante el tiempo medio de residencia de uno de ellos}}$$

⑨ M / M / 2 / 3 $\lambda = \mu = 2$ Una vez en E1 :

p = probabilidad de abandonar E1 en un tiempo inferior o igual a 1s

P_{10} = probabilidad de transitar a E0



$$P = \left[P_0 \quad A P_0 \quad \frac{A^2}{2} P_0 \quad \frac{A^3}{4} P_0 \right]$$

con suficiente práctica esto se hace directamente de cabeza

$$\boxed{P_k = P_0 \frac{\lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_k \cdot \mu_{k-1} \cdots \mu_1}}$$

$$1 = P_0 \left(1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{4}\right)$$

$$1 = P_0 \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$1 = P_0 \frac{11}{4}$$

$$P_0 = 4/11$$

$$P = \left[\frac{4}{11} , \frac{4}{11} , \frac{2}{11} , \frac{1}{11} \right]$$

$$\rightarrow \quad p = \int_0^1 \underbrace{f_{T_1}(t)}\, dt = \int_0^1 4e^{-4t} dt = \left[-e^{-4t} \right]_0^1 = 1 - e^{-4(1)}$$

fdp del tiempo de permanencia en E1

$$f_{T_1}(t) = + \frac{1}{\text{tasa total que sale del estado 1}} \cdot e^{-\text{tasa total que sale del estado 1} \cdot t}$$

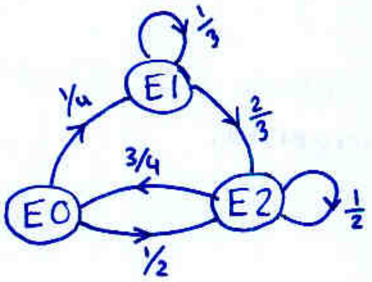
nota: directamente podemos sabernos

$$\boxed{F_{T_1}(t) = P_r(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\text{tasa} \cdot t}}$$

$$p = 1 - e^{-4} = 0'982$$

$$\rightarrow \quad P_{10} = \frac{\text{tasa } 1 \to 0}{\text{tasa total salida de } 1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1}{2}$$

⑩



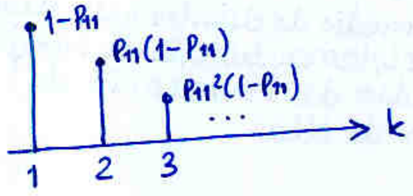
Cadena

tiempo medio de residencia en E1

$$\boxed{\overline{T_1} = \frac{1}{1 - P_{11}}} = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2} = 1'5$$

recuerda!!

Es una distribución geométrica de razón P_{11} y decalada a k = 1 !!!



CONMUTACIÓN

ENERO 2005

Rellene sus datos personales en la hoja resumen.

- El número del DNI deberá estas justificado a la derecha
- Nunca escriba fuera del los casilleros. No doble la hoja resumen.

Realización del examen

- No arranque ninguna hoja del cuadernillo de hojas de examen.
- Responda a las preguntas sobre el cuadernillo del examen.
- Sólo cuando haya terminado y esté seguro, pase las respuestas a la hoja de resumen.
- Las respuestas incorrectas restan (1/3 de su valor).

No está permitido el uso de datos o programas almacenados en la calculadora que tengan alguna relación con los contenidos del examen. De acuerdo al *Real Decreto 4 marzo 1988, núm. 192/1988*, al no haber una zona habilitada para fumadores, no se podrá fumar durante el examen.

Respuestas correctas son: 1d, 2b, 3b, 4c, 5a, 6a, 7c, 8d, 9d, 10a,
11b, 12c, 13d, 14a, 15d, 16b, 17d, 18b

MODELO ⇒ A

1. Si $\boldsymbol{P}$ es la matriz de probabilidades de transición de una cadena de Markov homogénea, $\boldsymbol{\pi}$ es el vector de las probabilidades de estado estacionarias, $\boldsymbol{e} = [1 \dots 1]^t$ es un vector columna de unos, de la dimensión necesaria, y $\boldsymbol{0} = [0 \dots 0]$ es un vector fila de ceros, de la dimensión necesaria. Entonces, los valores de $\boldsymbol{\pi}$ están completamente determinados por la ecuaciones:

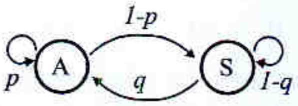
a) $\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{0}\ ;\quad \boldsymbol{\pi e} = 1$

b) $\boldsymbol{P\pi} = \boldsymbol{\pi}\ ;\quad \boldsymbol{\pi e} = 1$

c) $\boldsymbol{P\pi} = \boldsymbol{0}\ ;\quad \boldsymbol{\pi e} = 1$

d) $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}\ ;\quad \boldsymbol{\pi e} = 1$

2. Un codificador de voz puede estar en dos estados: actividad y silencio. Se sabe que una vez por segundo el codificador decide si es necesario un cambio de estado, que el tiempo medio en estado de actividad es de 20 s. y que la probabilidad de que el codificador esté en estado activo es 0.4. Si el codificador se modela mediante la cadena de Markov de la figura, los valores de p y q cumplen:



a) $0{,}8 < p \leq 0{,}9\ ,\ 0 < q \leq 0{,}1$

b) $0{,}9 < p \leq 0{,}99,\ 0 < q \leq 0{,}1$

c) $0{,}8 < p \leq 0{,}9,\ 0{,}1 < q \leq 0{,}2$

d) $0{,}9 < p \leq 0{,}99,\ 0{,}1 < q \leq 0{,}2$

3. Un conjunto de $N = 10$ codificadores como los del problema anterior comparten un enlace de C circuitos. Cuando un codificador está activo utiliza un circuito, siempre que haya uno disponible. Determinar el mínimo valor de C (C_{min}) para que la probabilidad de bloqueo (PB), es decir, la probabilidad de que el número de codificadores activos supere la capacidad del enlace, sea $PB \leq 0{,}02$. (Nota: piense en términos de la distribución del número de codificadores activos).

a) $C_{min} = 9$ **b)** $C_{min} = 7$ **c)** $C_{min} = 5$ **d)** $C_{min} = 3$

4. Dos tipos de clientes A y B acceden a un sistema de espera de cola infinita y dos servidores denominados también A y B, de forma que los clientes de tipo A sólo son servidos por el servidor A y los de tipo B sólo son servidos por el B. Las variables aleatorias (v.a.) tiempo entre llegadas y tiempo de servicio son independientes y distribuidas exponencialmente de parámetros $\lambda_A = 1$, $\lambda_B = 1$, $\mu_A = 2$, $\mu_B = 4$, todas en clientes/s. La media de la v.a. número de clientes en el sistema N y la varianza de la v.a. número de clientes de tipo A en el sistema N_A, cumplen:

a) $0{,}8 < E[N] \leq 1{,}0,\ 1{,}0 < Var[N_A] \leq 3{,}0$

b) $0{,}8 < E[N] \leq 1{,}0,\ 3{,}0 < Var[N_A] \leq 6{,}0$

c) $1{,}0 < E[N] \leq 3{,}0,\ 1{,}0 < Var[N_A] \leq 3{,}0$

d) $1{,}0 < E[N] \leq 3{,}0,\ 3{,}0 < Var[N_A] \leq 6{,}0$

5. A un multiplexor cuyo enlace de salida tiene una capacidad de $C = 64$ Kbit/s llegan paquetes procedentes de dos fuentes A y B. Los paquetes son generados según sendos procesos de Poisson de tasas $\lambda_A = 2$ y $\lambda_B = 6$ paquetes/s. La longitud de los paquetes está distribuida exponencialmente de media 8 Kbit. La memoria del multiplexor se divide en $M = 4$ segmentos, en los que se almacenan los paquetes en cola y en servicio. Indique la respuesta FALSA:

a) Si se desea que al menos el 99 % de los paquetes quepan en un segmento de memoria, el tamaño de éste debe ser $B \geq 30$ Kbits

b) La probabilidad de pérdida de paquete cumple $0{,}18 < PP \leq 0{,}28$ (*)

c) El factor de utilización del servidor cumple $0{,}75 < \rho \leq 0{,}88$ (*)

d) Respecto del caudal agregado de las dos fuentes, la probabilidad de que lleguen al sistema 2 o más paquetes en un intervalo de 0,5 s. cumple $0{,}82 < p \leq 0{,}92$

(*: para este apartado considere que el 100 % de los paquetes caben en un segmento de memoria)

6. En un sistema $M/M/C/C+B$ en el que la tasa de llegadas es $\lambda = 5$ clientes/s, denotaremos por $1/\mu = \overline{T}_s$ al tiempo medio de servicio, por A_c al tráfico cursado y por $\overline{Q}$ al número medio de clientes en cola. Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA:

a) Si $C = 1$ y la probabilidad de perdidas es estrictamente inferior (<) a la probabilidad de ser atendido inmediatamente después de la llegada, entonces se cumple que $\overline{T}_s < 0{,}2/B$ s

b) Si $C = 4$ y $\overline{T}_s = 1$, entonces $A_c < 4Er$

c) Si $C = 4$ y $\overline{T}_s = 1$, entonces $\overline{Q} < B$

d) Si $C = 4$ y $\overline{T}_s = 1$, entonces el sistema es estable

7. Se dispone de una urna con 4 bolas blancas y 4 azules. Se hacen extracciones actuando de la siguiente forma: i) si la bola extraída es blanca, ésta no se repone (queda fuera de la urna); ii) si la bola extraída es azul, se repone dicha bola y todas las bolas blancas que estuviesen fuera de la urna. Si el experimento se modela mediante una cadena de Markov, cuyo estado representa el número de bolas blancas fuera de la urna, entonces la probabilidad de estado en régimen permanente P_0 vale:

a) $P_0 \leq 0{,}25$ **b)** $0{,}25 < P_0 \leq 0{,}5$ **c)** $0{,}5 < P_0 \leq 0{,}75$ **d)** $0{,}75 < P_0 \leq 1{,}0$

8. Un sistema basado en microprocesador se modela como un M/M/1. Se ha observado que el tiempo medio de procesado de una tarea es de 1 ms. y que el tiempo medio que las tareas esperan en cola es de 3 ms. Si se duplica la capacidad de proceso del microprocesador, el nuevo tiempo medio de espera en cola $\overline{W}$ cumple:

a) $2{,}0 < \overline{W} \leq 3{,}5$ **b)** $1{,}5 < \overline{W} \leq 2{,}0$ **c)** $0{,}5 < \overline{W} \leq 1{,}5$ **d)** $\overline{W} \leq 0{,}5$

9. A un sistema con tres servidores y una cola de tamaño unidad, acceden clientes provenientes de dos fuentes de Poisson con parámetros $\lambda_A = 1$ y $\lambda_B = 2$ clientes/s. Si el tiempo medio de servicio es 2 s., indique la respuesta CORRECTA:

a) El factor de utilización de los servidores es menor del 70 %.

b) Cuando el sistema se encuentra en E_3, en media, salen servidos del sistema 0,52 clientes/s.

c) $E[Q/Q > 0] = 2$.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

10. Por motivos de fiabilidad, la interconexión entre dos sedes de una empresa se realiza mediante 2 enlaces. La probabilidad de que un enlace deje de funcionar a lo largo de un día es p. Si al comienzo de un lunes funcionan ambos, la probabilidad de que al finalizar el martes (de la misma semana) exista comunicación entre ambas sedes vale: (Nota: existe comunicación siempre que haya, al menos, un enlace funcionando)

a) $1 - [p^2 + 2(1-p)p^2 + (1-p)^2p^2]$ **c)** $(1-p)^2$

b) $(1-p)^4$ **d)** $2p(1-p)^2(2-p)$

Enero 2005

11. Un conmutador de paquetes de células $N \times N$, siendo $N = 128$, está cargado con un tráfico de Bernouilli de parámetro $p = 0{,}5$. Respecto al caudal (CA) cursado por puerto de salida, expresado en células/ranura, indique la respuesta CORRECTA: (RI es la red de interconexión)

- **a)** Si la RI se implementa como una matriz espacial monoetapa sin memoria, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}50$.
- **b)** Si la RI se implementa como una matriz espacial monoetapa con memoria infinita en puertos de entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.
- **c)** Si la RI se implementa como una red espacial de 3 etapas sin memoria, con $k = n$ y en la que el encaminamiento se realiza aleatoriamente, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.
- **d)** Si la RI se implementa como una red espacial de 3 etapas sin memoria, con $k = n$ y en la que se utiliza la técnica de reorganización de conexiones internas, entonces $0{,}45 < CA \leq 0{,}5$.

12. En referencia al uso de las redes de interconexión siguientes, indique la respuesta CORRECTA:

- **a)** Una red de Clos puede utilizarse exclusivamente en conmutación de circuitos.
- **b)** Una red Banyan puede utilizarse tanto en conmutación de circuitos como de paquetes.
- **c)** Una red de Benes puede utilizarse tanto en conmutación de circuitos como de paquetes
- **d)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

13. Un conmutador de células $N \times N$, $N \to \infty$, está cargado con un tráfico de Bernouilli de parámetro p. Para implementar su Red de Interconexión (RI) se exploran dos arquitecturas: i) RI espacial monoetapa sin memoria; ii) RI espacial monoetapa con memoria infinita en puertos de entrada. El valor de p a partir del cual el caudal cursado por la primera arquitectura supera al de la segunda, cumple:

- **a)** $0 < p \leq 0{,}5$
- **b)** $0{,}5 < p \leq 0{,}586$
- **c)** $0{,}586 < p \leq 0{,}85$
- **d)** $0{,}85 < p \leq 0{,}99$

14. Considere un conmutador 4×4 con memoria a la salida y tráfico de Bernoulli a la entrada de parámetro p. La mitad de las células que llegan a cualquier puerto de entrada van dirigidas al puerto de salida 0 y, la otra mitad se dirige hacia alguno de los otros tres puertos con idéntica probabilidad. Si $a_i(k)$ representa la probabilidad de que lleguen k células al puerto de salida i en una ranura, indique la respuesta CORRECTA:

- **a)** $a_2(k) = \binom{4}{k} (p/6)^k (1 - p/6)^{4-k}$
- **b)** $a_0(k) = \binom{4}{k} (p/6)^k (1 - p/6)^{4-k}$
- **c)** $a_0(k) = \binom{4}{k} (0{,}5/4)^k (1 - 0{,}5/4)^{4-k}$
- **d)** Ninguna de las anteriores es correcta.

15. Si N_x^a representa el número de puntos de cruce de una red de Banyan y N_x^e el de una red de Benes, ambas $N \times N$, qué afirmación es la CORRECTA:

- **a)** $N_x^a < N_x^e$, pero la red de Benes presenta la ventaja de realizar el encaminamiento interno de forma distribuida.
- **b)** $N_x^a = N_x^e$
- **c)** $N_x^a > N_x^e$
- **d)** Ninguna de las anteriores.

16. En un conmutador 4×4 de arquitectura *knockout* que utiliza concentradores 4×3, con tráfico de Bernoulli a la entrada y valor de $p = 0{,}9$, la probabilidad de que en una ranura lleguen 3 células a un puerto de salida vale (considere 3 dígitos decimales con redondeo):

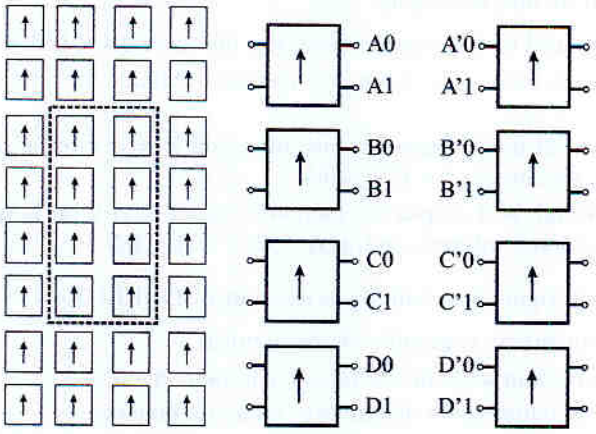
- **a)** 0,035
- **b)** 0,038
- **c)** 0,780
- **d)** 0,419

17. Se modifica el funcionamiento de una red Banyan 8×8 para que gestione secuencias con etiquetas repetidas. La nueva red Banyan marca todas las células con etiquetas repetidas a su entrada, de forma que cuando dos células compiten por el mismo puerto de salida de una matriz elemental interna 2x2, se encamina correctamente la célula NO marcada (en caso de que las dos estén marcadas se elige una al azar). El número de matrices elementales a *cross* (c), *bar* (b) o a un estado irrelevante (x), al conmutar la secuencia de etiquetas (0,1,5,6,6,7,-,-) es:

- **a)** $7c, 4b, 1x$
- **b)** $6c, 4b, 2x$
- **c)** $6c, 5b, 1x$
- **d)** Ninguna de las anteriores es correcta

P- 14

18. En la figura se representa una red que permite obtener una secuencia ordenada a partir de una secuencia bitónica. La interconexión CORRECTA entre las matrices indicadas es



a) A0-A'0, A1-B'0, B0-C'0, B1-D'0
b) A1-A'1, B1-B'1, C0-C'0, D0-D'0
c) B0-B'0, B1-D'0, C0-A'1, C1-C'1
d) C0-A'1, C1-C'1, D0-C'1, D1-D'1

Examen Enero 2005

① cadena de Markov homogenea

P: matriz de probabilidades de transición $P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$

π : vector de estado estacionario $\pi = (P_0 \ \ P_1 \ \ P_2 \cdots)$

a) $\pi P = 0$? No: $\pi P = \pi$

b) $P\pi = \pi$? → No se puede hacer $P\pi$

c) $P\pi = 0$? ↗

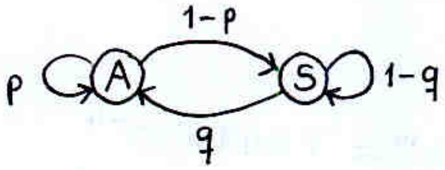
d) $\pi(P-I) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} P_{00}-1 & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11}-1 & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22}-1 \end{pmatrix}$$

$$(P_0 \ \ P_1 \ \ P_2)\,(\underbrace{P_0-P_0}_{P_{00}\cdot P_0 + P_{10}\cdot P_1 + P_{20}\cdot P_2 - 1\cdot P_0 = 0} \ \ P_1-P_1 \ \ P_2-P_2) = (0\ 0\ 0)$$

πe = suma de los elementos de π $= 1$

②



$T_c = 1\,s$

$\overline{T_A} = 20\,s$

$P_A = 0'4$

$$\boxed{\overline{T_A} = \frac{1}{1-P_{AA}}} = \frac{1}{1-p} = 20 \text{ 'slots'}$$

$$1-p = \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{p = \frac{19}{20}}$$

además:

$$\boxed{P\cdot\pi = P}$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_A = p P_A + q P_S \\ P_S = (1-p)P_A + (1-q)P_S \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P_A(1-p) = q P_S \\ P_S(1-1+q) = (1-p)P_A \end{array}\right.$$

como se esperaba, el rango de π es 1 y por tanto las dos ecuaciones son dependientes y hay un grado de libertad

$$\pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Hay que añadir $P_A + P_S = 1$ ←

$$P_A(1-p) = q(1-P_A)$$

$$q = \frac{P_A(1-p)}{1-P_A} = \frac{0'4\cdot\frac{1}{20}}{1-0'4} = \boxed{\frac{1}{30} = q}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p = 0'95 \\ q = 0'03\hat{3} \end{array}}$$ la (b)

③ Cada enlace está activo con probabilidad $P_A = 0'4$
y silenciado con probabilidad $P_S = 0'6$

Es como un experimento de Bernouilli con $p = 0'4$

$N = 10$ codificadores se comportarán por tanto como una distribución binomial (por ser repetición de experimento de Bernouilli)

Π_k : probabilidad de que hayan k codificadores activos

$$\Pi_k = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} N = 10 \\ p = 0'4 \\ q = 1-p = 0'6 \\ k = 0, 1, \dots, N \end{array}$$

$$PB = P_r\{k > C\} \leq 0'02$$

$$PB = \Pi_{C+1} + \Pi_{C+2} + \Pi_{C+3} + \dots + \Pi_N \leq 0'02$$

caso $C = 10 \rightarrow \quad PB = 0$

$C = 9 \rightarrow \quad PB = \Pi_{10} = \binom{10}{10} p^{10} = 0'4^{10} = 1'049 \times 10^{-4}$

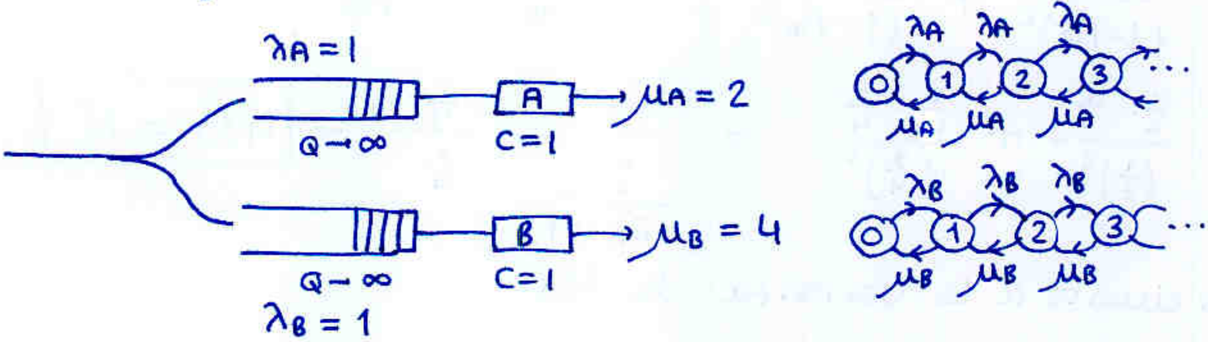
$C = 8 - \quad PB = \Pi_9 + \Pi_{10} = \binom{10}{9} p^9 q^1 + \binom{10}{10} p^{10} = 1'68 \times 10^{-3}$

$C = 7 - \quad PB = \Pi_8 + \Pi_9 + \Pi_{10} = \binom{10}{8} p^8 q^2 + \binom{10}{9} p^9 q^1 + \binom{10}{10} p^{10}$
$= 0'0123$

$C = 6 - \quad PB = \Pi_7 + \Pi_8 + \Pi_9 + \Pi_{10} = \dots = 0'055 > 0'02$!!

$C_{min} = 7$

④ Los consideramos como procesos independientes (ya que hay cola infinita y no se molestarán unos a otros) (para ello habrá que suponer que el servidor libre busca en la cola para encontrar su cliente correspondiente, aunque delante haya otro cliente del otro tipo)



$$\boxed{\begin{aligned}
P_A &= \left[P_{0A} \quad A_A P_{0A} \quad A_A^2 P_{0A} \quad A_A^3 P_{0A} \quad \cdots \right] \\
1 &= P_{0A}\left(1 + A_A + A_A^2 + A_A^3 + \ldots\right) \\
1 &= P_{0A} \frac{1}{1 - A_A} \\
P_{0A} &= 1 - A_A \\
P_B &= \left[P_{0B} \quad A_B P_{0B} \quad A_B^2 P_{0B} \quad A_B^3 P_{0B} \quad \ldots \right] \\
P_{0B} &= 1 - A_B
\end{aligned}}$$

siendo $A_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $A_B = \frac{\lambda_B}{\mu_B} = \frac{1}{4}$

$P_{0A} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P_{0B} = \frac{3}{4}$

$P_A = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \cdots \right]$ $\qquad$ $P_B = \left[\frac{3}{4} \quad \frac{3}{16} \quad \frac{3}{64} \quad \frac{3}{256} \quad \cdots \right]$

$$\begin{aligned}
E[N] &= E[N_A] + E[N_B] \\
&= \left(0P_{0A} + 1P_{1A} + 2P_{2A} + \ldots\right) + \left(0P_{0B} + 1P_{1B} + 2P_{2B} + \ldots\right) \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \ldots\right) + \left(\frac{3}{16} + \frac{6}{64} + \frac{9}{256} + \ldots\right) \\
&= P_{0A}\left(0\cdot 1 + 1\cdot A_A + 2\cdot A_A^2 + \ldots\right) + P_{0B}\left(0\cdot 1 + 1\cdot A_B + 2\cdot A_B^2 + \ldots\right) \\
&= A_A \cdot P_{0A}\left(1 + 2A_A + 3A_A^2 + \ldots\right) + A_B P_{0B}\left(1 + 2A_B + 3A_B^2 + \ldots\right) \\
&= A_A \cdot P_{0A} \cdot \frac{d}{dA}\left(A_A + A_A^2 + A_A^3 + \ldots\right) + A_B P_{0B} \frac{d}{dA}\left(A_B + A_B^2 + A_B^3 + \ldots\right)
\end{aligned}$$

$$= A_A P_{0A} \frac{d}{dA}\left(\frac{A_A}{1-A_A}\right) + A_B P_{0B} \frac{d}{dA}\left(\frac{A_B}{1-A_B}\right)$$

$$= A_A P_{0A}\left(\frac{-A_A + 1(1-A_A)}{(1-A_A)^2}\right) + A_B P_{0B}\left(\frac{-A_B + 1\cdot(1-A_B)}{(1-A_B)^2}\right)$$

$$= \frac{A_A P_{0A}}{(1-A_A)^2} + \frac{A_B P_{0B}}{(1-A_B)^2} = \frac{A_A}{1-A_A} + \frac{A_B}{1-A_B}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}}_{\overline{N_A}=1} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \boxed{1'3\hat{3} = \overline{N}}$$

En cuanto a la varianza: de N_A

$$\mathrm{var}(N_A) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P_k - \overline{N_A}^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 A_A^k P_{0A} - \overline{N_A}^2$$

Tal vez convendría obtener $P(z)$ y hacer $\mathrm{var}(N_A) = P''(1) + P'(1)[1-P'(1)]$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{A_k} \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0A} \cdot A_A^k \cdot z^k$$

$$= P_{0A} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (A_A z)^k = P_{0A} \cdot \frac{1}{1-A_A z}$$

$$P'(z) = \frac{A_A \cdot P_{0A}}{(1-A_A z)^2}$$

$$\hookrightarrow P'(1) = \frac{A_A \cancel{P_{0A}}}{(1-A_A)^{\cancel{2}}} = \frac{A_A}{1-A_A} = 1$$

$$P''(z) = \frac{-A_A P_{0A} \cdot 2 \cdot (-A_A) \cdot \cancel{(1-A_A z)}}{(1-A_A z)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2 P_{0A} A_A^2}{(1-A_A z)^3}$$

$$\hookrightarrow P''(1) = \frac{2 P_{0A} A_A^2}{(1-A_A)^3} = \frac{2 A_A^2}{(1-A_A)^2} = 2\left(\frac{A_A}{1-A_A}\right)^2 = 2$$

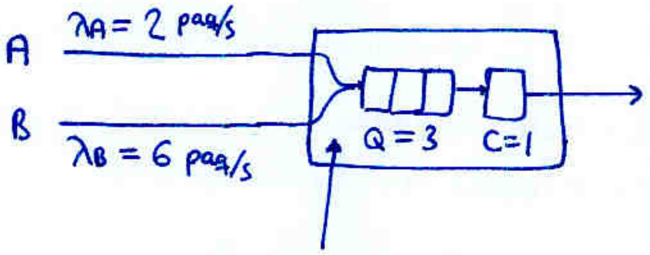
$$\mathrm{var}(N_A) = P''(1) + P'(1)(1-P'(1))$$

$$= 2 + 1 \quad (1-1)$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(N_A) = 2}$$

la (c)

⑤



$$\frac{1}{\mu} = T_{paquete} = \frac{8 kbit}{64 kbit/s} = \frac{1}{8} s$$

$$\mu = 8 \text{ paq/s}$$

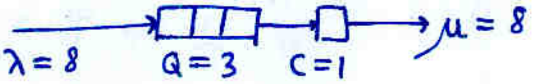
$$\lambda_{in} = \lambda_A + \lambda_B = 8 \text{ paq/s}$$

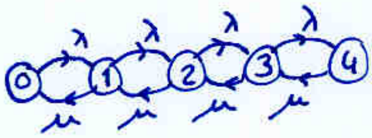
a) $Pr\{ \text{Tamaño} \leq B \text{ kbits} \} \geq 0'99$?

$$= \int_0^B \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}t} dt = \left[-e^{-\frac{1}{8}t} \right]_0^B = 1 - e^{-\frac{1}{8}B} \geq 0'99 \Rightarrow B \geq \frac{\ln(1-0'99)}{-1/8}$$

$$B \geq 36'8 \text{ kbits}$$

b)





$$P_k = \left[P_0 \quad AP_0 \quad A^2P_0 \quad A^3P_0 \quad A^4P_0 \right]$$

como $A = \frac{8}{8} = 1$

$$P_k = \left[P_0 \quad P_0 \quad P_0 \quad P_0 \quad P_0 \right] \text{ con } P_0 = \frac{1}{5} \left(\begin{matrix}\text{ya que la} \\ \text{suma es 1}\end{matrix} \right)$$

$$PP = P_{C+Q} = P_4 = \frac{1}{5} = 0'2$$

c) $\rho = 0 \cdot P_0 + \frac{1}{1} \cdot P_1 + \frac{1}{1} \cdot P_2 + \frac{1}{1} P_3 + \frac{1}{1} P_4$
$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0'8$

⚠ ¿Porque no se cumple $\rho = \min(\frac{A_0}{C}, 1)$????
porq en realidad $\rho = \frac{A_C}{C}$
$= \min\left(\frac{A_0(1-PP)}{C}, 1\right)$

d) $\Pi_{k,t}$ = prob de que lleguen k paquetes en tiempo t

como el intervalo entre paquetes es V.A. con distribución exponencial de tasa λ, $\Pi_{k,t}$ será Poisson de media λt

$$\Pi_{k,t} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$Pr\left\{ \begin{matrix}\text{2 o mas paquetes} \\ \text{en 0'5s}\end{matrix} \right\} = \Pi_{2,0'5} + \Pi_{3,0'5} + \Pi_{4,0'5} + \dots$
$= 1 - \Pi_{0,0'5} - \Pi_{1,0'5}$
$= 1 - e^{-\lambda t} - (\lambda t) e^{-\lambda t}$; $\lambda t = 8 \times 0'5 = 4$
$= 1 - e^{-4} - 4 e^{-4} = 0'908$ la (d) es cierta

⑥ $M/M/C/C+B$

$\lambda = 5$ clientes/s

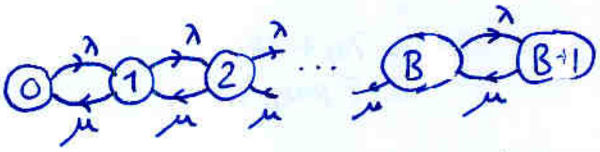
$\mu = \frac{1}{\overline{T_s}} \rightarrow$ tiempo medio de servicio

A_c = tráfico cursado

$\overline{Q}$ = nº medio de clientes en cola

a) $C=1$

$$\underbrace{PP}_{\text{prob pérdidas}} < \underbrace{1-PB}_{\text{prob de ser atendido inmediatamente}} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} PP = P_{B+1} = P_0 \cdot A^{B+1} \\ 1-PB = P_0 \end{cases}$$

si $PP < 1-PB$

$P_0 A^{B+1} < P_0$

$A^{B+1} < 1$

$A < 1 \Rightarrow \lambda > \mu$

$5 > \frac{1}{\overline{T_s}} \Rightarrow \overline{T_s} > 0'2$

no se cumple $\overline{T_s} < \frac{0'2}{B}$!!

b) $C = 4$, $\overline{T_s} = 1$ $\Rightarrow$

no hace falta todo eso

$A_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{1} = 5$ Er

$A_0 \leq C$

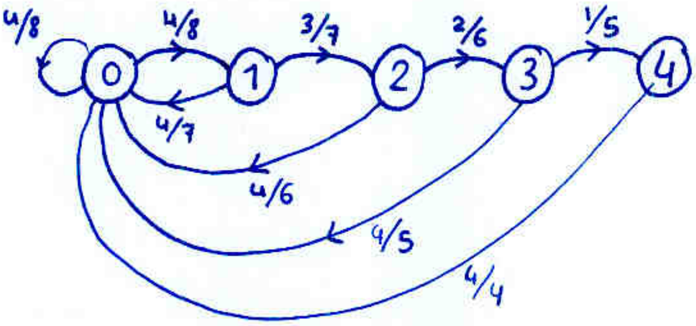
es estable

Como SI hay pérdidas y sólo hay 4 servidores, $A < 4$ Er

$$\boxed{\begin{aligned} A_c &= A_0\,(1-PP) \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\left(1-P_{B+4}\right) \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\left(1-\frac{A^4}{4!}\cdot\left(\frac{A}{4}\right)^B P_0\right) \\ &\text{con } A=\tfrac{\lambda}{\mu}=5 \\ &= 5\left(1-\frac{5^4}{4!}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^B\cdot\frac{1}{1+5+\frac{25}{2}+\frac{125}{6}+\frac{3125}{24}\left(\frac{1-(5/4)^{B+1}}{1-5/4}\right)}\right) \\ &= 5\left(1-\frac{625}{24}\cdot\frac{(5/4)^B}{\frac{118}{3}+}\right.\end{aligned}}$$

⑦ 4 bolas blancas   se van retirando blancas hasta que
4 azules   sale una negra

$P_k \equiv$ prob de haber k bolas blancas sacadas



$$\Pi = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0'5 & 0'5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4/7 & 0 & 3/7 & 0 & 0 \\ 2 & 4/6 & 0 & 0 & 2/6 & 0 \\ 3 & 4/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

hay que resolver

$$\boxed{P \cdot \Pi = P}$$

$$\begin{cases} P_0 = \frac{1}{2} P_0 + \frac{4}{7} P_1 + \frac{4}{6} P_2 + \frac{4}{5} P_3 + P_4 \\ P_1 = \frac{1}{2} P_0 \\ P_2 = \frac{3}{7} P_1 = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} P_0 = \frac{3}{14} P_0 \\ P_3 = \frac{2}{6} P_2 = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_0 = \frac{1}{14} P_0 \\ P_4 = \frac{1}{5} P_3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_0 = \frac{1}{70} P_0 \end{cases}$$

$$P = \left[P_0 \quad \frac{1}{2} P_0 \quad \frac{3}{14} P_0 \quad \frac{1}{14} P_0 \quad \frac{1}{70} P_0 \right]$$

$$1 = P_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{70}\right)$$

$$1 = P_0 \frac{9}{5}$$

$$\boxed{P_0 = 5/9} = 0'5\hat{5}$$

CONMUTACIÓN

DICIEMBRE 2006

Rellene sus datos personales en la hoja resumen.

