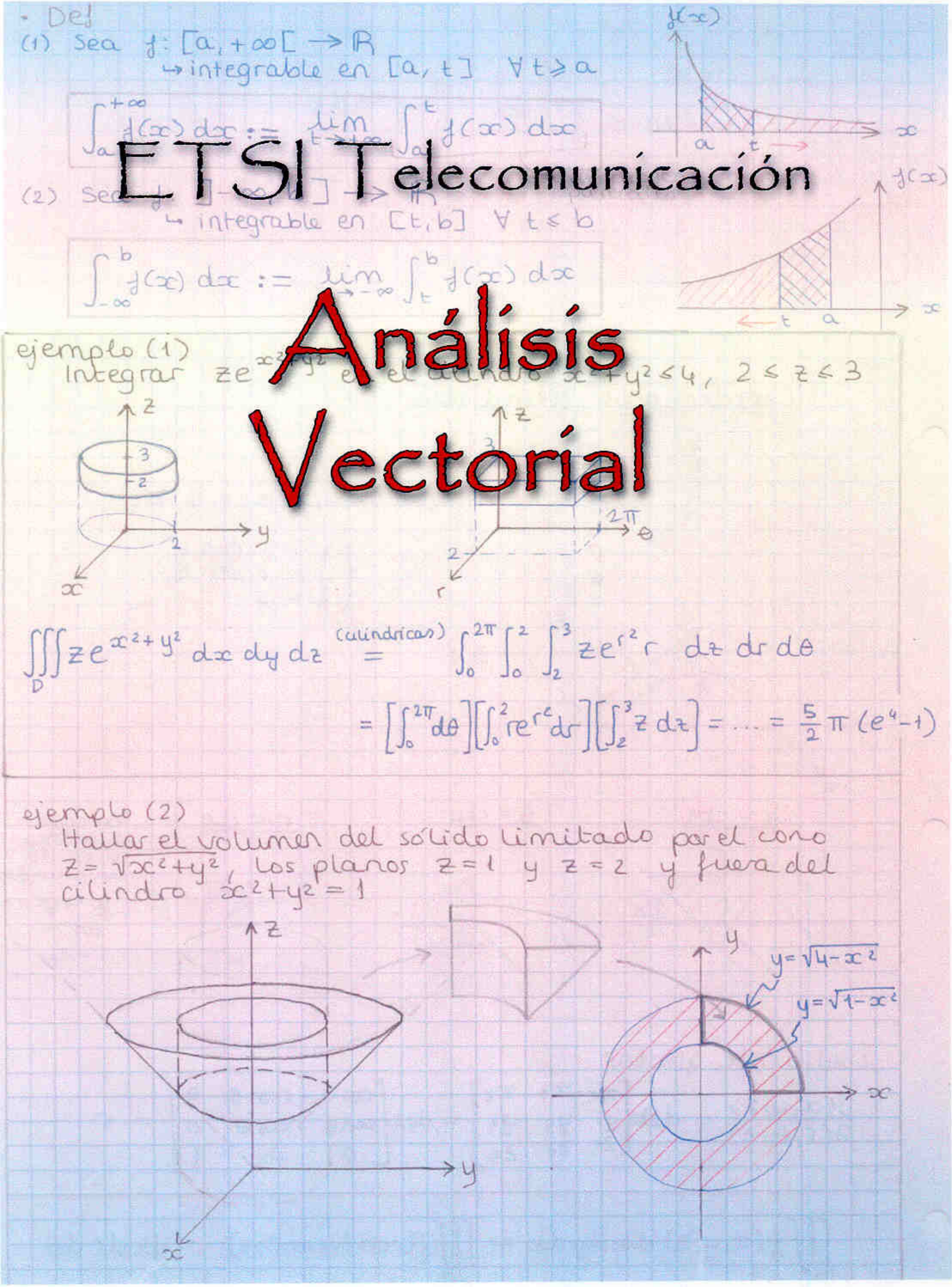
ETSI Telecomunicación

Análisis Vectorial



Apuntes de Pak

Análisis Vectorial

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Segundo cuatrimestre de 1er curso
Curso 2003/2004

Contenido

- Apuntes de la asignatura
- Boletín de problemas de los profesores
- Problemas resueltos en sucio (atención: no están comprobados, así que contendrán errores)

Fecha de última actualización: 29 Febrero 2008

Análisis Vectorial

Tema 1:

Integrales impropias.

TEMA 1. INTEGRACION IMPROPIA

Hasta ahora se estudió la integral de Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{Barrow}}{=} F(b) - F(a) \quad \text{si} \quad F'(x) = f(x)$$

de funciones
- acotadas
- en intervalos cerrados y acotados

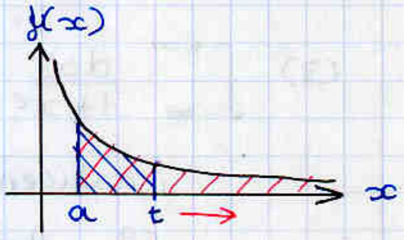
Integrales impropias:
- 1era especie: función definida en intervalo NO acotado
- 2ª especie: función no acotada en $[a, b]$

INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

• Def

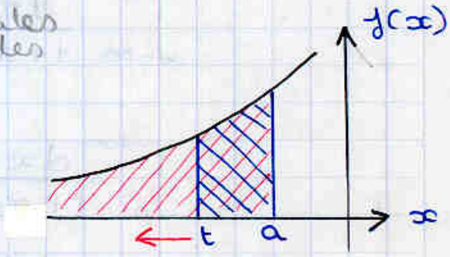
(1) Sea $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
↳ integrable en $[a, t]$ $\forall t \geq a$

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\int_a^t f(x)\,dx}_{\text{integrales parciales}}}$$

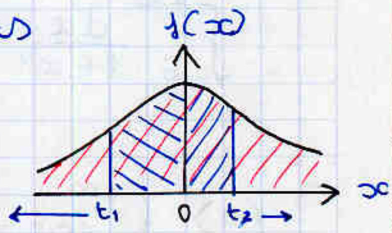


(2) Sea $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$
↳ integrable en $[t, b]$ $\forall t \leq b$

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx}$$



(3) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
↳ integrable en $[t_1, t_2]$ $\forall t_1 < t_2$
↳ existen las dos integrales impropias $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ y $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$



$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx}$$

$$= \lim_{t_1\to-\infty} \int_{t_1}^0 f(x)\,dx + \lim_{t_2\to+\infty} \int_0^{t_2} f(x)\,dx$$

NOTA: t_1 y t_2 no tienen porque ir a la misma velocidad: en general $t_1 \neq -t_2$

• Def: Convergencia o divergencia: Carácter de la integral

Convergente: el límite involucrado existe y es finito
Divergente: en otro caso (i.e. límite no existe o es infinito)

en (3) se dice convergente si AMBAS integrales del 2° miembro lo son.
en caso contrario se dice divergente

ejemplos:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t$

$\displaystyle = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-t} + \underbrace{e^{-0}}_{1}\right)$

$= 1$ $\boxed{\text{CONVERGE}}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 (1-x)^{-1/2}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{(1-x)^{1/2}}{1/2}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_t^0$

$\displaystyle = \lim_{t\to-\infty} -2\left(1-(1-t)^{1/2}\right) = +\infty$

$\boxed{\text{DIVERGE}}$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

· analicemos $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. En efecto;

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t_1\to-\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_{t_1}^{0}$

$\displaystyle = \lim_{t_1\to-\infty}\left(0-\operatorname{arctg} t_1\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t_2\to+\infty}\int_0^{t_2}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t_2\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^{t_2}$

$\displaystyle = \lim_{t_2\to+\infty}\operatorname{arctg} t_2 = \frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$ $\boxed{\text{CONVERGE}}$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \cos x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\operatorname{sen} x\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\operatorname{sen} t$

no existe el límite: $\boxed{\text{DIVERGE}}$

Propiedades de las Integrales Impropias (de 1ª especie?)

Las propiedades de las integrales PROPIAS se extienden mediante proceso de paso al límite a las IMPROPIAS

1- Linealidad

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergentes $\Longrightarrow$ $\boxed{\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)dx}$

es convergente $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dem: de la linealidad para integrales propias se tiene $\forall t \geq a$

$$\int_a^t [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^t f(x)\,dx + \beta\int_a^t g(x)\,dx$$

tomando límites para $t\to+\infty$ y observando que los dos sumandos del 2° miembro tienen límite finito (impuesto en la hipótesis) se obtiene la propiedad.

2- Regla de Barrow

- sea $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ función <u>continua</u>
- $F: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ es una primitiva de f en $[a,+\infty[$
- existe $\lim_{t\to+\infty} F(t) := F(+\infty)$ entonces:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(F(t)-F(a)\right) = F(+\infty)-F(a) = \left[F(x)\right]_a^{+\infty}}$$

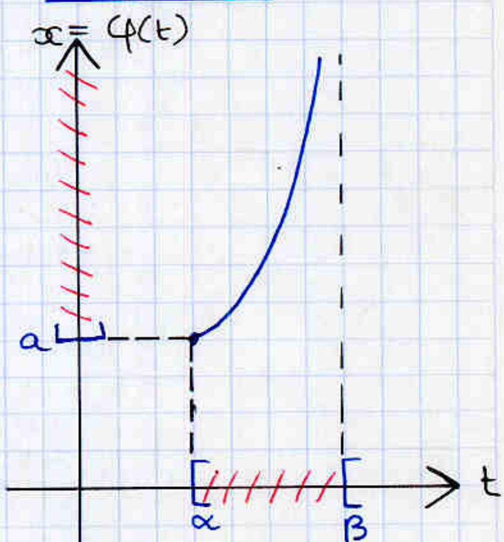
3- Cambio de variable

- sea $f: [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función <u>continua</u>
- si $\varphi: [\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función <u>continua</u>
  - ↳ $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$
  - ↳ $\varphi(\alpha) = a$
    $\varphi(t)_{t\to\beta^-} \longrightarrow +\infty$
  - ↳ $\varphi([\alpha,\beta[) = [a,+\infty[$

entonces:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\cdot \underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}}$$

si una de estas integrales es convergente (divergente) entonces la otra también lo es.



en algunos casos se puede hacer corresponder un intervalo infinito con uno finito ($\beta \leq +\infty$) pasando de una integral impropia a una propia

4- Integración por partes

u, v funciones con derivada continua en $[a, +\infty[$

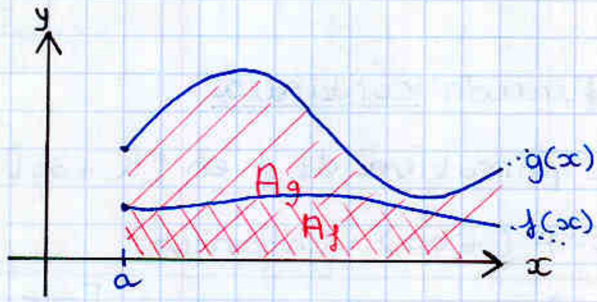
si son convergentes dos de los tres términos siguientes entonces también lo es el tercero, y se verifica que:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} u(x)\cdot v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)\,v(x)\,dx}$$

5- Monotonía de las integrales impropias

sean f, g funciones integrables en $[a, +\infty[$ (i.e. con integral convergente) entonces:

$$\boxed{f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, +\infty[\implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx}$$



$g(x) \geq f(x)\quad \forall x \in [a, +\infty[$

$\Rightarrow A_g \geq A_f$

Propiedades más generales del caracter de integrales impropias 1ª especie.

Propiedad

sea $f: [a,+\infty[$ integrable en $[a,t]$ $\forall\ t \geq a$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \\ y\ \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) := L \end{array} \Longrightarrow L = 0}$$

si $L=0$, el carácter depende de lo pegada que esté $f(x)$ al eje

↳ Observación 1: ¿cómo usar la propiedad?

utilizando $a \rightarrow b$, no $b \rightarrow$ no a

a y $b \Rightarrow c$

no $c \Rightarrow$ (no a) ó (no b)

(no c) y (a) $\Rightarrow$ no b

$$\boxed{\begin{array}{l} L \neq 0 \\ y\ \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) := L \end{array} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ diverge}}$$

↳ Observación 2:

En general, el recíproco de la proposición es falso

contraejemplo:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ y sin embargo $\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}}_{\text{DIVERGE}} = \lim_{t\to+\infty} [\ln|x|]_1^t = +\infty$ detalle

↳ Observación 3:

La hipotesis de que L exista (y sea finito) es esencial

ej: gráfica que consiste en triángulos isósceles no consecutivos sobre el eje x

de bases $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$

y alturas $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

estando colocados alternativamente encima y debajo del eje.

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{-2}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$$

que es serie alternada convergente (Leibniz)

por tanto:

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente y sin embargo $L \neq 0$!!

¿cómo puede ser?

Falla la hipótesis $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ puesto q no existe

Propiedad

sea $f: [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, t]$ $\forall t \geq a$ entonces:

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ tienen mismo caracter $\forall b \geq a$

ejemplo

$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ es convergente, pues $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \underbrace{\int_1^{0} e^{-x} dx}_{\text{finita}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx}_{\text{vimos que converge}}$

EJEMPLO MUY IMPORTANTE

sea $a > 0$!!!

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1 \end{cases}$$

En efecto; es de primera especie porq $a > 0$ └ se evita el 0

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t x^{-p}\, dx$$

$\boxed{\text{si } p \neq 1}$ $$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_a^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 - \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ +\infty & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{si } p = 1}$ $$= \lim_{t\to+\infty} [\ln x]_a^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln|t| - \ln|a|)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty$$

NOTA: si se hace $\int_{-\infty}^{a} \frac{dx}{x^p}$ entonces se requiere $a < 0$

la cuestión es alejarse de la maldad del cero.

El resultado sería el mismo.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE CON INTEGRANDOS NO NEGATIVOS

- **CRITERIO DE COMPARACION** (integrando ≥ 0)!!

sean $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[a, t]$ $\forall t \geq a$

si $0 \leq f(x) \leq g(x)$

entonces:

(a) si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ es convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente

(b) si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ es divergente

ejemplos

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \rightarrow$ No da información

Pensamos: ¿ $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$?

$\left.\begin{matrix} 0<a<b \\ a<b<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ $\qquad 1+x^2 \geq x^2$

$\qquad 1 \geq 0$

Ahora hay que ir al reves para ver si la inecuación inicial es verdad

$0 < x^2 \leq x^2+1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$

como vimos $\int_{a>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge $\underset{comp}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ $\boxed{\text{converge}}$

$\int_5^{+\infty} \frac{x}{x^2-10}\,dx$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-10} = 0$ $\quad \frac{x}{x^2-10} \sim \frac{1}{x}$

$0 < x^2-10 < x^2 \quad \forall x \geq 5$

$0 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2-10} \quad \forall x \geq 5$

$0 < \frac{1}{x} < \frac{x}{x^2-10} \quad \forall x \geq 5$

$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x}$ es divergente $\underset{comp}{\Longrightarrow} \int_5^{+\infty} \frac{x}{x^2-10}$ es $\boxed{\text{divergente}}$

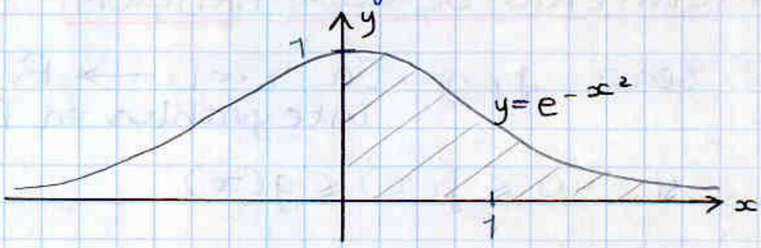
ejercicio: resolverlo por definición.

ejemplos

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ integral de probabilidades

no tiene primitiva en términos de funciones elementales

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$



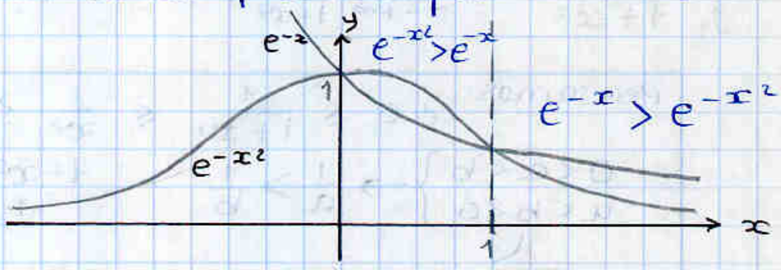
Pensamos: $e^{-x^2} \sim e^{-x}$ (converge $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$)

¿ $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$?

$0 < e^{-x^2} < e^{-x} \iff 0 < -x^2 < -x \iff 0 < x < x^2$

$\iff 0 < 1 < x$

la desigualdad se cumple sólo para $x > 1$



analicemos $\underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{\text{integral de Riemann propia} \Rightarrow \text{convergente}}$ y $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

$x \geq 1$

$\Rightarrow x^2 \geq x$

$\Rightarrow -x^2 \leq -x$

$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$

$0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$

como $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge $\underset{\text{comp}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge

luego $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ es $\boxed{\text{convergente}}$

(integrando ≥ 0)!!

· CRITERIO DE COMPARACION POR PASO AL LIMITE

sean $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funciones integrables en $[a, t[\ \forall t \geq a$

y $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, +\infty[$
$g(x) > 0 \quad \forall x \in [a, +\infty[$

y $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =: l} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$ entonces

a) si $l \neq 0$ y $l \neq +\infty$
$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ tienen el mismo caracter

b) si $l = 0$
$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ es convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es conv.

c) si $l = +\infty$
$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ es divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es diverg.

Observación: en los casos donde el criterio de comparación 'normal' funciona, tb funciona en el de paso al límite.
Ademas, hay algunos casos que sólo funcionan por paso al límite.

ej: $\int_5^{+\infty} \frac{x}{x^2+10}$ se cumple: $x^2+10 \geq x^2 \quad \forall x \geq 5$

$0 < \frac{1}{x^2+10} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 5$

$0 < \frac{x}{x^2+10} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{diverge}} \quad \forall x \geq 5$

¡no da información!

Paso al límite:
$f(x) = \frac{x}{x^2+10} \geq 0 \quad \forall x \geq 5$
$g(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \geq 5$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x^2+10}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+10} = 1 \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array}$

como $\int_{5}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ es divergente $\xRightarrow[\text{comp.}]{} \int_5^{+\infty} \frac{x}{x^2+10}\,dx$ es diverg.

ejemplo:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}\, dx$$

Llamada "Función Gamma" usada en estadística:

$$\lim_{x\to+\infty} (e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x} = \ldots$$ aplicando L'Hôpital tantas veces como sea necesario para que $\alpha-1<0$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(k-1))\, x^{\alpha-k}}{e^x} \quad \alpha-k<0$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \text{cte} \cdot \frac{1}{x^{k-\alpha} \cdot e^x} = 0$$

- Comparación por paso al límite

$f(x) = e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \geq 0$

$g(x) = 1/x^2 > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} \xrightarrow{L'H} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

como $\int_{1>0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge $\overset{comp}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} dx$ conv. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{CONVERGE } \forall \alpha \in \mathbb{R}}$

- ¿Y si lo hubiera comparado con otras cosas?