- El número del DNI deberá estas justificado a la derecha
- Nunca escriba fuera del los casilleros. No doble la hoja resumen.

Realización del examen

- No arranque ninguna hoja del cuadernillo de hojas de examen.
- Responda a las preguntas sobre el cuadernillo del examen.
- Sólo cuando haya terminado y esté seguro, pase las respuestas a la hoja de resumen.
- Las respuestas incorrectas restan (1/3 de su valor).
- **NRAEC** significa *ninguna de las respuestas anteriores es correcta.*

No está permitido el uso de datos o programas almacenados en la calculadora que tengan alguna relación con los contenidos del examen.

MODELO ⇒ A

1. Considera un sistema M/M/3 con $\lambda = 4$ y $\mu = 2$ ambas en clientes/s. La probabilidad de que el tiempo de servicio de un cliente sea superior a 2 s, $P(T_s > 2)$, vale (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) 0,982 **b)** 0,036 **c)** 0,018 **d)** NRAEC

2. Considera un sistema M/M/3 con $\lambda = 4$ y $\mu = 2$ ambas en clientes/s. Si W representa el tiempo de espera de un cliente hasta que se inicia su servicio, $P(W > 0)$ vale:

a) 4/3 **b)** 4/9 **c)** 8/9 **d)** NRAEC

3. Considera un sistema M/M/2/3 con $\lambda = 4$ y $\mu = 2$ ambas en clientes/s. El caudal perdido (expresado en clientes/s), vale:

a) 8/7 **b)** 4/7 **c)** 2/7 **d)** NRAEC

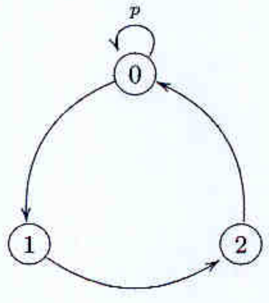
4. Considera un sistema M/M/2/3 con $\lambda = 4$ y $\mu = 2$ ambas en clientes/s. El tráfico cursado (expresado en Erlangs), vale:

a) 10/7 **b)** 20/7 **c)** 2 **d)** NRAEC

5. Considera un sistema M/M/3/3 con $\lambda = 4$ y $\mu = 1$ ambas en clientes/s. En $t = 10$ s llega un cliente y encuentra dos servidores ocupados y, por tanto, ocupa el único servidor que queda libre. Una vez ha entrado en el sistema el cliente anterior ya no se admiten nuevos clientes. ¿Cuál es la probabilidad (utilizando 3 decimales con redondeo) de que en $t = 11$ s el sistema todavía esté lleno?

a) 0,368 **b)** 0,211 **c)** 0,050 **d)** NRAEC

6. La figura representa el diagrama de transiciones de una cadena de Markov de 3 estados. Si en inicialmente el sistema está en el estado 1, cuál será el valor del parámetro p que hace que la probabilidad del estado 2 en régimen estacionario sea igual a 1/4, es decir, $P_2 = 1/4$.



a) No puede conseguirse que $P_2 = 1/4$ para ningún valor de p.

b) 1/2

c) 1/4

d) NRAEC

P-19

7. Si en la cadena de Markov del ejercicio 6 tomamos $p = 9/10$ y T_0 representa el tiempo de residencia en el estado 0, medido en ranuras, la probabilidad de que T_0 sea superior a 10 ranuras, $P(T_0 > 10)$, será (utilizando 3 decimales con redondeo):

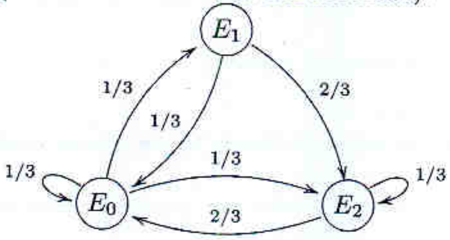
a) 0,035 **b)** 0,349 **c)** 0,039 **d)** NRAEC

8. En un sistema M/M/1, si Q es la variable aleatoria número de clientes en cola, entonces $E[Q^2]$ vale

a) $\rho^3(1-\rho)/(1+\rho)^2$ **c)** $\rho^3(1+\rho)^2/(1-\rho)^2$

b) $\rho^2/(1-\rho)^2$ **d)** $\rho^2(1+\rho)/(1-\rho)^2$

9. Suponga que la cadena de la figura está en régimen permanente y se observa durante 3003 transiciones consecutivas, entonces el número medio de transiciones que van a E_2 desde un estado diferente a E_2, es (utilizando 3 decimales con redondeo):



a) 505,534

b) 848,233

c) 237,151

d) 770,000

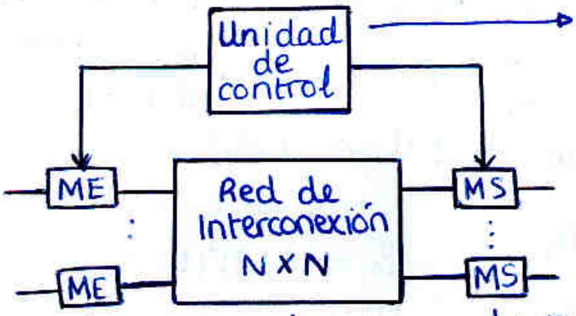
10. A un conmutador de células 10 × 10 con arquitectura por división espacial monoetapa con memoria en puertos de salida se le ofrece un tráfico de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}5$. Para un puerto de salida cualquiera, cuando éste se vacía, el tiempo medio que dura esta situación expresado en ranuras es de (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) 1,125 **b)** 2,065 **c)** 2,492 **d)** 3,127

Tema 8. Arquitectura de los conmutadores de células

- **Conmutador ATM**

Bloques funcionales



- control de admisión de conexiones (CAC)
- Gestión de averías
- Gestión de prestaciones
- Gestión de la configuración de la red
- Gestión de la tarificación

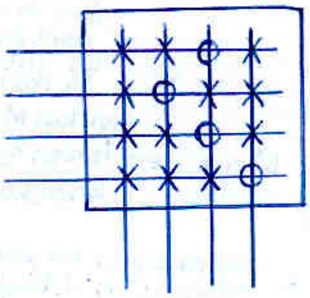
→ módulos de salida:
- eliminar etiquetas internas
- tranlación VPI/VCI (virtual circuit identifier) de entrada al de salida
- generar HEC
- conversión electro óptica

→
- multicast?
- almacenamiento?
- descarte?
- priorización de tráfico?

→ módulos de entrada:
- conversión óptico-eléctrica
- verificar HEC (header error control)
- acceso a la tabla de encaminamiento
- adición de etiquetas internas

- **Arquitectura de la red de interconexión**

- División espacial monoetapa sin memoria (crossbar)



- Puntos de cruce : N^2 cambian cada slot
- Presenta conflicto si varias células van a misma salida (no confundir con bloqueo)

$$\boxed{\text{Caudal de cada puerto de salida} = \text{Prob de que al menos una célula vaya al puerto de salida} = 1-\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^N \ [\text{celulas/slot}] \\ = 1-e^{-\rho} \quad \text{si } N\to\infty}$$

ver dem abajo

Caudal Total $\quad Th = N\cdot\left[1-\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^N\right]$

← esto sería el caudal en [cel/slot], tb llamado factor de utilización ρ. El caudal en [cel/s] sería ρ/T_{slot}

En saturación ($\rho=1$): Caudal de cada puerto $= 1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$

$$\boxed{\text{si } N\to\infty \text{ y } \rho=1 \quad \text{caudal cada puerto} = 1-e^{-1} \ [\text{cel/slot}]}$$

Recuerda:

$$\boxed{e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1}$$

← no está elevado a x!!! No confundir con (*)

$$(a+b)^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{N-k}$$

$$\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!(a-b)!}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \quad (*)$$

$$\lim_{N\to\infty}1-\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^N=\lim_{\frac{N}{\rho}\to\infty}1-\left(1-\frac{1}{N/\rho}\right)^{\frac{N}{\rho}\rho}$$

$$=\lim_{-\frac{N}{\rho}\to-\infty}1-\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{N}{\rho}\right)}\right)^{-\frac{N}{\rho}}\right]^{\rho}}=1-\frac{1}{e^{\rho}}$$

· con memoria a la salida

Elimina la posibilidad de conflicto, pero cada salida tiene colas de espera que pueden llenarse.

$(pz+q)^N$

Régimen de llegada a cada cola de salida si cada línea de entrada tiene tráfico Bernouilly

: Binomial: $\Pi_k = \left[\begin{matrix}N\\k\end{matrix}\right]\left(\frac{\rho}{N}\right)^k\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{1-k}$ → $\Pi(z)=\left(\left(\frac{\rho}{N}\right)z+\left(1-\frac{\rho}{N}\right)\right)^N$, $\Pi'(1)=\rho$ ← nº medio de células ofrecidas a un puerto por slot

$\xrightarrow{N\to\infty}$ Poisson : $\Pi_k = \frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}$ → $\Pi(z)=e^{\rho(z-1)}$, $\Pi'(1)=\rho$

se logra caudal máximo de 1 cel/slot (100%)

Recuerda:

$$\Pi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_k\cdot z^k$$

$$P(z)=\underbrace{P_0\cdot\frac{z-1}{z-\Pi(z)}}_{Q(z)}\cdot\Pi(z)$$

$$P_0 = 1-\Pi'(1) = 1-\overline{\Pi_k} = 1-\rho$$

$$\overline{Q}=Q'(1)=\frac{1}{2}\frac{\Pi''(1)}{1-\Pi'(1)}$$

$$\overline{N}=P'(1)=\overline{Q}+\Pi'(1)$$

$$E[X]=\Pi'(1)$$

$$Var[X]=\overbrace{(\Pi''(1)+\Pi'(1))}^{E[X^2]}-\overbrace{(\Pi'(1))^2}^{E[X]^2}$$

Little:

Tasa $=\Pi'(1)$

$$\overline{W}=\frac{\overline{Q}}{\Pi'(1)}\ [\text{slots}]$$

$$\overline{T}=\frac{\overline{N}}{\Pi'(1)}=\overline{W}+1$$

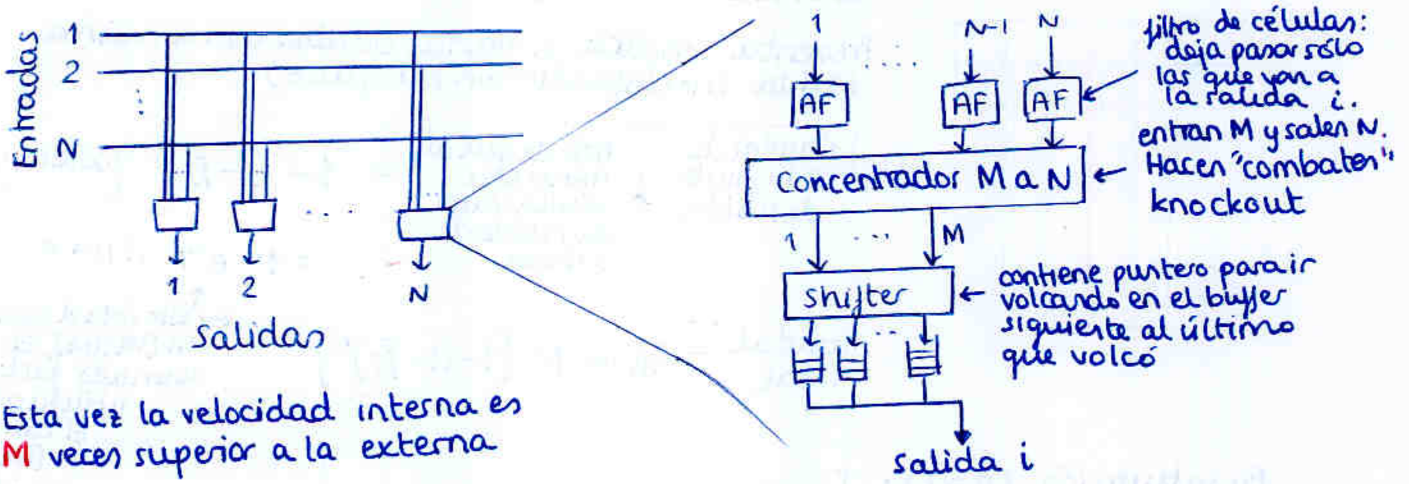
Este conmutador necesita una velocidad interna N veces superior a la externa

se obtiene:

$$\overline{Q}=\frac{N-1}{N}\underbrace{\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}}_{\frac{1}{2}\frac{\Pi''(1)}{1-\Pi'(1)}\text{ en el caso Poisson }N\infty}$$

$$\overline{W_Q}=\overline{Q}\cdot T_R$$

Caso particular: conmutador knockout



filtro de células: deja pasar sólo las que van a la salida i.

entran M y salen N. Hacen "combaten" knockout

contiene puntero para ir volcando en el buffer siguiente al último que volcó

Esta vez la velocidad interna es M veces superior a la externa

$$\boxed{\Pi_k=\left(\begin{matrix}N\\k\end{matrix}\right]\left(\frac{\rho}{N}\right)^k\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k}}$$

$$PP=\frac{\text{nº medio de células perdidas por slot}}{\text{nº medio de células ofrecidas por slot}}=\frac{\text{cada estado ponderado por el nº de células que se pierden}}{\underset{\text{nº puertos de entrada}}{\underset{\uparrow}{N}}\cdot\underbrace{\frac{\rho}{N}}_{\text{prob de que llegue una célula a este puerto salida}}}=\frac{\sum_{k=M+1}^{N}(k-M)\cdot\Pi_k}{\rho}$$

si $N\to\infty$

$$PP=\frac{\sum_{k=M+1}^{\infty}(k-M)\cdot\frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}}{\rho}=\frac{\rho^M e^{-\rho}}{M!}+\left(1-\frac{M}{\rho}\right)\left[1-\sum_{k=0}^{M}\frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}\right]$$

ej $N\to\infty$

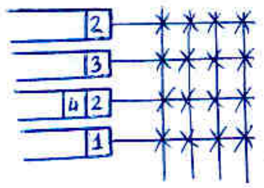
$\rho=1$

$M=9$ ↓ $PP=10^{-6}$

$M=10$ ↓ $PP=10^{-8}$

¡¡ Pérdidas despreciables concentrando de ∞ a 10 !!!

· con memoria a la entrada

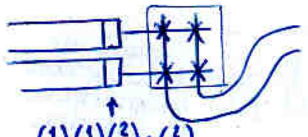


- velocidad interna no tiene que ser más rápida
- aparece el fenómeno HOL (Head of Line)

uno tendrá que esperar a pesar que el de detrás podría pasar

ejemplo 2x2 con $\rho = 1$

Los posibles estados son una cadena de Markov



$\binom{1}{1}\binom{1}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

$$\Pi = \begin{array}{c|cccc} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ \hline 11 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 12 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 21 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 22 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}$$

$P_{11} = \frac{1}{2} P_{11} + \frac{1}{4} P_{12} + \frac{1}{4} P_{21}$

$\frac{1}{2} P_{11} = \frac{1}{2} P_{12}$

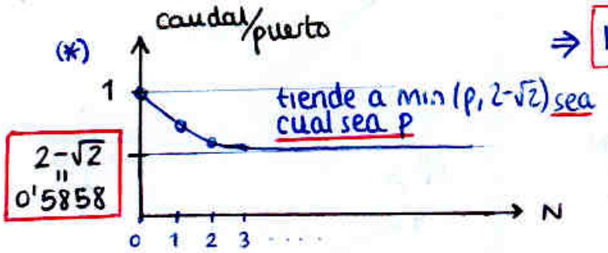
por simetría $P_{12} = P_{21}$; $P_{11} = P_{22}$

$P = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$

nº medio células transmitidas por slot $= 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 2 \cdot P_3 + 1 \cdot P_4 = 6/4$

nº medio células tx por slot por puerto $= \frac{6/4}{2} = 0'75$

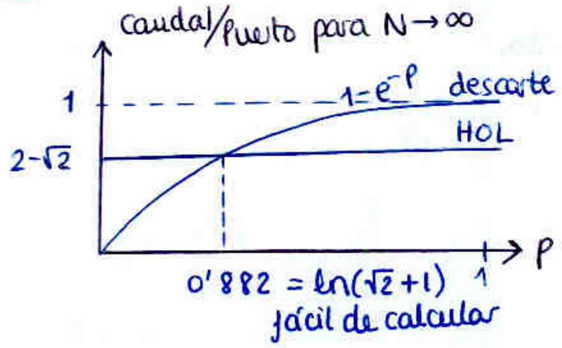
(*)



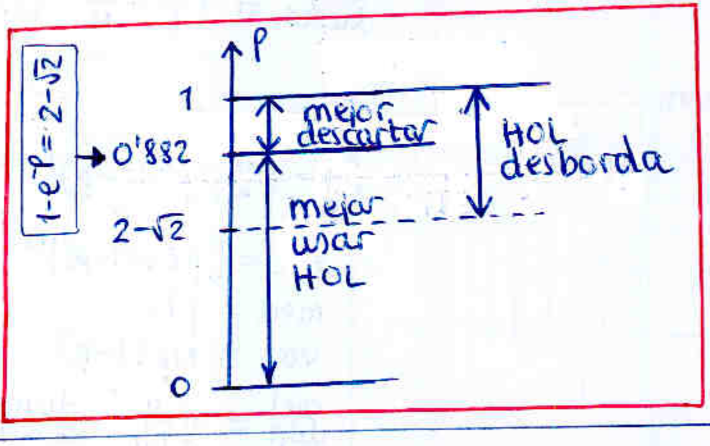
⇒ $\boxed{\text{HOL desborda para } \rho > 2-\sqrt{2}}$

se plantea que para ciertos ρ puede ser mejor descartar las células (se comportaría idéntico a crossbar)

$$\text{Caudal por puerto}_{\boxed{N\to\infty}} = \underbrace{\boxed{1-e^{-\rho}}}_{\text{crossbar (descartando)}} \text{ vs } \underbrace{\boxed{2-\sqrt{2}}}_{\text{memoria entrada}}$$

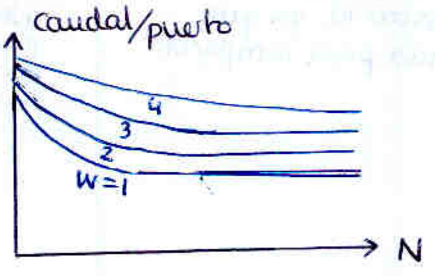


$0'882 = \ln(\sqrt{2}+1)$ fácil de calcular

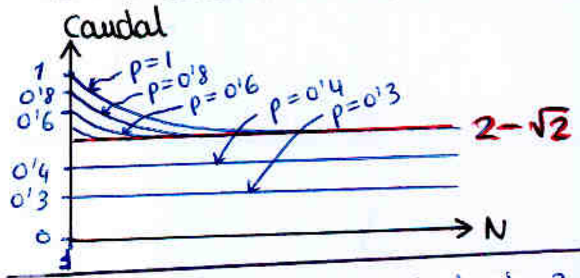


· Romper la disciplina FIFO

Otra mejora evidente consiste en no limitarse a mirar al primero sino a los W primeros de la cola
W = tamaño de la ventana



(*) Caudal por puerto salida en crossbar con memoria a la entrada:



$$\text{Caudal} = \begin{cases} \text{curva decreciente hasta } 2-\sqrt{2} & \text{si } \rho \geqslant 2-\sqrt{2} \\ \rho & \text{si } \rho \leqslant 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

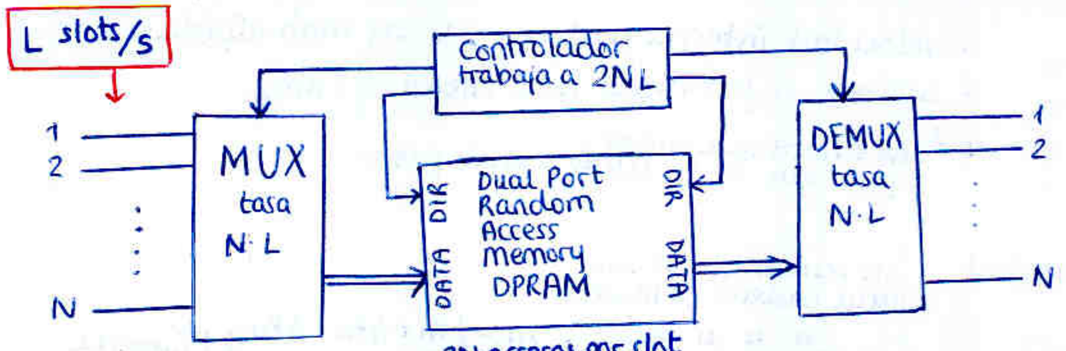
además se deduce

$\text{caudal} = \min(\rho, 2-\sqrt{2})$ si $N \to \infty$

· VOQ: virtual output queueing

- Disponer en cada puerto de N colas, una por cada puerto de salida
- se consigue caudal máximo igual a tener memoria en salida, es decir 100% (por tanto CA = ρ) y encima velocidad interna igual a la externa

· Conmutadores con arquitectura de memoria (compartida/repartida)



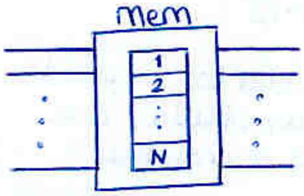
· 2N accesos por slot

· $t_{acceso} = \frac{1}{L \cdot 2N}$

· suponemos capacidad infinita

$\overline{Q} = \frac{N-1}{N} \frac{\rho}{2(1-\rho)}$ igual que crossbar con memoria a la salida

· Memoria repartida



prob de guardar en el bloque k-ésimo de la memoria

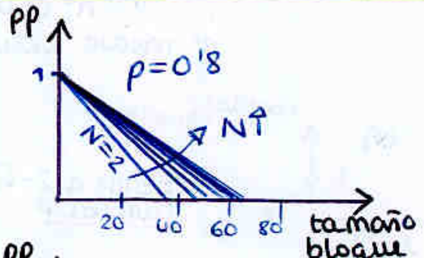
$P_k = \binom{N}{k}\left(\frac{\rho}{N}\right)^k\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k}$

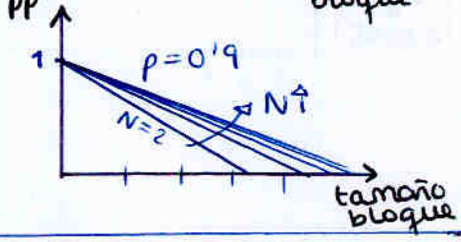
$P(z) = \left[\left(\frac{\rho}{N}\right)z + \left(1-\frac{\rho}{N}\right)\right]^N$

med $= \rho$

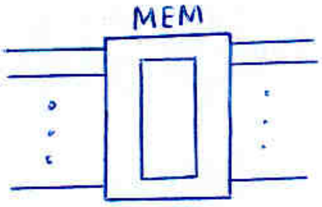
var $= \rho(1-\rho/N)$

coef disper. $= \sqrt{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{N}}$ aumenta con N





· Memoria compartida



$P_k = \binom{N}{k} \rho^k (1-\rho)^{N-k}$

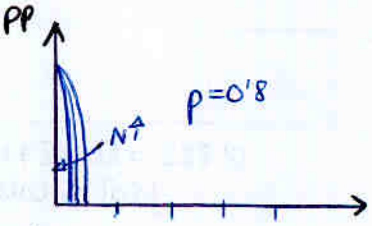
$P(z) = [\rho z + (1-\rho)]^N$

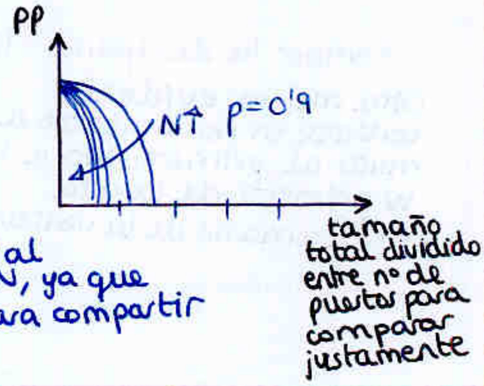
med $= \rho N$

var $= N\rho(1-\rho)$

coef disp. $= \sqrt{\frac{q}{N\rho}}$ disminuye con N

$= \frac{\sqrt{var}}{med}$

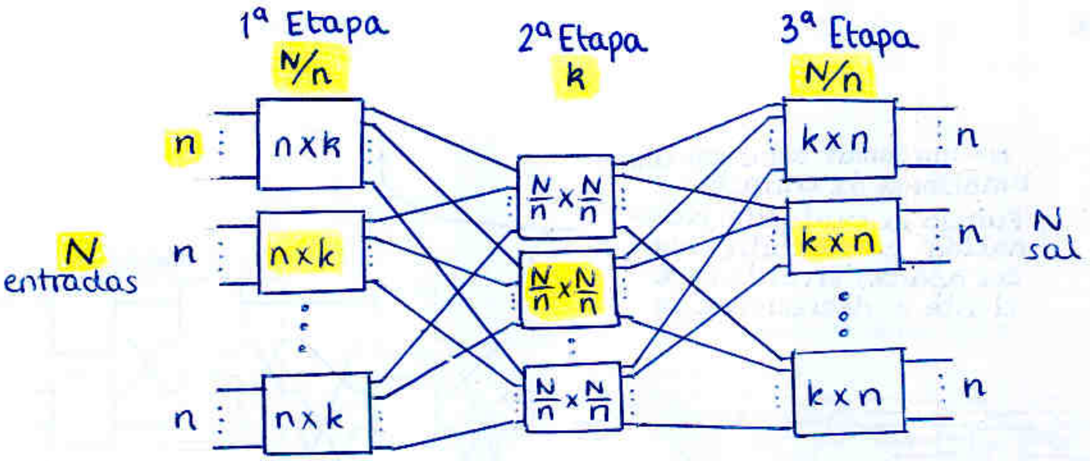




mejora PP al aumentar N, ya que hay más para compartir

Tema 9. Arquitectura de los conmutadores de células. Aspectos avanzados

1. División espacial multietapa



Nº de puntos de cruce

$$NPC = \frac{N}{n}\cdot(n\cdot k) + k\cdot\left(\frac{N}{n}\cdot\frac{N}{n}\right) + \frac{N}{n}(k\cdot n)$$

$$\boxed{NPC = k\left[2N+\left(\frac{N}{n}\right)^2\right]}$$

n óptimo

$$\frac{dNPC}{dn} = 0 \Rightarrow \frac{n^3}{n-1} = \frac{N}{2}$$

si $n >> 1$

$$\boxed{n_{opt} \simeq \sqrt{\frac{N}{2}}}$$

mejora mucho los NPC frente a la crossbar, pero (independientem. a que tb hay conflicto por duplicidad de etiquetas) puede presentar bloqueo interno.

Accesibilidad Total
Toda entrada tiene acceso a toda salida, independientemente de si está libre o no.

$\not\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Bloqueo interno nulo
Cualquier entrada libre puede interconectarse a cualquier salida libre
- en sentido estricto: siempre
- en sentido amplio: sólo si tengo la capacidad de reordenar las conexiones en curso

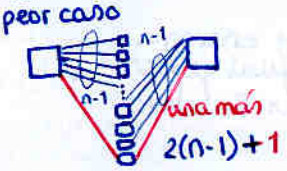
ejemplo: red de 3 etapas

$\boxed{k = 2n-1}$ } bloqueo nulo en sentido estricto

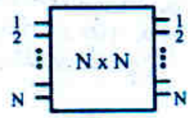
$k = 2n-2$
⋮
$\boxed{k = n}$ } → bloqueo nulo en sentido amplio

Red de Clos

peor caso



Redes de Benes N potencia de 2 → se monta recursivamente con matrices 2x2 y Benes $\frac{N}{2}$



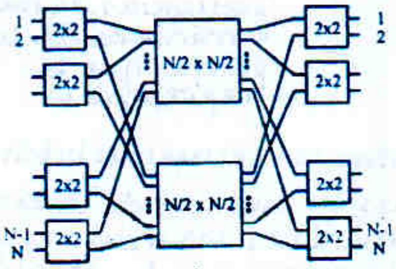
- bloqueo nulo en sentido amplio

$\boxed{\text{nº de etapas: } 2(\log_2 N) - 1}$ dos lados simétricos con $\log_2 N$ salvo la etapa intermedia que la comparten

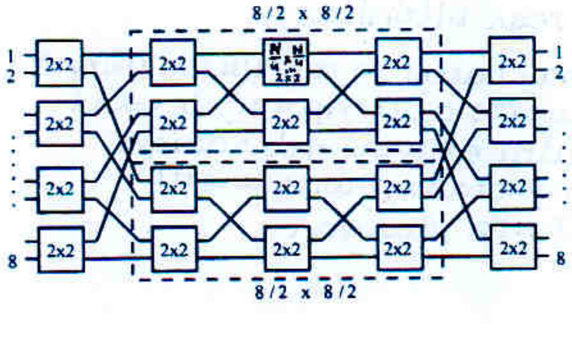
$\boxed{\text{nº matrices} = \left(\frac{N}{2}\right)\cdot \text{nº etapas}}$

$\boxed{NPC = 4 \cdot \text{nº matrices}}$

H



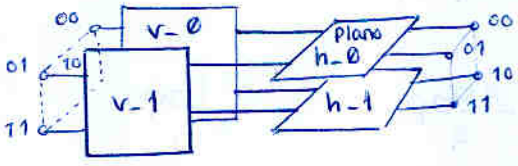
H

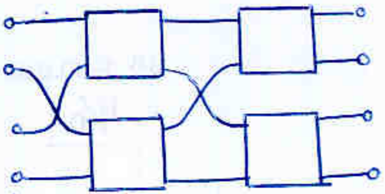


3. Redes de Banyan

Autoencaminamiento: no se necesita unidad de control, las propias células conmutan.

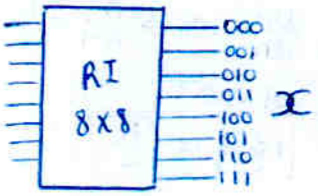
Red Banyan 4x4:

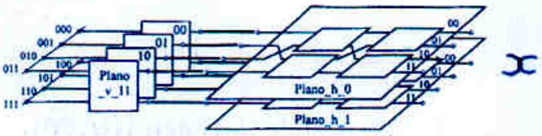


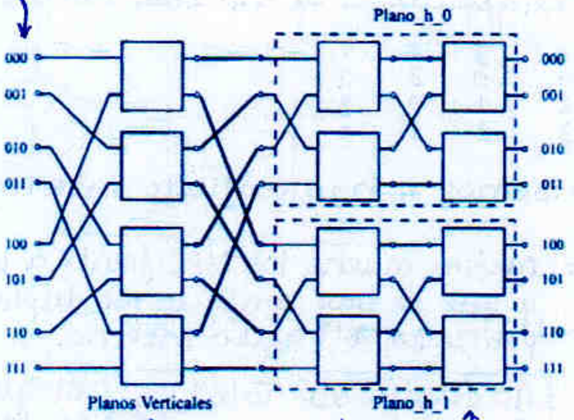


Red Banyan 8x8:

No funcionan todas las combinaciones de entrada
Funciona cualquier ordenación compactada (i.e. huecos aparte) en orden creciente o decreciente (y desplazamiento cíclico)







1ª etapa mira el 1er bit de la etiqueta
2ª etapa mira 2º bit
3ª etapa mira 3er bit

nº etapas: $\log_2 N$
nº matrices: $(\frac{N}{2}) \cdot \log_2 N$

Red Banyan N x N

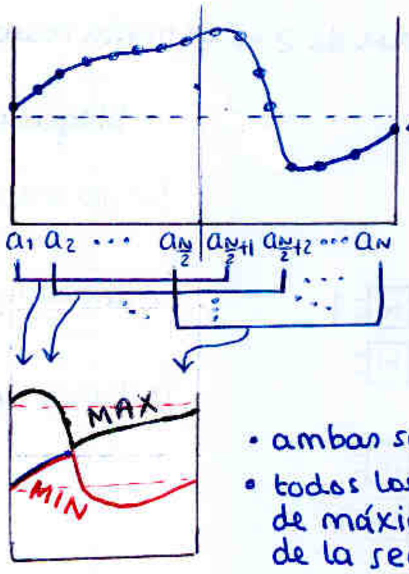
Se pueden construir recursivamente con estructura idéntica a los ordenadores bitónicos (ver pag sig.). Aunque el elemento básico no tenga nada que ver (aquí es un conmutador 2x2 y allí es un comparador) como regla mnemotécnica es MUY útil.

Sólo la parte que ordena al final, no la que obtiene la secuencia bitónica

---

Secuencias bitónicas

- Una secuencia es bitónica si ella misma o un desplazamiento cíclico de ella está compuesta por 2 secuencias monótonas contiguas

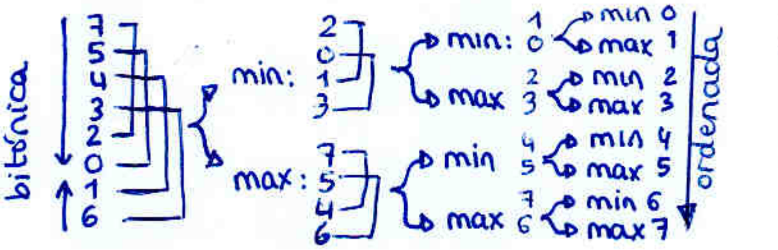


si esta muestra sobrepasara a la primera, la secuencia ya no sería bitónica (piénsalo)

podemos formar las secuencias de máximos y mínimos de las parejas que se representan

- ambas son secuencias bitónicas
- todos los números de la secuencia de máximos son mayores que los de la secuencia de mínimos

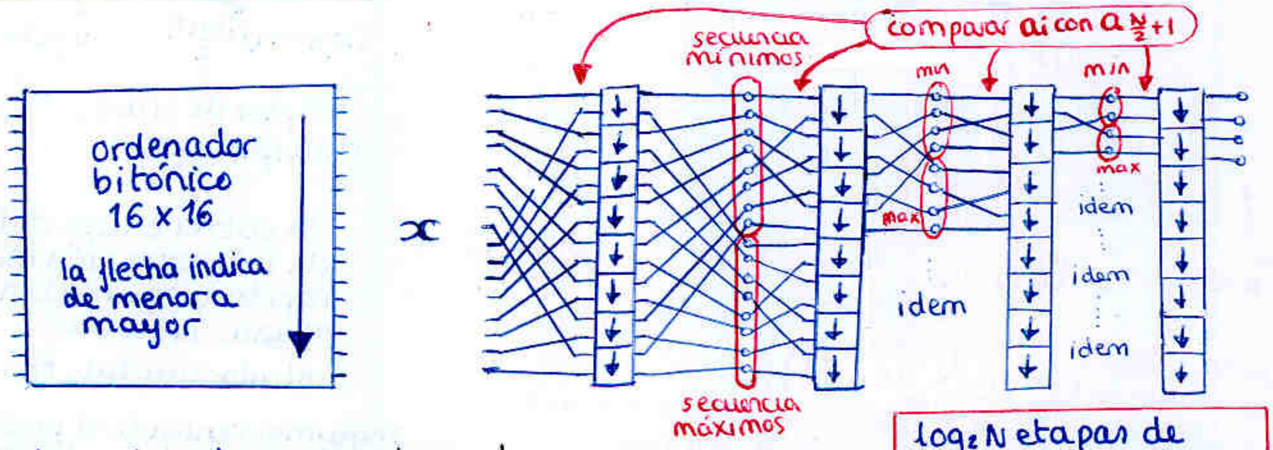
se puede utilizar para ordenar etiquetas que sean bitónicas



si hay huecos se consideran siempre mayores al comparar, lo cual resulta en una ordenación compactada, justo lo que necesita Banyan

Redes Batcher

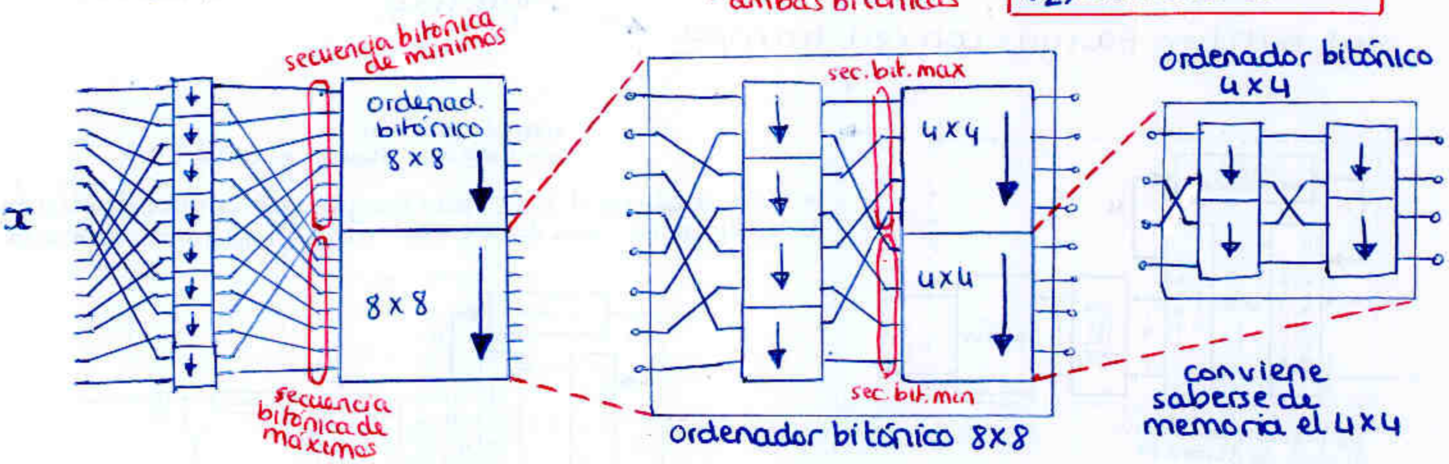
- **Ordenador bitónico N×N** secuencia bitónica a la entrada → secuencia ordenada a la salida



- min > max
- ambas bitónicas

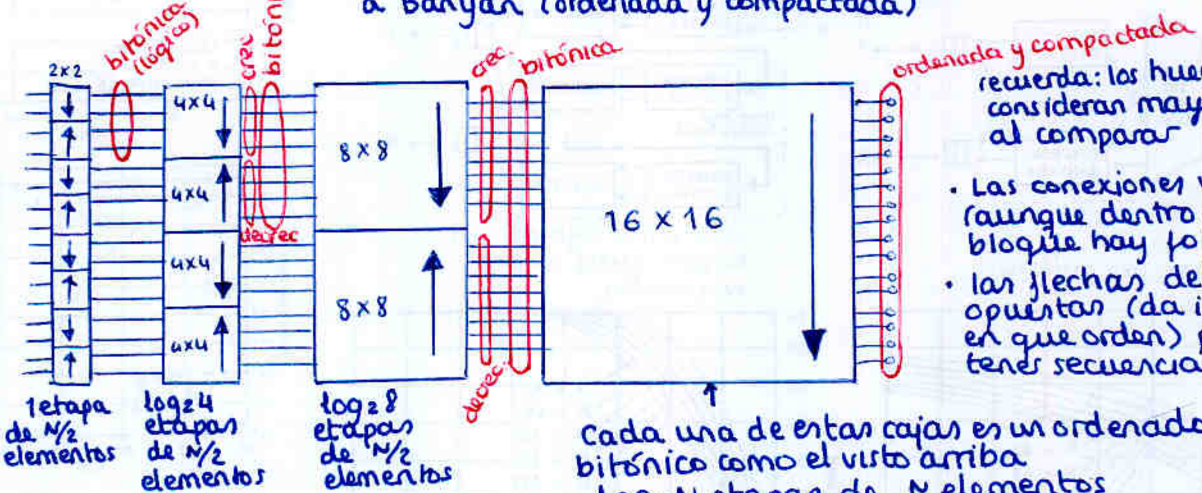
log₂N etapas de $(\frac{N}{2})$ elementos cada una

otra forma de verlo es recursivamente



Notar que todos los bloques tienen la flecha en el mismo sentido

- **Red batcher N×N** utilizando ordenadores de menor orden, logramos obtener una secuencia bitónica a partir de una desordenada, que podemos finalmente aplicar a un ordenador N×N para que la ordene y se la entregue a Banyan (ordenada y compactada)



recuerda: los huecos se consideran mayores al comparar

- Las conexiones van rectas (aunque dentro de cada bloque hay follón)
- las flechas deben ir opuestas (da igual en que orden) para poder tener secuencia bitónica

Cada una de estas cajas es un ordenador bitónico como el visto arriba
log₂N etapas de $\frac{N}{2}$ elementos

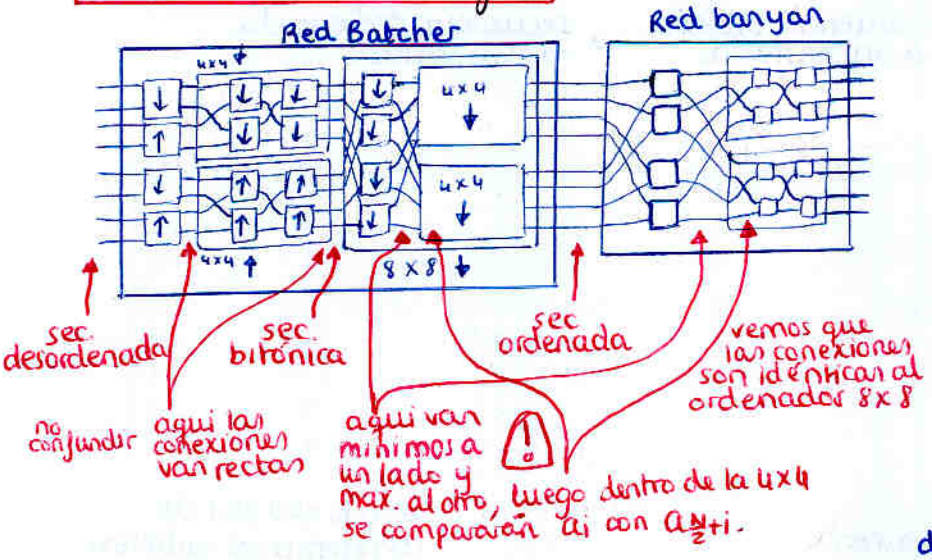
$$\boxed{n^o \text{etapas} = (1+2+3+\ldots+\log_2 N) = (1+\log_2 N)\cdot\frac{\log_2 N}{2}}$$

- ordenar etiquetas es igual a conmutar si no hay huecos

$$n^o \text{ elementos básicos} = \left(\frac{N}{2}\right)\cdot n^o \text{ etapas}$$

$$\text{NPC} = 4 \cdot n^o \text{ elem. básicos}$$

Redes Batcher - Banyan



Nº etapas:

sumar Batcher + Banyan

$(\log_2 N+1)\frac{\log_2 N}{2}$ $\quad$ $\log_2 N$

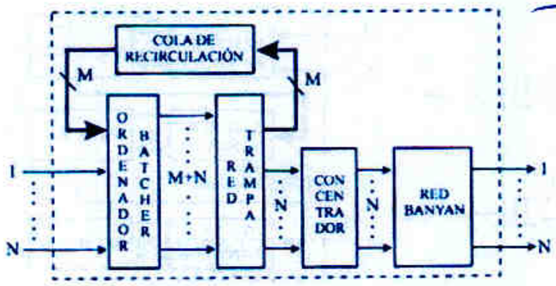
Nº ptos de cruce: multiplicar por 4

Se obtiene una red de interconexión muy rápida y equivalente a una crossbar

(calcular caudal, PP, ...)

seguimos teniendo el problema de la duplicidad de etiquetas que hay que solucionar:

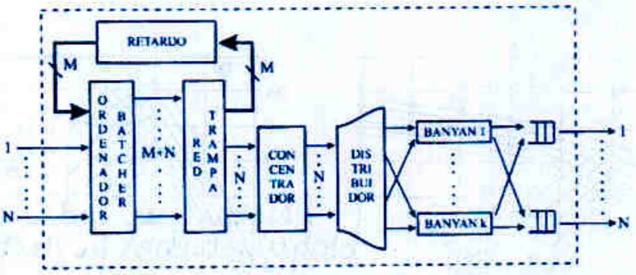
Red batcher Banyan con red trampa

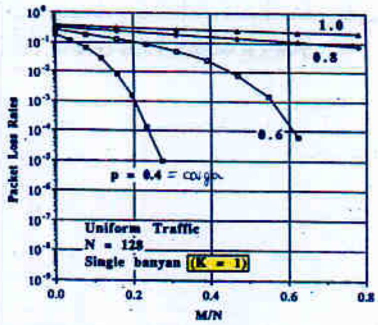


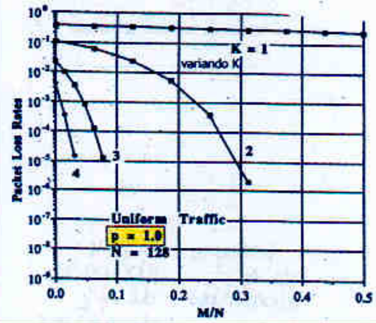
Los paquetes con mismo circuito de destino se capturan en la red de circulación para volver a salir cuando se pueda

ejemplo práctico: Conmutador Sunshine (AT&T 90)

se tiene duplicidad k de redes Banyan que permite duplicidad de k etiquetas; una duplicidad mayor simplemente recircula

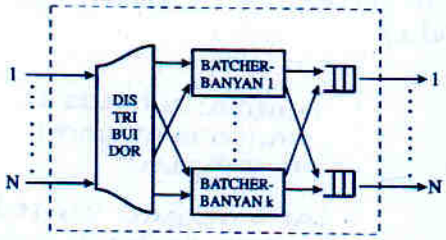




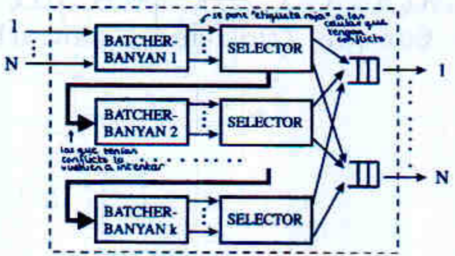


Paralelo y tándem

Paralelo

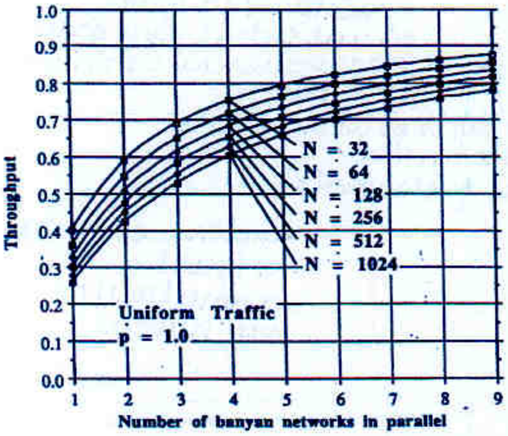


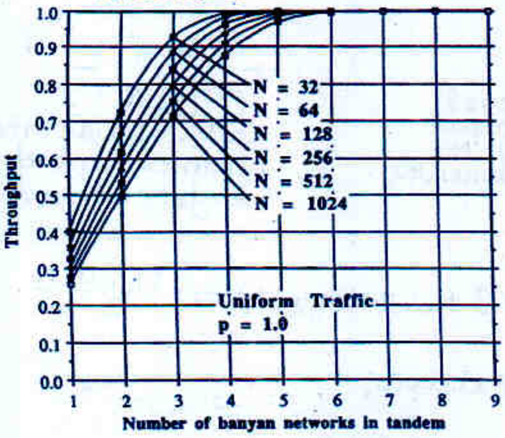
Tándem



Como vemos agrupar en tandem ofrece mejores resultados.

se obtienen las gráficas



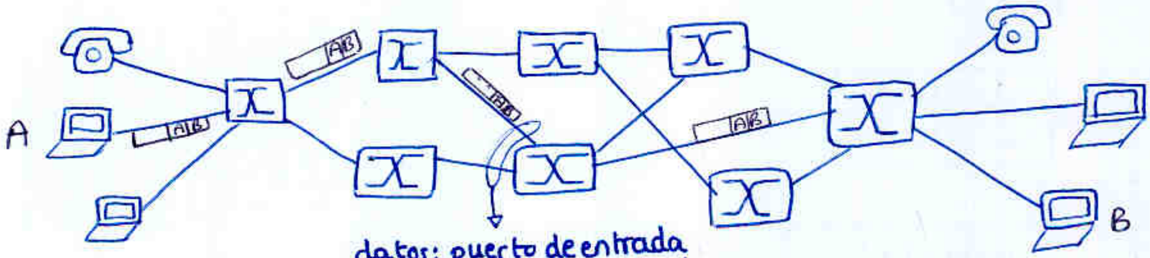


Capítulo 8. Arquitectura de los conmutadores de células

1 Encaminamiento

Funciones relacionadas con la retransmisión y actualización de la tabla de encaminamiento

Red de telecomunicación
- Terminales
- Nodos — Función de conmutación
- Enlaces — Función de transmisión



datos: puerto de entrada
voz : circuito de entrada

Función de conmutación
- modo circuito
- modo paquete
  - circuito virtual — ATM (48+5) octetos
  - datagrama

Retransmisión	Actualización de las tablas
Realización en hardware	Realización en software

En ATM : retransmisión

Identificador de circuito virtual

VPI / VCI

virtual path identifier   virtual channel identifier

Indice		contenido	
Puerto de entrada	VPI/ VCI	Puerto de salida	VPI/ VCI

: actualización

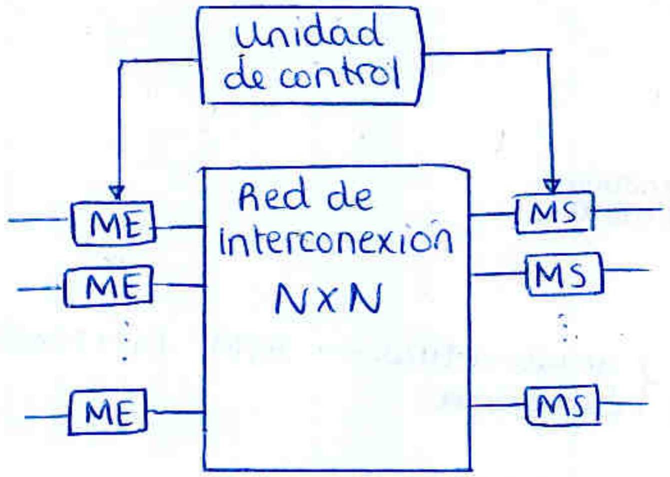
- Estimación del tráfico
- Estimación del retardo
- Coste de un enlace

- Encaminamiento en ATM

- Calidad del servicio presente
  - Retardo máximo
  - Jitter (parpadeo): variación del retardo
  - Tasa de pérdidas máxima

2. Arquitectura de un conmutador ATM

- Bloques funcionales



- módulos de entrada (ME)

  - Conversión óptico eléctrica de la señal
  - Verificar el HEC (campo de control de errores)(header error control)
  - Acceso a la tabla de encaminamiento
  - Posibilidad de adición de etiquetas internas para el encaminamiento a través de la red de interconexión NxN

- módulos de salida (MS)

  - Eliminación de las etiquetas de uso interno
  - Traslación VPI/VCI de entrada → VPI/VCI de salida
  - Generación de un nuevo HEC
  - Conversión eléctrico óptica

- Red de interconexión (RI)

  - soporte multicast (varios destinos para misma entrada)
  - Almacenamiento temporal (necesario cuando hay conflicto en el acceso a un puesto de salida)
  - Priorización del tráfico según la QoS negociada en el "call setup"
  - Descarte selectivo de células
  - Monitorización de la congestión

- Unidad de control (UC)

Relacionado con el control de admisión de conexiones (CAC)

- Admisión o rechazo de una nueva conexión
- Reserva de recursos para toda conexión admitida
- Cooperacion con los protocolos de encaminamiento

Además

- Gestión de averias
- Gestión de prestaciones (históricas de tráfico)
- Gestión de la configuración de la red
- Gestión de la tarificación

3. Prestaciones de los conmutadores ATM

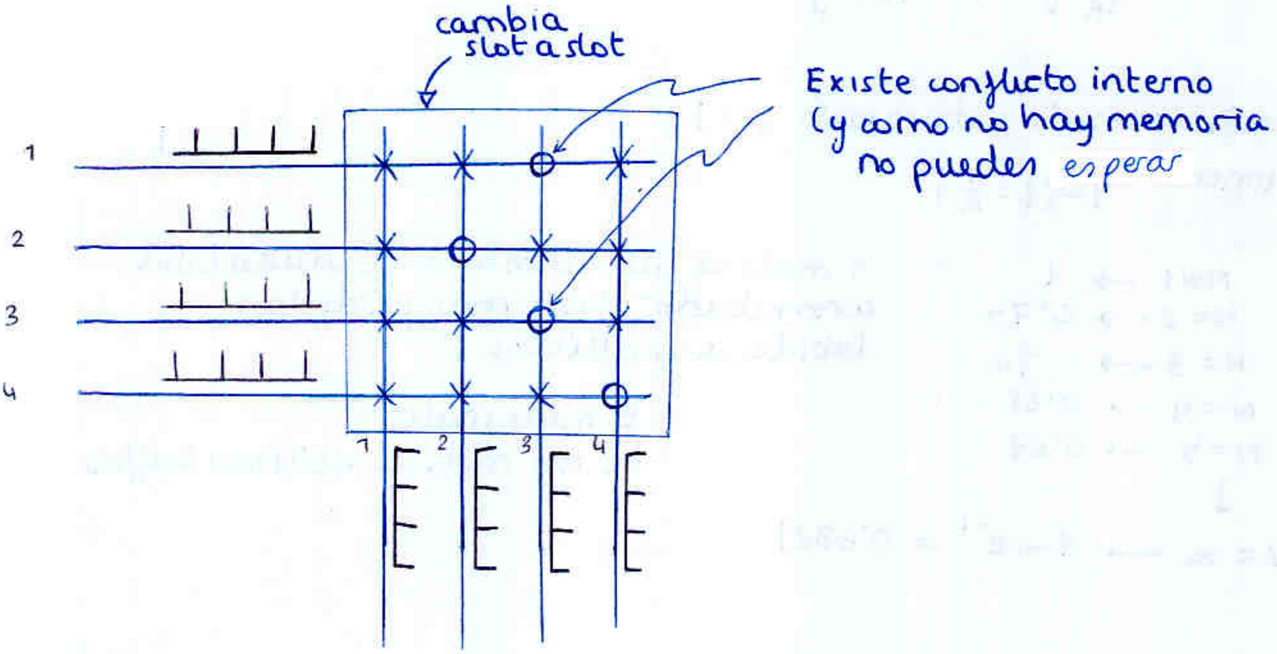
Se trata de llevar a cabo un análisis cuantitativo de ciertos parámetros de interes

- caudal [celulas/s]
- Retardo [s]
- Probabilidad de pérdida externa [%]
- modelo de tráfico: (en sistemas ranurados)

Arquitecturas de la red de Interconexión (RI)

1. División espacial (por ej: cross bar)
2. memoria compartida (por ej: TSI : time slot interchange)
3. medio compartido (por ej: ethernet)

4. Conmutadores con arquitectura por división espacial monoetapa sin memoria



Modelo de tráfico:

→ Bernouilli : con prob 'p' tendremos célula / paquete en un slot determinado en un puerto de entrada

Estudio de caudal:

Retardo: cero

Fijémonos en el puerto de salida nº 2

$$\underbrace{\underbrace{\left(1-\frac{p}{N}\right)}_{\text{prob de una célula en la entrada 1 que vaya a salida 2}}}_{\text{que no salga por 2}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{p}{N}\right)}_{\text{referente a la entrada 2}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{p}{N}\right)}_{\text{referente a la entrada 3}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{p}{N}\right)}_{\text{referente a la entrada 4}} =$$

prob de que NO SALGA célula por puerto de salida 2.

$$= \left(1-\frac{p}{N}\right)^N$$

$$1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^N \equiv$$ probabilidad de que al menos una célula sea encaminada al puerto de salida 2

$\equiv$

Caudal del puerto de salida 2

ya que se pierden las células por encima de una, es obvio que la probabilidad de que lleguen una o más es igual a la probabilidad de que salga una (recuerda, es una prob, es menor que 1) y por tanto es igual al caudal

Caudal del conmutador:

$$Th = N\left[1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^N\right] \quad [\text{células/slot}]$$

$$= \frac{N}{T_R}\left[1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^N\right] \quad [\text{células/segundo}]$$

En condiciones de saturación $p=1$

y entonces $1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$

$N=1 \longrightarrow 1$

$N=2 \longrightarrow 0'75$

$N=3 \longrightarrow 0'70$

$N=4 \longrightarrow 0'68$

$N=5 \longrightarrow 0'67$

$\downarrow$

$N=\infty \longrightarrow 1-e^{-1} = 0'6321$

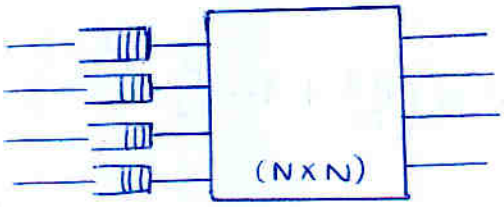
A medida que aumenta el caudal del conmutador, hay más pérdidas debido a conflictos