$\begin{cases} f(x) = e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \geq 0 \\ g(x) = e^{-\frac{x}{2}} > 0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} \cdot x^{\alpha-1}}{e^{-x/2}} = \frac{x^{\alpha-1}}{e^{x/2}} = 0$

$\int_1^{+\infty} e^{-x/2} dx$ conv $\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} dx$ conv

$\begin{cases} f(x) = e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \\ g(x) = e^{-x} > 0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}\, x^{\alpha-1}}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1}$

$\alpha-1 \in\,]-\infty, 0[\quad \lim = 0$

$\alpha-1 = 0 \quad \lim = 1$

no da información $\leftarrow \alpha-1 \in\,]0, +\infty[\quad \lim = +\infty$

$\begin{cases} f(x) = e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \\ g(x) = x^{\alpha-1} > 0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}\, x^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

si $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} dx$ conv $\Rightarrow \int e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} dx$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$ depende de α

en algunos casos $|1-\alpha| \leq 1$ la integral diverge y el criterio no da información.

CRITERIO DE PRINGSHEIM (integrando ≥ 0) !!

es equivalente al criterio de comparación por paso al límite comparando con $\frac{1}{x^p}$

Sea $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,t]$ $\forall t \geq a$ tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) \cdot x^p \right] =: \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\} \quad \text{con } a > 0$$

a) si $\ell \neq 0$ y $\ell \neq +\infty$ y

(i) $p > 1$ entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente

(ii) $p < 1$ entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergente

b) si $\ell = 0$ y $p > 1$ entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente

c) si $\ell = +\infty$ y $p \leq 1$ entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ divergente

ejemplos

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

$a = 1 > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x \qquad \boxed{|x| = \sqrt{x^2}}$$

$x = |x| = \sqrt{x^2} \quad \forall x \geq 1$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}} = 1 =: \ell$$

$$\begin{matrix} \ell = 1 \\ p = 1 \leq 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow[\text{pringsheim}]{} \quad \boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \text{ es divergente}}$$

¿se puede resolver por comparación?

$$1 > 0$$
$$1 + x^2 > x^2$$
$$\sqrt{1+x^2} > x$$
$$0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x}$$

no da información

Si que se puede, obiamente, comparar por paso al límite

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}} = \dots = 1$$

(2) $I := \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(x^7-2x^2-1)^{1/2}}\,dx$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^7+2x^2-1)^{1/2}} \geq 0$$

En efecto:

$x \geq 1 \quad \forall x \geq 1$

$x^7 \geq 1 \quad \forall x \geq 1$

$2x^2 \geq 2 \quad \forall x \geq 1$

$x^7 + 2x^2 \geq 3 \quad \forall x \geq 1$

$x^7 + 2x^2 - 1 \geq 2 \quad \forall x \geq 1$

¿con qué lo comparamos?

$$\frac{x^2}{(x^7-2x^2-1)^{1/2}} \sim \frac{x^2}{(x^7)^{1/2}} = \frac{x^2}{x^{7/2}} = x^{2-\frac{7}{2}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x^7-2x^2-1)^{1/2}}\cdot x^{3/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{7/2}}{(x^7-2x^2-1)^{1/2}} = 1 =: \ell$$

$$\begin{matrix} \ell = 1 \\ p > 1 \end{matrix} \xRightarrow{\text{pringsheim}} \boxed{I \text{ es convergente}}$$

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot x = \frac{\pi}{2} =: \ell$$

$$\begin{matrix} \ell = \frac{\pi}{2} \begin{matrix}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{matrix} \\ p = 1 \leq 1 \end{matrix} \xRightarrow{\text{pringshein}} \boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \text{ es divergente}}$$

CRITERIO INTEGRAL DE CAUCHY-McLAURIN (integrando ≥ 0)

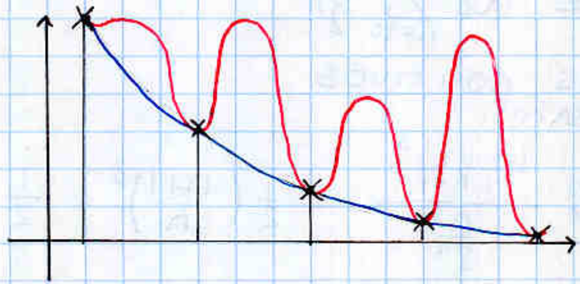
Sea $f : [N, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$
integrable en $[N, t]$ $\forall t \geq N$
decreciente en $[N, +\infty[$

- positiva
- integrable
- decreciente

entonces:

$$\boxed{\int_N^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente} \Longleftrightarrow \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \text{ es convergente}}$$

Observación:
la hipotesis de que sea decreciente evita maldades del tipo:



ejemplos

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ (p-series de Dirichlet)

consideremos $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $p > 0$ $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$

- f es positiva en $[1, +\infty[$
- f es integrable en $[1, t]$ $\forall t \geq 1$
- f es decreciente en $[1, +\infty[$

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ es convergente}}_{\Updownarrow\ p>1} \overset{\text{cauchy mclaurin}}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \text{ es convergente}$$

se tiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \text{ es convergente} \Longleftrightarrow p > 1$$

(2) Estudiar el caracter de

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{x^3}{2^x}\,dx$$

la función $f(x) := \frac{x^3}{2^x}$ cumple:

- positiva
- integrable (nominador y denominador son continuos)
- decreciente, pues

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot 2^x - x^3 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{x^2(3 - x\ln 2)}{2^x} < 0 \Longleftrightarrow$$

$$x > \frac{3}{\ln 2} = 4.32 \quad \forall x \geq 10$$

Analicemos el caracter de $\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}$

serie de terminos positivos
criterio del cociente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} < 1$$

$$\xRightarrow{\text{criterio del cociente}} \sum_{n=10}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n} \text{ es convergente}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{cauchy mclaurin}} \boxed{\int_{10}^{+\infty} \frac{x^3}{2^x} \text{ es convergente}}$$

Ejercicio: Resolver por definición (por partes 3 veces)

CONVERGENCIA ABSOLUTA DE INTEGRALES IMPROPIAS

Definición: Convergencia absoluta

se dice que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es absolutamente convergente si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ es convergente

Teorema

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es absolutamente convergente} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es conv.}}$$

ejemplo $\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}(2t)}{2t^2}\,dt$

$$0 \leqslant \left|\frac{\text{sen}\,2t}{2t^2}\right| \leqslant \frac{1}{2t^2} \Rightarrow \text{como } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2t^2} \text{ conv } \xRightarrow{\text{comp}} \int_1^{+\infty} \left|\frac{\text{sen}\,2t}{2t^2}\right| dx \text{ conv}$$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\text{sen}\,2t}{2t^2}\right| dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}\,2t}{2t^2}\,dx \text{ es A.C.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}\,2t}{2t^2} \text{ conv.}$$

Observación: el recíproco no es cierto
contraejemplo: Integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx$

- $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx \text{ converge}}$ como no son términos no negativos, no sirven los criterios para tales casos.

Sólo sirve el criterio de la conv. abs: $0 \leqslant \left|\frac{\text{sen}\,x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$ NO DA INFORMACION

¡No nos quedan criterios! ¡AAAAAH! Utilicemos las propiedades

Integrando por partes: $\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\cos x\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

$u = \frac{1}{x} \;\Big|\; du = -\frac{1}{x^2}\,dx$

$dv = \text{sen}\,x \;\Big|\; v = -\cos x$

Propiedad: Si 2 de los 3 términos convergen $\Rightarrow$ el 3° tb!

- $\lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\cos x\right] = 0$ converge
- $0 \leqslant \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ C.A. $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ converge
- por la propiedad: $\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx$ converge

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx \text{ no es convergente}}$$

Probemos previamente que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\, dt$ es convergente

integrando por partes $\quad u = \frac{1}{t} \to du = -\frac{1}{t^2}\, dt$

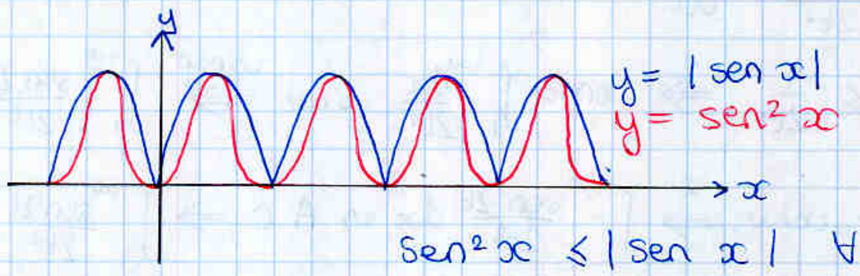
$\quad dv = \cos 2t \to v = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}$

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\, dt = \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t^2}}_{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\, dt \text{ converge}}$$

$\lim_{t \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t} = 0 \qquad 0 \leq \left| \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t^2} \right| \leq \frac{1}{2t^2}$

C.A $\Rightarrow$ C.

ahora bien:



$\operatorname{sen}^2 x \leq |\operatorname{sen} x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$|\operatorname{sen} x| \geq \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} \geq \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

$$\int_1^t \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geq \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{x}\, dx}_{\text{diverge a } +\infty} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^t \frac{\cos 2x}{x}\, dx}_{\text{converge}}}_{\text{diverge}}$$

$$\xrightarrow{\text{como}} \int_1^t \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx$$

$\boxed{\text{CRITERIO DE DIRICHLET}}$ (integrando cualquiera!)

sean $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

(a) - f es $\boxed{\text{continua}}$ en $[a, +\infty[$
- f $\boxed{\text{tiene primitiva } F}$
- dicha primitiva $\boxed{F \text{ es acotada}}$ en $[a, +\infty[$
(i.e. $\exists M > 0 : |F(x)| = \left|\int_a^x f(t)\, dt\right| \leq M \ \forall x \geq a$)

(b) - $\boxed{g' \text{ es continua}}$ en $[a, +\infty[$
- $\boxed{g \text{ decrece}}$ en $[a, +\infty[$
- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0}$

entonces:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)\, dx \text{ es convergente}$$

ejemplos

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x^\alpha}\, dx, \quad \alpha > 0$

$$\frac{\text{sen } x}{x^\alpha} = \underbrace{\text{sen } x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^\alpha}}_{g(x)}$$

$f(x)$: → es continua
→ tiene primitiva $\int_1^{+\infty} \text{sen } x\, dx = \left[-\cos x\right]_1^{+\infty}$
→ $\left|\int_1^x \text{sen } t\, dt\right| = \left|\left[-\cos t\right]_1^x\right| = |-\cos x + \cos 1|$

$|a \pm b| \leq |a| + |b|$ desigualdad triangular $\leq |-\cos x| + |\cos 1|$
$\leq 2 \quad \forall x \geq 1$

primitiva es acotada

$g(x)$: → $g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ es continua
→ g es decreciente

$\xrightarrow[\text{Dirichlet}]{}$ $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x^\alpha} \text{ es convergente } \forall \alpha > 0}$

(2) $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ INTEGRAL DE FRESNEL

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \to x = +\sqrt{t} \\ dt = 2x\, dx \to dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} t \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

el cambio de variable mete una maldad nueva

impropia de 1ª y 2ª especie mientras que $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx$ sólo es impropia de 1ª especie.

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx + \int_1^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx$$

$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx \to$ Integral de Riemann propia, finita

$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx \to \int_1^{+\infty} \operatorname{sen} t \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$ ¿cómo es? si convergiera, entonces la primera tb.

Analicemos $\int_1^{+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{t}}\, dt$

$0 \leqslant \left|\dfrac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{t}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2t^{1/2}} \to$ diverge $-$ no da información

usemos Dirichlet:

$f(t) = \operatorname{sen} t \longrightarrow \left|\int_1^t \operatorname{sen} u\, du\right| = \left|[-\cos u]_1^t\right| = |-\cos t + \cos 1| \leqslant |-\cos t| + |\cos 1| \leqslant M \quad \forall t \geqslant 1$

- tiene primitiva acotada
- f es continua

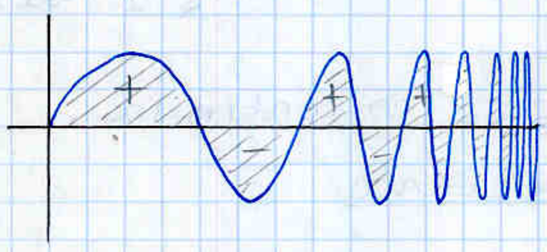
$g(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ $\quad g'(t) = -\dfrac{1}{4t^{3/2}}$ continua en $[1, +\infty[$

g es decreciente en $[1, +\infty[$

$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$

por Dirichlet, $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} t \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$ es convergente

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx \text{ es convergente}}$$

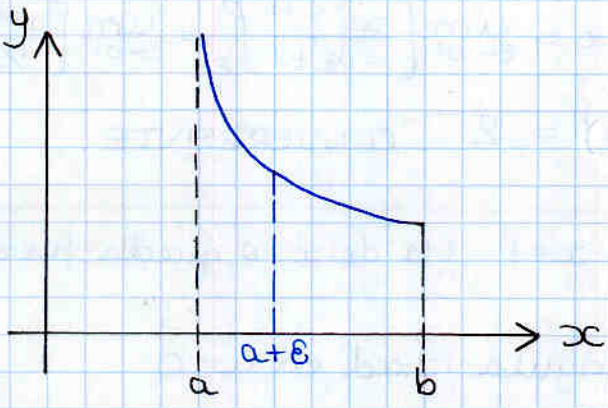


vemos que:
- la integral converge

sin embargo:
- el límite no es cero

¿Qué hipótesis falla?
No se cumple la condición de existencia del límite.

INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE



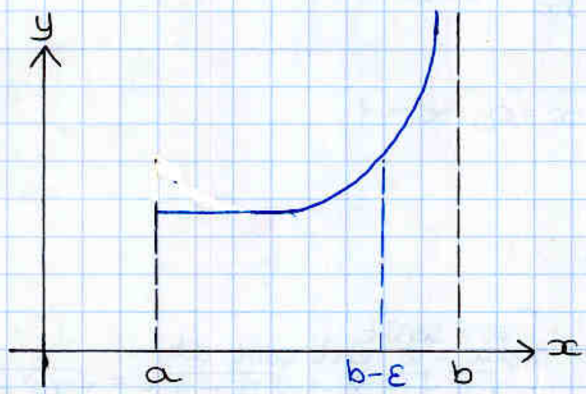
Def: sea $f:]a,b] \to \mathbb{R}$

f no acotada en $x=a$

f integrable en $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon>0 / a+\varepsilon<b$

Se llama integral impropia de segunda especie a la integral denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$ defina como:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$
$$= \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$$



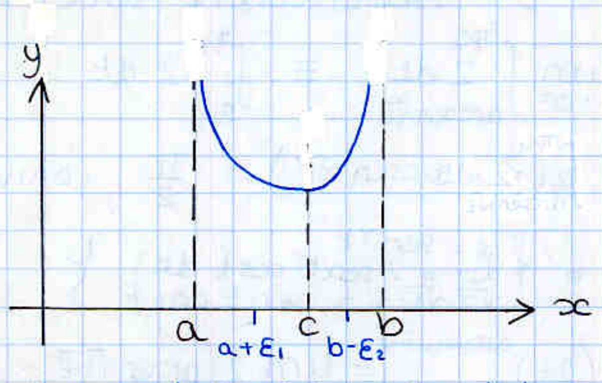
Def: sea $f: [a,b[\to \mathbb{R}$

f no acotada en $x=b$

f integrable en $[a, b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon>0 / a<b-\varepsilon$

se llama integral impropia de segunda especie a:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$
$$= \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$



Def: sea $f:]a,b[\to \mathbb{R}$

f no acotada en $x=a$ ni en $x=b$

f integrable en $[a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_2]$ $\forall \varepsilon_1,\varepsilon_2>0 / a+\varepsilon_1<b-\varepsilon_2$

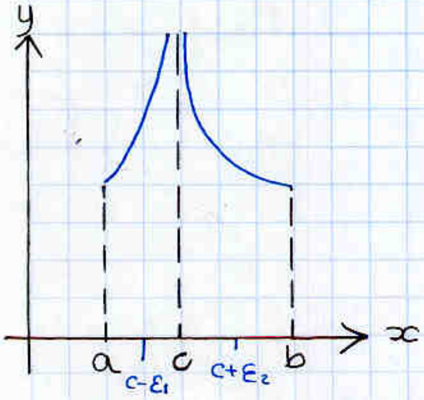
si existen las integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ $\quad a<c<b$

se llama integral impropia de segunda especie a:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

y se dice CONVERGENTE.

si alguna de las integrales del 2° miembro es divergente entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ se dice divergente



Def: sea $f: [a,c[\cup]c,b] \to \mathbb{R}$

f no acotada en $x=c$

f integrable en $[a, c-\varepsilon_1]$ y $[c+\varepsilon_2, b]$ $\forall \varepsilon_1,\varepsilon_2>0 / a<c-\varepsilon_1$ y $c+\varepsilon_2>b$

si existen las integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ $\quad a<c<b$

se llama integral impropia de segunda especie a

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

y se dice CONVERGENTE

Ejemplos: Cálculo por definición

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ impropia de 2ª especie con singularidad en $x=0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\,[x^{1/2}]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\,[1-\varepsilon^{1/2}] = 2 \quad \text{CONVERGENTE}$$

¡$\sqrt{\varepsilon}$!

(2) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ singularidad en $x=1$ (la de $x=0$ queda fuera)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \left\{\begin{array}{l} u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x}\end{array}\right\} = \int_0^{\ln 2}\frac{du}{u} \quad \text{singularidad en } u=0$$

$$\int_0^{\ln 2}\frac{du}{u} = \lim_{x\to 0^+}\int_x^{\ln 2}\frac{du}{u} = \lim_{x\to 0^+}\left[\ln u\right]_x^{\ln 2} = \lim_{x\to 0^+}(\ln\ln 2 - \ln|x|) = +\infty$$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ singularidad en $x=0$, $x=1$

$$I_1 = \int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \qquad I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$I_1 = \int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \left\{\begin{array}{l} x=\text{sen}^2 t \\ dx = 2\,\text{sen}\,t\cos t\,dt \\ \sqrt{x}\sqrt{1-x} = \sqrt{x-x^2} = \sqrt{\text{sen}^2 t - \text{sen}^4 t} \\ \quad = \sqrt{\text{sen}^2 t\,(1-\text{sen}^2 t)} = \sqrt{\text{sen}^2 t\cdot\cos^2 t} \\ \quad = |\text{sen}\,t||\cos t| = \text{sen}\,t\cos t\end{array}\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\text{arcsen}\sqrt{\varepsilon}}^{\pi/4}\frac{2\,\text{sen}\,t\cos t\,dt}{\text{sen}\,t\cos t} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\text{arcsen}\sqrt{\varepsilon}}^{\pi/4} 2\,dt \equiv \int_0^{\pi/4} 2\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2t)_{\text{arcsen}\sqrt{\varepsilon}}^{\pi/4} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\left(\frac{\pi}{4} - \text{arcsen}\sqrt{\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{CONV.}$$

$$I_2 = \int_{1/2}^1\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1/2}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \left\{\begin{array}{l} x=\text{sen}^2 t \\ dx = 2\,\text{sen}\,t\cos t\,dt \\ \sqrt{x}\sqrt{1-x} = \text{sen}\,t\cos t\end{array}\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\pi/4}^{\text{arcsen}\sqrt{1-\varepsilon}} 2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2t)_{\pi/4}^{\text{arcsen}\sqrt{1-\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\left(\text{arcsen}\sqrt{1-\varepsilon} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

luego $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ CONVERGE

EJEMPLO MUY IMPORTANTE

$$\int_0^b \frac{dx}{x^p} \quad \begin{cases} \text{CONVERGENTE a } \dfrac{b^{1-p}}{1-p} & \text{si } p<1 \\ \text{DIVERGENTE} & \text{si } p \geqslant 1 \end{cases}$$

ejercicio: analizar $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$

para poder centrar a x en la maldad

$$\int_0^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^b x^{-p}\,dx$$

$p \neq 1$ $$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right] = \begin{cases} \frac{b^{1-p}}{1-p} & \text{si } p<1 \\ +\infty & \text{si } p>1 \end{cases}$$

$p=1$ $$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln|x|\right]_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|b| - \ln|\varepsilon| = +\infty$$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE CON INTEGRANDOS NO NEGATIVOS

- **Criterio de Comparación**

sean $f, g:]a,b]$ funciones integrables en $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon>0 \,/\, a+\varepsilon<b$ no acotadas en $x=a$ (AMBAS NO ACOTADAS EN EL MISMO PUNTO)

si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in]a,b]$

(a) $\int_a^b g(x)\,dx$ es conv. $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ es conv.