Es muy malo.
se nos motiva utilizar buffers

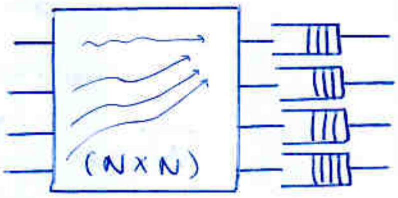
Necesidad de instalar buffers (memoria)

¿Donde? → Puertos de entrada
→ Puertos de salida

⇒ Conmutadores con arquitectura por división espacial monoetapa

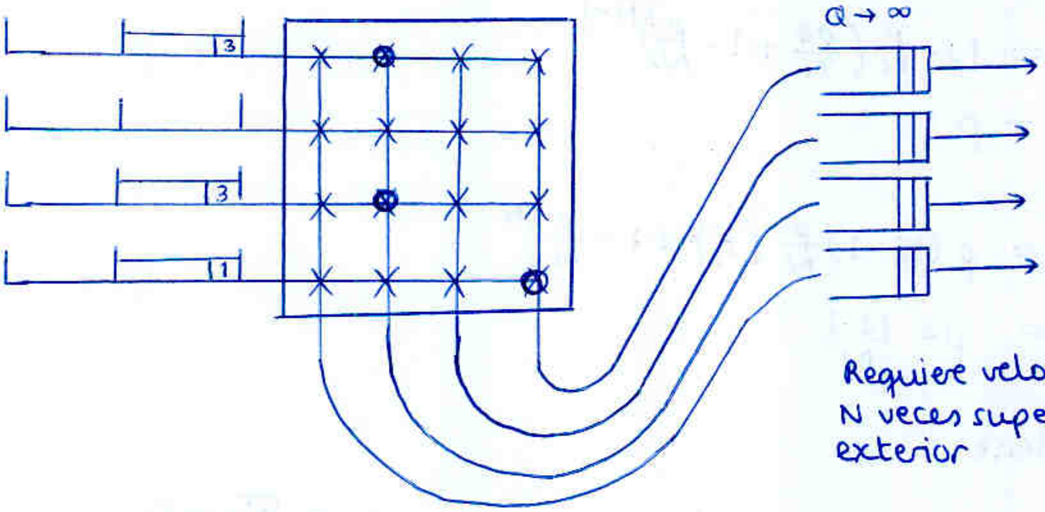


HOL (Head of Line)
si yo miro sólo el primero de la cola, podría malgastar la posibilidad de que mirando el segundo se pueda aprovechar mejor



peor caso:
velocidad interna = N x velocidad externa

8.5 Conmutadores con arquitectura por división espacial monoetapa y memoria a la salida



Requiere velocidad interna N veces superior a la exterior

El régimen de llegada a cada cola (ej: cola 3) resulta ser binomial

π_k : prob de que en un mismo slot, k paquetes vayan a la cola 3
Hay que considerar todas las posibilidades, cada una ponderada

$$\pi_k = \binom{N}{k} \underbrace{\left(\frac{\rho}{N}\right)^k}_{\substack{\text{k paquetes} \\ \text{van al 3}}} \underbrace{\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k}}_{\substack{\text{N-k paquetes} \\ \text{NO VAN al 3}}}$$

Por tanto estamos en presencia de una cola $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Binomial}}}{G} / D / 1$ Discreta

recuerda:

$$P(z) = Q(z) \cdot \Pi(z)$$

$$Q(z) = (1 - \Pi'(1)) \, \frac{z-1}{z - \Pi(z)}$$

siendo $\Pi(z) = \sum_{k=0}^{N} \Pi_k \cdot z^k$

truco:

$\left((pz + q)^N \text{ con } p = \rho/N \right)$

para distribución binomial $\Pi(z) = \left(\frac{\rho z}{N} + 1 - \frac{\rho}{N} \right)^N$

$\overline{Q}$: número medio de unidades en la cola

$$\overline{Q} = Q'(z)\Big|_{z=1} = \frac{\Pi''(1)}{2(1 - \Pi'(1))}$$

$\overline{W_Q}$: tiempo medio de espera

aplicando little

$$\overline{W_Q} = \underbrace{\frac{\Pi''(1)}{2(1 - \Pi'(1))} \cdot \frac{1}{\Pi'(1)}}_{\substack{\text{tiempo} \\ \text{medio medido} \\ \text{en slot}}} \cdot T_R$$

Para distribución binomial

$$\Pi'(z) = N \cdot \frac{\rho}{N} \left(\frac{\rho z}{N} + 1 - \frac{\rho}{N} \right)^{N-1}$$

$$\Pi'(1) = \rho$$

$$\Pi''(z) = \rho \, (N-1) \frac{\rho}{N} \left(\frac{\rho z}{N} + 1 - \frac{\rho}{N} \right)^{N-2}$$

$$\Pi''(1) = \rho^2 \, \frac{N-1}{N}$$

Por tanto se obtiene:

$$\overline{Q} = Q'(z=1) = \frac{N-1}{N} \, \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$\overline{W_Q} = \frac{N-1}{N} \, \frac{\rho}{2(1-\rho)} \cdot T_R \quad [\text{u.tiempo}]$$

$N = 1 \rightarrow \overline{W_Q} = 0$

$\overline{Q} = 0$

al aumentar N se va aumentando el tiempo de espera

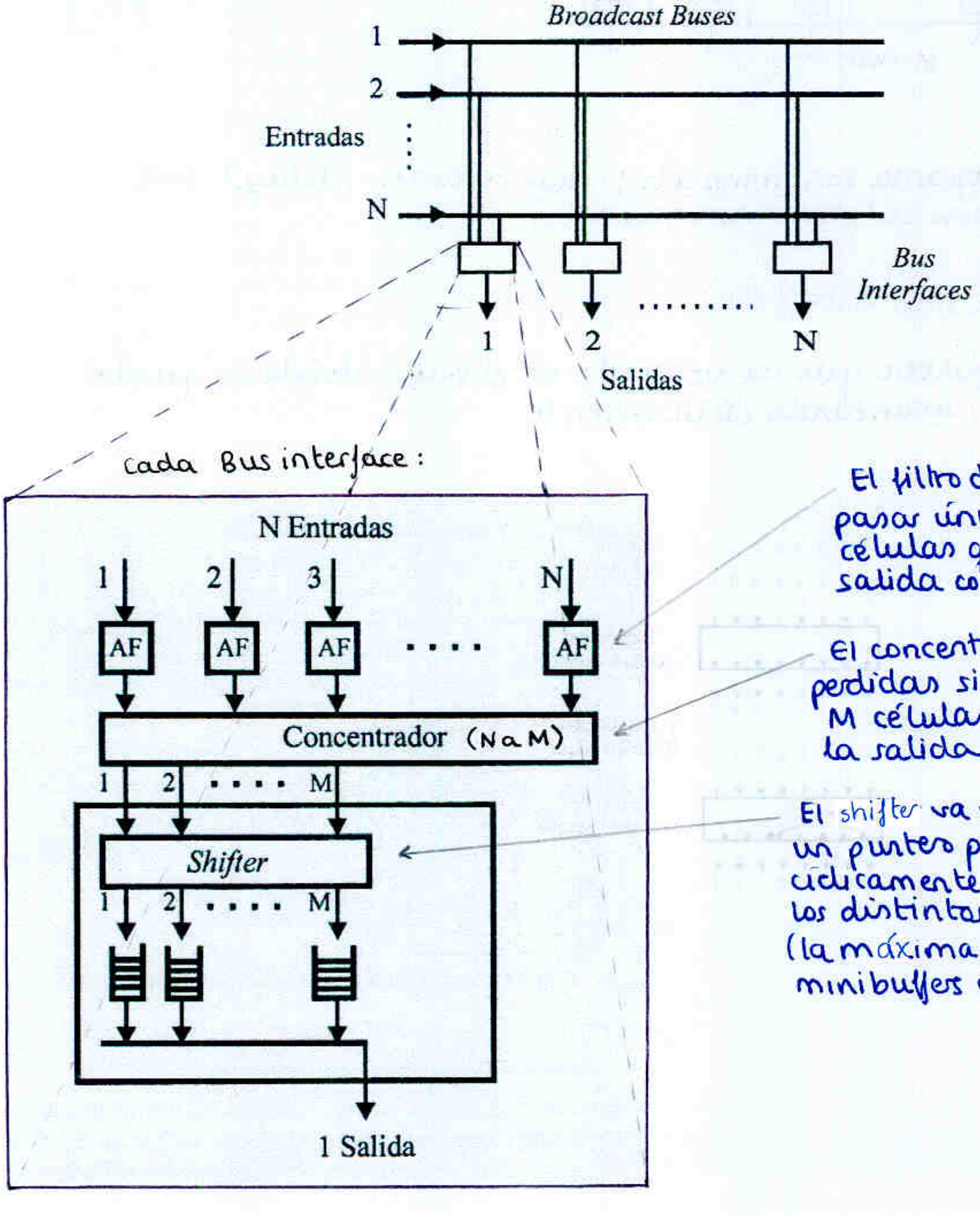
Además si N → ∞, la distribución tiende a Poisson

$$\Pi_k = \binom{N}{k}\left(\rho\frac{1}{N}\right)^{N}\underbrace{\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k}}$$

$$= \frac{N(\cancel{N}-1)\dots(\cancel{N-}k+1)}{k}\cdot\underbrace{\frac{\rho}{\cancel{N}}\cdot\frac{\rho}{\cancel{N}}\cdots\frac{\rho}{\cancel{N}}}_{k\ \text{veces}}\cdot e^{-\rho}$$

$$= \frac{\rho^k}{k}\cdot e^{-\rho}$$

Caso particular : Conmutador Knockout



El filtro de células deja pasar únicamente las células que van a la salida correspondiente

El concentrador tendrá pérdidas si hay más de M células dirigidas a la salida

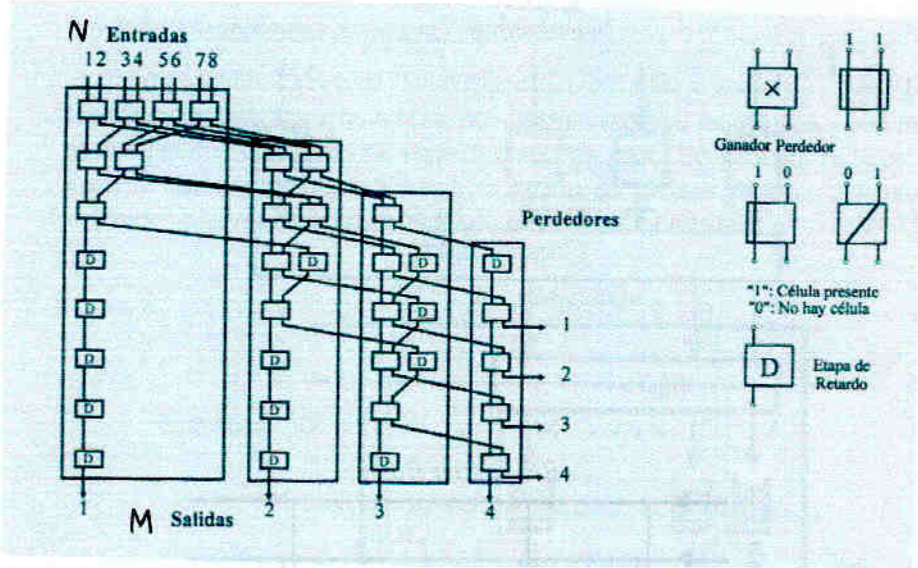
El shifter va manteniendo un puntero para ir colocando cíclicamente las células en los distintos minibuffers (la máxima diferencia entre minibuffers es una célula)

La ventaja es que no requiere velocidad interna N veces mayor que la externa, sólo requiere que sea M veces mayor

Funcionamiento de un concentrador:

sólo M células salen. Si hay más células que nº de salidas M, se hacen "combatir" (knockout)

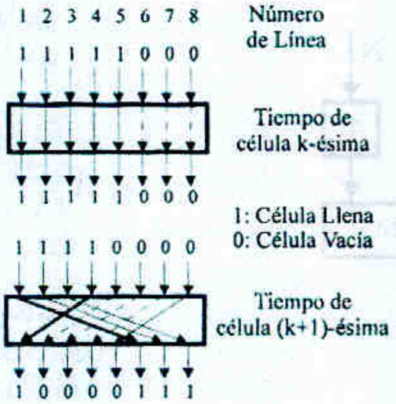
N>M



Las filas del diagrama son 'minislots'. Hay retardos (delay) para que los ganadores salgan síncronamente.

Shifter en el bus interface:

Tiene como un puntero que va volcando en el buffer donde se quedó la última vez, avanzando cíclicamente.



Ahora con el conmutador knockout se tiene en cada salida

$$\Pi_k = \binom{N}{k}\left(\frac{\rho}{N}\right)^k\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k} \quad \text{con } N > M$$

nota: en el libro $M \equiv L$

$$\overline{\text{Células perdidas}} = \sum_{k=M+1}^{N}(k-M)\Pi_k$$

$$\overline{PP} = \frac{\overline{\text{Celulas perdidas}}}{\overline{\text{Celulas ofrecidas}}} = \frac{\sum_{k=M+1}^{N}(k-M)\binom{N}{k}\left(\frac{\rho}{N}\right)^k\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k}}{\rho}$$

si $N \to \infty$ $\quad \overline{PP} = \dfrac{\sum_{k=M+1}^{\infty}(k-M)\frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}}{\rho}$

si $N \to \infty$ $\quad \overline{PP} = \dfrac{\rho^M e^{-\rho}}{M!} + \left(1-\dfrac{M}{\rho}\right)\left[1 - \sum_{k=0}^{M}\dfrac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}\right]$

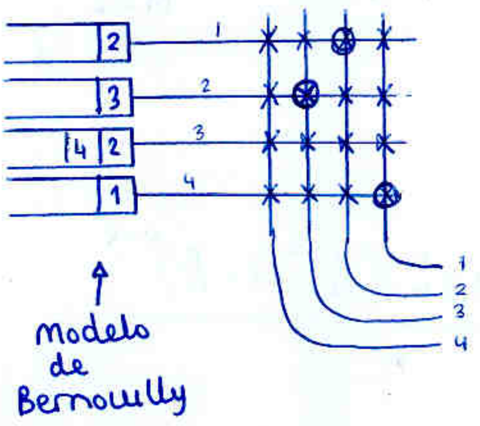
Condición de saturación $\rho = 1 \rightarrow$ si $M = 9$ $\quad PP = 10^{-6}$

si $M = 10$ $\quad PP \simeq 10^{-8}$

¡¡¡Concentrando desde infinito a 10 se han obtenido pérdidas MUY bajas!!! → El knockout es muy buena implementación

Como las pérdidas son despreciables, consideramos que el tiempo de espera es igual al del conmutador por división espacial monoetapa

6. Conmutadores con arquitectura por división espacial monoetapa con memoria a la entrada



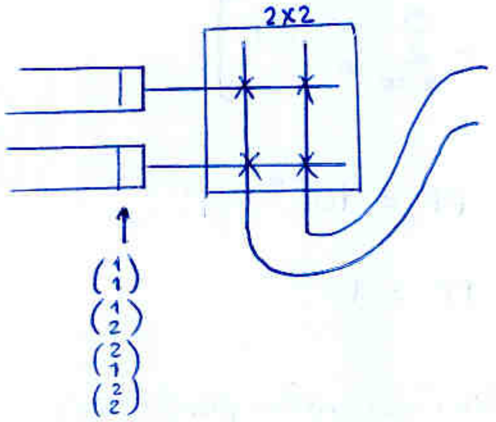
Elimina la necesidad de trabajar internamente N veces más rápido.

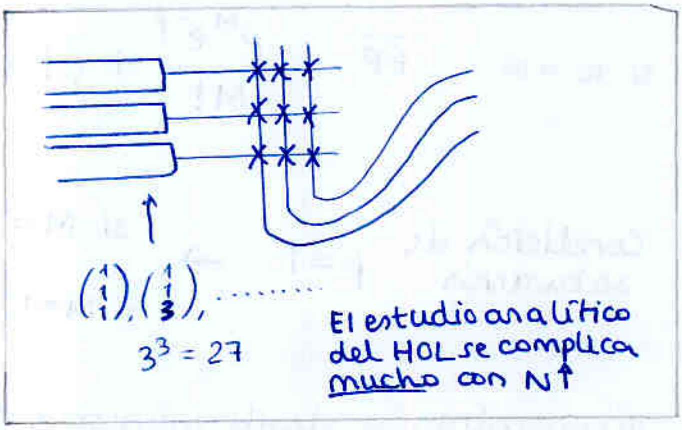
A cambio aparece el fenómeno de HOL (head of line):

En el ejemplo hay bloqueo entre las entradas 1 y 3, debido a la disciplina FIFO

(si me saltara la disciplina FIFO podría solucionarlo)

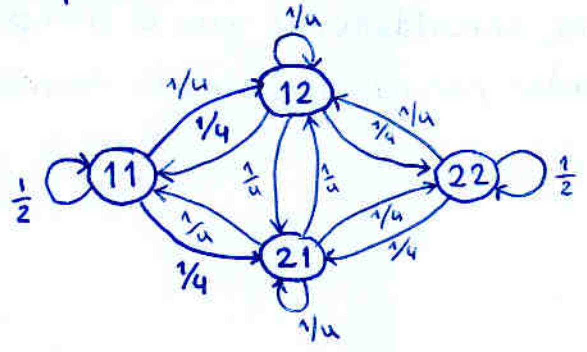
Veamos el estudio analítico en condiciones de saturación: $(\rho = 1)$





El estudio analítico del HOL se complica mucho con N↑

Los posibles estados son una cadena de Markov



$$\Pi = \begin{array}{c|cccc} & 11 & 12 & 21 & 22 \\ 11 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 12 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 21 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 22 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}$$

Hallemos el estado estacionario:

$$(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}) = P = P \cdot \Pi$$

$$P_{11} = \frac{1}{2} P_{11} + \frac{1}{4} P_{12} + \frac{1}{4} P_{21} + 0 \cdot P_{22}$$

$$\Big\downarrow \text{ por simetria } \begin{matrix} P_{11} = P_{22} \\ P_{12} = P_{21} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} P_{11} = \frac{1}{2} P_{12}$$

Por tanto

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Número medio de células transmitidas por slot

$$= 1 \cdot P_{11} + 2 \cdot P_{12} + 2 \cdot P_{21} + 1 \cdot P_{22}$$

$$= \frac{6}{4}$$

Número medio de células transmitidas por slot por puerto

$$= \frac{6/4}{2} = 0'75 \longrightarrow \text{la cola se llenará indefinidamente si } \rho = 1$$

Tabla: máximo caudal en arquitectura con buffers a la entrada y disciplina FIFO

N	caudal
1	1
2	0'75
3	0'6825
4	0'6553
5	0'6399
6	0'6302
⋮	
∞	$2-\sqrt{2} = 0'5858$

Por tanto no se puede usar éste conmutador si las llegadas tienen $\rho > 2-\sqrt{2}$

- La solución a esto es romper la disciplina FIFO
- otra solución es descartar paquetes cuando hay empates

Caso de romper la disciplina FIFO:

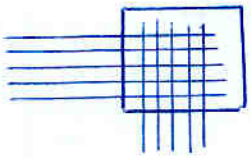
i.e. Observar las células en las colas de entrada en las anteriores W posiciones del buffer

W = tamaño de la ventana

N	W				
	1	2	3	....	8
2	0'75	0'84	0'89		0'96
4	0'66	0'76	0'81		0'92
8	0'62	0'72	0'78		0'89
16	0'60	0'71	0'77		0'88
32	0'59	0'70	0'76		0'88
64	0'59	0'70	0'76		0'88
128	0'59	0'70	0'76		0'88
⋮					

Caso de descartar paquetes en caso de conflicto

Recordemos el caso del conmutador sin buffer



caudal por puerto:

$$1-\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 1-e^{-\rho}$$

si descartamos los paquetes cuando hay conflicto, resulta ser exactamente igual a no tener buffers.

Por tanto

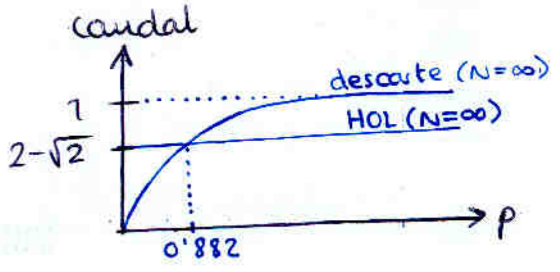
Caudal por puerto $1-\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 1-e^{-\rho}$

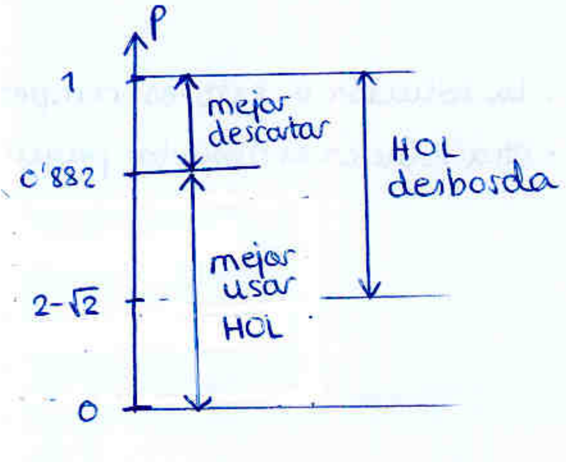
¿A partir de que ρ nos sale rentable una u otra cosa? (caso $N\to\infty$)

caudal por puerto $= \underbrace{\boxed{1-e^{-\rho}}}_{\text{descartando}}$ vs $\underbrace{\boxed{2-\sqrt{2}}}_{\text{almacenando en buffer entrada}}$ → incluyendo efecto head of line

$$1-e^{-\rho} > 2-\sqrt{2}$$

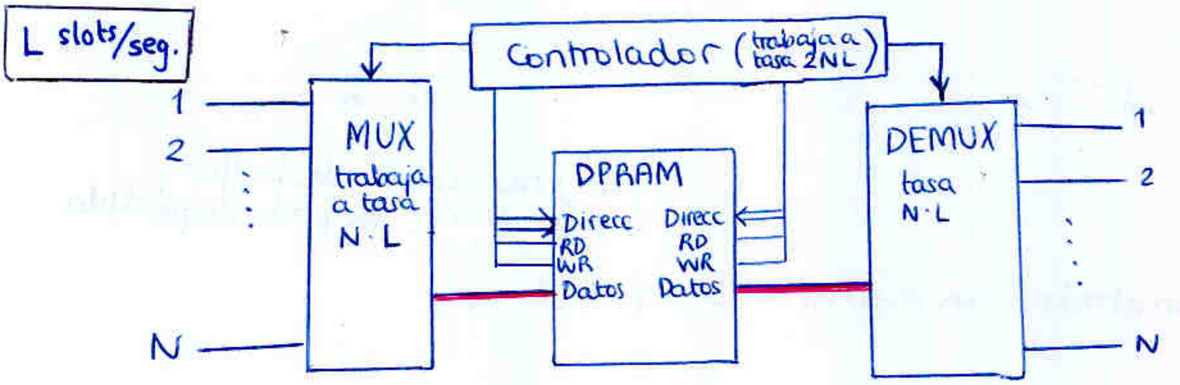
$$\Rightarrow \quad \rho > \ln(\sqrt{2}+1) = 0'882$$





N	colas a la entrada con tamaño finito	cola saturada, pero conviene no descartar paquetes	conviene descartar paquetes (mayor caudal)
1	$0 \leq p < 1$	$p = 1$	—
2	$0 \leq p < 0'75$	$0'75 \leq p < 1$	—
3	$0 \leq p < 0'682$	$0'682 \leq p < 0'953$	$0'953 \leq p \leq 1$
4	$0 \leq p < 0'655$	$\leq p <$	$0'936 \leq p \leq 1$
5	$0 \leq p < 0'639$	$\leq p <$	$0'924 \leq p \leq 1$
6	$0 \leq p < 0'630$	$\leq p <$	$0'917 \leq p \leq 1$
7	$0 \leq p < 0'623$	$\leq p <$	$0'912 \leq p \leq 1$
8	$0 \leq p < 0'618$	$\leq p <$	$0'908 \leq p \leq 1$
:			
∞	$0 \leq p < 2-\sqrt{2}$	$0'58 \leq p < 0'882$	$0'882 \leq p \leq 1$

7. Conmutadores con arquitectura de memoria compartida



DPRAM: Dual Port Random Access Memory

- tiempo de acceso: 2N accesos por slot (ranura)

$$t_{ac} = \frac{1}{L \cdot 2N} \quad L: \text{velocidad de la línea slots/s}$$

- suponemos capacidad de memoria infinita

suponiendo tráfico de Bernouilli

$$(\text{Caudal})\ Th = \frac{p}{\underset{\text{tiempo de slot}}{T_s}}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{Tiempo de}\\ \text{espera}\end{matrix}\right) \quad \overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\text{tasa de entrada}} = \frac{N-1}{N}\,\frac{p}{2(1-p)}\,T_s$$

por Little

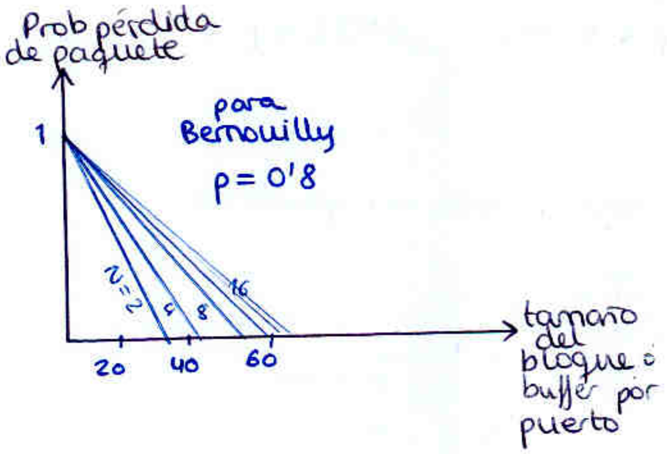
Gestión de la memoria

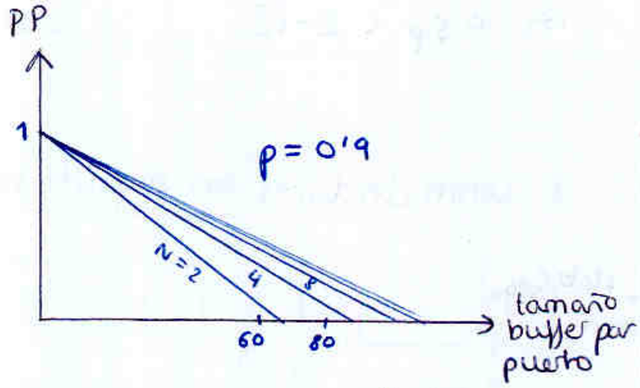
1- Repartida : N bloques iguales e independientes ← puede desaprovecharse la memoria

2- Compartida : Todo paquete accede a la memoria mientras haya disponibilidad. ← un enlace podría monopolizar la memoria

3- Técnicas híbridas : Parte repartida
Parte compartida

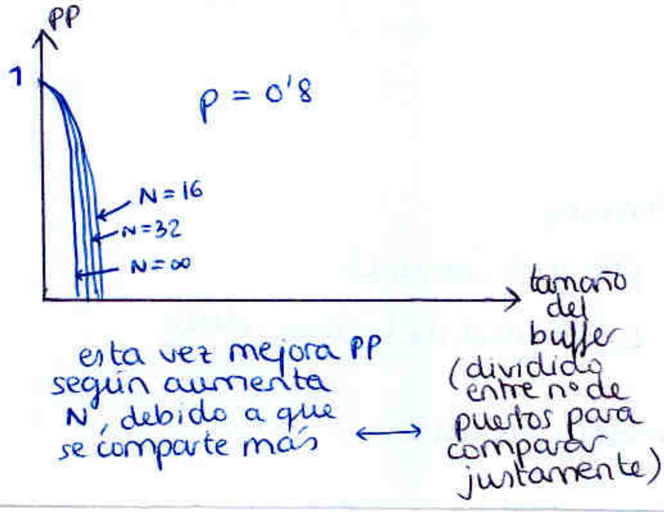
ejemplo:
Conmutador con memoria repartida



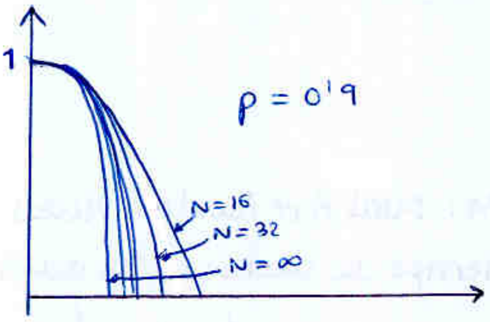


Hay necesidad de buffer mayor fijada la prob. de pérdida

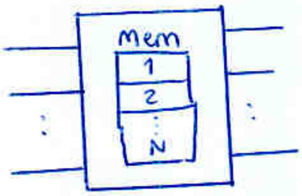
ejemplo: Conmutador con memoria compartida



esta vez mejora PP según aumenta N, debido a que se comparte más ⟷



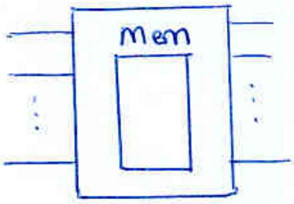
1°. Reparto de recursos



$$P_k = \binom{N}{k}\left(\frac{\rho}{N}\right)^k\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k} \quad \begin{cases} med = \rho \\ var = \rho\left(1-\frac{\rho}{N}\right) \end{cases}$$

↑ Prob de guardar en el bloque k-ésimo de la memoria

2°: Compartición de recursos



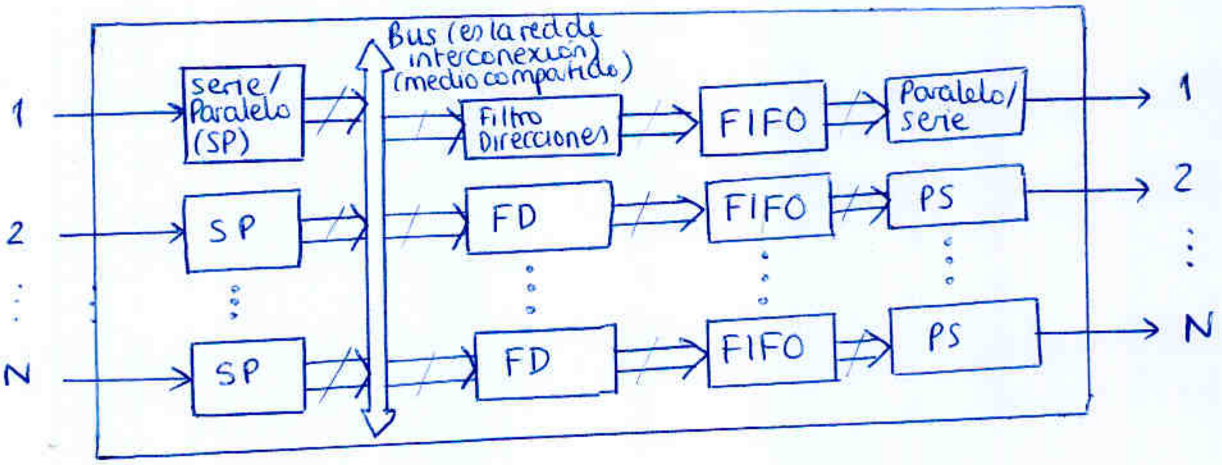
$$P_k = \binom{N}{k} \rho^k (1-\rho)^{N-k} \quad \begin{cases} med = N\rho \\ var = N\rho(1-\rho) \end{cases}$$

1° Coeficiente de dispersión = $\sqrt{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{N}}$ → Este coeficiente de dispersión aumenta con N

2° Coeficiente de dispersión = $\sqrt{\frac{q}{N\rho}}$ ⇒ Este coeficiente de dispersión tiende a cero con N

↕ Lo que nos desviamos respecto a la media

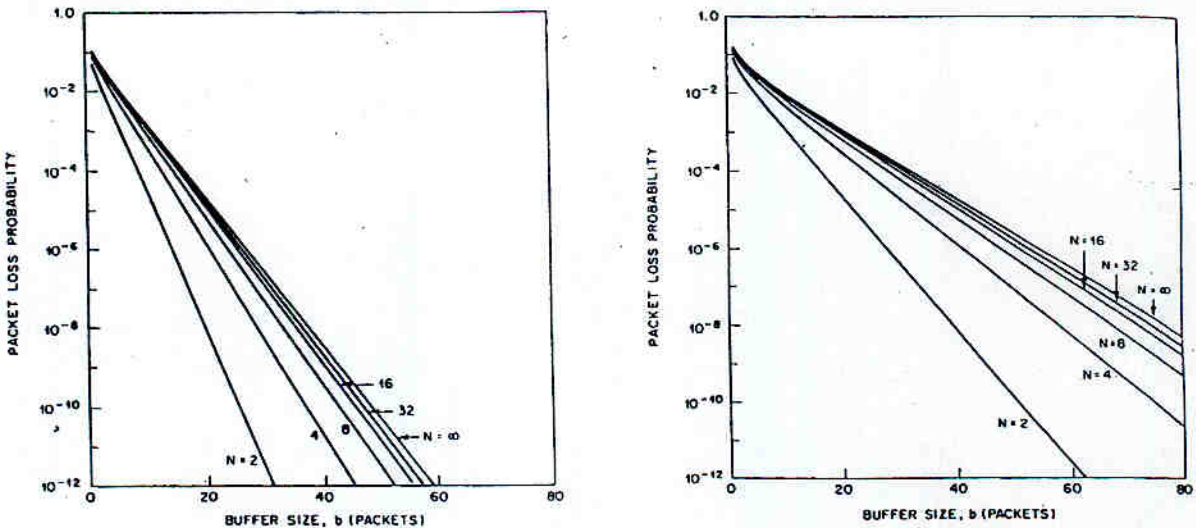
Conmutadores con arquitectura de Medio Compartido



Caudal: $Th = \rho$ [paquetes/slot]

Retardo: $\overline{W_Q} = \frac{N-1}{N}\frac{\rho}{2(1-\rho)}$ [slots]

Conmutador con Memoria Repartida



a) b)

Probabilidad de Pérdidas con bloques de memoria independientes: a) p=0.8; b) p=0.9

Reparto de memoria

$P_k = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{N}\right)^k\left(1-\frac{p}{N}\right)^{N-k}$; $P(z) = \sum_{k=0}^{N} P_k z^k = \left(\frac{p}{N}z + \left(1-\frac{p}{N}\right)\right)^N$

$P'(z) = \cancel{N}\frac{p}{\cancel{N}}\left(\frac{p}{N}z+1-\frac{p}{N}\right)^{N-1}$; $P'(1) = p$

$P''(z) = \frac{N-1}{N}p^2\left(\frac{p}{N}z+1-\frac{p}{N}\right)^{N-2}$. $P''(1) = \frac{N-1}{N}p^2$

$P'(z) = \sum_k k P_k z^{k-1}$

$P''(z) = \sum_k k(k-2) P_k z^{k-2}$

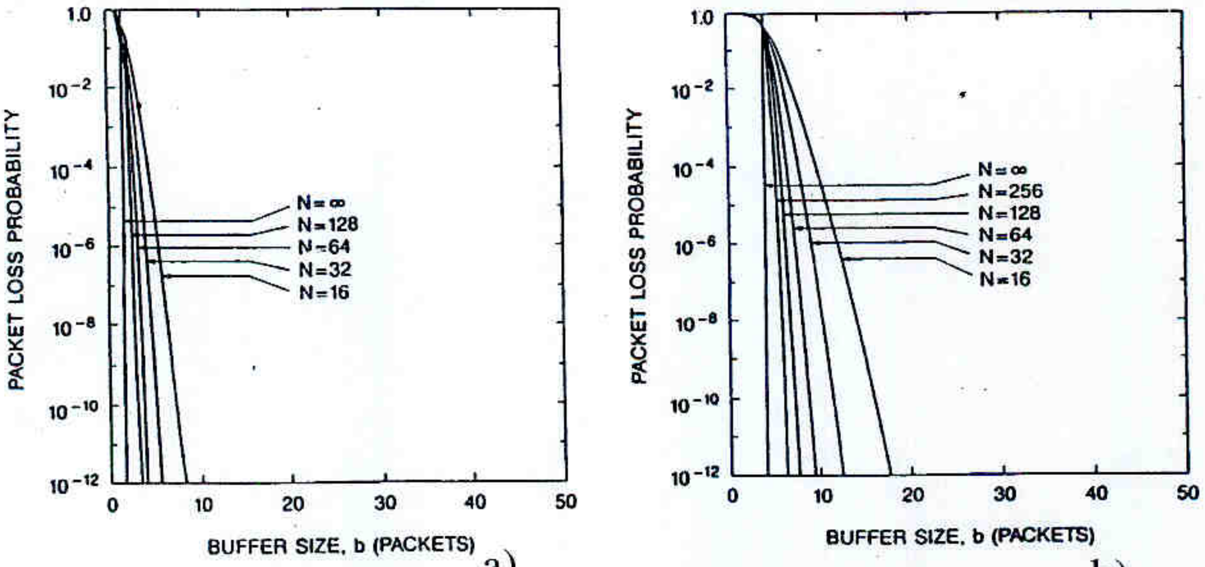
$\text{media} = P'(1) = p$

$\text{var} = E(k^2) - E^2(k) = P''(1) + P'(1) - P'^2(1) = P''(1) + P'(1)(1-P'(1))$

$\text{var} = \frac{N-1}{N}p^2 + p(1-p) = \cancel{p^2} - \frac{p^2}{N} + p - \cancel{p^2} = p\left(1-\frac{p}{N}\right)$

coef de dispersión: $\frac{\sqrt{\text{var}}}{\text{media}} = \frac{\sqrt{p\left(1-\frac{p}{N}\right)}}{p} = \sqrt{\frac{1}{p}-\frac{1}{N}}$

Conmutador con Memoria Compartida



a) b)

Probabilidad de Pérdidas con un sólo bloque de memoria compartido: a) p=0.8; b) p=0.9

Compartición de memoria

$P_K = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$; $P(z) = \sum_{K=0}^{N} P_K z^K = (pz+1-p)^N$

$P'(z) = Np(pz+1-p)^{N-1}$; $P'(1) = Np$

$P''(z) = N(N-1)p^2(pz+1-p)^{N-2}$; $P''(1) = N(N-1)p^2$

$med = P'(1) = Np$

$Var = E(K^2) - E^2(K) = P''(1) + P'(1) - P'^2(1) = P''(1) + P'(1)[1 - P'(1))$

$Var = N(N-1)p^2 + Np(1-Np) = \cancel{N^2p^2} - Np^2 + Np - \cancel{N^2p^2} = Np(1-p)$

$coef\ de\ dispersión = \frac{\sqrt{var}}{media} = \frac{\sqrt{Np(1-p)}}{Np} = \sqrt{\frac{1}{Np}(1-p)}$

Capítulo 9. Arquitectura de los conmutadores de células. Aspectos avanzados

1. Conmutación con arquitectura por división espacial multietapa

Tener N^2 puntos de cruce era muy caro.
surgieron redes multietapa para reducir puntos de cruce.

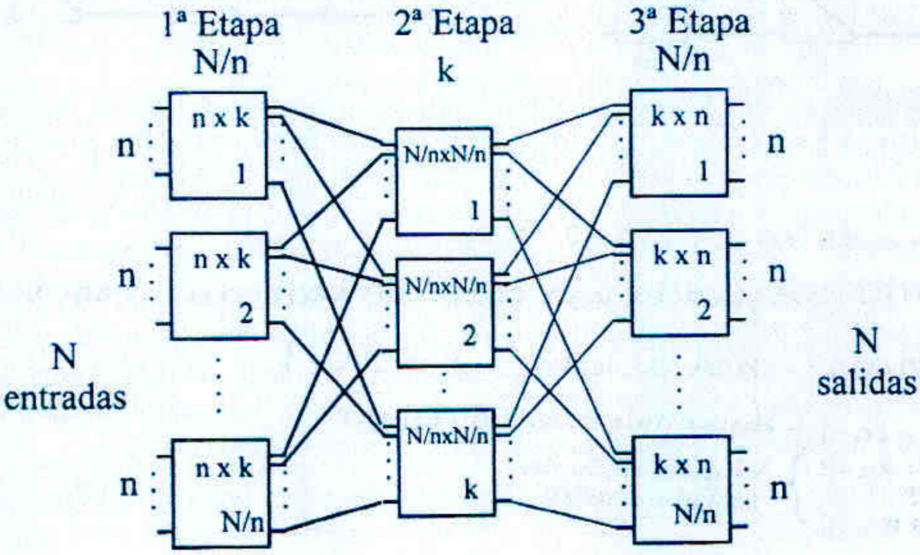


Figura 10.1. Red simétrica de tres etapas

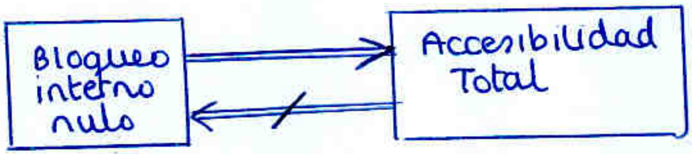
Pero tuvieron un problema:
Puede ocurrir bloqueo interno: conexión entre determinados puertos no es posible debido a la configuración actual de la red

No confundir con conflicto por duplicidad de etiquetas (cuando varias células van a misma salida). El bloqueo puede ocurrir aunque no haya duplicidad de etiquetas

Accesibilidad total:
si toda entrada tiene acceso a toda salida, independientemente de si está libre o no.

Accesibilidad limitada:
caso contrario

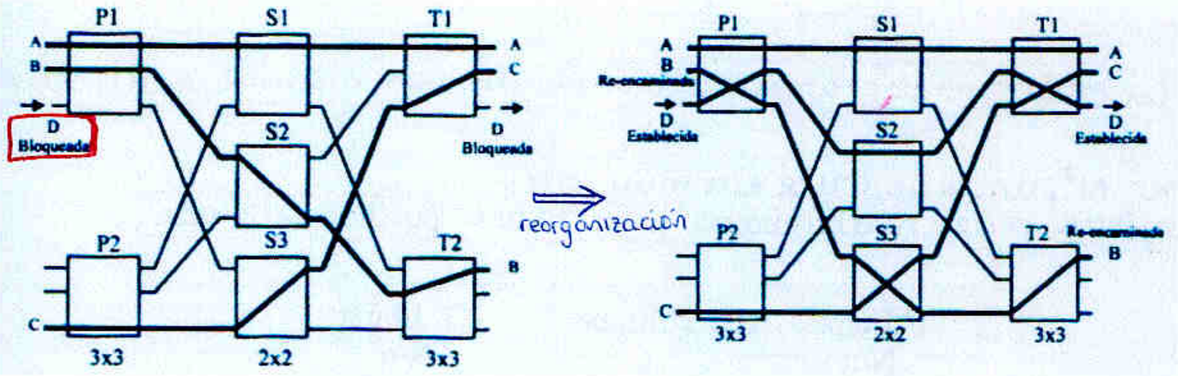
Redes sin bloqueo interno:
si cualquier entrada libre puede interconectarse a cualquier salida libre



entonces se comporta como una crossbar, lo cual no quita que siga habiendo posibilidad de conflicto y por tanto prob. pérdidas (varias células a misma salida)

Nulo Bloqueo interno
- en sentido estricto
- en sentido amplio → No puede haber bloqueo sólo si tengo la capacidad de reordenar o reconfigurar las conexiones en curso. i.e. siempre puedo evitar bloqueo reordenándolo.

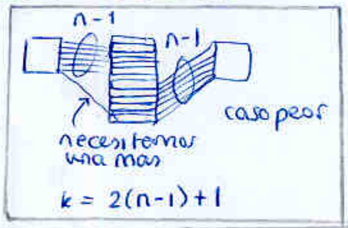
ejemplo de reorganización de llamadas para evitar bloqueo



Bloqueo interno nulo en sentido estricto

siempre tenemos asegurada una ruta sin tener que reordenar

ej red de 3 etapas: Red de Clos $k = 2n - 1$



$k = 2(n-1)+1$

$k = 2n-1$ } bloqueo nulo en sentido estricto

$k = 2n-2$ ⎫
$\vdots$ ⎬ bloqueo nulo en sentido amplio
$k = n$ ⎭

Número de puntos de cruce:

$$NPC = 2 \cdot \frac{N}{n} n \cdot k + k\left(\frac{N}{n}\right)^2 = k\left[2N + \left(\frac{N}{n}\right)^2\right]$$

en red de Clos $NPC = (2n-1)\left[2N + \left(\frac{N}{n}\right)^2\right]$

¿que n escogemos? El optimo

$$\frac{dNPC}{dn} = 2\left[2N + \left(\frac{N}{n}\right)^2\right] - (2n-1)\, 2 \cdot \frac{N^2}{n^3} = 0$$

$$2N + \left(\frac{N}{2}\right)^2 = (2n-1)\frac{N^2}{n^3}$$

$$2n^3 + Nn = (2n-1)N$$

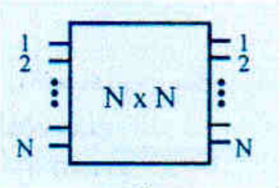
$$2n^3 = (n-1)N$$

$$\frac{n^3}{n-1} = \frac{N}{2}$$

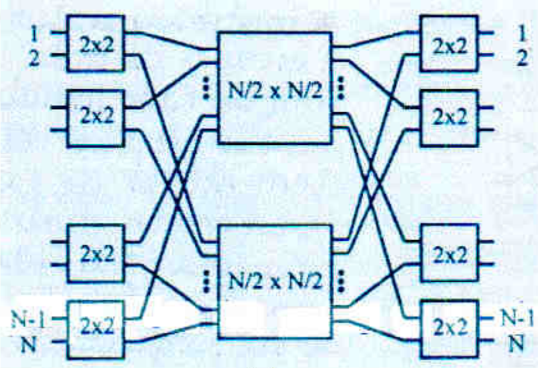
si $n >> 1$

$$n_{opt} \simeq \sqrt{\frac{N}{2}}$$

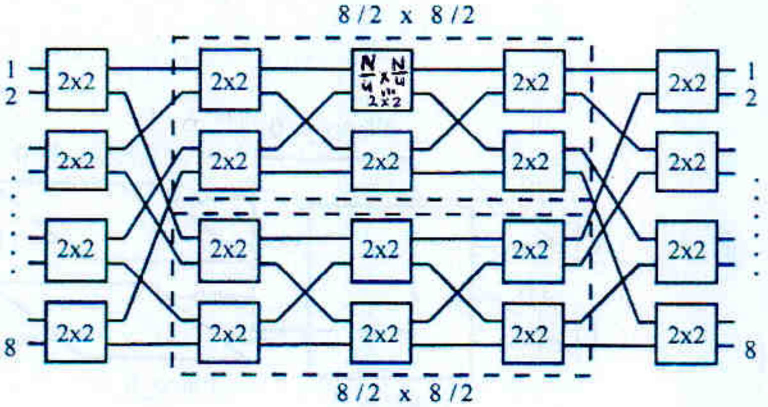
Redes de Benes



⇕



⇕



N debe ser potencia de 2.

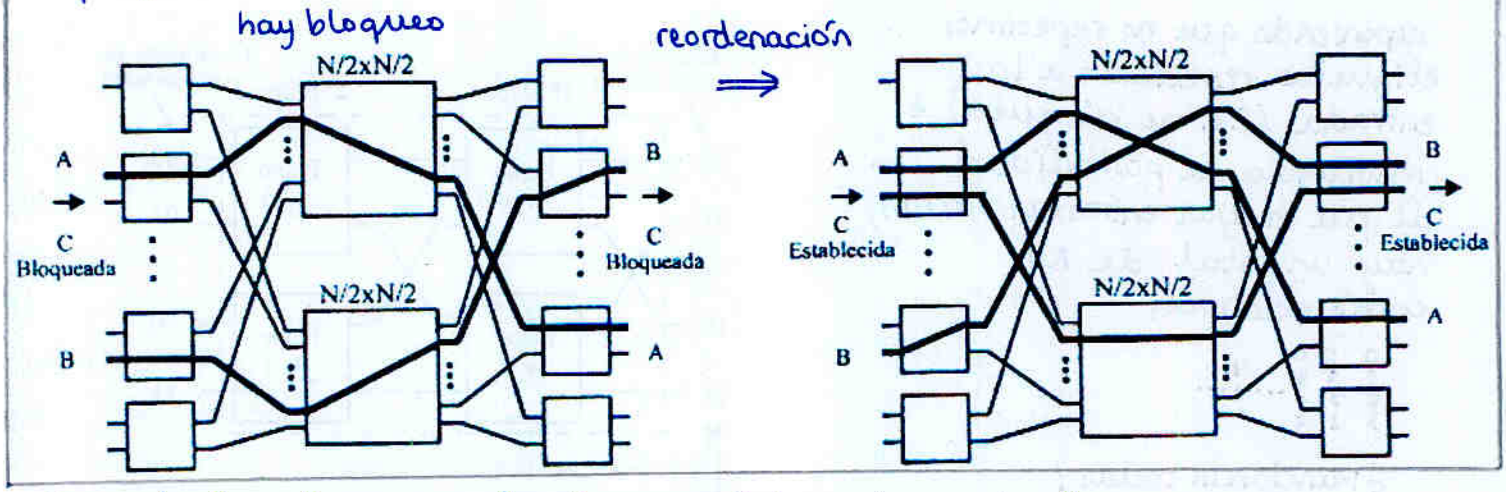
Podemos construir la red recursivamente con matrices 2x2 y redes de Benes de $\frac{N}{2}$

al final sólo quedan matrices 2x2

- nº etapas: $2(\log_2 N)-1$
- nº matrices 2x2: $N\log_2 N - \frac{N}{2}$
  [($\frac{N}{2}$) matrices en cada etapa]
- $NPC = 4N\log_2 N - 2N$
  [4 PC por cada matriz]

Son redes de bloqueo nulo en sentido amplio (no hay bloqueo si reordenas)(sí que puede haber bloqueo si no reordenas)

ejemplo:



se puede demostrar que el número mínimo de puntos de cruce para una red sin bloqueo en sentido amplio es del orden de $N \cdot \log_2 N$

3. Redes de Banyan. Concepto de autoenrutable

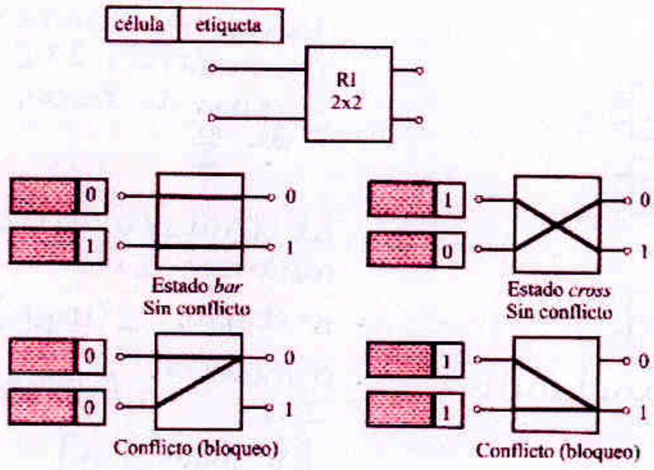
Las redes de Benes logran reducir los puntos de cruce al mínimo, pero reordenar en cada slot es inabordable:

solución:

conmutar de la forma más rápida posible

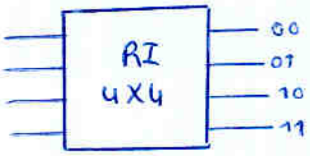
Principio de autoencaminamiento

caso más simple: 2x2

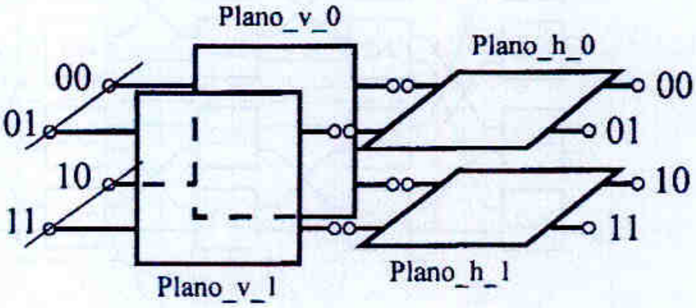


No se necesita ninguna unidad de control que deba ir configurando el estado de toda la red (lo cual se hizo inviable). En cambio son las propias células elementales de la red las que, de un modo distribuido, cada una individualmente conmuta según la etiqueta de su paquete a la entrada

Red Banyan 4x4



≍



cada etapa consume un bit de la etiqueta de encaminamiento

≍

Suponiendo que no repetimos etiquetas repetidas a la entrada (i.e. no bloqueo) e ignorando la posibilidad de que hayan entradas vacías, hay un total de N! combinaciones

0 0 0

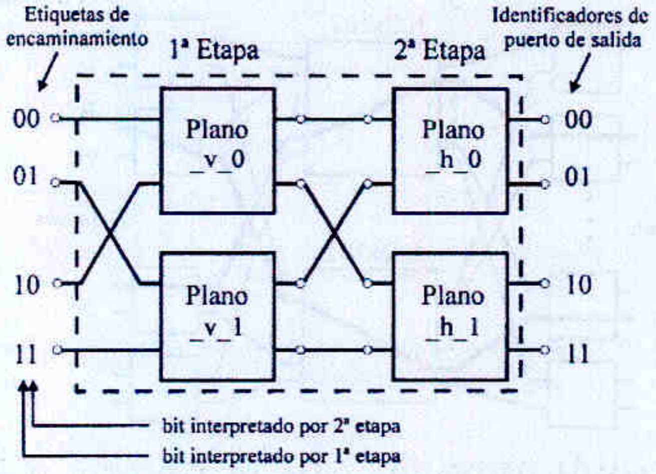
1 1 2

2 3 1

3 2 3 .... 4!

¿Funcionan todas?

No, algunas presentan conflicto interno



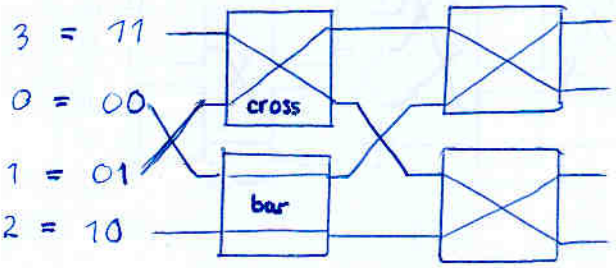
Esto hay que saberlo de memoria; por suerte un conmutador Banyan es idéntico mnemotécnicamente a un ordenador Batcher, que veremos en breve.

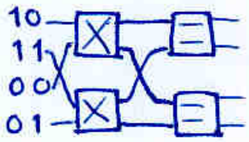
Si las etiquetas a la entrada son un desplazamiento cíclico...

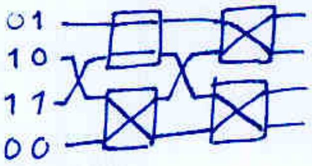
i.e.

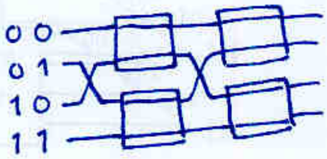
	0	3	2	1
	1	0	3	2
	2	1	0	3
	3	2	1	0

comprobemos si hay conflicto interno



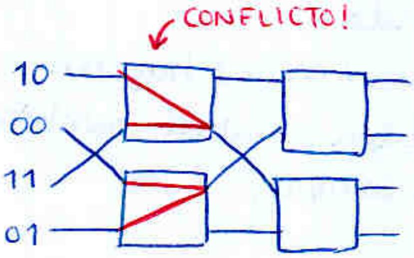






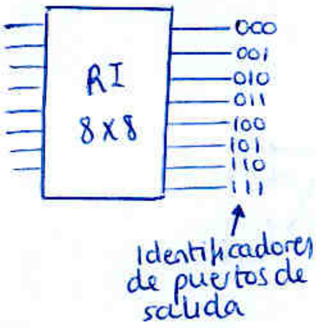
Como vemos en estos 4 casos no hay conflicto interno

Hay algunos (de los 4! = 24 casos totales) casos que presentan conflicto, y otros que no

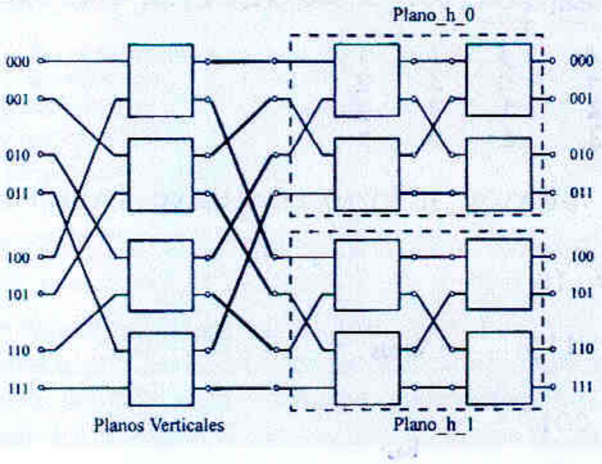


No me molesto en estudiar más casos

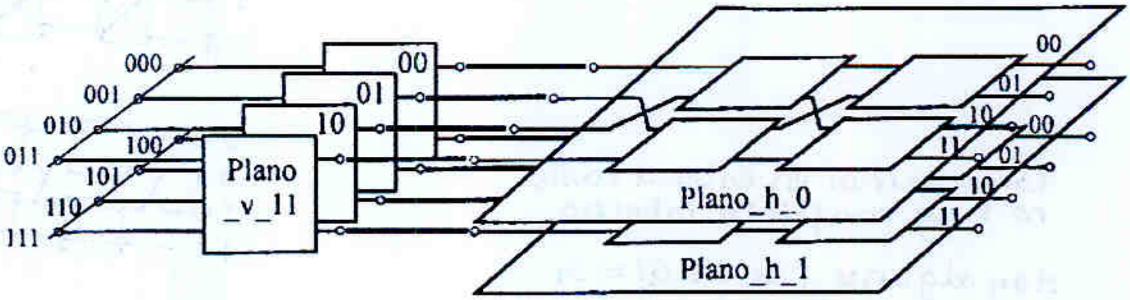
Red Banyan 8 x 8



≍



≍



Los desplazamientos cíclicos siguen funcionando

Basta con que lo cumpla la etapa 1, ya que si en la 1 hay un desplazamiento cíclico, a la entrada de la etapa 2 habrá tambien desplazamiento cíclico, que ya sabemos que se cumple.

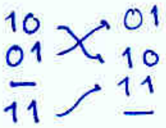
Nota: En Banyan 4x4 funcionan los casos de desplazamiento cíclico aunque alguna de las entradas esté vacía siempre y cuando estén compactadas.

Funciona cualquier ordenación compactada en orden creciente o decreciente

todo agrupado arriba
o todo agrupado abajo

ejs:	01	00	—
	10	01	—
	11	—	11
	—	—	10

decreciente y compactado abajo

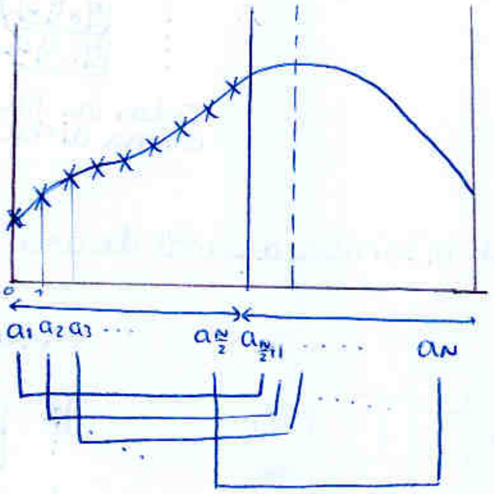


podemos reordenar y compactar para que funcione

4. Redes Batcher

Diseño recursivo de ordenadores Batcher

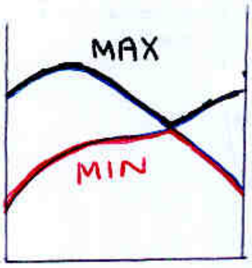
Definición: Secuencias bitonas o bitónicas



- Una secuencia es bitónica si ella misma o un desplazamiento cíclico de ella está compuesto por 2 secuencias monótonas contiguas.

si comparamos las parejas que se representan podemos formar 2 secuencias de mitad longitud

- una con los mínimos de cada comparación
- otra con los máximos de cada comparación



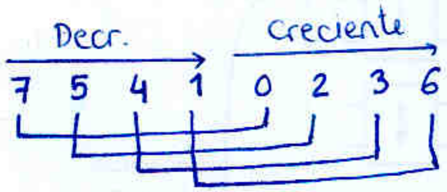
$$\{\min(a_1,a_{N+1}),\ \min(a_2,a_{N+2}),\ \dots,\ \min(a_N,a_{2N})\}$$

$$\{\max(a_1,a_{N+1}),\ \max(a_2,a_{N+2}),\ \dots,\ \max(a_N,a_{2N})\}$$

1. Ambas son secuencias bitónicas (en MAX hay aparentemente 3 tramos, pero podemos hacer desplazamiento cíclico para que sean 2)

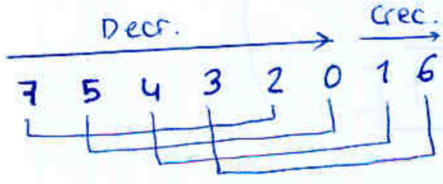
2. Todos los números de la secuencia de máximos son mayores que los de la secuencia de mínimos.