(b) $\int_a^b f(x)\,dx$ es diverg $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ es diverg.

ejemplo

$\int_0^1 \frac{dx}{(x+x^2)^{1/2}}$ impropia 2^a especie, singularidad en $x=0$

ejercicio: tratar de comparar con $g(x) = \frac{1}{x}$

comparemos con $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (antes buscabamos potencias grandes, ahora en 2^a esp interesan las pequeñas)

$x^2 \geqslant 0 \rightarrow x^2+x \geqslant x \geqslant 0$ $\forall x \in [0,1]$

$\rightarrow \sqrt{x^2+x} \geqslant \sqrt{x} \geqslant 0$ $\forall x \in [0,1]$

$\rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{conv. pues } p=1/2<1}$ $\forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{(x+x^2)^{1/2}} \text{ es convergente}}$

Criterio de Comparación por paso al límite

Sean $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$
integrables en $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$ / $a+\varepsilon < b$
no acotadas en $x = a$

si

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b]$$

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b]$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} := \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$$

entonces

a) $\ell \neq 0$ y $\ell \neq +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ tienen el mismo caracter

b) $\ell = 0$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ conv. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ conv.

c) $\ell = +\infty$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ es div $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ es div

---

ejemplo

$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}}$ singularidad en $x = 1 = b$

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} > 0 \quad \forall x \in [0,1[$$

para centrar a x en la maldad

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{e^x}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{(1-x)^{1/2}}} = \lim_{x \to 1^-} e^x = e \begin{smallmatrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{smallmatrix}$$

como $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\,dx$ es conv $\Longrightarrow \int_0^1 \frac{e^x}{(1-x)^{1/2}}\,dx$ es conv.

- **Criterio de Pringsheim** equivalente a comparación por paso al límite

sea $f:]a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

integrable en $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0 / a+\varepsilon < b$
no acotada en $x = a$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)\cdot \underbrace{(x-a)^p}_{\text{para centrar } x \text{ en la maldad}} := \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$$

entonces

(a) $\ell \neq 0$ y $\ell \neq +\infty$

$p < 1 \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge

$p \geq 1 \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ diverge

(b) $\ell = 0$ y $p < 1 \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge

(c) $\ell = +\infty$ y $p \geq 1 \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ diverge

ejemplo

$\int_0^1 \frac{dx}{(x-x^2)^{1/2}}$ imp en $x=0$, $x=1$

Analizamos $I_1 = \int_0^{1/2} \frac{dx}{(x-x^2)^{1/2}}$ e $I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{(x-x^2)^{1/2}}$

I_1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} > 0 \quad \forall x \in [0, 1/2]$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} (x-0)^{1/2} = 1 \begin{matrix}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{matrix}$$

$p < 1 \to I_1$ converge

I_2: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} > 0 \quad \forall x \in [1/2, 1]$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)^{1/2} = 1 \begin{matrix}\neq 0 \\ \neq +\infty\end{matrix}$$

$p < 1 \to I_2$ converge

$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{(x-x^2)^{1/2}} \text{ es convergente}}$

INTEGRACIÓN IMPROPIA

1ª ESP

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
  - existe y $\neq 0$ $\to$ divergente
  - no existe o $=0$ $\to$ seguir
- $f(x)$
  - ≥ 0 (ó ≤ 0) $h(x)=-g(x)$ (g no cambie de signo) $\to$ definición o $\boxed{\text{criterios}}$
  - $\ngeq 0$ (ó $\nleq 0$) $\to$ conv. absoluta (C.A. $\Rightarrow$ C.)
    - $\to$ Dirichlet (partes)

2ª ESP $f(x)$

- ≥ 0 (ó ≤ 0) $\to$ definición o $\boxed{\text{criterios}}$
- $\ngeq 0$ (ó $\nleq 0$) $\to$ conv absoluta (C.A $\Rightarrow$ C.)

MIXTA Expresarla como suma de integrales de 1ª y/o 2ª especie

ej: $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+e^x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+e^x)} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+e^x)}$$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\nearrow$ $\frac{1}{\sqrt{e}\,x}$ $\nearrow$

ej: $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}-x^2}$$

ej $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$$

CRITERIOS

Integrando ≥ 0

- comparación
  - normal
  - límite
  - pringsheim
- Cauchy-McLaurin $\int_N^{+\infty} f(x)\,dx$ conv $\leftrightarrow \sum_{n=N}^{+\infty} f(n)$ conv
  - positiva
  - integrable
  - decreciente

Integrando cualquiera

- conv absoluta
- Dirichlet (sólo 1ª esp) $\int f\cdot g$ conv
  - f cont, F primitiva acotada
  - g' cont, g decreciente, $\lim g = 0$

Análisis Vectorial

Tema 2:

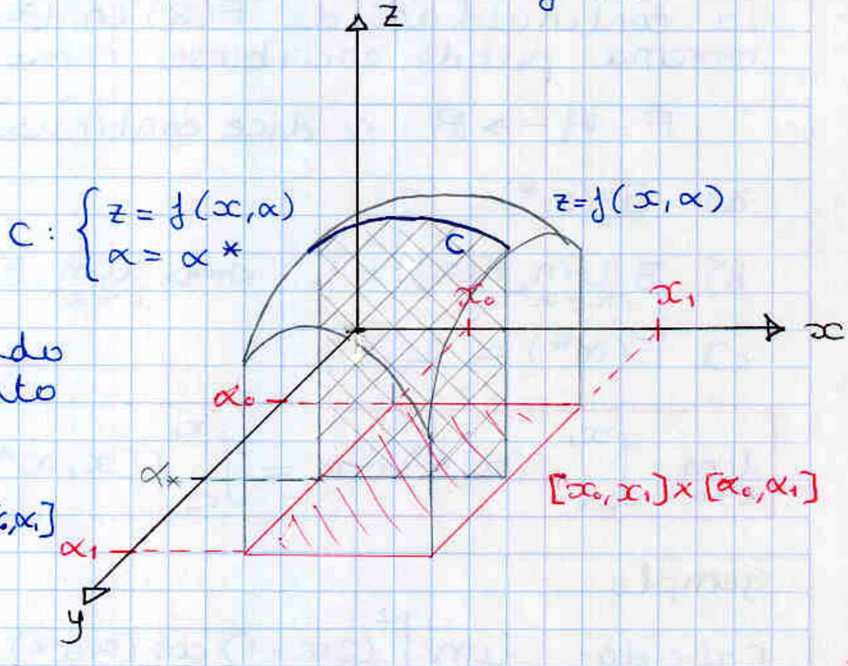
Integrales dependientes de un parámetro.

TEMA 2. INTEGRACION PARAMETRICA

Integrales Propias dependientes de un parámetro

sea $f: [x_0, x_1] \times [\alpha_0, \alpha_1] \longrightarrow \mathbb{R}$
función continua de dos variables x y α, donde α se interpreta como un parámetro.
Fijando un valor del parámetro α, se puede integrar la función resultante entre x_0 y x_1 obteniendo:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\, dx$$



Es claro que el resultado depende de α y por tanto se puede escribir:

(1) $F(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\, dx \quad \forall \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

es decir

$$F : [\alpha_0, \alpha_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha \longmapsto F(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\, dx$$

La integral se denomina integral paramétrica

ejemplos:

① $F(\alpha) := \int_{0 = x_0}^{1 = x_1} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}\, dx \qquad \alpha \in [-2,2]$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \frac{\alpha \cos(\alpha x)}{1} = \alpha$$

como está acotada, el area en $x=0$ es cero

② $I(t) := \int_{0 = x_0}^{\pi/2 = x_1} e^{tx} \operatorname{sen} x\, dx \qquad t \in [0,1]$

Continuidad de las integrales paramétricas

Teorema: sea f una función CONTINUA en el rectángulo $[x_0, x_1] \times [\alpha_0, \alpha_1]$. Entonces la integral paramétrica

$$F(\alpha) := \int_{x_0}^{x_1} f(x, \alpha)\, dx$$

es una función CONTINUA en el intervalo $[\alpha_0, \alpha_1]$

Nota:
La continuidad de $F(\alpha)$ en $[\alpha_0, \alpha_1]$ obtenida en el teorema puede escribirse como

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice continua en α^* si:

a) $\exists f(\alpha^*)$

b) $\exists \lim_{\alpha \to \alpha^*} F(\alpha) := L$ $\iff \lim_{\alpha \to \alpha^*} F(\alpha) = F(\alpha^*) = F(\lim_{\alpha \to \alpha^*} \alpha)$

c) $F(\alpha^*) = L$

$$\boxed{\lim_{\alpha \to \alpha^*} \int_{x_0}^{x_1} f(x, \alpha)\, dx} = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \alpha^*)\, dx = \boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x, \lim_{\alpha \to \alpha^*} \alpha)\, dx}$$

ejemplo

Calcular $\lim_{\alpha \to 0} \int_1^2 \underbrace{(2x-1)\cos(\alpha x^2)}_{f(x,\alpha)}\, dx$

$\int \cos x^2\, dx$ no se puede resolver

$f(x,\alpha)$ es continua en $[\overset{x_0}{1}, \overset{x_1}{2}] \times \underbrace{[\overset{\alpha_0}{-1}, \overset{\alpha_1}{1}]}_{0 \in}$

Por el teorema, $\int_1^2 f(x,\alpha)\, dx$ es continua en $[-1, 1]$

por la nota se tiene que

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_1^2 (2x-1)\cos(\alpha x^2)\, dx = \int_1^2 \lim_{\alpha \to 0} [(2x-1)(\cos(\alpha(x^2))]\, dx$$

$$= \int_1^2 (2x-1)\underbrace{\left(\lim_{\alpha \to 0} \cos(\alpha x^2)\right)}_{1} dx = \int_1^2 (2x-1)\, dx = [x^2 - x]_1^2 = 2$$

Derivación de las integrales paramétricas

· Regla de Leibniz

si $f(x,\alpha)$ y $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ son $\boxed{\text{continuas}}$ en $R := [x_0, x_1] \times [\alpha_0, \alpha_1]$

entonces

$$F'(\alpha) = \frac{dF}{d\alpha}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) \quad \forall \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$$

ejemplo:

Hallar $I(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,dx$ para $\alpha \geq 0$

→ Comprobación de las hipótesis:

- $f(x,\alpha)$ es continua en $D := [0,1] \times [0, \alpha_0]$ para $\alpha_0 > 0$ arbitrario
  - ↳ es claro que f es continua en $]0,1[$
  - ↳ en $x = 0$:

    $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} = 0$$

  - ↳ en $x = 1$

    $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{\underset{\frac{\partial}{\partial x}}{=}} \lim_{x \to 1^-} \frac{\alpha x^{\alpha - 1}}{1/x} = \lim_{x \to 1^-} \alpha x^\alpha = \alpha$$

    ¡¡no es $\frac{\partial}{\partial \alpha}$!!

  Conclusión:

  $$f(x,\alpha) = \begin{cases} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} & x \neq 0,1 \\ 0 & x = 0 \\ \alpha & x = 1 \end{cases} \quad \text{es continua en } D$$

- $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ es continua en D
  - ↳ $x \neq 0,1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{x^\alpha \ln x}{\ln x} = x^\alpha$
  - ↳ $x = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,\alpha+h) - f(0,\alpha)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$

    primero hago TODA la cuenta, y luego hago tender h a 0

  - ↳ $x = 1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(1,\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1,\alpha+h) - f(0,\alpha)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha + h - \alpha}{h} = 1$

  Conclusión:

  $$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = \begin{cases} x^\alpha & x \neq 0,1 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases} = x^\alpha \quad \text{es continua en } D$$

→ Aplicar regla de Leibniz:

$$\frac{dI}{d\alpha}(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} \quad \forall \alpha \geq 0$$

$\frac{dI}{d\alpha}(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ es una EDO

Sea $\alpha \in [0, \alpha_0]$

$$I(\alpha) - I(0) = \int_0^\alpha I'(t)\,dt = \int_0^\alpha \frac{1}{t+1}\,dt = \left[\ln|t+1|\right]_0^\alpha = \ln(\alpha + 1)$$

$$I(0) = \int_0^1 \frac{1-1}{\ln x}\,dx = 0$$

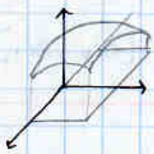
$$\boxed{I(\alpha) = \ln(\alpha + 1)}$$

ejemplo

Sea $f(x,y) = \ln(1-2x\cos y + x^2)$ $(x,y)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times[0,2\pi]$
sea $G(x) := \int_0^{2\pi} f(x,y)\,dy$ para $x\in\,]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

Calcular $G'(x)$ y deducir que $G\equiv 0$

Primero: Asegurarse de que el logaritmo esta bien definido



demostrando que $g(x,y)=1-2x\cos y+x^2$ no tenga ceros y comprobando $g(0,0)=1>0$ se tendria que $g(x,y)>0\ \forall (x,y)\in R$

si existiese $(x,y)\in R : g(x,y)=0$ entonces:

$1-2x\cos y + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2(\cos y)x + \cos^2 y - \cos^2 y + 1 = 0$
$\Rightarrow (x-\cos y)^2 - \cos^2 y + 1 = 0 \Rightarrow (x-\cos y)^2 + \operatorname{sen}^2 y = 0$

sabiendo que: en $\mathbb{R}$ $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$

$\left.\begin{array}{l} x-\cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{array}\right\} \to y = k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \nearrow \cos k\pi = x = (-1)^k = \pm 1$
$x = \pm 1 \notin [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ contradiccion

Segundo: comprobacion de las hipotesis
- $f(x,y)$ es cont en R por ser composicion, suma, resta de cont.
- $\partial f/\partial x\,(x,y)$ es cont en R

Tercero: Aplicando Regla de Leibniz

*Calculos auxiliares:
- $1-2x\cos y + x^2 = 1 - 2(x\cos y) + x^2\cos^2 y - x^2\cos^2 y + x^2$
$= (1-x\cos y)^2 + x^2(1-\cos^2 y) = (1-x\cos y)^2 + (x\operatorname{sen} y)^2$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right) = (-x)\frac{x-\cos y}{(1-x\cos y)^2}$
- $1-x\cos y \neq 0\ \forall (x,y)\in R$
$1-x\cos y = 0 \Rightarrow 1 = x\cos y \Rightarrow 1 = |x\cos y| = |x|\cdot|\cos y| \leq \frac{1}{2}$ Abs

$$G'(x) = \int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy = \int_0^{2\pi}\frac{-2\cos y + 2x}{1-2x\cos y + x^2}\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{-2\cos y + 2x}{(1-x\cos y)^2 + (x\operatorname{sen} y)^2}\,dy \underset{(1-x\cos y)^2\neq 0}{\overset{\text{dividimos por } *}{=}} 2\int_0^{2\pi}\frac{\frac{x-\cos y}{(1-x\cos y)^2}}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2}\,dy$$

$x\neq 0$
$$\overset{}{=} \frac{2}{-x}\int_0^{2\pi}\frac{(-x)\frac{x-\cos y}{(1-x\cos y)^2}}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2}\,dy = -\frac{2}{x}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)\right]_0^{2\pi} = 0$$

$x=0$
$$G'(0) = \int_0^{2\pi}\frac{-2\cos y + 2\cdot 0}{(1-0\cdot\cos y)^2 + (0\cdot\operatorname{sen} y)^2} = \int_0^{2\pi} -2\cos y\,dy = -2[\operatorname{sen} y]_0^{2\pi} = 0$$

luego $G'(x) = 0\ \forall x\in\,]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

$\Rightarrow G(x) = \text{cte}$ y como $G(0) = \int_0^{2\pi}\ln 1\,dy = 0$

$\Rightarrow G(x) = 0\ \forall x\in\,]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

ejemplo

Calcular $G(\alpha) = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(\alpha x)\, dx \quad , \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

· si $\boxed{\alpha = 0}$ $\quad G(0) = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} 0 \, dx = 0$

· si $\boxed{\alpha \neq 0}$ $\quad G(\alpha) = \int_0^{\pi} \underbrace{x \operatorname{sen}(\alpha x)}_{\frac{\partial f}{\partial \alpha}} dx \overset{\text{leibniz}}{=} \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\pi} f(x,\alpha)\, dx$

se trata pues de encontrar $f(x,\alpha)$ que cumpla las condiciones de la regla de Leibniz tal que

$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = x \operatorname{sen}(\alpha x)$ E.D.P.

claramente

$$f(x,\alpha) = -\cos(\alpha x)$$

Hipotesis: $f(x,\alpha)$ y $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ continuas

Leibniz:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(\alpha x)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha}(-\cos \alpha x)\, dx = \frac{d}{d\alpha}\int_0^{\pi} -\cos \alpha x \, dx$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\left[-\frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha}\right]_0^{\pi} = \frac{d}{d\alpha}\left(-\frac{\operatorname{sen} \pi\alpha}{\alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen} \pi\alpha - \alpha\pi \cos \pi\alpha}{\alpha^2}$$

ejercicio: calcular por partes

ejemplo

calcular $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{(1+\alpha \operatorname{sen}^2 x)^2}$ por derivación de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha \operatorname{sen}^2 x}$

Consideremos la función $f(x,t) := \frac{1}{1+t\operatorname{sen}^2 x}$

definida en $D: [0, \pi/2] \times [0, \alpha]$. La función cumple las hipótesis de Leibniz:

$\cdot f(x,t)$ es continua: $t \operatorname{sen}^2 x + 1 \geq 0 \quad \forall (t,x) \in D$

$\cdot \partial f/\partial t\,(x,t)$ es continua: $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1+t\operatorname{sen}^2 x)^2}$

Leibniz:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_0^{\pi/2} f(x,t)$$

$$\int_0^{\pi/2} -\frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{(1+t\operatorname{sen}^2 x)^2} = \frac{d}{dt}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+t\operatorname{sen}^2 x}dx$$

la '−' función pedida

Para hallar la integral pedida basta calcular

$$-\frac{d}{dt}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+t\operatorname{sen}^2 x}dx = -\frac{d}{dt}F(t)$$

$$F(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+t\operatorname{sen}^2 x}dx = \left\{\begin{aligned} u &= \operatorname{tg} x \\ du &= (1+\operatorname{tg}^2 x)dx \\ &= (1+u^2)dx \\ &\to dx = \frac{du}{1+u^2} \\ \operatorname{sen}^2 x &= 1-\cos^2 x \\ &= 1-\frac{1}{\sec^2 x} \\ &= 1-\frac{1}{1+u^2} \\ &= \frac{u^2}{1+u^2}\end{aligned}\right\} = \int_0^{+\infty}\frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+t\frac{u^2}{1+u^2}}$$

(propia) (impropia)

$$= \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2+tu^2} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+t)u^2+1} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(\sqrt{1+t}\,u)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+t}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+t}\,du}{1+(\sqrt{1+t}\,u)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{1+t}\,u)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

$$F(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t}}$$

$$-\frac{d}{dt}F(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{1+t}}\right) = -\frac{\pi}{2}\frac{d}{dt}\left((1+t)^{-1/2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^{3/2}}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4(t+1)^{3/2}}$$

por lo tanto:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{(1+\alpha\operatorname{sen}^2 x)^2} = -\frac{\pi}{4(t+1)^{3/2}}$$