Utilizaremos esto para reordenar etiquetas (muy util como hemos visto cuando hay huecos a la entrada) repitiendo el proceso:



min: 0, 2, 3, 1 < min: 0, 1 < min 0, max 1; max: 3, 2 < min 2, max 3

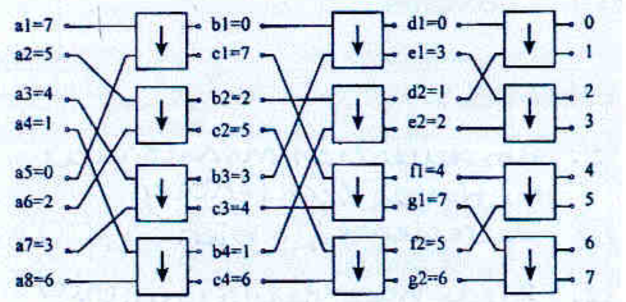
max: 7, 5, 4, 6 < min: 4, 5 < min 4, max 5; max: 7, 6 < min 6, max 7



min: 2, 0, 1, 3 < min: 1, 0 < min 0, max 1; max: 2, 3 < min 2, max 3

max: 7, 5, 4, 6 < min: 4, 5 < min 4, max 5; max: 7, 6 < min 6, max 7 ejemplo de funcionamiento de un ordenador bitónico 8x8:

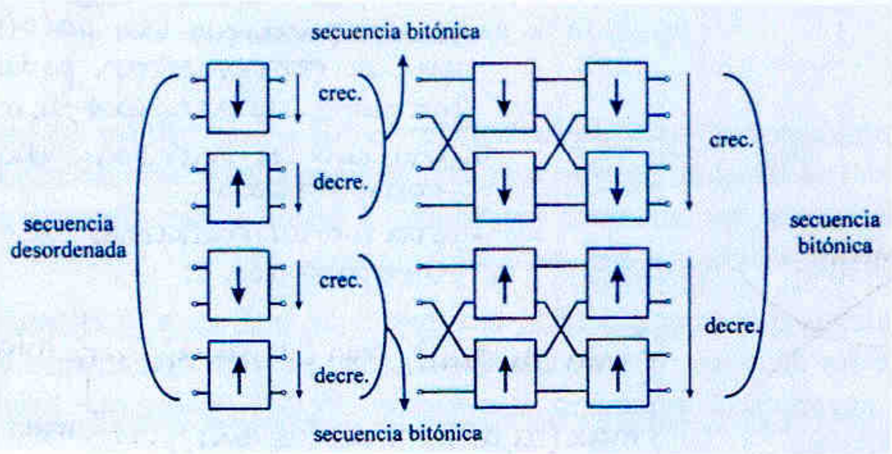
secuencia bitónica



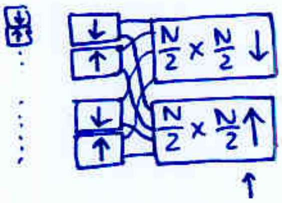
secuencia ordenada

Ordenador bitónico NxN
(ver referencia rápida, muy bien explicado)

¿cómo logramos obtener una secuencia bitónica a partir de una secuencia desordenada?



obtener sec. bitónica NxN



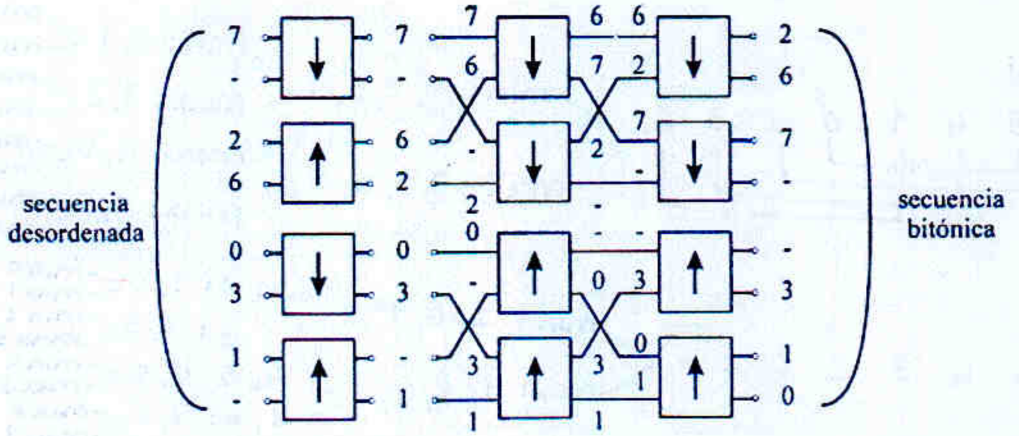
las flechas deben ser opuestas

Esa es la red Batcher que podemos poner delante de la Banyan para que se puedan conmutar los casos donde hayan huecos.

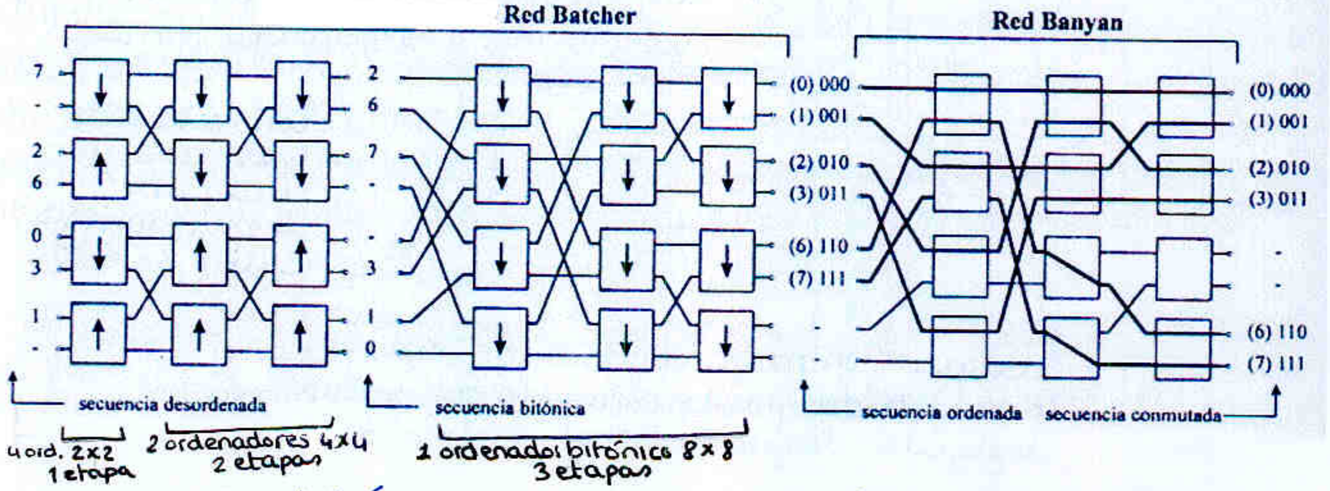
Si hay etiquetas repetidas, la Batcher lo ordenará bien, aunque claramente la Banyan no podrá conmutar

ejemplo de funcionamiento de ordenación en secuencia bitónica

los huecos se consideran siempre mayores al comparar



5. Redes Batcher-Banyan y sus limitaciones



La red Banyan detrás no es necesaria cuando no hay huecos (hay saturación) ya que la secuencia ordenada completa aparece ya a la salida de la red Batcher. Por comidad no se va quitando y poniendo la red Banyan, pues funciona bien con ella siempre puesta

Número de elementos básicos en un Batcher-Banyan

Batcher: $\frac{N}{2}(1+2+3+\ldots+\log_2 N)$

$$= \frac{N}{2}\,\frac{(1+\log_2 N)\cdot\log_2 N}{2}$$

Banyan: $\frac{N}{2}\log_2 N$ $\qquad \underset{\text{matrices/etapa}}{\underset{\shortparallel}{\frac{N}{2}}} \times \underset{\text{nº etapas}}{\underset{\shortparallel}{\text{nº bits}}}$

En total: $$\frac{N}{2}\log_2 N\left[\frac{1+\log_2 N}{2}+1\right] = \frac{N}{2}\log_2 N\left[\frac{3}{2}+\frac{\log_2 N}{2}\right]$$

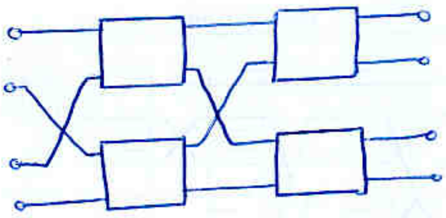
Comparándolo con un conmutador NxN

N	crossbar N^2 (ptos. cruce)	Batcher Banyan (2x2 switches)	óptimo
8	64	36	24
16	256	112	64
32	1024	320	160
64	4096	864	384
128	16 384	2 240	896

óptimo ← desarrollo teórico que no hemos dado.

↑ Para comparar justamente habría que dividir por 4, ya que un switch (2x2) tiene 4 puntos de cruce

Retomando la red Banyan



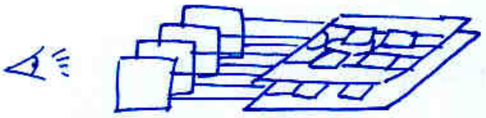
- caso: sólo una entrada vacía: (ya ordenada y compactada por la red Batcher)

0	0	0	1
1	1	2	2
2	3	3	3
–	–	–	–

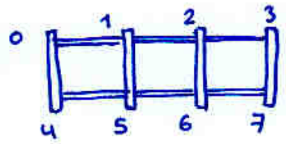
conmuta todos estos casos y cualquier desplazamiento cíclico de éstos.

> Cualquier entrada con huecos ordenada y compactada puede conmutarse, y también cualquier desplazamiento cíclico de éstas

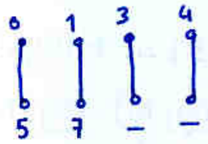
Banyan 3



si lo miramos desde la izquierda



si a la entrada hay secuencia con huecos compactada y ordenada

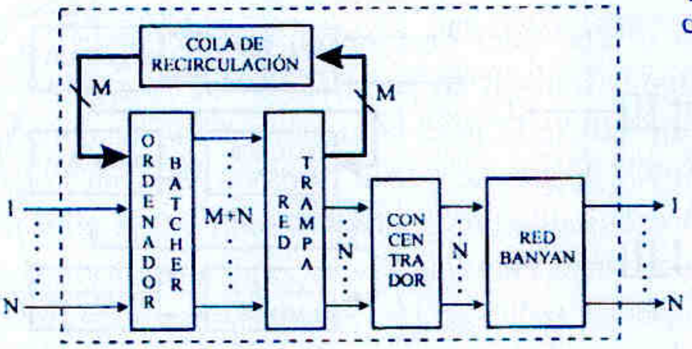


se puede comprobar que a los planos horizontales de arriba y abajo llega una entrada ordenada y compactada, con algún desplazamiento cíclico que como ya sabemos, podrá conmutarse.

¿Y si hay duplicidad de etiquetas? → i.e. a pesar de reducir pts de cruce y complejidad, aun está el problema de varias células queriendo ir a la misma salida

El ordenador Batcher los ordena, pero que hace Banyan?

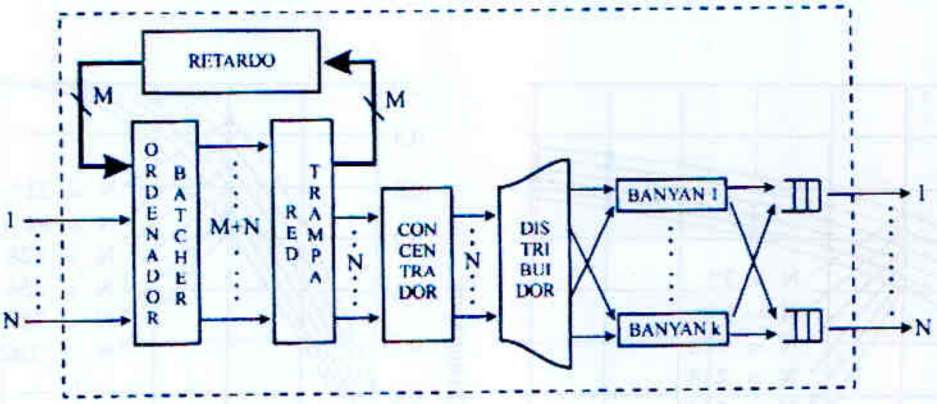
Solución: Red Batcher-Banyan con red trampa



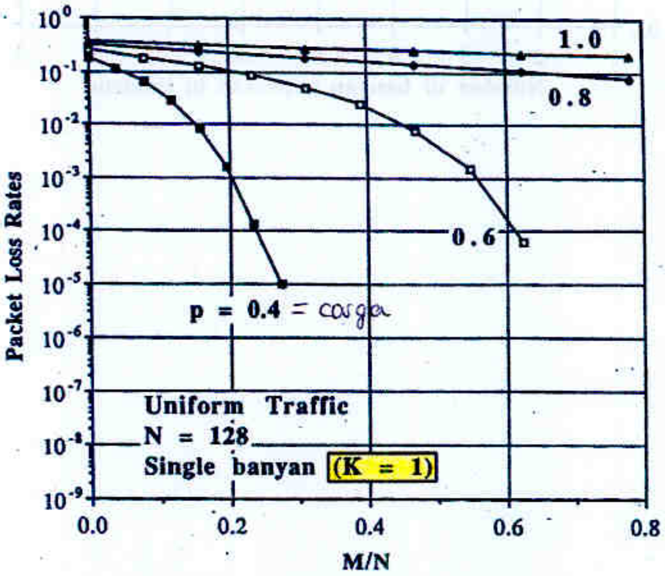
Los paquetes con mismo circuito de destino se capturan en la red de circulación para volver a salir cuando se pueda

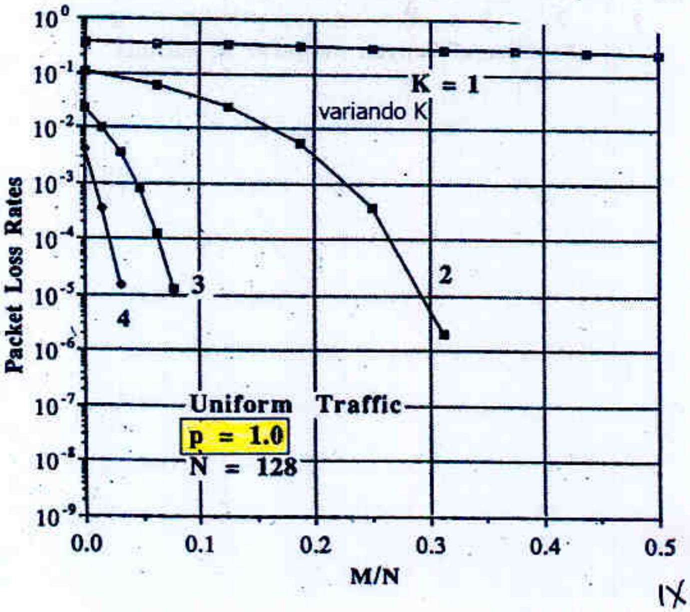
ejemplo práctico: Conmutador Sunshine (AT&T 90)

se tiene duplicidad k de redes Banyan que permite duplicidad de k etiquetas; una duplicidad mayor simplemente recircula



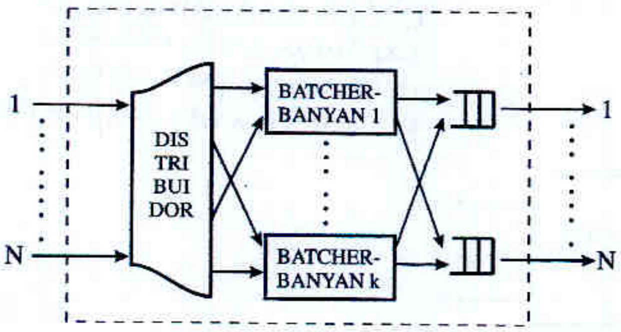
se obtienen la gráficas



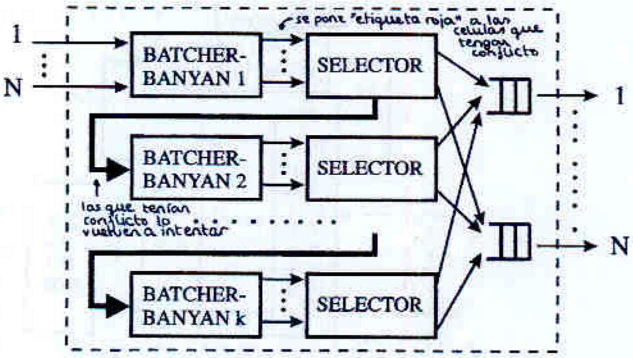


Podemos jugar con la Batcher-Banyan como un bloque y ponerlas en tandem o paralelo

Paralelo

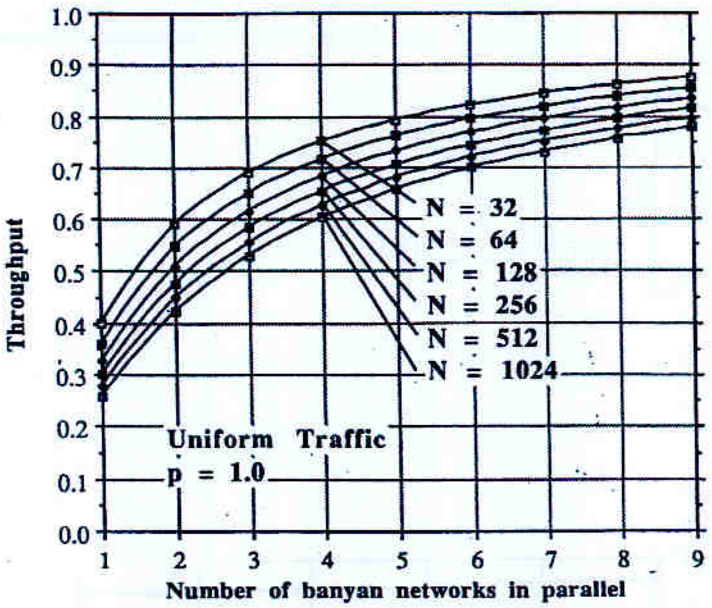


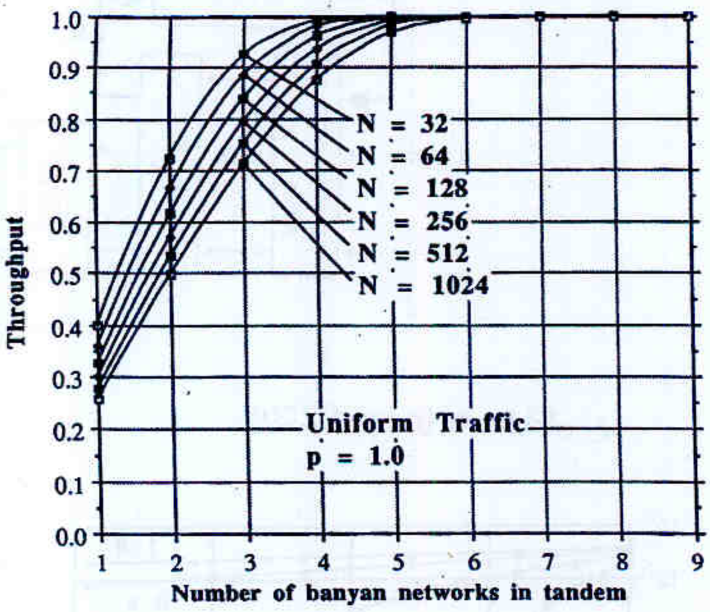
Tándem



se obtienen las gráficas

Como vemos agrupar en tandem ofrece mejores resultados.





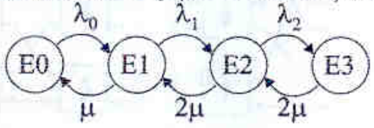
Enero 2006

11c, 12b, 13d, 14a, 15d, 16d, 17b, 18d

5. A un sistema monoservidor S llegan clientes según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 3$ y demandan un servicio exponencial de tasa $\mu = 4$. El servidor trabaja a la velocidad nominal (μ) cuando hay $m-1$ clientes o menos y al doble de ésta (2μ) cuando hay m o más, en cuyo caso consume el doble de energía eléctrica. Para un sistema M/M/1 convencional al que se le ofrece el mismo tráfico que al sistema S, denotamos por P(0) el porcentaje de tiempo que el sistema esta vacío. Si denotamos por PS(0) al porcentaje de tiempo que el sistema S esta vacío, ¿cuál de ser el valor de m para que se cumpla que PS(0)$\geq$ 1,5 P(0) y se consuma la menor energía posible?:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

6. El proceso de Markov de la figura modela la evolución del número de clientes en un sistema de espera con dos servidores, para el que $\lambda_k = (3-k)\lambda$, $0 \leq k \leq 3$. Si denotamos por PB la probabilidad de bloqueo, por CAO el número medio de clientes ofrecidos al sistema por segundo y por TC el tráfico cursado en Erlangs, cuando $\lambda = 1$ y $\mu = 1$ clientes/s entonces:



a) $PB \leq 0{,}5$

b) $CAO \geq 1{,}4$

c) $TC > 1{,}5$

d) Ninguna de las anteriores es correcta

7. Respecto al sistema monoservidor que modela un puerto de salida de un conmutador de células N×N cuyos puertos de entrada y salida están sincronizados y al que se le ofrece un tráfico de Bernouilli de parámetro $p = 1/2$, indique la respuesta FALSA:

a) Si $N = 5$, el número medio de ranuras consecutivas que el sistema permanece vacío, cada vez que se vacía, es superior a 2,4.

b) Si N=4, $P_{53} = 0$

c) Si N=2, $P_{35} = 6{,}2510^{-2}$

d) El sistema es estable sólo si $p < 1$

8. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA:

a) En un sistema de espera se verifica siempre que la intensidad de tráfico ofrecida es igual al número medio de servidores ocupados.

b) El factor de utilización de los servidores de un sistema M/M/∞ es mayor que el número medio de clientes en el sistema.

c) Para un sistema en equilibrio, el teorema de Little asegura que el número medio de clientes que llegan al sistema durante el tiempo medio residencia de uno de ellos, es igual al número medio de clientes que hay habitualmente en él.

d) Los elementos $q_{ij}(t)$ del generador infinitesimal verifican que $0 \leq q_{ij}(t) \leq 1 \; \forall i, j$

9. En un sistema $M/M/2/3$ con parámetros $\lambda = \mu = 2$ clientes/s, cuando se alcanza el estado E_1, la probabilidad de abandonarlo en un tiempo inferior o igual a 1 s., p, y la probabilidad de transitar a E_0, P_{10}, valen:

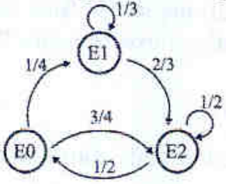
a) $p > 0{,}88$ y $P_{10} > 0{,}45$

b) $p > 0{,}88$ y $P_{10} \leq 0{,}45$

c) $p \leq 0{,}88$ y $P_{10} > 0{,}45$

d) $p \leq 0{,}88$ y $P_{10} \leq 0{,}45$

10. Para la cadena de la figura, el tiempo medio de residencia en E1 expresado en ranuras, m, vale:



a) $1{,}25 < m$

b) $0{,}75 < m \leq 1{,}25$

c) $0{,}2 < m \leq 0{,}75$

d) $0 < m \leq 0{,}2$

11. Se tiene un conmutador $N \times N$ con $N \to \infty$, con arquitectura por división espacial monoetapa, con memoria infinita en los puerto de entrada, en el que se utiliza la técnica *Virtual Output Queueing* y en el que la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro p. Respecto al caudal cursado por puerto de salida (γ_i), expresado en células por ranura, cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA:

a) Siempre se cumple que $\gamma_i = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$.

b) Siempre se cumple que $\gamma_i = 1$.

c) Siempre se cumple que $\gamma_i = p$.

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

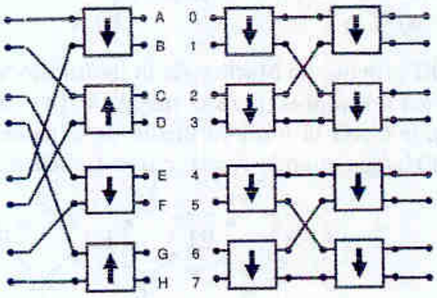
PII - 1

12. Considere un conmutador 512×512 de arquitectura por división espacial sin memoria en el que la matriz espacial utiliza una red Batcher-Banyan. Si la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}2$, la probabilidad de pérdidas (P_L) que se observa cumple que:

a) $0 \leq P_L \leq 0{,}05$
b) $0{,}05 < P_L \leq 0{,}1$
c) $0{,}1 < P_L \leq 0{,}2$
d) $0{,}2 < P_L \leq 1$

13. La red de la figura es capaz de obtener una secuencia ordenada a partir de una secuencia bitónica. ¿Qué conexiones entre la primera y la segunda etapa son correctas?

a) A-0,B-1,C-2,D-3
b) A-0,B-2,C-3,D-1
c) E-4,F-6,G-7,H-5
d) A-0,D-2,E-1,H-3



14. A una red Batcher-Banyan 32×32 en la que la red Batcher ordena las etiquetas de forma creciente de arriba hacia abajo, llega la siguiente secuencia $(31, 30, \ldots, 2, 1, 0)$. ¿Cuántas matrices de la red Banyan estarán en estado *bar*?

a) 80
b) 40
c) 0
d) Ninguna de las anteriores es correcta.

15. A un conmutador de células $N \times N$, siendo $N = 128$, se le ofrece un tráfico de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}5$. Respecto al caudal (CA) cursado por puerto de salida, expresado en células/ranura, indique la respuesta FALSA: (RI es la red de interconexión)

a) Si la RI se implementa como una matriz espacial monoetapa con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}50$.

b) Si la RI se implementa como una red de 3 etapas ($n < k < 2n$) que implementa reorganización y con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.

c) Si la RI se implementa como una red de 3 etapas ($k = 2n$) y con memoria a la entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.

d) Si la RI se implementa como una red de Benes sin memoria y que no implementa reorganización, entonces $0{,}45 < CA \leq 0{,}5$.

16. En un conmutador $M \times N$ de arquitectura por división espacial monoetapa sin memoria, en el que la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro p, a_k representa la probabilidad de que en una ranura lleguen k células a un determinado puerto de salida, entonces se cumple que:

a) $a_k = \binom{M}{k} (p/M)^k (1 - p/M)^{M-k}$
b) $a_k = \binom{N}{k} (p/N)^k (1 - p/N)^{N-k}$
c) $a_k = \binom{N}{k} (p/N)^k (1 - p/M)^{M-k}$
d) Ninguna de las anteriores es correcta.

17. Para un conmutador monoetapa 4×4 crossbar sin memoria al que se le ofrece un tráfico de Bernoulli con $p = 0{,}5$, la probabilidad de que por un puerto de salida salgan exáctamente 2 células en 10 ranuras consecutivas, q, vale (utilizando tres decimales con redondeo):

a) 0,012 **b)** 0,107 **c)** 0,267 **d)** 0,339

18. Respecto a las siguientes afirmaciones sobre redes de interconexión multietapa de células $N \times N$, N= 2^m, indique la respuesta FALSA:

a) Si N=128, el número de etapas de una red de Benes es 13.

b) Si N=64, el número de puntos de cruce de una red de Benes es 22×64.

c) Si N=128, el número de etapas de una red Batcher es 28.

d) Si N=64, de puntos de cruce de una red Banyan es 11×64.

Enero 2006 - Segunda Parte

⑪
- división espacial monoetapa
- $N \times N \quad N \to \infty$
- Virtual Output Queuing
- Llegada de células: Bernouilly p

a) $\gamma_i = 2-\sqrt{2}$ sólo se cumple si se tiene HOL

c) $\gamma_i = p$ se cumple sólo si $p < \gamma_i |_{p=1}$ que en el caso de ventana nula $(W=0)$ vale $2-\sqrt{2}$, y en otras ventanas vale otros valores mayores.

En el caso de VOQ se elimina totalmente el efecto HOL y $\gamma_{i\,max} = 1$

pag 125 del libro

VOQ ≡ Disponer en cada puerto de entrada de N colas, una por cada puerto de salida.
Se consigue un caudal máximo igual al de conmutadores con cola a la salida, es decir del 100%, y encima la velocidad interna de la RI es igual a la externa

Por tanto, VOQ cursa tanto caudal como se le ofrezca: $\gamma_i = p$

⑫
- Red Batcher Banyan
- 512×512
- $p = 0'2$

calcular probabilidad de pérdidas

Llamando P_k = prob. de que vayan k células a un puerto de salida en un slot

$$P_k = \begin{bmatrix} k \\ N \end{bmatrix} \left(\frac{p}{N}\right)^k \left(1-\frac{p}{N}\right)^{N-k}$$

$$PP = \frac{\text{nº medio células perdidas}}{\text{nº medio células ofrecidas}} = \frac{P_2 \cdot 1 + P_3 \cdot 2 + P_4 \cdot 3 + \dots}{p}$$

$$= 1 - PnP = 1 - \frac{\text{nº medio celulas enviadas}}{\text{nº medio células ofrecidas}}$$

$$= 1 - \frac{0 \cdot P_0 + \overbrace{1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 + \dots}^{1-P_0}}{p} = 1 - \frac{1-P_0}{p}$$

$$= 1 - \frac{1 - \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} \left(\frac{p}{N}\right)^0 \left(1-\frac{p}{N}\right)^N}{p} = 1 - \frac{1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^N}{p}$$

$$= 0'093$$

cuidado

$PP \neq P_2 + P_3 + \dots$
eso sería la PROPORCIÓN DE TIEMPO en la que hay pérdidas

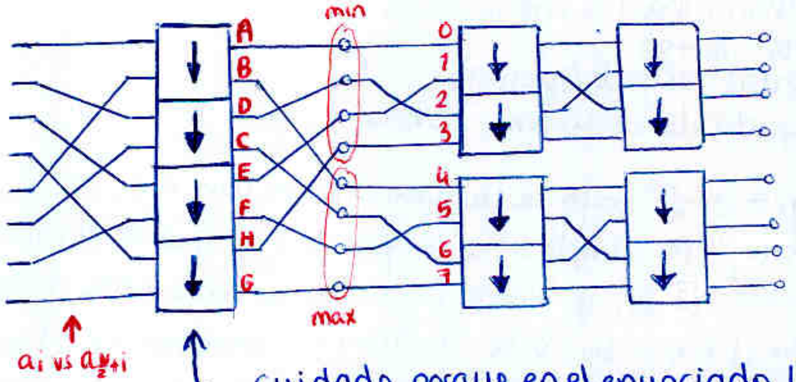
otra forma de hacerlo
$1 \cdot P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots = p$

⑬ secuencia ordenada a partir de una bitónica
= Ordenador 8x8 = segundo bloque de la Batcher

forma canónica:

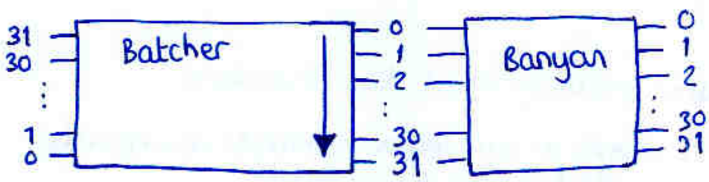
A → 0
B → 4
D → 2
C → 6
E → 1
F → 5
H → 3
G → 7

la d)



cuidado porque en el enunciado le han dado la vuelta a dos de estas flechas, por eso he ajustado el orden de las letras

⑭ · Batcher-Banyan 32 x 32



Todas las matrices
$\frac{N}{2} \cdot \log_2 N = 80$
estarán en estado bar; simplemente se deja pasar

⑮ conmutador NxN
$\rho = 0'5$ $N = 128$

a) Espacial monoetapa: $CA = 1 - \left[1 - \frac{\rho}{N}\right]^N = 0'394$ (si no hay memoria a la entrada)

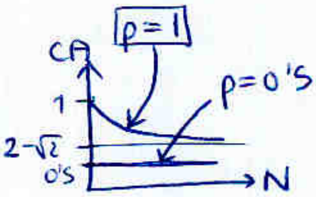
b) 3 etapas con $k > n$ reorganización $\Rightarrow$ no hay bloqueo interno $\Rightarrow$ se comporta como una crossbar (sigue habiendo conflicto) $\longrightarrow$ $CA = 0'394$ (si no hay memoria a la entrada)

c) 3 etapas $k = 2n \Rightarrow$ no hay bloqueo interno
$\Rightarrow$ se comporta como crossbar

la a) la b) y la c) se comportan como crossbar.
si añadimos memoria a la entrada logramos mejorar el efecto del conflicto, pero aparece el efecto HOL

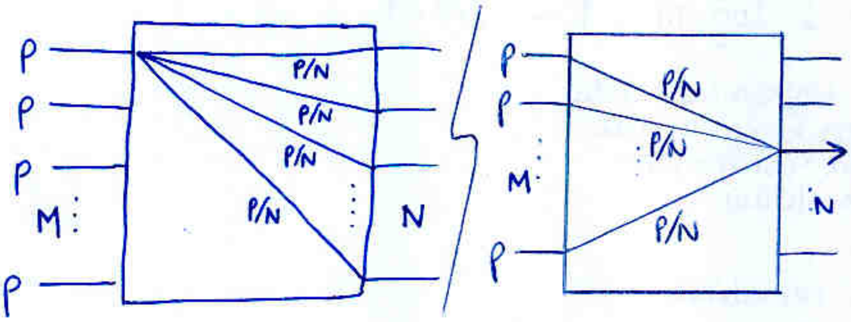
$CA = \min(\underset{0'5}{\rho}, \underset{0'586}{2 - \sqrt{2}})$ cuando $N \to \infty$

con $N = 128$, ya que $\rho < 2 - \sqrt{2}$, el caudal no puede "bajar" hasta $2 - \sqrt{2}$, por tanto $CA = 0'5$



d) Benes sin memoria con reorganización se comporta como una crossbar sin memoria $CA = 0'394$
Si encima no hay reorganización, habrá bloqueo interno

⑯
- M x N
- división espacial monoetapa sin memoria
- llegada células Bernouilly parámetro p



Prob de que NO LLEGUE NADA $\left(1-\frac{p}{N}\right)^M$

caudal = $1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^M$

No piden el caudal, piden la prob. de que lleguen k células, lo cual no es más que la repetición de un experimento de Bernouilly M veces

$$P_k = \underbrace{\begin{bmatrix} M \\ k \end{bmatrix}} \underbrace{\left(\frac{p}{N}\right)^k}_{\text{prob éxito}} \underbrace{\left(1-\frac{p}{N}\right)^{M-k}}_{\text{prob fracaso}}$$

repetición de M experimentos

⑰
- crossbar 4 x 4
- sin memoria
- p = 0'5

Probabilidad de que salgan <u>en total</u> exactamente 2 células en 10 ranuras.

- En cada ranura sale como máximo una célula
- como no hay memoria, cada ranura es independiente de la anterior (HAY que justificar la independencia para decir que es binomial)
- Puesto que se trata de la repetición de 10 experimentos de bernouilly independientes, se tendrá una distribución binomial

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot \underset{\downarrow}{p_1}^2 \cdot (1-p_1)^{10-2}$$

prob de exito = que salga una ranura en un slot
= que se dirigan al menos una (el resto se descartará)
= 1 − prob. de que no se dirija ninguna
= $1-\left(1-\frac{p}{N}\right)^N$ = 0'4138
= caudal

P_2 = 0'107

⑱ · Red multietapa

· $N \times N$, $N = 2^m$

a) nº etapas Red Benes $\underset{\uparrow}{=} 2 \cdot \log_2 N - 1 = 2m - 1 \overset{N=128}{\overset{\downarrow}{=}} 13$

TRUCO: $\log_2 N$ a cada lado
menos la etapa central
que la "comparten"
ambos lados

b) nº puntos de cruce en Benes

$$= 4 \cdot \text{nº matices}$$
$$= 4 \cdot \frac{N}{2} \cdot \text{nº etapas}$$
$$= 4 \cdot \frac{N}{2} \cdot \left[2 \log_2 N - 1\right] \overset{N=64}{\overset{\downarrow}{=}} 1408 = 22 \times 64$$

c) nº etapas red batcher $= 1 + 2 + 3 + \ldots + \log_2 N = (1 + \log_2 N) \cdot \frac{\log_2 N}{2} \overset{N=128}{\overset{\downarrow}{=}} 28$

d) nº puntos de cruce red banyan

$$= 4 \cdot \text{nº elementos}$$
$$= 4 \cdot \frac{N}{2} \cdot \text{nº etapas}$$
$$= 4 \cdot \frac{N}{2} \cdot \log_2 N \underset{N=64}{\underset{\uparrow}{=}} 768 \neq 11 \times 64$$

Julio 2006

11b, 12c, 13d, 14b, 15d, 16d, 17c, 18a

6. Para que el porcentaje de tiempo en el que todos los servidores de un sistema M/M/3 permanecen inactivos no supere el 50 %, el factor de utilización mínimo de los servidores ρ debe valer (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $\rho = 0{,}690$ **b)** $\rho = 0{,}500$ **c)** $\rho = 0{,}348$ **d)** $\rho = 0{,}230$

7. Un conjunto de terminales N comparten un enlace ascendente TDM a un satélite. Los terminales generan paquetes de longitud constante que encajan perfectamente en una ranura TDM. Se desean estudiar dos escenarios A y B. En el A se considera que $N = 12$ y que la probabilidad de que un terminal genere un paquete en una ranura vale $p = 0{,}05$. En el B se considera un conjunto infinito de terminales, pero que generan el mismo número medio de paquetes por ranura que en el primero. Los porcentajes de paquetes perdidos en ambos escenarios PP_A y PP_B valen (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $PP_A = 0{,}234$, $PP_B = 0{,}248$. **c)** $PP_A = 0{,}351$, $PP_B = 0{,}371$.

b) $PP_A = 0{,}234$, $PP_B = 0{,}371$. **d)** $PP_A = 0{,}351$, $PP_B = 0{,}248$.

8. El numero de contagios por una cierta variante del virus de la gripe aviaria sigue un proceso de Poisson. Los contagios se producen a razón de un nuevo contagio cada 10 minutos. El tiempo de vida de un ave infectada con el virus, a partir del momento en que ha contraído éste, esta distribuido exponencialmente y su medía es 1 hora. En un determinado instante hay 10 aves enfermas y se sabe que la última muerte ocurrió 1 minuto antes. La probabilidad de que se produzca el siguiente contagio antes de que haya habido alguna muerte más, vale (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) 0 **b)** 0,016 **c)** 0,375 **d)** 0,983

Nota: considera que la población mundial de aves es infinita y que aunque en un determinado momento no haya aves enfermas SÍ pueden producirse contagios debido a la mutación de otras variantes del virus.

9. A un sistema de dos servidores (A y B) sin cola llegan clientes según un proceso de Poisson demandando un servicio exponencial. El servidor B sólo entra en funcionamiento cuando llega un cliente y encuentra el servidor A ocupado. Además, cuando se vacía el servidor A, el cliente que estuviera en el B lo abandona y termina su servicio en el A. Si el tráfico ofrecido es de 1 Er, los factores de utilización de los servidores A y B valen (utilizando 3 decimales con redondeo):

a) $\rho_A = 0{,}600$, $\rho_B = 0{,}389$. **c)** $\rho_A = 0,554$, $\rho_B = 0,200$.

b) $\rho_A = 0,600$, $\rho_B = 0,200$. **d)** $\rho_A = 0,554$, $\rho_B = 0,389$.

10. Dadas dos distribuciones discretas de Poisson A$\sim$ Poisson(a) y B$\sim$ Poisson(b) independientes, se define la distribución $Z = A + B$, entonces $E[Z^2]$ vale:

a) $E[Z^2] = (a+b)^2$. **c)** $E[Z^2] = (a+b)^2/(a-b)$.

b) $E[Z^2] = (a+b)/[1-(a+b)^2]$. **d)** $E[Z^2] = (a+b)^2 + (a+b)$.

11. Respecto a la capacidad de conmutar sin conflictos de las siguientes redes de interconexión, indique la afirmación CORRECTA:

a) Una red Banyan $N \times N$ es capaz de conmutar cualquier permutación de k ($k \leq N$) etiquetas.

b) Una red Batcher $N \times N$ es capaz de conmutar cualquier permutación de exactamente N etiquetas.

c) Una red Batcher-Banyan $N \times N$ es capaz de conmutar cualquier secuencia de exactamente N etiquetas.

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

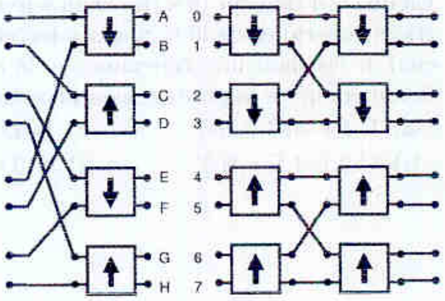
12. La red de la figura es capaz de obtener una secuencia bitónica a partir de una secuencia cualquiera. ¿Qué conexiones entre la primera y la segunda etapa son correctas?

a) A-0,B-4,C-2,D-6

b) E-1,F-5,G-3,H-7

c) E-4,F-6,G-5,H-7

d) A-0,D-2,E-1,H-3



PII-4

13. Considera un conmutador *knockout* 4×4 en el que los concentradores tienen 2 salidas. Si la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro $p = 1$, la probabilidad que en una ranura salga 4 células de un *shifter* determinado es, (utilizando tres decimales con redondeo):

a) 0,211 **c)** 0,262

b) 0,258 **d)** Ninguna de las anteriores es correcta.

14. Considera un conmutador de células 4×4 de memoria compartida en el que el tamaño **total** de la memoria es de 40 células. Si la llegada de células sigue un proceso de Bernoulli de parámetro p, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) La probabilidad de pérdidas será mayor si el espacio de memoria se comparte entre todos lo puertos que si cada puerto tiene su parte independiente.

b) La probabilidad de pérdidas será menor si el espacio de memoria se comparte entre todos lo puertos que si cada puerto tiene su parte independiente.

c) La probabilidad de pérdidas será igual si el espacio de memoria se comparte entre todos lo puertos que si cada puerto tiene su parte independiente.

d) La probabilidad de pérdidas cuando el espacio de memoria se comparte entre todos lo puertos puede ser tanto mayor como menor que si cada puerto tiene su parte independiente; dependerá del valor de p.

15. A un conmutador $M \times 10$, $M \to \infty$, de arquitectura por división espacial monoetapa sin memoria se le ofrece un tráfico de Bernoulli, siendo el número medio de células ofrecidas por ranura de 10. El caudal cursado por puerto de salida vale (utilizando tres decimales con redondeo):

a) $0,455$. **b)** $0,482$. **c)** $0,556$. **d)** $0,632$.

16. Respecto a las siguientes afirmaciones sobre el factor de utilización (ρ) y el caudal (Th) de un puerto de salida de un conmutadores de células, indique la respuesta FALSA:

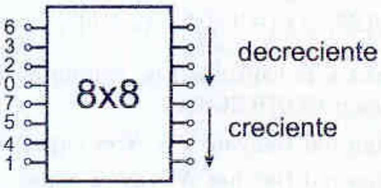
a) El caudal se define como el número medio de células transferidas por unidad de tiempo.

b) El factor de utilización de un puerto de salida se define como el número medio de células transferidas por ranura temporal.

c) $Th = \rho/T$ (células/s), siendo T el tiempo de transmisión de una célula.

d) El factor de utilización de un puerto de salida es la inversa de la probabilidad de que una ranura temporal esté ocupada.

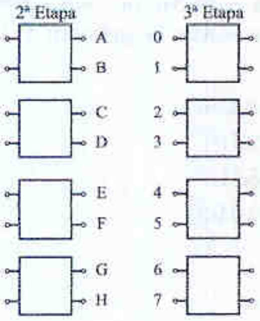
17. La red de la figura representa un ordenador 8×8 que convierte una secuencia desordenada en otra bitónica. Suponiendo que las células que entran por los cuatro puertos superiores salen también por los cuatro puertos superiores y que lo mismo sucede para los cuatro puertos inferiores, el valor de las etiquetas de encaminamiento a la entrada de las dos matrices superiores de la segunda etapa, comenzando por arriba son:



a) 6,5,2,1 **c)** 6,0,3,2

b) 1,3,2,6 **d)** 3,7,1,2

18. En una red Banyan 16×16 se han seleccionado las 4 matrices superiores de la segunda y tercera etapa. Indique cual de las siguientes conexiones es la correcta para que la red conmute la permutación identidad sin conflictos.



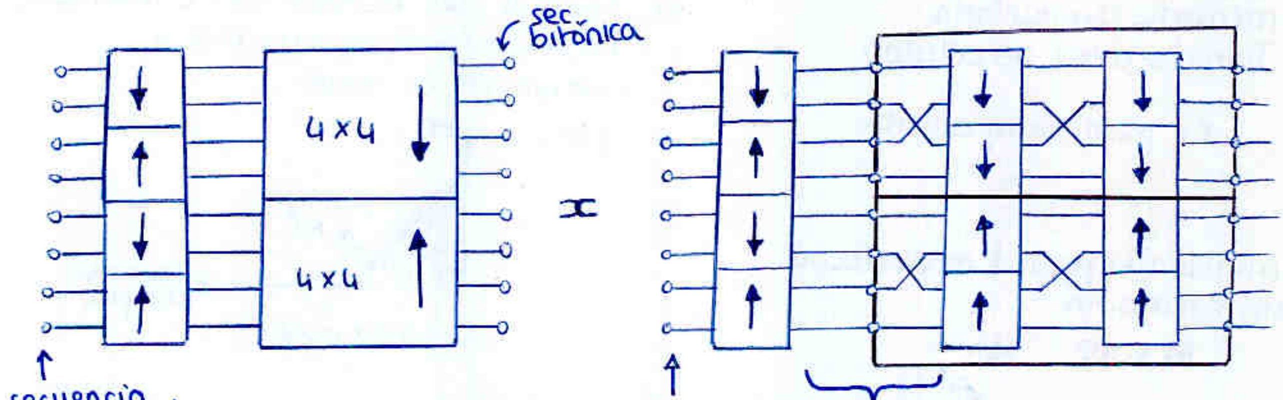
a) E-1,F-5,G-3,H-7 **c)** B-4,C-2,E-1,F-6

b) C-2,E-1,F-6,H-7 **d)** A-0,C-1,D-2,G-3

Julio 2006 – Segunda Parte

⑪ La red Batcher ordena, por tanto si hay exactamente N etiquetas, ordenar es equivalente a conmutar.

⑫ La forma canónica de lo que se pide (primera parte de red Batcher)

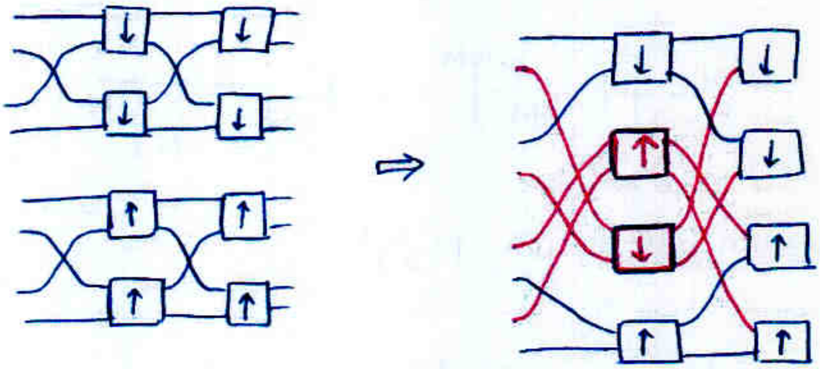


secuencia desordenada

En el enunciado ésto no es recto, pero no pasa nada porque a la entrada hay una secuencia desordenada

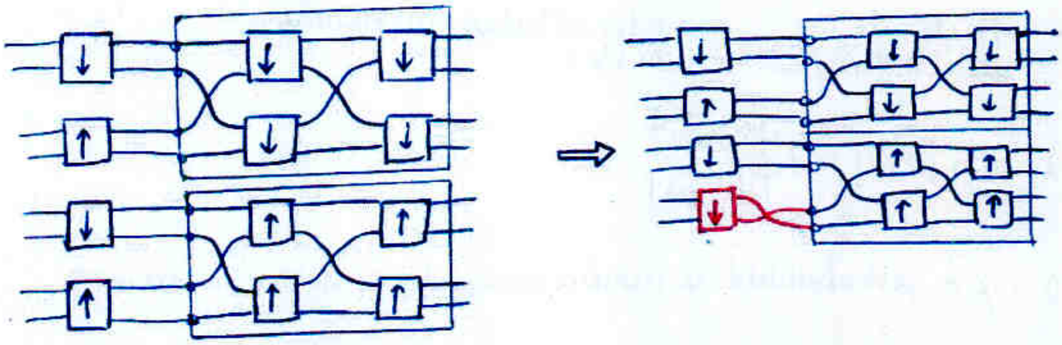
Estas son las soluciones que faltan en el enunciado (1a c)

En otros problemas nos pueden marear otras cosas, por ejemplo cambiar los dos ordenadores 4 "mezclándolos"

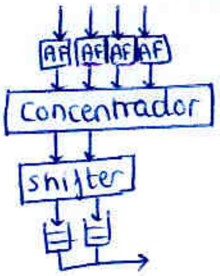


En general el truco es dibujar la canónica, ver lo que nos han cambiado, e intentar compensarlo

Otro posible 'engaño'



⑬



obviamente del shifter no pueden salir más de dos células

⑭

· 4x4
· memoria compartida
· Tamaño total 40 células

Es mejor compartida

d) Depende del tamaño de la memoria, no de p (para una misma p, compartir es mejor

⑮ División espacial monoetapa sin memoria

$M \times 10 \quad M \to \infty$

Caudal por puerto de salida = 1 − prob de que no lleguen células al puerto de salida

$$= 1 - \left[1 - \frac{p}{10}\right]^M$$

Si el número medio de células ofrecidas por ranura es 10

$$\text{nº medio de células ofrecidas} = M \cdot p = 10 \Rightarrow p = \frac{10}{M}$$

$$= 1 - \left[1 - \frac{1}{M}\right]^M = 1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{-M}\right]^{-M}}$$

si $M \to \infty$

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= 1 - \frac{1}{e} = 0'632$$

⑯

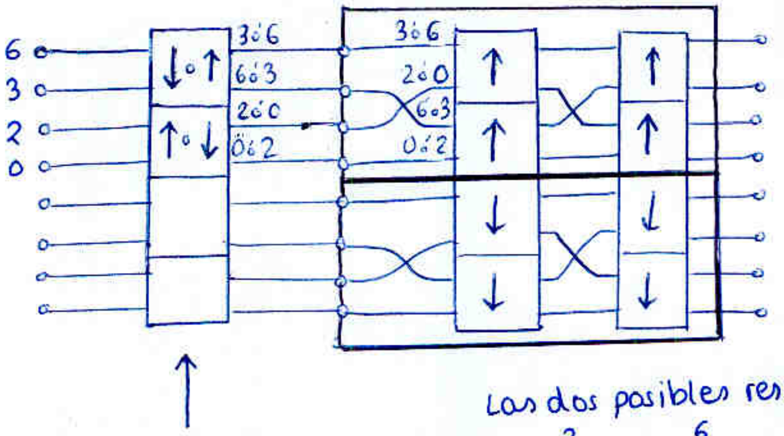
a) caudal Th = nº medio células transferidas por unidad de tiempo

b) Factor de utilización ρ = nº medio células transferidas por slot

c) $Th\,[\text{cel}/s] = \dfrac{\rho\,[\text{cel}/\text{slot}]}{T\,[s/\text{slot}]}$

d) ρ = probabilidad de ranura ocupada (no la inversa!)

⑰



Corresponde a la PRIMERA parte de la red Batcher, y no al ordenador bitónico de detrás; por tanto las conexiones entre etapas eran lineas rectas

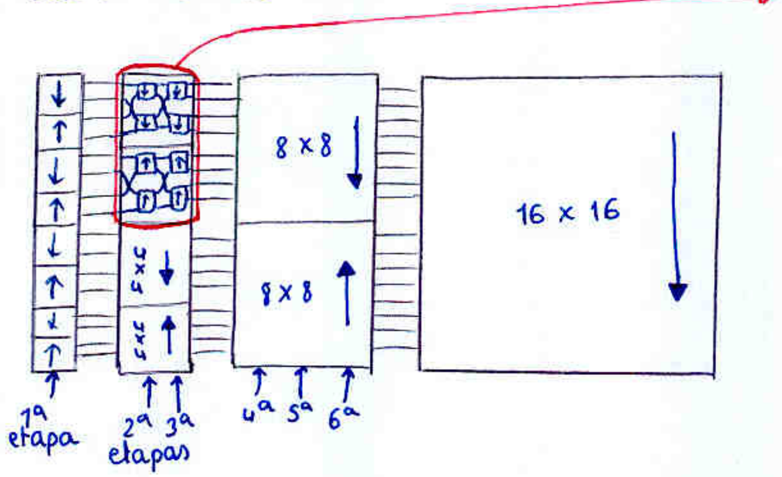
Dos posibles formas

Las dos posibles respuestas son

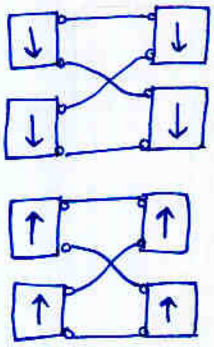
3		6
2	ó	0
6		3
0		2

← sólo ésta aparece como opción

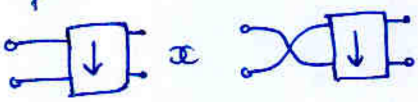
(x) Batcher 16 × 16



Haciendo un zoom a lo que piden, no es más que las conexiones intermedias de un 4 × 4 (ver ejercicio anterior)

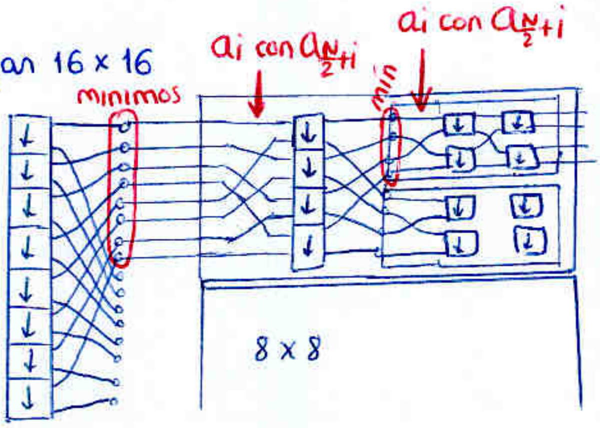


Pero obviamente un comparador no distingue entre sus dos entradas, por lo que

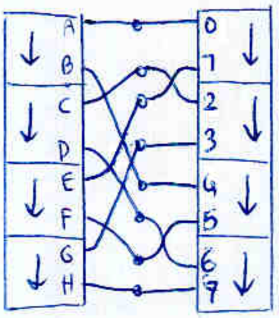


las salidas serán las mismas

⑱ Banyan 16 × 16



haciendo zoom a lo q piden



A → 0
B → 4
C → 2
D → 6
E → 1
F → 5
G → 3
H → 7

Junio 2005

11c, 12d, 13b, 14a, 15d, 16a, 17d, 18a

6. Para un sistema M/M/∞ con $\lambda = 1$ y $\mu = 2$ clientes/s, indique la respuesta FALSA:

a) Tras finalizar una visita al estado E1, el sistema visita el estado E0 con probabilidad superior a 0,6.
b) La frecuencia de tránsitos del estado E1 a estado E2 es inferior a 0.35 transiciones/s.
c) El porcentaje de tiempo que el sistema permanece en E1 es superior al 30 %.
d) El tiempo medio de residencia en E3 supera los 160 ms.

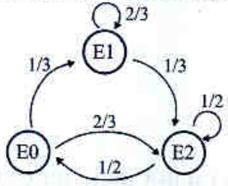
7. Dado un sistema M/M/1, se denota por T a la v.a. tiempo de residencia de un cliente en el sistema, por N la v.a. número de clientes en el sistema y por Q la v.a. número de clientes en cola. Para éste sistema se ha medido que $\rho = 1/2$ y $\overline{T} = 2$s, indique la respuesta CORRECTA:

a) $\overline{W} = 0,55$ s
b) $P[N \leq 2] = 0,775$
c) $P[Q \geq 2] = 0,125$
d) $E[Q/Q > 0] = 0,55$

8. Si para un sistema M/M/3/4, la tasa de llegadas vale $\lambda = 3$ y la de servicio $\mu = 1$ clientes/s. Si denotamos por TC, TP y TD el tráfico cursado, perdido y demorado, y por PB la probabilidad de bloqueo, indique la respuesta CORRECTA:

a) $TC \leq 2$ Er.
b) $TP \geq 0,8$ Er.
c) $TD \geq 0,75$ Er.
d) $PB \leq 0,3$

9. Para la cadena de Markov de la figura, el tiempo medio entre visitas a E_1 (en ranuras), M_1, vale



a) $1 \leq M_1 < 3,5$
b) $3,5 \leq M_1 < 5,5$
c) $5,5 \leq M_1 < 8$
d) $8 \leq M_1$

10. Para un sistema M/M/3/4 se sabe que la probabilidad de transición $P_{12} = 2/3$ y que el tiempo medio de residencia en E_2 vale 1/4 s. Si $\overline{N}_S$ es el número medio de clientes en servicio, $\overline{Q}$ es el número medio de clientes en cola, N es la v.a. número de clientes en sistema y ρ es el factor de utilización de los servidores, indique cuál de las siguientes afirmaciones es CORRECTA:

a) $P[N > \overline{Q}] = \rho$
b) $0{,}85 \leq P[N > \overline{Q}] \leq 0{,}95$
c) $\overline{N}_S \leq 2$ y $\rho < \overline{N}_S/3$
d) $\overline{N}_S > 2$ y $\rho \leq \overline{N}_S/3$

11. Dado un conmutador $N \times N$ sin pérdidas, donde la llegada de células se produce de acuerdo a un proceso de Bernouilli y la probabilidad de que una ranura este ocupada es α, entonces la probabilidad de que llegue al menos una célula a un puerto de salida en un total de m ranuras consecutivas vale ($\beta = 1 - \alpha$):

a) $(\alpha/\beta)^{mN}$
b) $1 - (m\alpha/N)^N$
c) $1 - (1 - \alpha/N)^{mN}$
d) $[1 - (\alpha/mN)^{2N}]^m$

12. Respecto a las siguientes afirmaciones sobre redes de interconexión multietapa de células $N \times N$, N= 2^m, indique la respuesta FALSA:

a) Si N=128, el número de etapas de una red de Benes es 13.
b) Si N=64, el número de puntos de cruce de una red de Benes es 22×64.
c) Si N=128, el número de etapas de una red Batcher es 28.
d) Si N=64, de puntos de cruce de una red Banyan es 11×64.