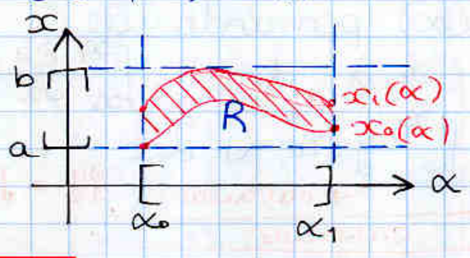
Extremos dependientes del parametro

$$F(\alpha) := \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx \quad , \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$$

$\left.\begin{matrix} x_0(\alpha) \\ x_1(\alpha) \end{matrix}\right\}$ funciones acotadas de $[\alpha_0, \alpha_1]$ en $\mathbb{R}$

$f(x,\alpha)$ integrable respecto a x $\quad \forall \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

sea $R = \{ (x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \quad x_0(\alpha) \leq x \leq x_1(\alpha) \}$



- **Teorema**

$\left.\begin{matrix} f(x,\alpha) \to \mathbb{R} \text{ continua en } R \\ x_0(\alpha) \text{ y } x_1(\alpha) \text{ continuas en } [\alpha_0, \alpha_1] \end{matrix}\right. \Longrightarrow F(\alpha) = \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$ es continua en $[\alpha_0, \alpha_1]$

- **Regla de Leibniz generalizada**

Hipótesis: $f(x,\alpha)$ continua en R

$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ continua en R

$x_0(\alpha), x_1(\alpha)$ $\boxed{\text{derivables}}$ en $[\alpha_0, \alpha_1]$

$$\boxed{F'(\alpha) = \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx + f(x_1(\alpha), \alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}x_1(\alpha) - f(x_2(\alpha), \alpha)\cdot\frac{d}{d\alpha}x_2(\alpha)}$$

ejemplo: sea $I(t) = \int_{t^2 \; x_0(t)}^{t \; x_1(t)} \operatorname{sen}(x^2+t^2)\,dx$ $\quad f(x,t)$ definida en $R = [0,1]\times[0,1]$

a) Probar continuidad en $[0,1]$

$f(x,t)$ cont en R, $x_0(t)$ y $x_1(t)$ continuas en $[0,1]$ $\xrightarrow{\text{Teorema}}$ $I(t)$ cont en $[0,1]$

b) Calcular $I'(t)$

Hipotesis: $\left.\begin{matrix} f(x,t) = \operatorname{sen}(x^2+t^2) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 2t\cos(x^2+t^2) \end{matrix}\right\}$ continuas en R

$x_0(t) = t^2$, $x_1(t) = t$ derivables en $[0,1]$

Regla de Leibniz:

$$I'(t) = \int_{t^2}^{t} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx + f(t,t)\underbrace{\frac{dt}{dt}}_{1} - f(t^2,t)\underbrace{\frac{dt^2}{dt}}_{2t}$$

$$I'(t) = \int_{t^2}^{t} 2t\cos(x^2+t^2)\,dx + \operatorname{sen}(t^2+t^2) - \operatorname{sen}(t^4+t^2)\cdot 2t$$

ejercicio: Calcular $F'''(0)$ siendo $F(t) = \int_0^t x^2 \operatorname{ch}(t-x)\,dx$ $\quad$ (sol $F'''(0) = 2$)

Resumen: Usos de la Regla de Leibniz

(1) Calcular la derivada de una integral $F'(\alpha)$

$$F(\alpha) \rightarrow F'(\alpha) = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdots$$

(2) Calcular una integral $F(\alpha)$

$$F(\alpha) \rightarrow F'(\alpha) = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdots = \text{fórmula}$$

$$F(\alpha) - F(0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F'(t)\, dt$$

$$F(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F'(t)\,dt + F(0)$$

(3) Calcular una integral $F(\alpha)$ pensando que

$$F(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial g}{\partial x}(x,\alpha)\, dx$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} g(x,\alpha)\, dx}_{\text{calcular: } \frac{\partial g}{\partial x} = f}}_{\text{calcular}}$$

calcular

(4) Calcular una integral derivando otra

piden $F(\alpha) = \int f(x,\alpha)\, dx$

nos dan que $f(x,\alpha) = \frac{d}{d\alpha} g(x,\alpha)$

$$F(\alpha) = \int \frac{d}{d\alpha} g(x,\alpha)\, dx = \underbrace{\frac{d}{d\alpha} \underbrace{\int g(x,\alpha)\, dx}_{\substack{\text{calcular} \\ G(t)}}}_{\text{calcular } G'(t)}$$

¿lo mismo?

Resumen: Integración Paramétrica

Int. Param
- Propia
  - ext. fijos → continuidad (Teorema)
    - → der. → Leibniz
  - ext. variables → cont. (T^{a}) → Leibniz
    - → der. → Leibniz
- Impropia (en 2°)

Análisis Vectorial

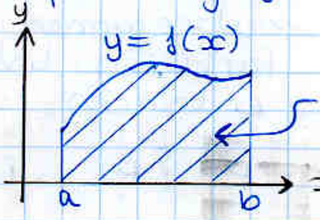
Tema 3:

Integración múltiple.

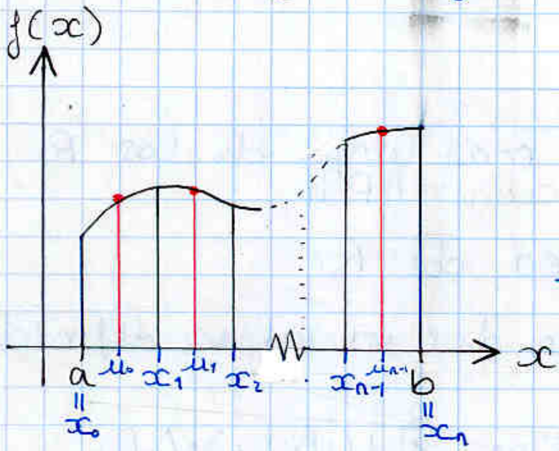
TEMA 3: INTEGRACION MULTIPLE

Recordatorio: Integral Simple

Recordemos que si $y=f(x)$ es continua y positiva en $[a,b]$ entonces:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



$\|P\| = \text{long. max } (x_{i+1} - x_i)$

$\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i \quad \forall i$

$\mu_i \in [x_i, x_{i+1}] \quad \forall i$

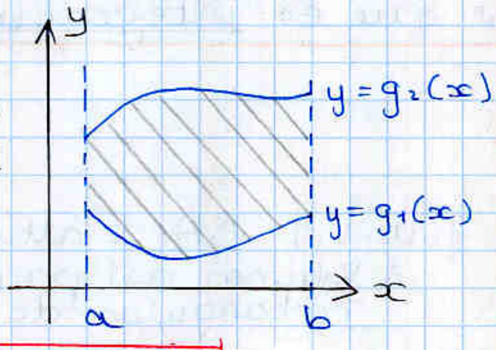
sumas de Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f(\mu_i)}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{\Delta x_{i+1}}_{\text{base}}$$

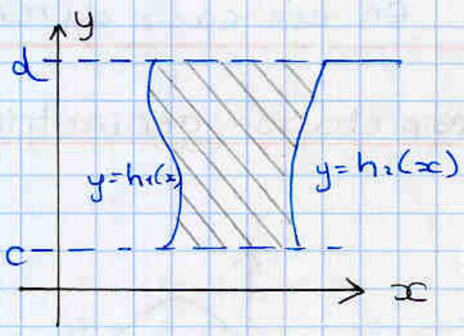
Def: Regiones Tipo I, Tipo II

g_1, g_2 continuas en $[a,b]$
$g_1(x) \le g_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Region Tipo I



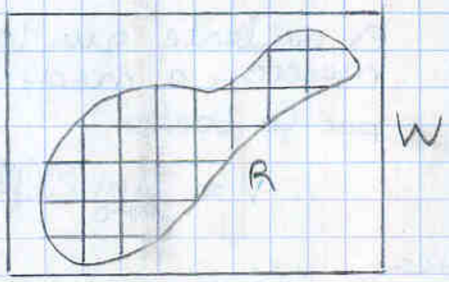
h_1, h_2 cont. en $[c,d]$
$h_1 \le h_2 \quad \forall h \in [c,d]$



Región Tipo II

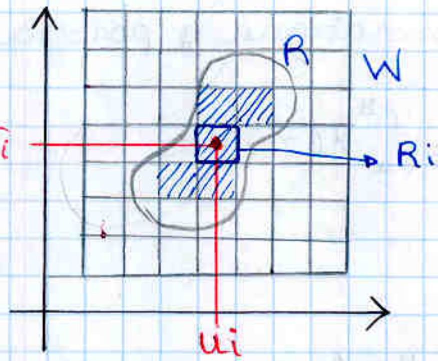
Integrales Dobles

Trabajamos con una region R que puede descomponerse en un número finito de subregiones de tipo I y/o II
R es ademas un subconjunto de región rectangular W



Dividimos a W en rectángulos más pequeños

Las subregiones que están completamente contenidas en R se llama una Partición Interior



si llamamos a las subregiones de la Partición interior R_i entonces

$$P = \{ R_i : i = 1, 2, \dots, n \}$$

La longitud de la diagonal más larga de los R_i se llama Norma de la Partición : $\|P\|$

Denotamos por $\Delta A_i :=$ área de R_i

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables definida en R

Una suma de Riemann de f para P es $\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i) \cdot \Delta A_i$

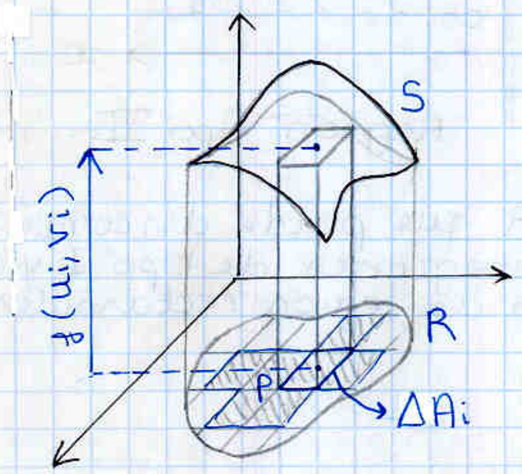
donde $(u_i, v_i) \in R_i$ es arbitrario

Def: Integral Doble de f sobre R es el límite:

$$\iint_R f(x,y)\, dA := \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i) \Delta A_i$$

siempre que exista y sea finito dicho límite. En ese caso diremos que es integrable

Interpretación geométrica:



$f(u_i \cdot v_i) \cdot \Delta A_i \equiv$ altura · base
$\equiv$ Volumen del prisma con base rectangular de la figura

$\sum_{i=1}^{n} f(u_i \cdot v_i) \cdot \Delta A_i \equiv$ la suma de todos los prismas proporcionan una aproximación al volumen V del sólido debajo de S y encima de R

Es evidente que la aproximación mejora a medida que $\|P\| \to 0$ por lo tanto

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum (f(u_i, v_i) \cdot \Delta A_i) = \iint_R f(x,y)\, dA$$

NOTA: si $f(x,y) \leq 0$ $\forall R$ entonces la int. doble de f sobre R es el menos volumen del sólido encima de la gráfica y debajo de R

Propiedades de la integral doble

Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ funciones integrables en R y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Linealidad $\iint_R [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\, dA = \alpha \iint_R f(x,y)\, dA + \beta \iint_R g(x,y)\, dA$

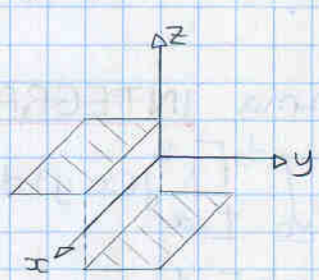
- Positividad
  $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in R \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq 0$

- Monotonicidad
  $f(x,y) \leq g(x,y)^{\forall (x,y)\in R} \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \leq \iint_R g(x,y)\, dA$

  DEM: $\iint (g-f) \geq 0 \to \iint g - \iint f \geq 0 \to \iint f \leq \iint g$

- Integrabilidad Absoluta

$$\left| \iint_R f(x,y)\, dA \right| \leqslant \iint_R |f(x,y)|\, dA$$



Integrabilidad

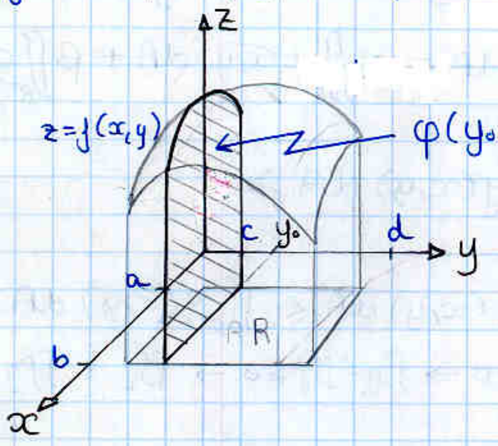
- Teorema
  $z = f(x,y)$ continua en R $\Longrightarrow$ $f(x,y)$ integrable en R

- Teorema
  $f: R \to \mathbb{R}$ acotada
  el cjto de puntos donde f es discontinua tiene area cero
  $\Longrightarrow$ f es integrable en R

Calculo de Integrales dobles

Sea $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ una función acotada e integrable en R

$\forall\, y_0\in[c,d]$ fijo se puede definir $\varphi(y_0)$



$$\varphi(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

Analogamente, para un $x_0\in[a,b]$ se define $\varphi(x_0)=\int_c^d f(x_0,y)\,dy$

Se llama INTEGRAL ITERADA a

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

y a $$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

Ambas representan el volumen de f si $f(x,y)\geq 0$ en R

Ejemplos

Calcula la integral iterada

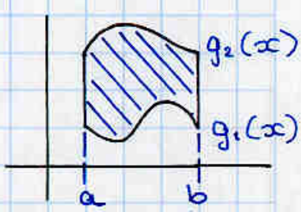
(a) $\int_0^3\left[\int_0^1 e^{2x+y}\,dy\right]dx=\int_0^3\left[\int_0^1 e^{2x}e^y\,dx\right]dy=\int_0^3\left[e^y\int_0^1 e^{2x}\,dx\right]dy$

$=\int_0^3\left[e^y\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1\right]dy=\int_0^3 e^y\left(\frac{e^2}{2}-2\right)dy=\frac{e^2-1}{2}\int_0^3 e^y\,dy=\frac{e^2-1}{2}(e^3-1)$

(b) $\int_{-1}^1\left[\int_0^1(x^2+y^2)\,dy\right]dx=\int_{-1}^1\left[\int_0^1 x^2\,dy+\int_0^1 y^2\,dy\right]dx=\int_{-1}^1\left[x^2y\right]_0^1+\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1dx$

$=\int_{-1}^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x\right]_{-1}^1=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=4/3$

Las integrales no iteradas tambien se pueden definir sobre regiones no rectangulares.



Si f es continua en una region de tipo I

$$\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx=\int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

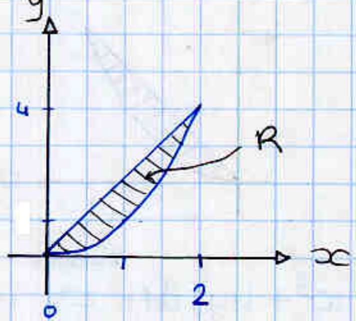
Es análogo para regiones de tipo II

ejemplo

(1) $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3+4y)\, dy\right] dx$

$= \int_0^2 \left[x^3 y + 2y^2\right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 (\cancel{2x^4} + 8x^2 - x^5 - \cancel{2x^4})\, dx$

$= \int_0^2 8x^2 - x^5\, dx = \dots = \frac{32}{3}$



(2) $\int_1^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x\, dx\, dy = \int_1^3 \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x\, dx\right] dy$

$= \int_1^3 \left[2y \,\mathrm{sen}\, x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} dy = \int_1^3 2y \,\mathrm{sen}\, y^2 - \cancel{2}y \frac{1}{\cancel{2}}\, dy = \left\{\begin{matrix} u = y^2 \\ du = 2y\, dy \end{matrix}\right\}$

$= \int_1^9 \mathrm{sen}\, u\, du - \int_1^3 y\, dy = \left[-\cos u\right]_1^9 - \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3$

$= -\cos 9 + \cos 1 - 4$

$\boxed{\text{Teorema de Fubini}}$

si $z = f(x,y)$ es función continua en $R = [a,b] \times [c,d]$

entonces:

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$$

Notas: El teorema de Fubini se puede extender al caso en que

(a) f esté acotada en R, el conjunto de discontinuidades de f tenga "área" nula y existan las integrales interiores que aparecen en las integrales iteradas

(b) f sea continua en R siendo R región de Tipo I o Tipo II, i.e.

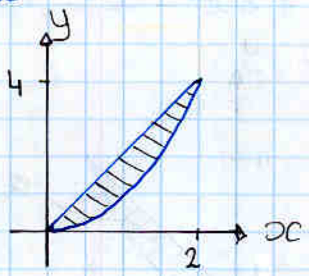
$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

ejemplo:

Hallar $\iint_R (x^3+4y)\,dA$ es la region del plano XY acotada por las gráficas de las ecuaciones $y=x^2$ e $y=2x$

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$ $x^2=2x \to x^2-2x=0 \to x(x-2)=0 \to x=0 \quad y=0$
$\to x=2 \quad y=4$



$$\iint_R \underbrace{(x^3+4y)}_{\text{continua}}\,dA \overset{\text{FUBINI}}{=} (\text{tipo I}) = \int_0^2\left[\int_{x^2}^{2x}(x^3+4y)\,dy\right]dx$$

$$= \dots \text{ (ya hemos resuelto)} = \frac{32}{3}$$

$$\iint_R (x^3+4y)\,dA = (\text{tipo II}) = \int_0^4\left[\int_{y/2}^{+\sqrt{x}}(x^3+4y)\,dx\right]dy = \dots = \frac{32}{3}$$

$y=2x \to x=\frac{y}{2}$
$y=x^2 \to y=\pm\sqrt{x}$ nos quedamos con la positiva

Cambio en el orden de integración

Sea R una región de tipo III, es decir R puede expresarse como región tipo I y II a la vez.
Por tanto, si f es continua sobre R, por FUBINI se tiene

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

si se pide calcular una de las integrales anteriores, se puede hacer calculando la otra. Esta tecnica se llama CAMBIO EN EL ORDEN DE INTEGRACION

ejemplo

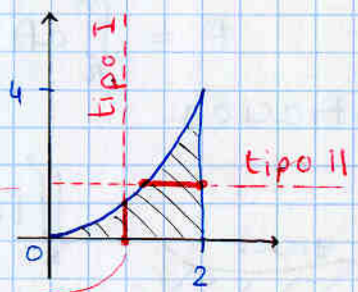
$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 \underbrace{y\cos(x^5)}_{\text{es cont}}\,dx\,dy \quad \text{Por FUBINI} \quad \int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4\left[\int_{\sqrt{y}}^2 y\cos x^5\,dx\right]dy$$

Como no existe primitiva de $\int y\cos(x^5)\,dx$ en términos de funciones elementales, hagamos un cambio en el orden de integración

Pensemos en R como region de tipo I

$x=\sqrt{y} \rightarrow y=x^2$



$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\cos(x^5)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{x^2} y\cos(x^5)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^2\cos(x^5)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2}dx=\int_0^2\frac{x^4}{2}\cos(x^5)\,dx=\dots=\frac{\text{sen }32}{10}$$

Propiedad

si f es cont en $[a,b]$ y g cont en $[c,d]$ entonces

$$\iint_R[f(x)\cdot g(y)]\,dA=\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_c^d g(y)\,dy\right] \qquad R=[a,b]\times[c,d]$$

Demostración:

Pensemos en R como Tipo I
Por Fubini

$$\iint_R[f(x)\cdot g(y)]\,dA\overset{\text{Fubini}}{=}\int_a^b\left[\int_c^d f(x)\cdot g(y)\,dy\right]dx$$

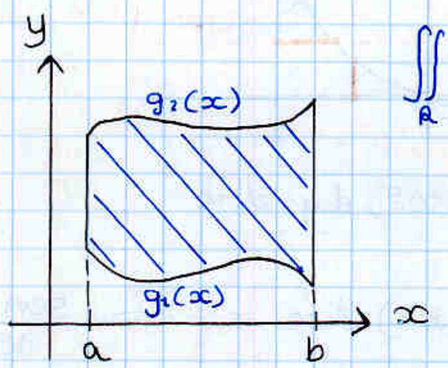
$$=\int_a^b f(x)\underbrace{\left[\int_c^d g(y)\,dy\right]}_{\text{cte}}dx=\left[\int_c^d g(y)\,dy\right]\cdot\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

Areas y volumenes con integrales dobles

El area de una región R viene dado como

$$A = \iint_R dA$$

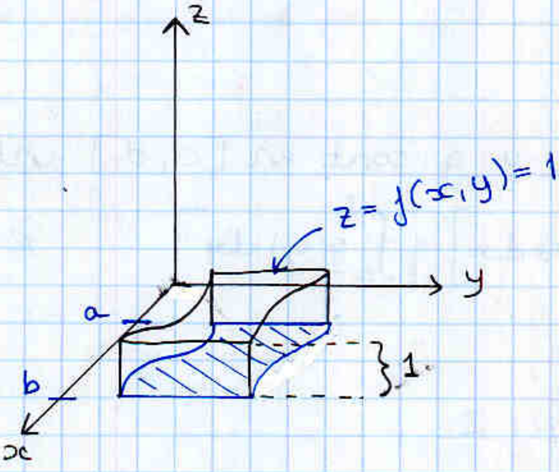
Demostración:



$$\iint_R 1\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b \left[g_2(x) - g_1(x) \right] dx$$

que es el area entre g_1 y g_2 desde a hasta b



el volumen es igual al area cuando la altura es 1, pues

volumen = area x altura

El area calculada de esta forma SIEMPRE es positiva

ejemplos

Calcular el area de la región R acotada por las gráficas de las funciones $2y = 16 - x^2$ y $x + 2y - 4 = 0$

1º Dibujarlo:

$2y = 16 - x^2 \xrightarrow{y=0} x^2 = 16 \to x = \pm 4$

$ \xrightarrow{x=0} 2y = 16 \to y = 8$

$x + 2y - 4 = 0 \xrightarrow{y=0} x = 4$

$ \xrightarrow{x=0} 2y = 4 \to y = 2$

pto de intersección: $\cancel{2y} - 16 + x^2 = x + \cancel{2y} - 4$

$x^2 - x - 16 + 4 = 0$

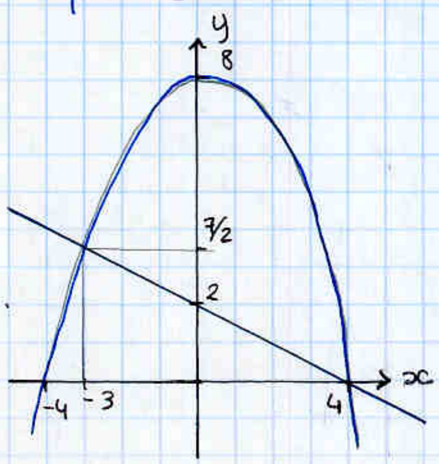
$x^2 - x - 12 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$

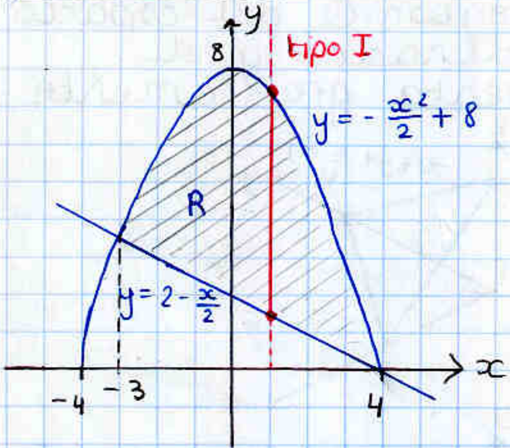
$= \frac{1 \pm 7}{2}$

$x = 4 \to y = 0$

$x = -3 \to y = 7/2$



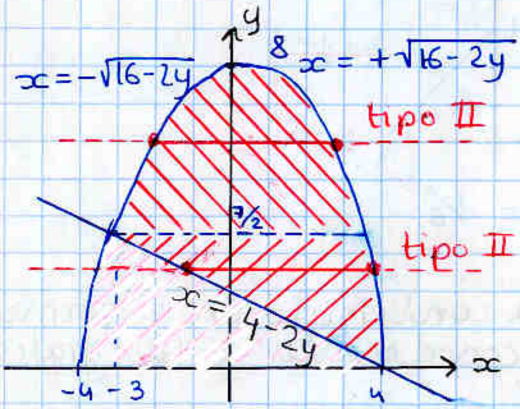
2° Calcularlo



$$A(r)=\iint_R dA=(\text{tipo I})=$$

$$=\int_{-3}^{4}\int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} 1\,dy\,dx=\int_{-3}^{4}\left[\left(8-\frac{x^2}{2}\right)-\left(2-\frac{x}{2}\right)\right]dx$$

$$=\dots=+\frac{343}{12}$$



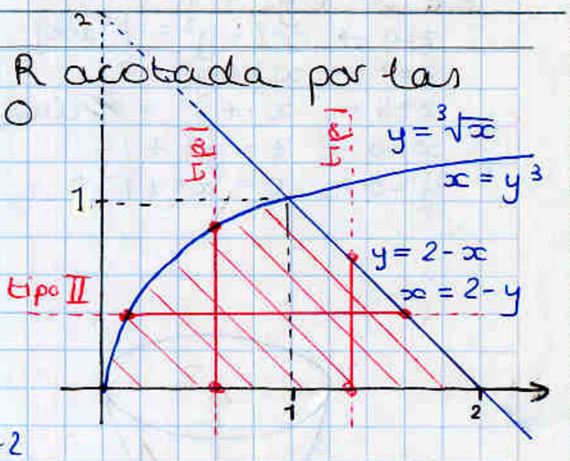
$$A(r)=\iint_R dA=(\text{tipo II})$$

$$=\int_0^{7/2}\int_{4-2y}^{\sqrt{16-2y}} 1\,dx\,dy+\int_{7/2}^{8}\int_{-\sqrt{16-2y}}^{\sqrt{16-2y}} 1\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{7/2}\left(\sqrt{16-2y}-(4-2y)\right)dy+\int_{7/2}^{8}\left(\sqrt{16-2y}-\left(-\sqrt{16-2y}\right)\right)dy$$

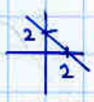
$$=\dots=+\frac{343}{12}$$

(2) Calcular el area de la región R acotada por las gráficas $x=y^3$, $x+y=2$, $y=0$



$x=y^3$ $\qquad$ $x+y=2$ $\qquad$ $y=0$

eje X



intersección $\quad x-y^3=x+y-2$

$$-y^3=y-2$$

$$y^3+y-2=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(y-1)(y^2+y+2)$$

$0=y^2+y+2 \rightarrow \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}\not\subset\mathbb{R}$

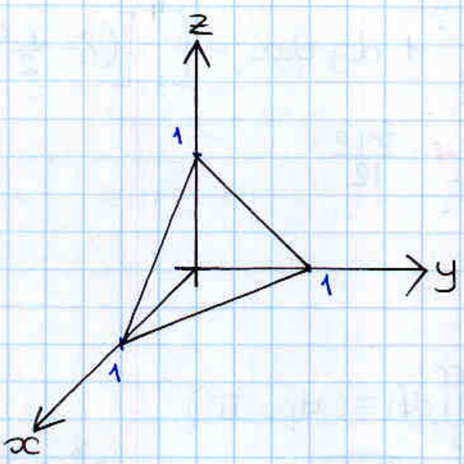
$$A(R)=(\text{tipo I})=\int_0^1\int_0^{x^{1/3}} 1\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{2-x} 1\,dy\,dx=\dots=+5/4$$

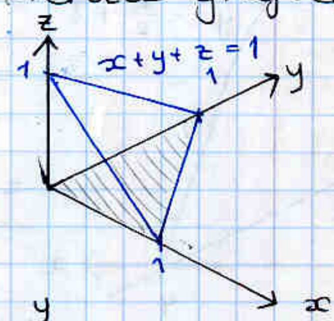
$$A(R)=(\text{tipo II})=\int_0^1\int_{y^3}^{2-y} 1\,dx\,dy=\dots=5/4$$

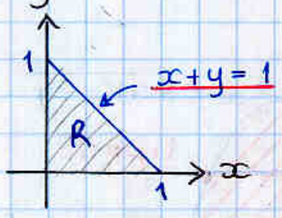
Volumen

ejercicio.

(1) Calcular el volumen de la región Q del espacio acotada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$. Representa gráficamente





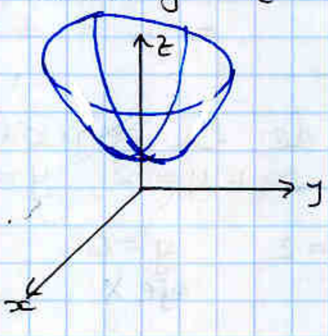


$$\iint_R \overset{z=}{f(x,y)}\, dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} \underline{1-x-y}\; dy\, dx = \dots = 1/6$$

(2) Hallar el problema del cuerpo Q contenido en el primer octante, acotado por los planos coordenados y las graficas $z = x^2 + y^2 + 1$ y $2x + y = 2$

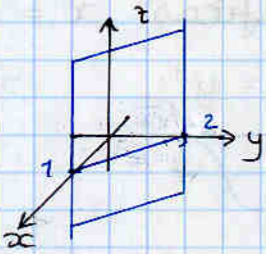
$\underline{z = x^2 + y^2 + 1}$

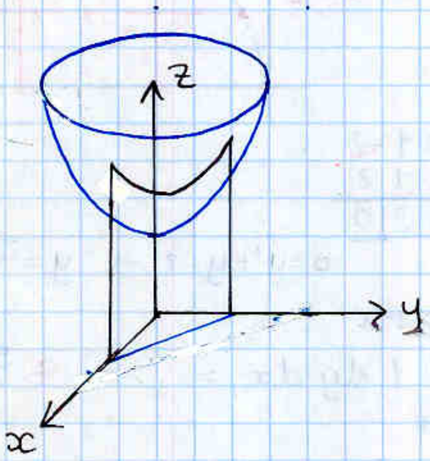
- $z = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = -1$ ack!
- $z = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 0$
- $z = 4 \rightarrow x^2 + y^2 = 3$ circunf
- $x = 0 \rightarrow z = y^2 + 1$
- $y = 0 \rightarrow z = x^2 + 1$

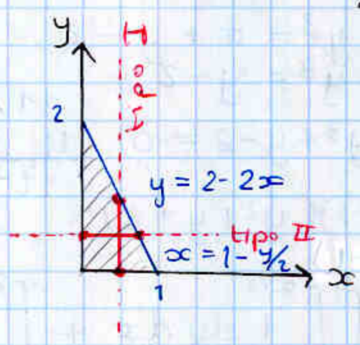


$\underline{2x + y = 2}$

- $x = 0 \rightarrow y = 2$
- $y = 0 \rightarrow x = 1$







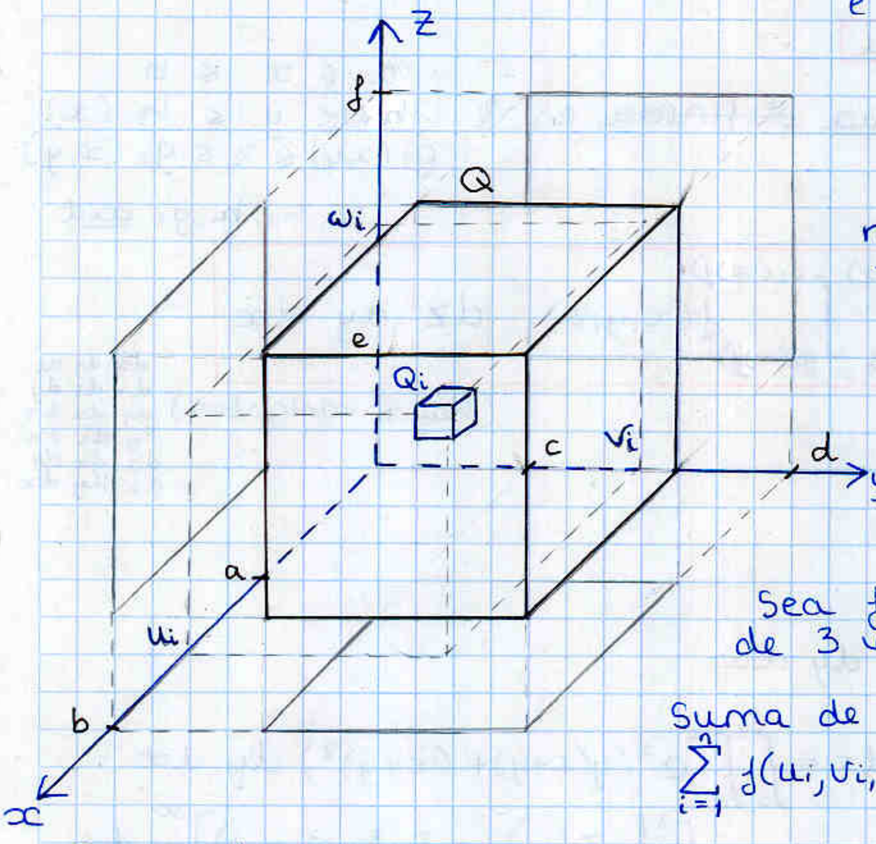
$$V(Q) = (\text{tipo I}) = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x^2 + y^2 + 1\; dy\, dx = \dots = 11/6$$

$$V(Q) = (\text{tipo II}) = \int_0^2 \int_0^{1-\frac{y}{2}} x^2 + y^2 + 1\; dx\, dy = \dots = 11/6$$

Integrales Triples

sea $Q = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

$a \leq x \leq b$
$c \leq y \leq d$
$e \leq z \leq f$



Dividimos Q en subregiones Q_i

norma $\|P\|$: longitud de la diagonal mayor de los Q_i

(u_i, v_i, ω_i): un punto cualquiera dentro del volumen Q_i

ΔV_i: volumen de Q_i

Sea $f(x,y,z)$ una función de 3 variables sobre Q

Suma de Riemann:
$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, \omega_i) \cdot \Delta V_i$$

Integral triple de f sobre Q

$$\iiint_Q f(x,y,z)\, dV := \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, \omega_i) \cdot \Delta V_i$$

si $\exists$ lim y es finito, se dice que f es integrable sobre Q.

Propiedades

Son las mismas que las de la integral doble

- Linealidad $\iiint \alpha f + \beta g = \alpha \iiint f + \beta \iiint g$
- Positividad $f \geq 0 \Rightarrow \iiint f \geq 0$
- Monotonicidad $f \leq g \Rightarrow \iiint f \leq \iiint g$
- Integrabilidad Absoluta: $\left|\iiint f\right| \leq \iiint |f|$

Calculo de integrales triples

El cálculo de las integrales triples puede realizarse tambien a traves de las integrales iteradas puesto que sigue siendo válido el teorema de fubini

Teorema de Fubini

sea $f(x,y,z)$ continua ~~definida~~ en Q

$$a \leq x \leq b$$
$$h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$$
$$g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)$$

h_1, h_2, g_1, g_2 cont

$$\boxed{\iiint_Q f(x,y,z)\, dv = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z) \; dz \; dy \; dx}$$

(hay 6 variantes)

$dx\, dy\, dz$
$dx\, dz\, dy$
$dy\, dx\, dz$
$dy\, dz\, dx$
$dz\, dx\, dy$
$dz\, dy\, dx$

ejemplo

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y+2z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x \left[e^x (yz + z^2)\right]_0^{x+y} dy\, dx = \int_0^2 \int_0^x e^x (y(x+y) + (x+y)^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^x e^x (x^2 + 2y^2 + 3xy)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[e^x (x^2 y + \tfrac{2}{3} y^3 + \tfrac{3}{2} x y^2)\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^2 e^x (x^3 + \tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{3}{2} x^3)\, dx = \int_0^2 e^x (\tfrac{19}{6} x^3)\, dx = \frac{19}{6} \int_0^2 e^x x^3\, dx$$

partes 3 veces

$u = x^3 \quad du = 3x^2$
$dv = e^x \quad v = e^x$

$$= \frac{19}{6}\left((x^3 e^x)_0^2 - \int_0^2 3 e^x x^2 dx \right)$$

$u = x^2 \quad du = 2x$
$dv = e^x \quad v = e^x$

$$= \frac{19}{6}\left[(x^3 e^x)_0^2 - 3\left([x^2 e^x]_0^2 - \int_0^2 2x e^x\, dx \right) \right]$$

$u = x \quad du = 1$
$dv = e^x \quad v = e^x$

$$= \frac{19}{6}\left[[x^3 e^x]_0^2 - 3\left([x^2 e^x]_0^2 - 2\left([x e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \right) \right) \right]$$

$$= \frac{19}{6}\left([x^3 e^x]_0^2 - 3\left([x^2 e^x]_0^2 - 2\left([x e^x]_0^2 - [e^x]_0^2 \right) \right) \right)$$

$$= \frac{19}{6}\left([8e^2] - 3\left([4e^2] - 2\left([2e^2] - (e^2 - 1) \right) \right) \right)$$

⚠ $e^0 = 1$

$$= \frac{19}{6}\left(8e^2 - 3\left(4e^2 - 2(e^2 + 1) \right) \right) = \frac{19}{6}\left(8e^2 - 3(2e^2 - 2) \right) = \frac{19}{6}(2e^2 + 6)$$

$$= \frac{19}{3}(e^2 + 3)$$

Cálculo de volumenes

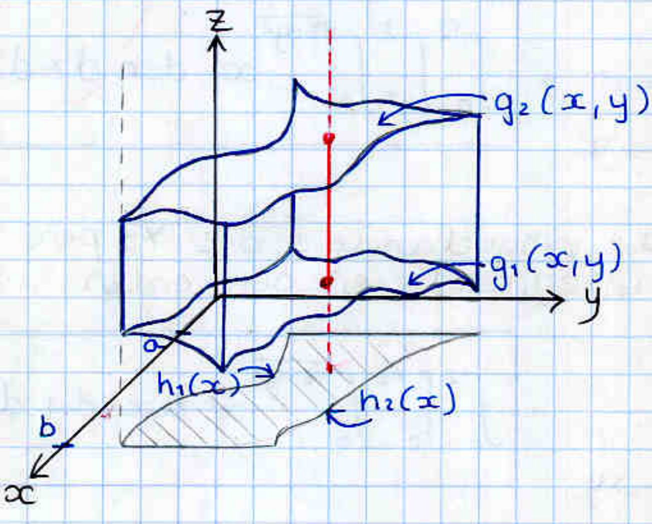
El volumen de una región Q viene dado por