13. Sea un conmutador de células con arquitectura espacial monoetapa (*crossbar*) sin colas, al que se le ofrece un tráfico generado según el modelo de Bernouilli habitual con parámetro p=1/2. Si el conmutador tiene N=10 puertos y el tiempo de célula (*slot*) es de 1μs, el caudal TOTAL cursado (γ_c) y el caudal TOTAL ofrecido (γ_o), (en Megacélulas/s), cumplen:

a) $1,85 \leq \gamma_c < 2,98$
b) $2,98 \leq \gamma_c < 4,57$
c) $2,98 \leq \gamma_o < 3,75$
d) $3,75 \leq \gamma_o < 4,75$

PII – 7

14. A un conmutador de células $N \times N$ se le ofrece un tráfico de Bernouilli. Respecto al caudal por puerto de salida, expresado en células transferidas por ranura temporal, indique la respuesta CORRECTA (suponga que las colas son de capacidad infinita):

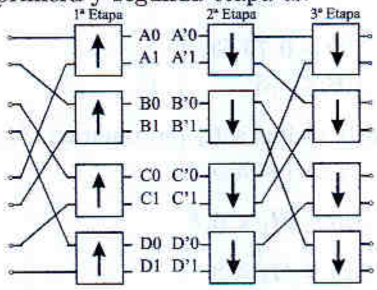
a) Cuando únicamente hay colas a la entrada, el número de puertos es grande y no se utiliza la técnica *virtual output queuing*, el caudal jamás puede llegar a valer 0.6.

b) Cuando únicamente hay colas a la salida, el caudal puede llegar a valer la unidad si la velocidad interna de conmutación se multiplica por un factor inferior a N.

c) Cuando únicamente hay colas a la entrada, el caudal puede llegar a valer la unidad si la velocidad interna de conmutación se multiplica por un factor inferior a N.

d) Si implementa una red de Clos de tres etapas, el caudal cursado siempre es la unidad, incluso sin colas.

15. La figura representa un ordenador bitónico de secuencias de tamaño N=8. La interconexión CORRECTA entre la primera y segunda etapa es:



a) A0-A'0, A1-B'0, B0-C'0, B1-D'0.

b) A0-A'0, C0-A'1, B0-B'0, D0-B'1.

c) B0-B'0, B1-D'0, C0-A'1, C1-C'1.

d) C0-B'1, C1-A'1, D0-D'1, D1-C'1.

16. A una red de conmutación Batcher-Banyan 8x8 acceden en una ranura dada un conjunto de células con las siguientes etiquetas (7,2,5,6,1,3,4,0). Suponiendo que la red Batcher realiza una ordenación decreciente de arriba a abajo, el estado de los cuatro conmutadores superiores de la segunda etapa de la red Banyan, también de arriba a bajo, resulta ser:

a) cross, cross, cross, cross.

b) cross, cross, bar, bar.

c) bar, bar, cross, cross.

d) cross, bar, cross, bar.

17. Respecto a las siguientes afirmaciones sobre un conmutador *Knockout* $N \times N$, con concentradores $N \times M$ ($M < N$) y para el que la probabilidad de ranura llena en enlaces de entrada es p, indique la respuesta CORRECTA:

a) La probabilidad de pérdida interna de células es proporcional a M.

b) La expresión $\overline{NP} = \sum_{k=M+1}^{N}(k-M)\left(\begin{array}{c} \mathrm{N} \\ \mathrm{k} \end{array}\right)(p/M)^k(1-p/M)^{N-k}$ permite calcular el número medio de células perdidas por ranura.

c) Los *Address Filters* tienen la función principal de impedir que, en una misma ranura, más de M células accedan a un mismo puerto de salida.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

18. Respecto a las siguientes secuencias de números, indique la afirmación CORRECTA:

a) $[4, 3, 8, 10, 11, 13, 15]$ es bitónica.

b) $[10, 12, 7, 3, 1, 4, 9, 2]$ es bitónica.

c) $[11, 15, 9, 4, 1, 3, 5, 6, 8, 10]$ NO es bitónica

d) $[4, 7, 9, 10, 13, 15, 5, 1]$ NO es bitónica.

Junio 2005 - Segunda Parte

⑪ · Conmutador N×N <u>sin pérdidas</u> (¿tiene memoria a la entrada?)
· Llegada: Bernouilly α
$\downarrow$ probablemente si

Probabilidad de que llegue al menos una célula a un puerto de salida en un total de m ranuras consecutivas vale (siendo $\beta = 1-\alpha$)

Pr. llegue al menos una
$= 1 -$ Pr no llegue ninguna

> Nota: En general no se podría hacer éste paso porque en un conmutador con memoria no hay independencia entre slots, sin embargo sí que la hay en el caso de que no llegue nada (ya que la memoria no afecta)
> Por tanto podemos considerar que no llegue nada de un puerto $(1-\frac{\alpha}{N})$, para todos los puertos de entrada son sucesos independientes y podemos hacer:

$$= 1 - \Big[\big(1-\tfrac{\alpha}{N}\big)^{\underset{N\ \text{puertos entrada}}{\overset{N}{\uparrow}}}\Big]^{\underset{m\ \text{ranuras}}{\overset{m}{\uparrow}}} = 1 - \Big[1-\tfrac{\alpha}{N}\Big]^{Nm}$$

⑫ $N \times N$ con $N = 2^m$

a) nº etapas Benes $= 2\log_2 N - 1 \overset{\overset{N=128}{\downarrow}}{=} 13$

b) $\begin{array}{l}\text{ptos cruce}\\ \text{Benes}\end{array} = 4 \cdot \underset{2\times 2}{\text{nº matrices}} = 4 \cdot \frac{N}{2} \cdot \text{nº etapas} = 2N \cdot [2\log_2 N - 1] \overset{\overset{N=64}{\downarrow}}{=} 1408 = 22 \cdot 64$

c) nº etapas Batcher $= 1+2+\ldots+\log_2 N = (1+\log_2 N)\frac{\log_2 N}{2} \overset{\overset{N=128}{\downarrow}}{=} 28$

d) $\begin{array}{l}\text{ptos cruce}\\ \text{red Banyan}\end{array} = 4 \cdot \text{nº elementos} = 4 \cdot \frac{N}{2} \cdot \text{nº etapas} = 4 \cdot \frac{N}{2} \cdot \log_2 N \underset{\underset{N=64}{\uparrow}}{=} 768 \neq 11 \times 64$

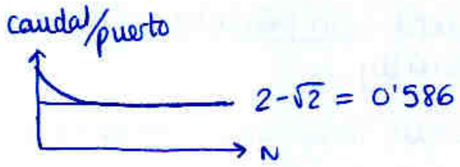
⑬ · crossbar sin memoria N×N $N = 10$
· Bernouilly $p = 0'5$
· $T_{slot} = 1\,\mu s$

$$\text{Caudal TOTAL cursado} = N \cdot \overbrace{\Big[1-\big(1-\tfrac{p}{N}\big)^{N}\Big]}^{\text{caudal de 1 puerto}} = 4'013\ \text{cel/slot} \xrightarrow{\times \frac{1}{T_{slot}}\ [\text{slot/s}]} = 4'013\ \text{Mcel/s}$$

$$\text{Caudal TOTAL ofrecido} = N \cdot p = 5\ \text{cel/slot} \xrightarrow[\times \frac{1}{T_{slot}}]{} = 5\ \text{Mcel/s}$$

⑭ · N x N
· Tráfico Bernouilly

a) · colas a la entrada (sin VOQ)
· N → ∞



nunca llegará a 0'6 por el efecto HOL

b) · colas a la salida
· vel. interna N veces mayor → caudal máximo (100%)

si no se cumple esto, el caudal no es máximo

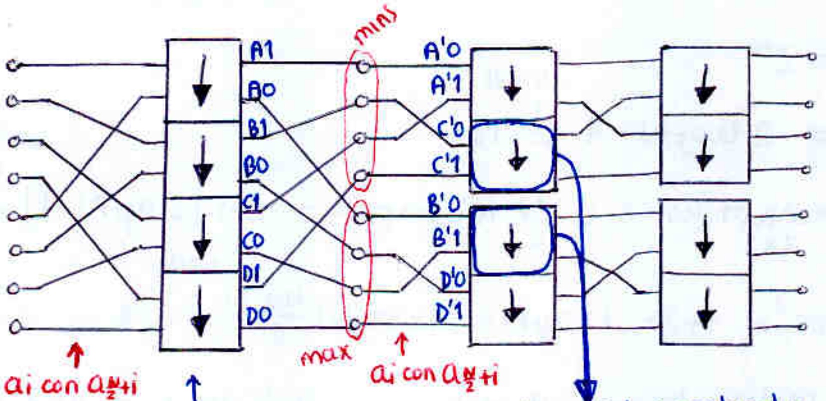
c) · colas a la entrada : la velocidad interna no tiene que multiplicarse por nada. Siempre aparecerá el efecto HOL

sólo si se utilizase VOQ (que NO requiere velocidad interna N veces la externa) se lograría caudal = 1

d) · Red de Clos 3 etapas → no hay bloqueo interno → se comporta como crossbar → sigue habiendo posibilidad de conflicto $(2-\sqrt{2})$

⑮ Ordenador bitónico tamaño N = 8

Forma 'canónica'



han 'girado' éstas

han intercambiado estas dos

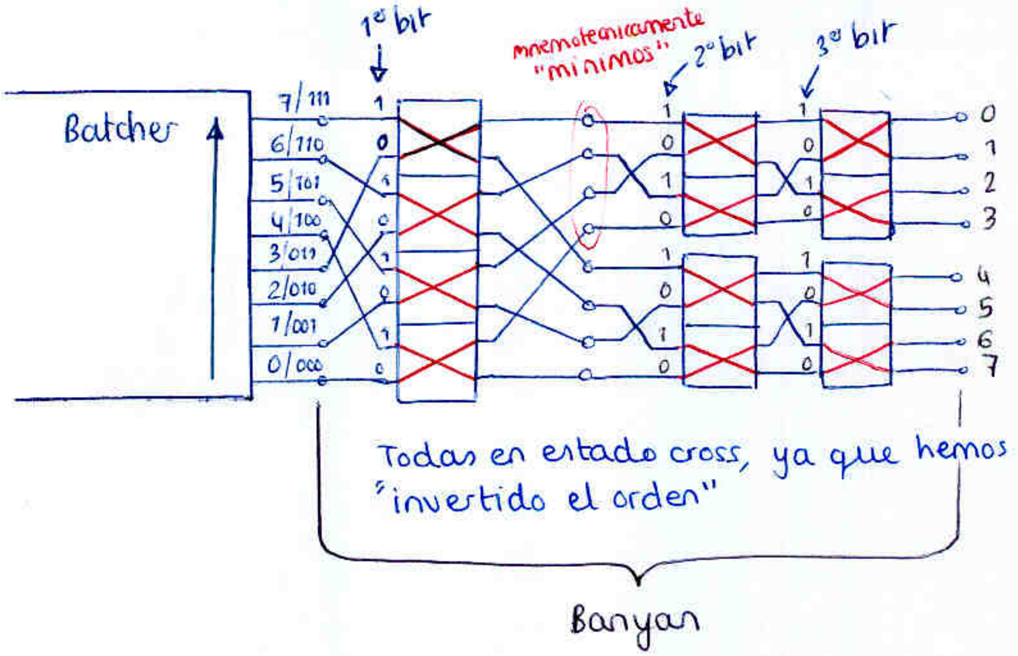
numero los puertos teniendo ello en cuenta

La conexión correcta es entonces:

A1 → A'0
A0 → B'0
B1 → C'0
B0 → D'0
C1 → A'1
C0 → B'1
D1 → C'1
D0 → D'1

la d)

⑯



Todas en estado cross, ya que hemos "invertido el orden"

⑰ · knockout N × N
· concentradores N × M
· enlace entrada Bernouilly p

$$\Rightarrow \quad P_k = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{N}\right)^k\left(1-\frac{p}{N}\right)^{N-k}$$

(igual que si sólo fuera memoria a la salida sin concentrador)

$$\overline{NP} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \underbrace{(k-M)}_{\text{nº células que se pierden}} \cdot P_k$$

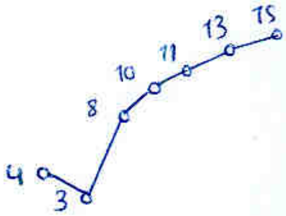
← ponderando a cada estado

a) No, a mayor M menores pérdidas

b) casi correcto, peo tiene $\frac{p}{M}$ en lugar de $\frac{p}{N}$

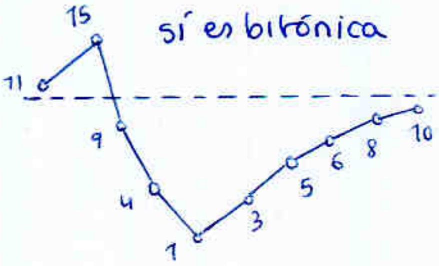
c) Los AF simplemente impiden pasar a las células que no van a ese puerto de salida

⑱ a)



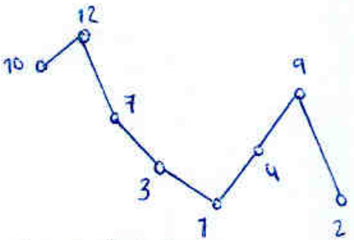
es bitónica

c)



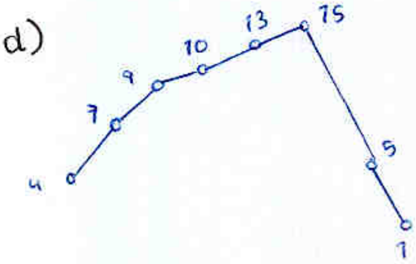
sí es bitónica

b)



no es bitónica

d)



sí es bitónica

Enero 2005

11b, 12c, 13d, 14a, 15d, 16b, 17d, 18b

11. Un conmutador de paquetes de células $N \times N$, siendo $N = 128$, está cargado con un tráfico de Bernouilli de parámetro $p = 0{,}5$. Respecto al caudal (CA) cursado por puerto de salida, expresado en células/ranura, indique la respuesta CORRECTA: (RI es la red de interconexión)

- **a)** Si la RI se implementa como una matriz espacial monoetapa sin memoria, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}50$.
- **b)** Si la RI se implementa como una matriz espacial monoetapa con memoria infinita en puertos de entrada, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.
- **c)** Si la RI se implementa como una red espacial de 3 etapas sin memoria, con $k = n$ y en la que el encaminamiento se realiza aleatoriamente, entonces $0{,}4 < CA \leq 0{,}5$.
- **d)** Si la RI se implementa como una red espacial de 3 etapas sin memoria, con $k = n$ y en la que se utiliza la técnica de reorganización de conexiones internas, entonces $0{,}45 < CA \leq 0{,}5$.

12. En referencia al uso de las redes de interconexión siguientes, indique la respuesta CORRECTA:

- **a)** Una red de Clos puede utilizarse exclusivamente en conmutación de circuitos.
- **b)** Una red Banyan puede utilizarse tanto en conmutación de circuitos como de paquetes.
- **c)** Una red de Benes puede utilizarse tanto en conmutación de circuitos como de paquetes
- **d)** Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

13. Un conmutador de células $N \times N$, $N \to \infty$, está cargado con un tráfico de Bernouilli de parámetro p. Para implementar su Red de Interconexión (RI) se exploran dos arquitecturas: i) RI espacial monoetapa sin memoria; ii) RI espacial monoetapa con memoria infinita en puertos de entrada. El valor de p a partir del cual el caudal cursado por la primera arquitectura supera al de la segunda, cumple:

- **a)** $0 < p \leq 0{,}5$
- **b)** $0{,}5 < p \leq 0{,}586$
- **c)** $0{,}586 < p \leq 0{,}85$
- **d)** $0{,}85 < p \leq 0{,}99$

14. Considere un conmutador 4×4 con memoria a la salida y tráfico de Bernoulli a la entrada de parámetro p. La mitad de las células que llegan a cualquier puerto de entrada van dirigidas al puerto de salida 0 y, la otra mitad se dirige hacia alguno de los otros tres puertos con idéntica probabilidad. Si $a_i(k)$ representa la probabilidad de que lleguen k células al puerto de salida i en una ranura, indique la respuesta CORRECTA:

- **a)** $a_2(k) = \binom{4}{k} (p/6)^k (1 - p/6)^{4-k}$
- **b)** $a_0(k) = \binom{4}{k} (p/6)^k (1 - p/6)^{4-k}$
- **c)** $a_0(k) = \binom{4}{k} (0{,}5/4)^k (1 - 0{,}5/4)^{4-k}$
- **d)** Ninguna de las anteriores es correcta.

15. Si N_x^a representa el número de puntos de cruce de una red de Banyan y N_x^e el de una red de Benes, ambas $N \times N$, qué afirmación es la CORRECTA:

- **a)** $N_x^a < N_x^e$, pero la red de Benes presenta la ventaja de realizar el encaminamiento interno de forma distribuida.
- **b)** $N_x^a = N_x^e$
- **c)** $N_x^a > N_x^e$
- **d)** Ninguna de las anteriores.

16. En un conmutador 4×4 de arquitectura *knockout* que utiliza concentradores 4×3, con tráfico de Bernoulli a la entrada y valor de $p = 0{,}9$, la probabilidad de que en una ranura lleguen 3 células a un puerto de salida vale (considere 3 dígitos decimales con redondeo):

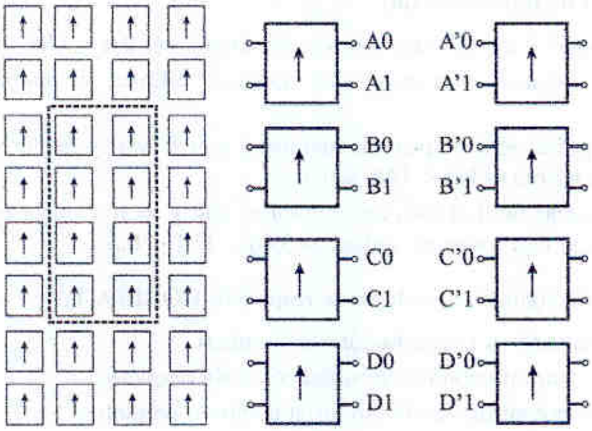
- **a)** 0,035
- **b)** 0,038
- **c)** 0,780
- **d)** 0,419

17. Se modifica el funcionamiento de una red Banyan 8×8 para que gestione secuencias con etiquetas repetidas. La nueva red Banyan marca todas las células con etiquetas repetidas a su entrada, de forma que cuando dos células compiten por el mismo puerto de salida de una matriz elemental interna 2x2, se encamina correctamente la célula NO marcada (en caso de que las dos estén marcadas se elige una al azar). El número de matrices elementales a *cross* (c), *bar* (b) o a un estado irrelevante (x), al conmutar la secuencia de etiquetas (0,1,5,6,6,7,-,-) es:

- **a)** $7c, 4b, 1x$
- **b)** $6c, 4b, 2x$
- **c)** $6c, 5b, 1x$
- **d)** Ninguna de las anteriores es correcta

P II - 10

18. En la figura se representa una red que permite obtener una secuencia ordenada a partir de una secuencia bitónica. La interconexión CORRECTA entre las matrices indicadas es



a) A0-A'0, A1-B'0, B0-C'0, B1-D'0
b) A1-A'1, B1-B'1, C0-C'0, D0-D'0
c) B0-B'0, B1-D'0, C0-A'1, C1-C'1
d) C0-A'1, C1-C'1, D0-C'1, D1-D'1

Modelo A

Juni'o 2001

En las siguientes preguntas, elija **sólo una opción** de las 4 posibles:

1. Indique la respuesta CORRECTA:

   a) Cualquier sistema de espera en el que $\lambda > \mu$ no alcanzará nunca el equilibrio (estará siempre congestionado).
   b) Dado un sistema de espera con pérdidas se sabe que la tasa media de clientes que acceden al sistema (no se pierden) es de 2.5 clientes/s y que el tiempo medio de servicio es de 2 s. Para este sistema, el tráfico cursado, TC, resulta ser de 5 Er.
   c) En un sistema M/M/10, el elemento q_{33} del generador infinitesimal Q vale $-(3\lambda + \mu)$.
   d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

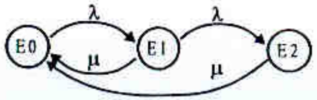
2. Respecto al caudal total (Th) de un sistema M/M/2, indique la respuesta CORRECTA:

   a) $Th = 2\mu(1-P_0) - \lambda P_0$
   b) $Th = 2\mu(1-P_0) - \lambda P_1$
   c) $Th = 2\mu(1-P_0)$
   d) $Th = 2\lambda(1-P_1)$

3. Un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 3$ clientes/s se descompone en dos procesos con probabilidades $p_1 = 1/3$ y $p_2 = 2/3$. Suponga que acaba de ocurrir un nacimiento en el proceso 1, entonces ¿cuál es la probabilidad p de que el próximo nacimiento en el proceso 2 ocurra antes de 2 s.?:

   a) $p < 0.1$
   b) $0.1 \le p < 0.2$
   c) $0.2 \le p < 0.9$
   d) $p \ge 0.9$

4. El proceso Markoviano de la figura representa las transiciones en el número de clientes de un sistema de espera. Indique la respuesta CORRECTA:



   a) El elemento q_{22} del generador infinitesimal Q vale $-(\lambda + \mu)$.
   b) $P_0 = \mu/(\lambda + \mu)$.
   c) $\overline{N} = \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda+\mu)^2}[\mu + 2\lambda]$
   d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

5. Respecto al valor de los siguientes parámetros de un sistema M/M/1, con $\rho = \lambda/\mu$, indique la respuesta FALSA:

   a) $P_k = (1-\rho)\cdot\rho^k$
   b) $\overline{Q} = \rho^2/(1-\rho)$
   c) $P[Q>0] = 1 - P_0$
   d) $E[W/W>0] = \overline{W} + 1/\mu$.

6. En un sistema M/D/1 en el que la tasa de llegada es λ y el tiempo de ranura es T s. , se observan el número de unidades que hay en el mismo, justo al finalizar un servicio. En tales instantes de observación hay definida una cadena de Markov. Indique la respuesta CORRECTA:

   a) El elemento π_{12} de la matriz de probabilidades de transición de dicha cadena vale $\pi_{12} = \lambda T e^{-\lambda/T}$.
   b) El elemento π_{11} de la matriz de probabilidades de transición de dicha cadena vale 0.
   c) La función generatriz del número de llegadas en una ranura vale $\Pi(z) = e^{\lambda T(z-1)}$.
   d) La función generatriz del número de llegadas en una ranura vale $\Pi(z) = z e^{\lambda T(z-1)}$.

7. Respecto al mismo sistema del apartado anterior, indique la respuesta CORRECTA:

   a) El valor medio del número de llegadas en una ranura vale $E[N] = \lambda T$.
   b) El valor medio del número de llegadas en una ranura vale $E[N] = \lambda / T$.
   c) La varianza del número de llegadas en una ranura vale $V[N] = \lambda^2 T$.
   d) La varianza del número de llegadas en una ranura vale $V[N] = (\lambda T)^2$.

8. Dado un sistema M/M/2/2 con $\lambda = 2$ clientes/s y $\mu = 1$ clientes/s, indique la respuesta FALSA:

   a) Tras finalizar una visita al estado E1, el sistema visita el estado E0 con probabilidad 1/3.
   b) La frecuencia de tránsitos del estado E1 a estado E2 es de 0.8 transiciones/s.
   c) El porcentaje de tiempo que el sistema permanece en E1 vale 40%.
   d) El tiempo medio de permanencia en E0 vale 0.45 s.

9. Suponga que un puerto de salida de un conmutador de paquetes de longitud variable se puede modelar mediante un sistema M/M/1. Si la longitud de los paquetes está distribuida exponencialmente con media 8 Kbits y la capacidad del enlace es de 64 Mbit/s, calcule la tasa máxima de paquetes λ_{max} (en miles de paquetes por segundo) de forma que el tiempo medio de tránsito a través del puerto (espera mas servicio) no supere los 2 ms.

   a) $\lambda_{max} < 0.75$.
   b) $0.75 \le \lambda_{max} < 1.1$.
   c) $1.1 \le \lambda_{max} < 11.5$.
   d) $\lambda_{max} \ge 11.5$.

10. Para un sistema M/M/3/4 la tasa de llegada vale $\lambda = 3$ clientes/s y la de servicio $\mu = 1$ clientes/s. Con relación al tráfico cursado (TC) y al tráfico demorado (TD), indicar la respuesta CORRECTA:

    a) $TC < 1$ Er
    b) $2Er \le TC$
    c) $TD < 0.2$ Er
    d) $1Er \le TD$

11. Respecto a las funciones de encaminamiento en las redes de conmutación de paquetes, indique la respuesta FALSA:

    ✓ a) En un conmutador ATM, la tabla de encaminamiento se actualiza cada vez que se establece un nuevo circuito virtual.
    ✓ b) En un conmutador ATM, la Unidad de Control es la encargada de encaminar cada nuevo circuito virtual.
    ✓ c) En los conmutadores de banda ancha, las funciones de retransmisión de paquetes (*packet forwarding*) se implementan en *hardware*.
    ✗ d) Las funciones relacionadas con la población de las tablas de encaminamiento son de carácter local al conmutador. (es de caracter global)

12. Respecto al funcionamiento de un conmutador ATM *knockout* NxN, indique la respuesta FALSA:

    ✓ a) Cuando dos células compiten en una matriz 2x2 del concentrador siempre debe haber una ganadora y otra perdedora.
    ✓ b) El *shifter* localizado a la salida del concentrador permite que las L colas asociadas a cada puerto de salida se llenen de forma uniforme.
    ✓ c) El *shifter* localizado a la salida del concentrador permite que se preserve el orden en la transmisión de células por el puerto de salida correspondiente.
    ✗ d) Los filtros de célula (*cell filters*) sólo copian las células *multicast*.

13. Sea un conmutador ATM con arquitectura espacial monoetapa (*crossbar*) sin colas, al que se le ofrece un tráfico generado según el modelo de Bernouilli habitual con parámetro p=1/2. Si el conmutador tiene N=10 puertos y el tiempo de célula (*slot*) es de 1 μs., el caudal TOTAL o *throughput* (γ) (en Mega-células/s) del conmutador es:

que haya paquete $| = 1-(1-\frac{p}{N})^N = \gamma$

$= 1-(1-\frac{1}{20})^{10} = 0'4012$ cel/μs

$T_s = 10^{-6}$ s

caudal total : $10\gamma = 4'012$ cel/μs = Mcel/s

a) $\gamma \le 1.99$.
b) $1.99 < \gamma \le 2.80$.
c) $2.80 < \gamma \le 4.75$.
d) $4.75 < \gamma$

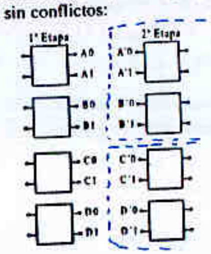
14 Con referencia al conmutador ATM del enunciado anterior, el caudal TOTAL o *throughput* OFRECIDO (γ) (en Mega-células/s) al conmutador es:

Np

a) $\gamma \le 1.99$.
b) $1.99 < \gamma \le 2.80$.
c) $2.80 < \gamma \le 4.75$.
d) $4.75 < \gamma$.

15. En una red Banyan 8x8, indique cuál de las siguientes interconexiones entre la primera y segunda etapa es la CORRECTA para que la red conmute la permutación identidad sin conflictos:

a) A0-A'0, A1-A'1, B0-B'0, B1-B'1.
b) A0-A'0, A1-C'0, B0-B'0, B1-D'0.
c) A0-A'1, A1-A'0, B0-B'1, B1-B'0.
d) A0-A'0, A1-B'0, B0-C'0, B1-D'0.



p-h_0

p-h_1

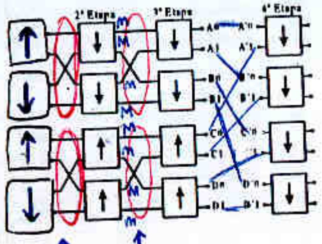
si el bit primero es cero, debe ir a p-h_0. si es uno, a p-h_1

16. Respecto a las siguientes secuencias de números, indique la afirmación CORRECTA:

a) [11, 15, 9, 4, 1, 3, 5, 6, 8, 10] no es bitónica.
b) [3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 2, 4] es bitónica.
c) [5, 6, 8, 9, 10, 12, 7, 3, 1, 4] es bitónica.
d) [3, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 15, 1, 2] no es bitónica.

17. En la figura se representan las 4 matrices superiores de la 2ª, 3ª y 4ª etapas de una red Batcher de 16 puertos. Suponiendo que la configuración de las 4 matrices superiores de la 1ª etapa es (↑,↓,↑,↓), indique la interconexión CORRECTA entre la 3ª y 4ª etapas:

a) A0-A'0, A1-B'0, B0-C'0, B1-D'0.
b) A0-A'0, A1-C'0, B0-B'0, B1-D'0.
c) A0-A'1, A1-A'0, B0-B'1, B1-B'0.
d) A0-A'0, A1-B'0, B0-A'1, B1-B'1.



desorden.

2 bitónicas

2 bitónicas ordenadas

18. Respecto al caudal por puerto de salida, expresado en células transferidas por ranura temporal, en un conmutador ATM sin pérdidas, indique la respuesta CORRECTA:

efecto HOL N→∞ $2-\sqrt{2}=0'58$
N = 4 0'75

a) Cuando únicamente hay colas a la entrada, el caudal jamás puede llegar a valer 0.6.
b) Cuando únicamente hay colas a la salida y la velocidad interna de conmutación coincide con la externa de transmisión, el caudal puede alcanzar el valor unitario. No, necesitas N veces la vel. externa
c) Cuando únicamente hay colas a la entrada, el caudal puede llegar a valer la unidad si la velocidad interna de conmutación se duplica.
d) Cuando únicamente hay colas a la salida, el caudal nunca puede alcanzar el valor unitario aunque la velocidad interna de conmutación se incremente cuantas veces se quiera, con respecto a la velocidad externa de transmisión.

a) Cuando únicamente hay colas a la entrada, el nº de puertos es grande y no se utiliza la técnica virtual output queuing el caudal jamás puede llegar a 0'6

↑ correcta por HOL

19. Respecto a las siguientes afirmaciones sobre redes de interconexión multietapa, indique la respuesta CORRECTA:

saltar disciplina FIFO ✓

a) El número total de etapas de una red de Benes 16x16 es 6. $2\log_2 N - 1$
b) El número de matrices elementales de una red Benes 16x16 es de 48. $N \log_2 N - \frac{N}{2}$
c) El número de comparadores de una red Batcher 8x8 es de 16. $4\times(1+2+3)$
d) El número total de matrices elementales (2x2) en una red Banyan 16x16 es de 32. $\frac{N}{2}\log_2 N$

20. Respecto a las limitaciones de las redes Batcher-Banyan y a las diferentes soluciones que se han propuesto para superarlas, indique la respuesta CORRECTA:

a) Las redes Batcher-Banyan pueden conmutar sin conflictos secuencias de etiquetas en las que sólo una de ellas puede estar repetida. ✗
b) Una solución para evitar conflictos con secuencias de etiquetas en las que hay valores repetidos es añadir memoria en los puertos de salida, pero sin de aceleración interna. ✗
c) La introducción de redes trampa permite que, dadas m células con etiquetas iguales en una ranura temporal a la entrada de la red, se puedan "retrasar" m-1 hasta la próxima ranura. ✓
d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.