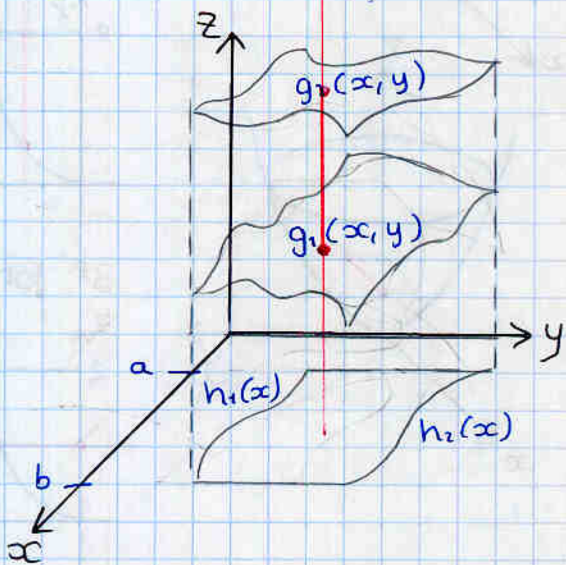
$$\iiint_Q dV \qquad [f(x,y,z)\equiv 1]$$

Dem:

$$\iiint_Q dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz\, dy\, dx$$

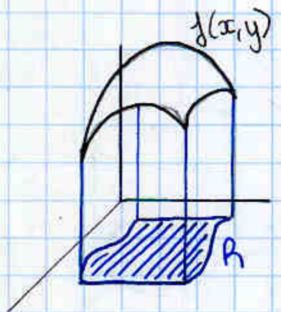
$$= \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left[g_2(x,y) - g_1(x,y)\right] dy\, dx$$



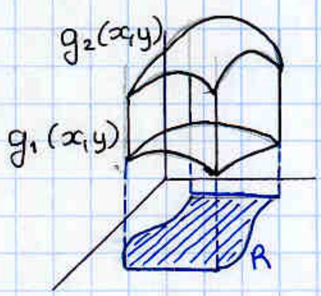


Resumen. Cálculo de áreas y volúmenes

$$A(r) = \iint_R 1\, dA$$



$$V(Q) = \iint_R f(x,y)\, dA$$

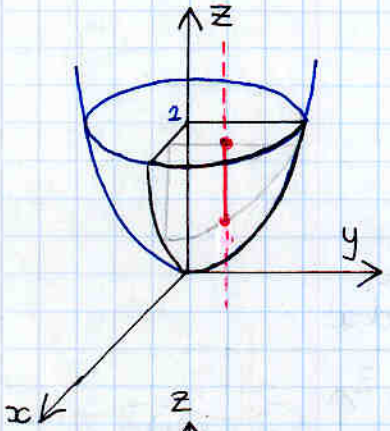


$$V(Q) = \iint_R \left[g_2(x,y) - g_1(x,y)\right] dA$$

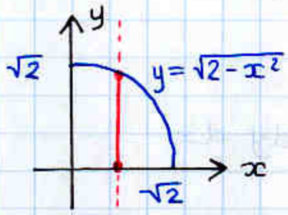
$$V(Q) = \iiint_Q 1\, dV$$

ejemplo: integral triple

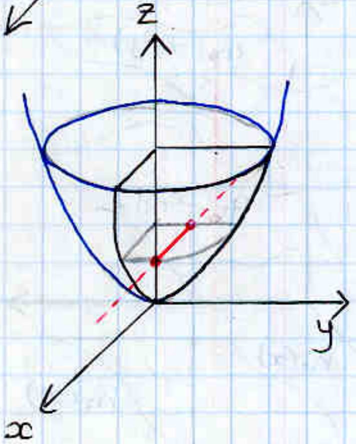
calcular la integral de $f(x,y,z) = x$ sobre la región $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ determinada por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$



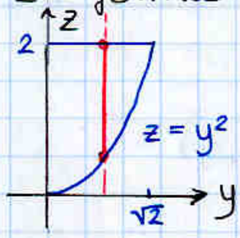
1ª forma: proyección sobre XY



$$\boxed{\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x \, dz \, dy \, dx}$$

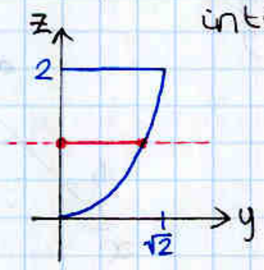


2ª forma: proyectando sobre YZ



$$\boxed{\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{2} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x \, dx \, dz \, dy}$$

3ª forma: proyectando sobre YZ pero integrando en otro orden



$$\boxed{\int_0^{2} \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x \, dx \, dy \, dz}$$

Resolviendo por la 3ª forma:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z-y^2}} dy \, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \left[\frac{z-y^2}{2}\right] dy \, dz$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\left[zy - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{z}} dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 z^{3/2} - \frac{z^{3/2}}{3} \, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2z^{3/2}}{3} \, dz$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 z^{3/2} \, dz$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{z^{5/2}}{5/2}\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{15}\left[z^{5/2}\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{2^5}$$

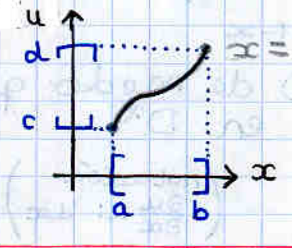
$$= \frac{8}{15}\sqrt{2} \;//$$

Cambios de Variable

Caso simple: Integrales simples de funciones de una variable

sea $f(x)$ continua en $[a,b]$
sea $x = z(u)$ continuamente diferenciable en $[a,b]$
$dx = z'(u)\,du$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(z(u))\cdot z'(u)\cdot du \qquad \begin{matrix} a = z(c) \\ b = z(d) \end{matrix}$$



Cambio de variable para integrales dobles

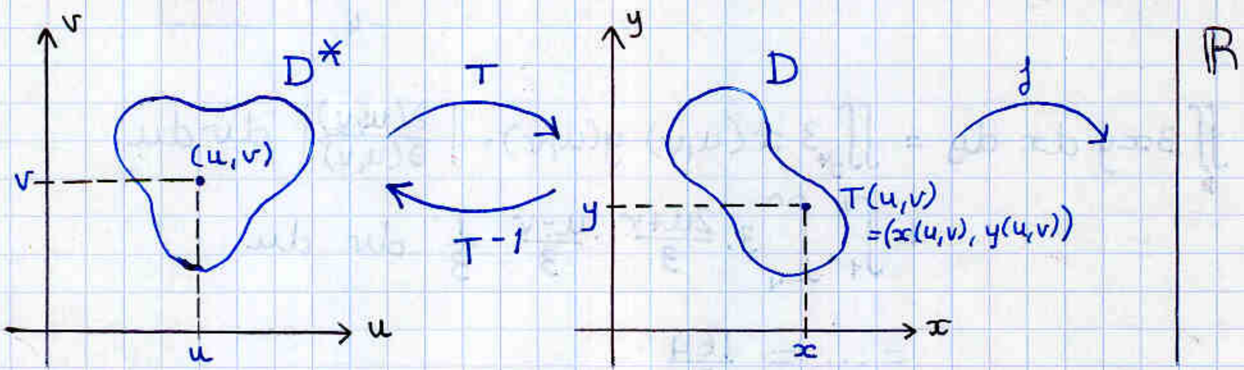
Teorema

sean D y D^* regiones elementales en el plano.
sea $T: D^* \to D$ de clase C_1 (i.e. con derivadas parciales cont) una función biyectiva en D^*

si $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ en D^*

entonces $\forall f: D \to \mathbb{R}$ se tiene

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D^*} \underbrace{f(x(u,v), y(u,v))}_{T(u,v)} \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\text{COEFICIENTE AREOLAR}} du\cdot dv}$$

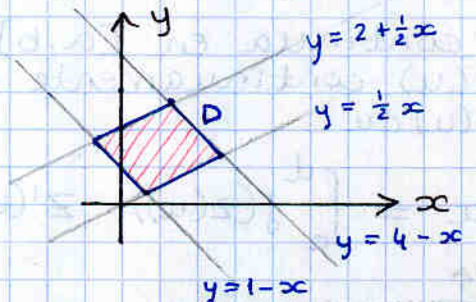


NOTA: El teorema sigue siendo válido aunque
· T no sea 1:1 en un subconjunto de medida (area) nula.
· El jacobiano se anule en un subcjto de medida nula.

ejemplo

Sea D la región acotada por las rectas:
$x-2y=0,\ x-2y=-4,\ x+y=4,\ x+y=1$

calcular $\iint_D 3xy\, dA$



Buscamos transformación $T: D^* \to D$ de modo que sea mas sencillo calcular la integral en D^*

- Hagamos $\begin{matrix} x+y := u \\ x-2y := v \end{matrix}$ $\left(\begin{matrix}\text{notación} \\ \frac{\partial u}{\partial x} =: u_x\end{matrix}\right)$

- Coeficiente areolar:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\partial(u,v)/\partial(x,y)} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{pmatrix}} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2\end{pmatrix}} = -\frac{1}{3}$$

→ otra forma:

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = \left(\frac{2u+v}{3}, \frac{u-v}{3}\right) = \left(\tfrac{2}{3}u + \tfrac{1}{3}v, \tfrac{1}{3}u - \tfrac{1}{3}v\right) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$\left\{\begin{matrix} x+y=u \\ x-2y=v \end{matrix}\right. -$
$3y = u-v$
$y = \frac{u-v}{3}$

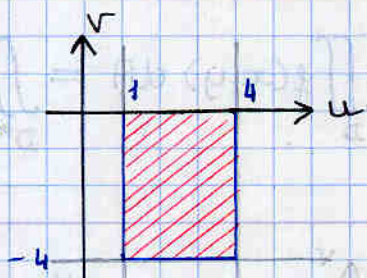
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -1/3$$

→ comprobación:

$$\text{Area}(D) = \text{Area}(D^*) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

- Hallemos D^* tal que $T(D^*) = D$

$\left.\begin{matrix} x-2y=4 \\ x-2y=0 \\ x+y=4 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\}$ rectas en XY $\to$ $\left.\begin{matrix} v=-4 \\ v=0 \\ u=4 \\ u=1 \end{matrix}\right\}$ rectas en UV



$$\iint_D 3xy\,dx\,dy = \iint_{D^*} 3\,x(u,v)\,y(u,v)\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv\,du$$

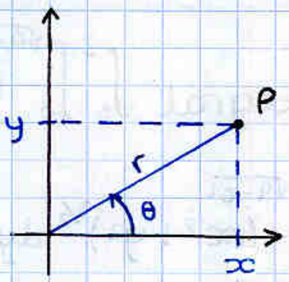
$$= \int_1^4 \int_{-4}^0 3 \cdot \frac{2u+v}{3} \cdot \frac{u-v}{3} \cdot \frac{1}{3}\, dv\, du$$

$$= \dots = \frac{164}{9}$$

Coordenadas polares

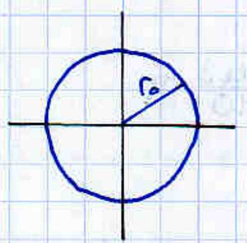
Definimos la aplicación T mediante

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$



$P = (x, y) = (r, \theta)$

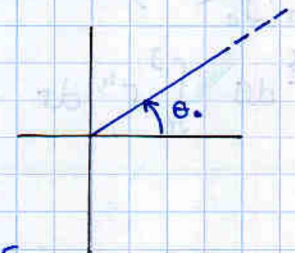
<u>$r = cte$</u>



$$\begin{cases} x = r_0 \cos\theta \\ y = r_0 \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r_0^2$$

<u>$\theta = cte$</u>

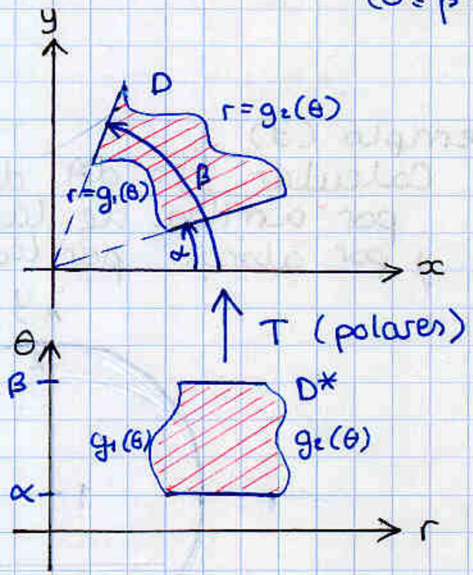


$$\begin{cases} x = r\cos\theta_0 \\ y = r\operatorname{sen}\theta_0 \end{cases}$$

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)\, x$$

más generalmente, una región D de la forma

$$0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$$
$$\alpha \leq \theta \leq \beta \qquad (0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi)$$



Coeficiente areolar

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix}$$

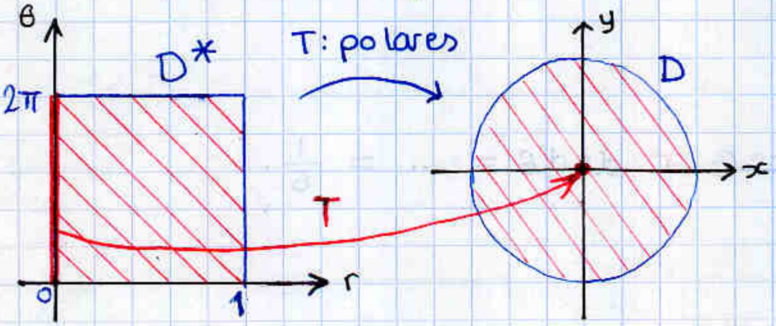
$$= \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cdot r \cdot dr\, d\theta}$$

ejemplo (1) calcular $\iint_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy \qquad D \equiv x^2 + y^2 < 1$

no se puede integrar directamente; pasamos a polares



T no es inyectiva en todo el conjunto D*

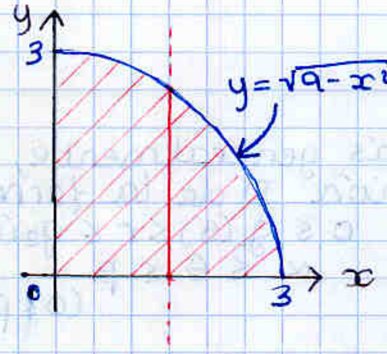
Sin embargo el subconjto de D* de los puntos donde T no es inyectiva tiene medida cero; es válido.

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = (\text{polares}) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\cdot\left[\int_0^1 r e^{r^2}\, dr\right] = \pi\,(e-1)$$

ejemplo (2)

Evaluar en polares la integral $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$



$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$

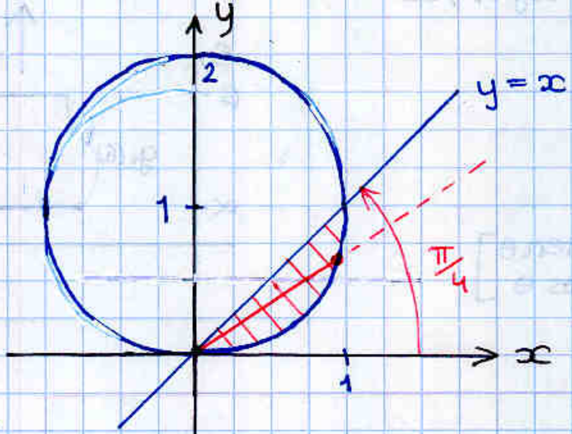
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 (r^2)^{3/2}\cdot r\; dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 r^4\, dr = \frac{243}{10}\pi$$

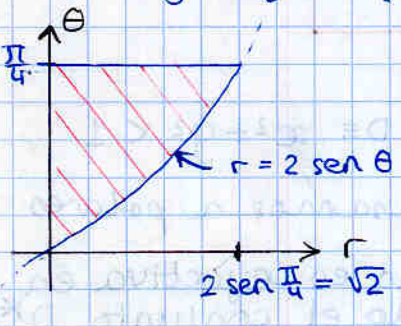
ejemplo (3)

Calcular $\iint x\, dA$ donde D es la región limitada por arriba de la recta $y=x$ y por abajo por la circunferencia $x^2+y^2-2y=0$

$x^2+(y-1)^2=1$

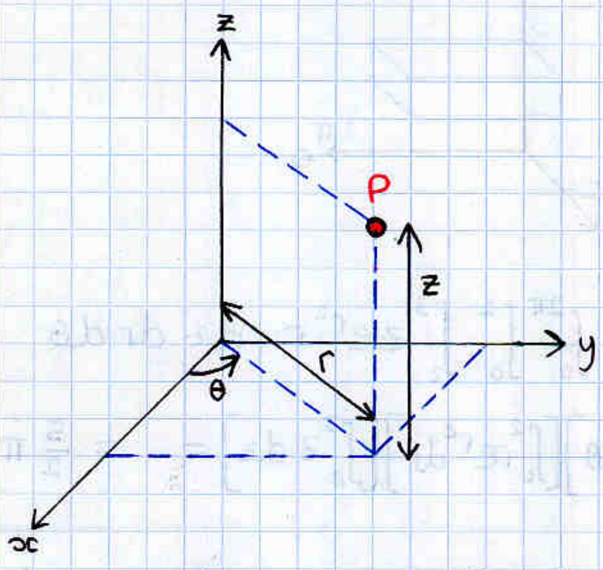


$$x^2+y^2-2y \le 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r^2 - 2r\,\text{sen}\,\theta \le 0 \\ r - 2\,\text{sen}\,\theta \le 0 \\ 0 < r \le 2\,\text{sen}\,\theta \end{array}$$



$$\iint_D x\, dA = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} r\cos\theta\; r\; dr\, d\theta = \ldots = \frac{1}{6}$$

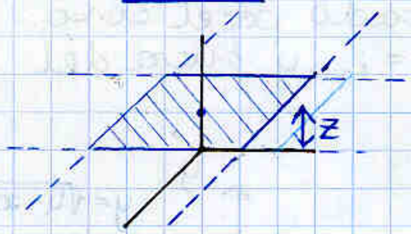
Coordenadas cilíndricas



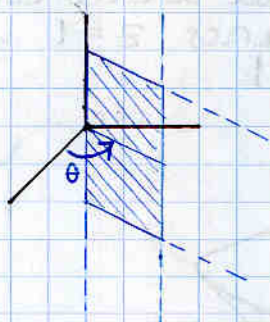
$$P = (x, y, z) = (r, \theta, z)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

$z = cte$



$\theta = cte$



$r = cte$

en coord cilíndricas la ec. de un cilindro $x^2+y^2=a$ es $r=a$

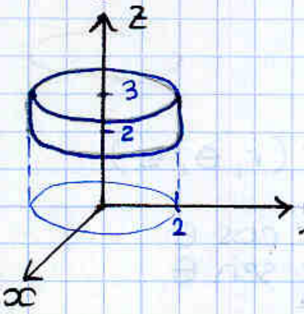
Coeficiente areolar

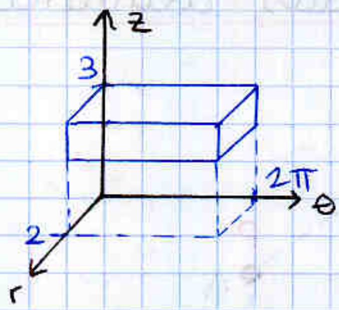
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det\begin{bmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\; r \; dz\,dr\,d\theta}$$

ejemplo (1)

Integrar $ze^{x^2+y^2}$ en el cilindro $x^2+y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$



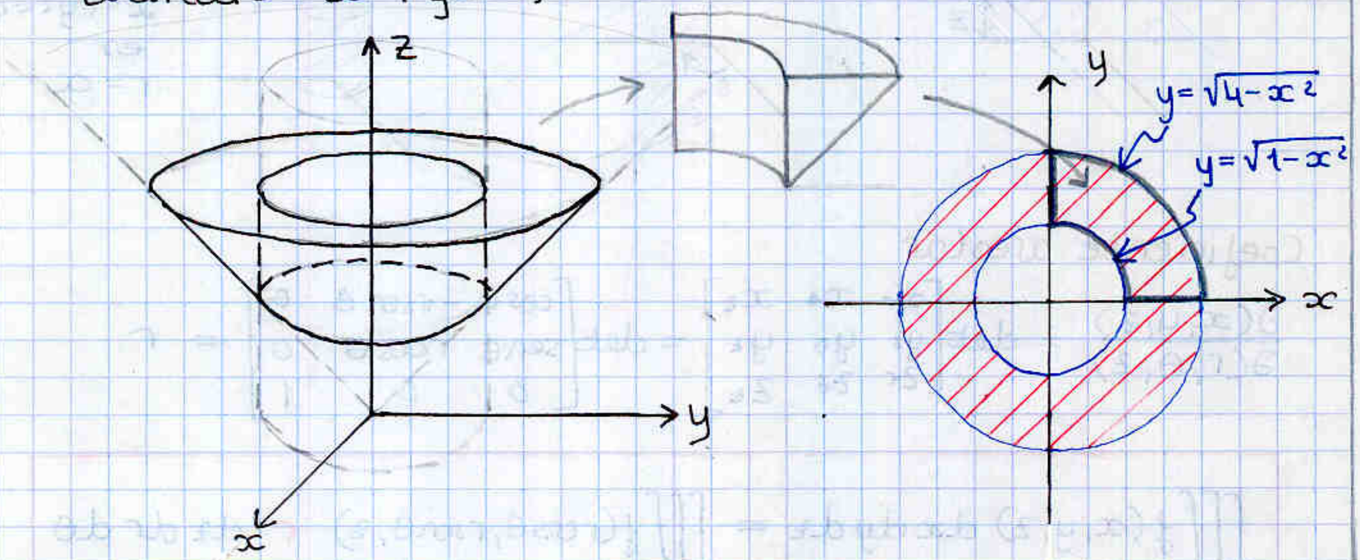


$$\iiint_D z e^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz \overset{\text{(cilíndricas)}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_2^{3} z e^{r^2} r \; dz\, dr\, d\theta$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{2} r e^{r^2} dr\right]\left[\int_2^{3} z\, dz\right] = \ldots = \frac{5}{2}\pi\,(e^4-1)$$

ejemplo (2)

Hallar el volumen del sólido limitado por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, los planos $z=1$ y $z=2$ y fuera del cilindro $x^2+y^2=1$



1^a forma:

$V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}} - V_{\substack{\text{cilindro}\\ \text{exterior}}} = \ldots = \frac{4}{3}\pi$

2^a forma: cartesianas con simetría

⚠ la simetría debe ser tanto en el volumen como en la función (en este caso $f=1$)

$$V = 4\left[\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} 1\, dz\, dy\, dx + \int_1^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 1\, dz\, dy\, dx\right] = \ldots \text{ ack!}$$

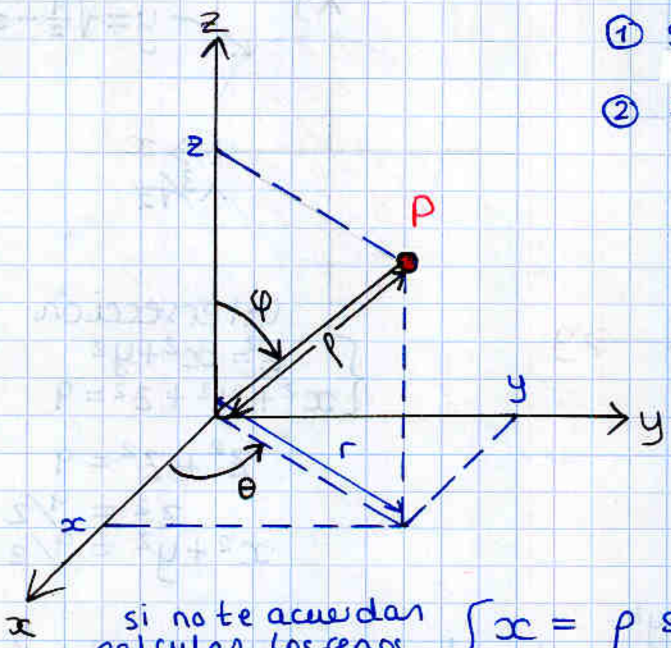
3^a forma: coordenadas cilíndricas

$$V = \int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_r^{2} r\, dz\, dr\, d\theta = \ldots = \frac{4}{3}\pi$$

aún calculando el volumen no hay que olvidar el coef. areolar!! ¡No hay que poner un 1!

⚠

Coordenadas esféricas



① $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ③

② $\operatorname{sen}\varphi = \frac{r}{\rho}$ $\qquad$ $\cos\varphi = \frac{z}{\rho}$ ④

x: ③ $x = r\cos\theta$ ← ②

$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$

y: ① $y = r \operatorname{sen}\theta$ ← ②

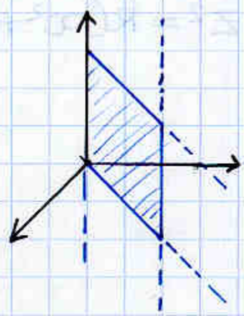
$= \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$

z: ④ $z = \rho\cos\varphi$

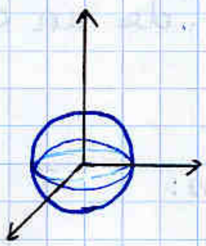
si no te acuerdas calculas los senos y cosenos de θ y φ y de ahí se deduce

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

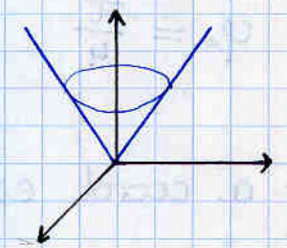
θ = cte



ρ = cte



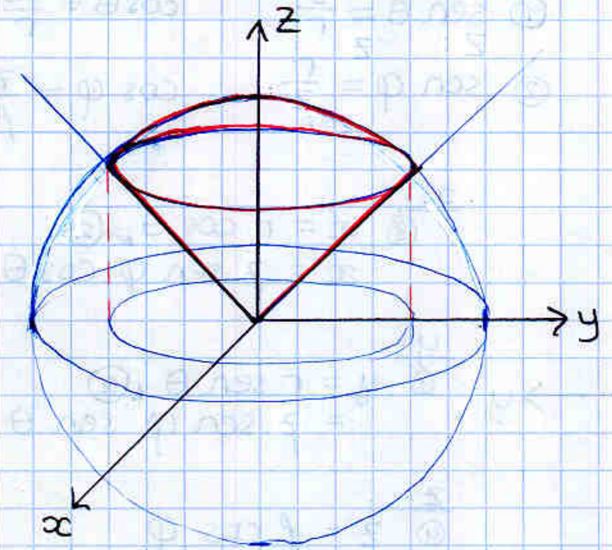
φ = cte

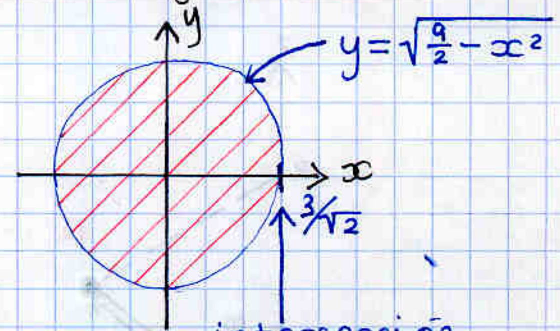


coeficiente areolar

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

ej: Calcular el volumen de la región acotada por abajo por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$





intersección

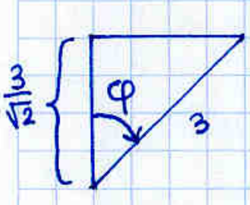
$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 9 \end{cases}$$

$$z^2 + z^2 = 9$$

$$z^2 = 9/2$$

$$x^2+y^2 = 9/2$$

$$V = \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{\frac{9}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{9}{2}-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{9-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx = \text{(intentarlo!)}$$



$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

en general $\varphi_0 \neq \pi/4$

ec. de un cono $z^2 = k(x^2+y^2)$

pasar a coord esféricas:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\right]\left[\int_0^3 \rho^2 d\rho\right]$$

$$= \dots = 18\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

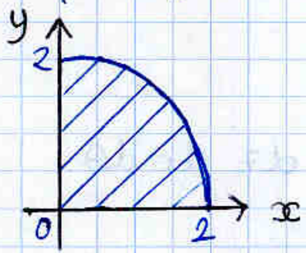
APLICACIONES

I. Centro de masa de placas bidimensionales

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\, \rho(x,y)\, dx\, dy}{\underbrace{\iint_D \underbrace{\rho(x,y)}_{\text{densidad de masa}}\, dx\, dy}_{\text{MASA}}} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\, \rho(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy}$$

ejemplo: Hallar la masa correspondiente a la posición del primer cuadrante del círculo $x^2+y^2 \leq 4$ si la densidad en el punto (x,y) es proporcional a la distancia del punto al origen

$$\rho(x,y) = k \cdot d[(x,y),(0,0)] = k\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = k\sqrt{x^2+y^2}$$



$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 k\, r\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \ldots = \frac{4}{3}k\pi$$

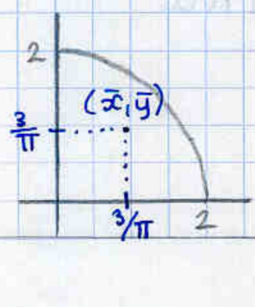
Hallar el centro de masa

$$\iint_D x\,\rho(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\cos\theta\; k\, r\, r\, d\theta$$
$$= k\left[\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta\right]\left[\int_0^2 r^3\, dr\right]$$
$$= k\,[\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2$$
$$= 4k$$

$$\iint_D y\,\rho(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\operatorname{sen}\theta\; k\, r\, r\, d\theta$$
$$= k\left[\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right]\left[\int_0^2 r^3\, dr\right]$$
$$= k\,[-\cos\theta]_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2$$
$$= 4k$$

$$\bar{x} = \frac{4k}{\frac{4}{3}k\pi} = \frac{3}{\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{4k}{\frac{4}{3}k\pi} = \frac{3}{\pi}$$

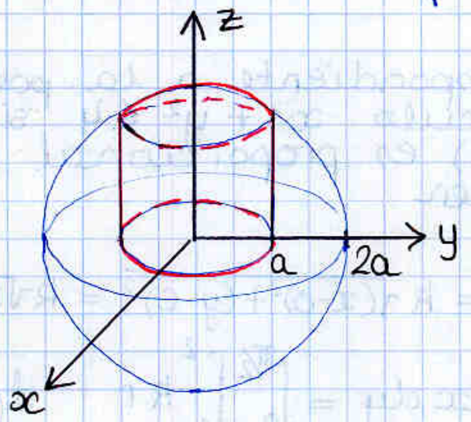


II. Momento de inercia alrededor del eje z

$$I_z = \iiint_W \underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{densidad}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{distancia al eje } z} \, dx\, dy\, dz$$

ejemplo: un sólido tiene la forma de la región W que está dentro del cilindro $r=a$, debajo de la esfera $r^2+z^2=4a^2$ y encima del plano XY

Encontrar masa y momento de inercia suponiendo que la densidad del punto P es proporcional a la distancia de P al plano XY



$$r^2+z^2=4a^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=(2a)^2$$

$$z=+\sqrt{4a^2-r^2}$$

$$\rho(r,\theta,z)=kz$$

$$m=\iiint_W \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} \rho(r,\theta,z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} kzr\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= k\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^a r\, dr\right]\left[\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} z\, dz\right] = \ldots = \frac{7}{4}a$$

$$I_z = \iiint_W \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{W^*} \rho(r,\theta,z)\, r^2\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} kzr^3\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= k\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^a r^3\, dr\right]\left[\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} z\, dz\right]$$

$$= \ldots = \frac{5}{6}\pi k a^2$$

- INTEGRACIÓN MULTIPLE
  - DOBLES
    - FUBINI (iterada)
    - AREAS Y VOLUMENES
    - CAMBIO DE VARIABLES
      - POLARES
      - ELIPTICAS $\begin{cases} x = ar\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = br\,\text{sen}\,\theta & 0 \le r \le 1 \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr$
      - ESFÉRICAS
      - CILINDRICAS
      - ELIPSOIDALES $\begin{cases} x = a\rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = abc\rho^2\,\text{sen}\,\varphi$
  - TRIPLES
    - CAMBIO DE VARIABLES
    - FUBINI
    - VOLUMEN
  - APLICACIONES

Análisis Vectorial

Tema 4:

Curvas e integrales de línea.

CURVAS E INTEGRACION SOBRE CURVAS

• Curvas Planas

DEF: CAMINO

Un CAMINO en $\mathbb{R}^2$ es una función continua

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

DEF: CURVA PLANA

La imagen $\alpha([a,b]) = \{\alpha(t) / t \in [a,b]\} \in \mathbb{R}^2$ se llama CURVA PLANA y ademas $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman EXTREMOS del camino.

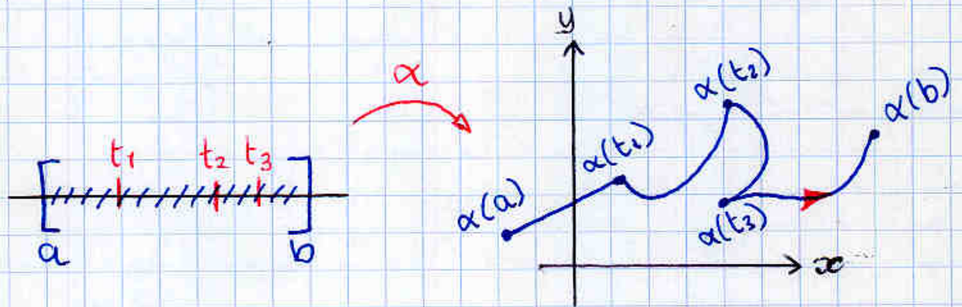
tambien se dice que la función α es una parametrización de la curva $C \equiv \alpha([a,b])$

DEF: CAMINO REGULAR

Un camino α se dice REGULAR si

(a) α es derivable en $]a,b[$
(b) α' es continua en $]a,b[$ (i.e. $\alpha \in C_1$)
(c) $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$
(i.e. $x'(t)$ e $y'(t)$ no se anulan simultaneamente excepto en los extremos)

si el camino es regular en cada subintervalo de una partición de $[a,b]$ se dice REGULAR A TROZOS



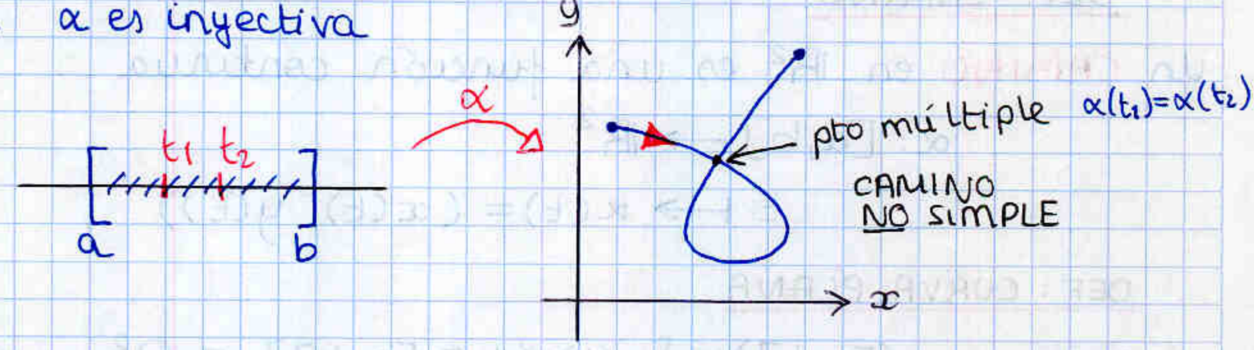
· NOTA: En general la derivabilidad de un camino NO detecta picos
· NOTA: En los puntos donde un camino es regular tiene vector tangente y por tanto la curva tiene aspecto suave

DEF: CAMINO SIMPLE (no es lo contrario de cerrado)

Un camino $\alpha([a,b]) \to \mathbb{R}^2$ se dice SIMPLE si

$\forall\, t_1 \neq t_2,\ t_1 ; t_2 \in]a,b[,\ \boxed{\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)}$

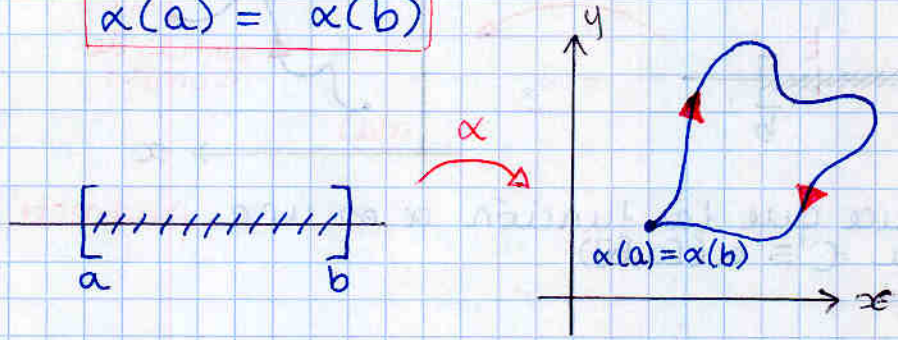
i.e. α es inyectiva



DEF: CAMINO CERRADO

Un camino $\alpha([a,b]) \to \mathbb{R}^2$ se dice CERRADO si

$\boxed{\alpha(a) = \alpha(b)}$



ejemplos: ¿es regular el camino $\alpha(t) = (t, |t|)$ $t \in \mathbb{R}$?
¿y $\beta(t) = (t^3, t^2|t|)$?

α es un camino pues α es continua (i.e. $x(t)$ e $y(t)$ lo son)

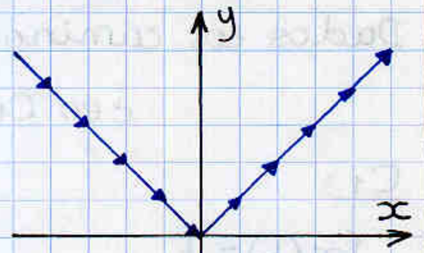
α es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

$$y'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{y(0+h) - y(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \to \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (1,1), & t > 0 \\ \nexists & t = 0 \\ (1,-1), & t < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\alpha \text{ no es regular.} \\ \text{es regular a trozos}\end{array}}$

$y(t) = |t| = |x(t)| \to \boxed{y = |x|,\ x \in \mathbb{R}}$



β es un camino

β es derivable en $\mathbb{R}$

$$y'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{y(0+h) - y(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2|h|}{h} = \lim_{h\to 0} h|h| = 0$$

$$\beta'(t) = \begin{cases} (3t^2, 3t^2), & t > 0 \\ (0, 0) & t = 0 \\ (3t^2, -3t^2) & t < 0 \end{cases}$$

β' es continua en $\mathbb{R}$

β' se anula en $(0,0)$ $\to$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{no es regular} \\ \text{es regular a trozos}\end{array}}$

$|x(t)| = |t^3| = |t^2 \cdot t| = |t^2| \cdot |t| = t^2|t| = y(t)$

$\boxed{y = |x|}$

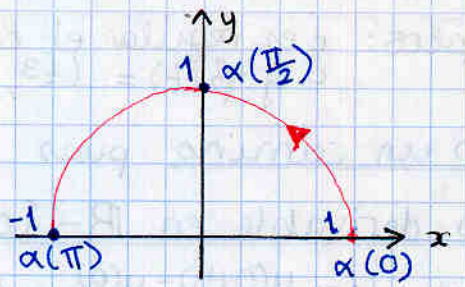
Vemos que en general la DERIVABILIDAD de un camino no detecta picos.

En este ejemplo β' es continua y sin embargo la curva tiene un pico.

Por eso para ser regular es necesario que
$\alpha'(t) \neq (0,0)$ $\forall t \in]a,b[$

ejemplo: Describir y dibujar la gráfica de la curva
$C = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) : 0 \leq t \leq \pi\}$

$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$
$\alpha : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$



$x(t) = \cos t$
$y(t) = \operatorname{sen} t$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{array}}$$

- curva plana
- extremos $\alpha(0) = (1, 0)$ $\alpha(\pi) = (-1, 0)$
- regular $x'(t)$ e $y'(t)$ cont en $]0, \pi[$ y no se anulan a la vez
- simple
- no cerrada

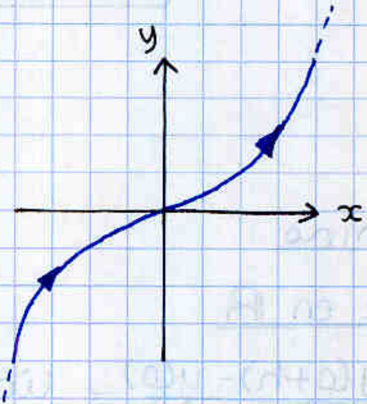
Dados los caminos $C_1 = \{(t, t^3) : t \in \mathbb{R}\}$
$C_2 = \{(\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^3 t) : t \in \mathbb{R}\}$
¿es $C_1 = C_2$?

C_1:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

$y = t^3 = x^3$

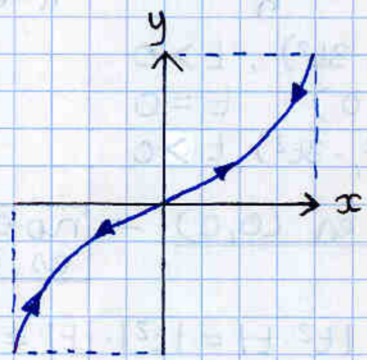
$$\boxed{y = x^3 \quad x \in \mathbb{R}}$$



C_2:

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = x^3 & |x| \leq 1 \\ & |y| \leq 1 \end{array}}$$



se recorre infinitas veces

$C_1 \neq C_2$

$C_2 \subset C_1$

Pendiente de la recta tangente

se sabe que si $y=f(x)$, la pendiente viene dada por $f'(x)$

Veamos que ocurre con una curva paramétrica

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \qquad y(t) = f(x(t))$$

derivando respecto de t

$$y'(t) = \underbrace{f'(x(t))}_{f'(x(t)) \text{ es la pendiente}} \cdot x'(t)$$

si $x'(t) \neq 0 \Rightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}}$

si $x'(t) \neq 0$ y $y'(t) = 0 \Rightarrow$ recta tg. horizontal

si $x'(t) = 0$ y $y'(t) = 0 \Rightarrow$ no existe vector tangente

ejemplo

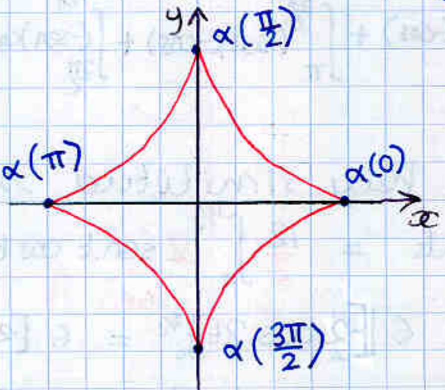
sea $\alpha([0,2\pi]) \to \mathbb{R}^2 \;/\; \alpha(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$

¿Es α regular? ¿En qué puntos su tg es horizontal?

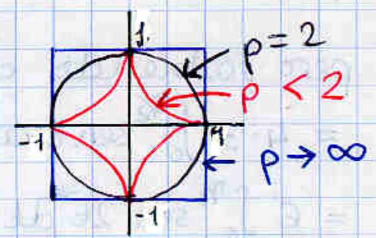
$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = 1}$$

ASTROIDE



NOTA:
$x^p + y^p = 1$



α' continua

$$\alpha'(t) = (-3\cos^2 t \operatorname{sen} t,\ 3\operatorname{sen}^2 t \cos t)$$

$$= 3 \operatorname{sen} t \cos t\,(-\cos t, \operatorname{sen} t)$$

α' se anula $\rightarrow$ $\boxed{\text{no es regular}}$

$$\alpha'(t) = (0,0) \iff \begin{array}{l} \operatorname{sen} t = 0 \rightarrow t = 0, \pi \\ \cos t = 0 \rightarrow t = \pi/2, 3\pi/2 \\ \operatorname{sen} t = \cos t = 0 \rightarrow \text{nunca} \end{array}$$

tg horizontal si $\frac{dy}{dt} = 0$ y $\frac{dx}{dt} \neq 0$ no hay tg. horizontal en ningún punto

Longitud de arco

Sea el camino $\alpha : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$

tal que $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas.

Se define la longitud del arco de la curva α entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ como

$$\boxed{s = \int_a^b \| \alpha'(t) \| \, dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt}$$

DEF: ARCO DE CURVA RECTIFICABLE

Un arco de curva se dice RECTIFICABLE si la longitud de arco es finita

ejemplo. calcular la longitud del arco de la curva

$$C \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[3\cos^2 t(-\operatorname{sen} t)]^2 + [3\operatorname{sen}^2 t \cos t]^2} \, dt$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \, (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} \, dt$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} t| |\cos t| \, dt$$

$$\sqrt{x^2} \neq x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

para integrar esto habría que separar en zonas

$$= 3 \left[\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \cos + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}(-\cos) + \int_{\pi}^{3\pi/2} (-\operatorname{sen})(-\cos) + \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-\operatorname{sen})\cos \right]$$

pero sabiendo que hay similitud se puede hacer

$$= 4 \cdot 3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t \, dt = \frac{12}{2} \int_0^{\pi/2} \underbrace{2 \operatorname{sen} t \cos t}_{\operatorname{sen} 2t}$$

$$= 6 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t \, dt = 6 \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\pi/2} = 6 \left[- -\frac{1}{2} - -\frac{1}{2} \right] = 6$$

ejercicio: Calcular la longitud de arco de la circunferencia $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ $t \in [0, 4\pi]$ y el camino total recorrido

$t \in [0, 4\pi]$ recorre dos veces la circunferencia así que para hallar la long del arco integramos $[0, 2\pi]$

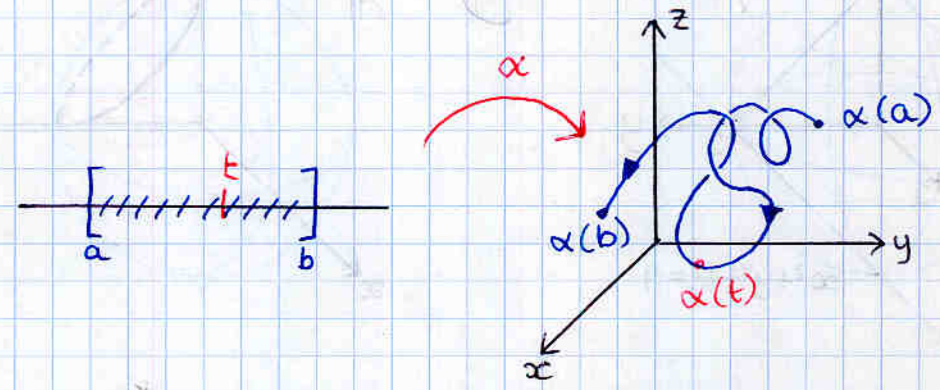
$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} \, dt = \int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

el camino total recorrido es $2 \cdot 2\pi = 4\pi$

• $\boxed{\text{Curvas Espaciales}}$

Todo lo definido en curvas planas se puede redefinir para curvas espaciales cambiando $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}^3$

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \alpha(t) = \left(x(t), y(t), z(t) \right)$$

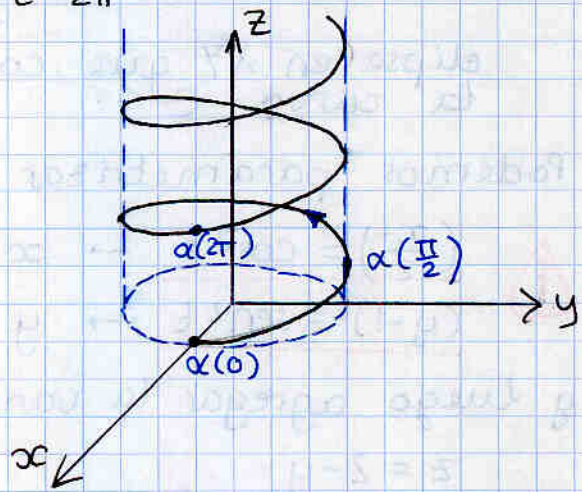


ejemplo

(1) sea $\alpha(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$
Dibujar la gráfica de la curva y hallar la longitud del arco entre $t=0$ y $t=2\pi$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \\ z = bt \end{cases}$$

la proyección sobre XY es una circunferencia. Ademas z crece conforme t crece



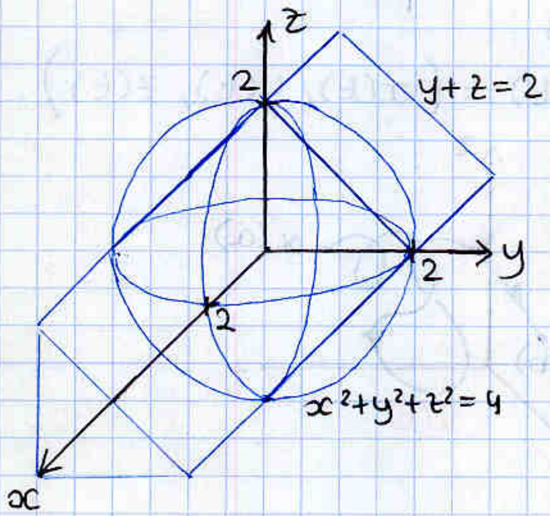
$$s = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-a \operatorname{sen} t]^2 + [a\cos t]^2 + b^2}\, dt$$

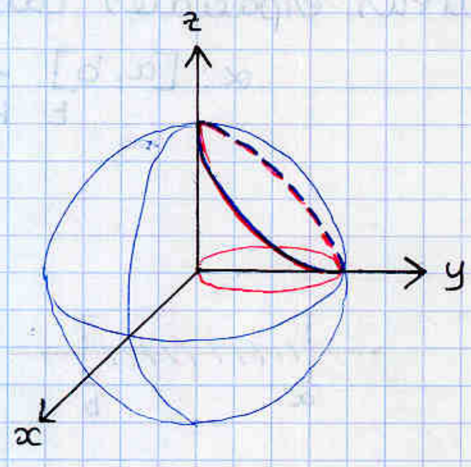
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2} \cdot 2\pi$$

ejemplo

(2) Hallar la parametrización de la curva C dada como intersección de superficies

$$C\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ y+z=2 \end{cases}$$





$$z=2-y \Rightarrow x^2+y^2+(2-y)^2=4$$
$$x^2+2y^2-4y=0$$
$$\boxed{\frac{x^2}{2}+(y-1)^2=1}$$

elipse en XY que coincide con la proyección de la curva C

Podemos parametrizar la elipse:

$\left(\frac{x^2}{2}\right)=\cos^2 t \longrightarrow x=\sqrt{2}\cos t$

$(y-1)^2=\operatorname{sen}^2 t \longrightarrow y=1+\operatorname{sen} t$

y luego agregar la variación de z

$$\begin{aligned} z &= 2-y \\ &= 2-(1+\operatorname{sen} t) \\ &= 1-\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

La parametrización de la circunferencia C es

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=1+\operatorname{sen} t \\ z=1-\operatorname{sen} t \end{cases}$$

Aplicación: Movimiento de una partícula

Posición, rapidez, velocidad y aceleración

Las funciones vectoriales a valores reales ($\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$) permiten estudiar conceptos de CINEMÁTICA

Si en el instante t una partícula se encuentra en el punto (x,y) donde $x = x(t)$, $y = y(t)$ para ciertas funciones $x, y: [a,b] \to \mathbb{R}$ se tiene:

$$\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

Posición: el vector $\alpha(t) = (x(t), y(t))$

Velocidad: el vector $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$

↳ Rapidez: norma de la velocidad $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$

Aceleración: el vector $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$

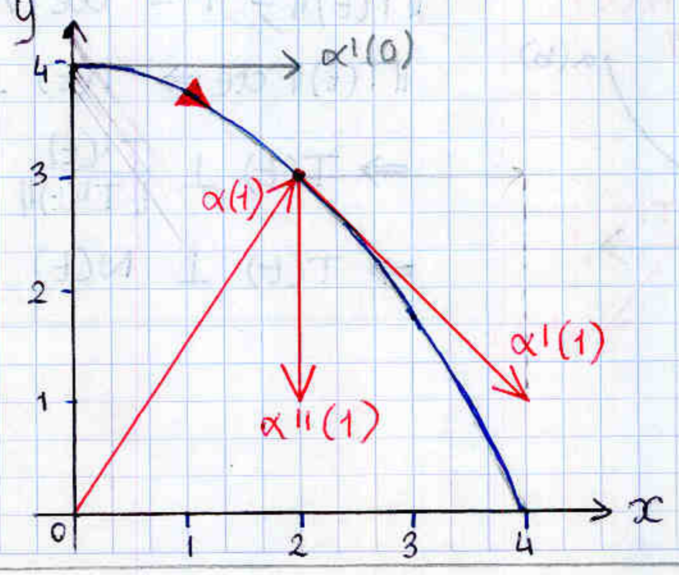
ejemplo
sea $\alpha(t) = (2t, 4-t^2)$, $0 \leq t \leq 2$
encontrar $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$
representar $\alpha'(1)$ y $\alpha''(1)$

$\alpha(t) = (2t, 4-t^2)$
$\alpha'(t) = (2, -2t)$ $\quad \alpha'(1) = (2, -2)$
$\alpha''(t) = (0, -2)$ $\quad \alpha''(1) = (0, -2)$

representar:

$$\alpha(t) \begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - t^2 \end{cases} \quad t \in [0,2]$$

$t = \frac{x}{2} \to y = 4 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$ $\quad \boxed{y = 4 - \frac{x^2}{4} \quad x \in [0,4]}$ ⚠



si $\|\alpha(t)\|$ cte $\Rightarrow \alpha'(t) \perp \alpha(t)$ $\forall t : \alpha'(t) \neq 0$ mov. circular

Demostración

sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $\|\alpha(t)\|$ cte $\Rightarrow \|\alpha(t)\| = k$

$$\Rightarrow \|\alpha(t)\| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2} = k$$

$$\Rightarrow \|\alpha(t)\|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = k^2$$

derivando respecto de t

$$\Rightarrow 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \langle (x(t), y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2 \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(t) \perp \alpha'(t)$$

Vector tangente unitario y vector normal principal

Definición: Vector tangente unitario

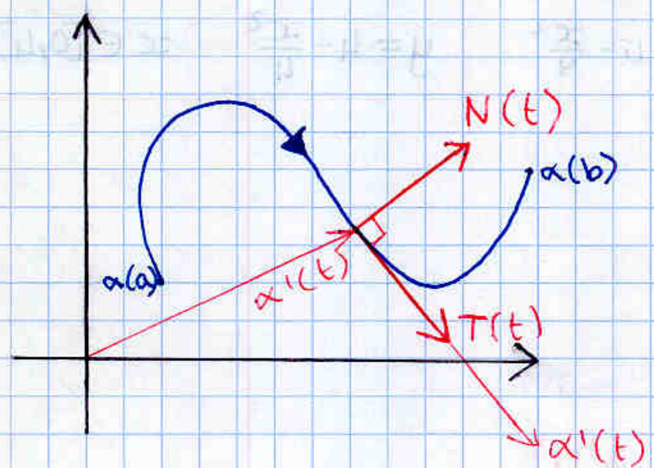
$$\boxed{T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}} \quad \text{cuando } \alpha'(t) \neq 0$$

Definición: Vector normal principal

$$\boxed{N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}} \quad \text{cuando } T'(t) \neq 0$$

Propiedad

si $\alpha'(t) \neq 0$ y $T'(t) \neq 0 \Longrightarrow \boxed{T(t) \perp N(t)}$



Dem:

$\|T(t)\| = 1 =$ cte $\forall t$

$\|T(t)\|$ cte $\Rightarrow T(t) \perp T'(t)$

$\Rightarrow T(t) \perp \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$

$\Rightarrow T(t) \perp N(t)$

ejemplo:

Calcular $T(t)$ y $N(t)$ siendo $\alpha(t)=(2t,4-t^2)$ $t\in[0,2]$

Verificar que son perpendiculares

$$\alpha(t)=(2t,4-t^2)$$
$$\alpha'(t)=(2,-2t)$$

$$T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}=\frac{(2,-2t)}{\sqrt{4+4t^2}}=\frac{(2,-2t)}{2\sqrt{1+t^2}}$$

$$\boxed{T(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,-t)}$$

$$T'(t)=\left((-\tfrac{1}{2})(2t)(1+t^2)^{-3/2},\ (-t)(-\tfrac{1}{2})(2t)(1+t^2)^{-3/2}-(1+t)^{-1/2}\right)$$
$$=\left(-\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}},\ \frac{t^2}{(1+t^2)^{3/2}}-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)$$
$$=\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\left(-t,\ t^2-(1+t^2)\right)$$

$$T'(t)=\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}(-t,-1)$$

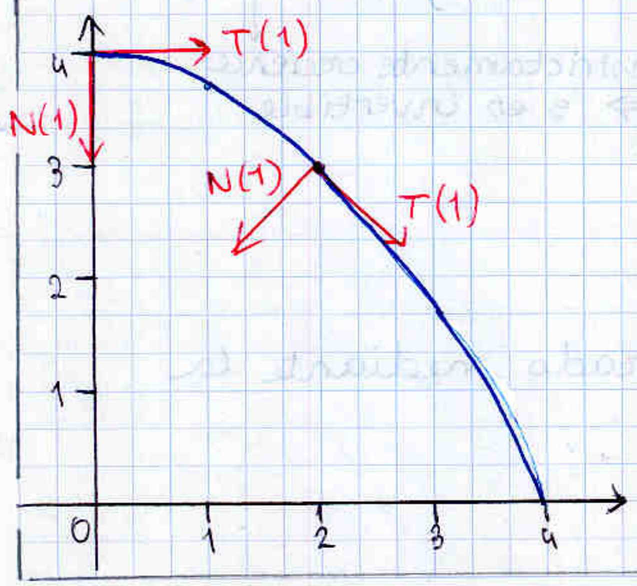
$$\|T'(t)\|=\sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)^3}+\frac{1}{(1+t^2)^3}}=\sqrt{\frac{t^2+1}{(t^2+1)^3}}=\sqrt{\frac{1}{(t^2+1)^2}}=\frac{1}{t^2+1}$$

$$N(t)=\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}=\frac{\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}(-t,-1)}{\frac{1}{t^2+1}}$$

$$\boxed{N(t)=\frac{1}{\sqrt{(t^2+1)}}(-t,-1)}$$

$$\langle(1,-t),(-t,-1)\rangle=-t+t=0$$

$$\boxed{N(t)\perp T(t)}$$



$$T(1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N(1)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$T(0)=(1,0)$$

$$N(0)=(0,-1)$$

Integral de un camino

la integral de un camino $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $t \in [a,b]$ definida componente a componente como sigue

$$\int_a^b \alpha(t)\,dt := \left(\int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt, \int_a^b z(t)\,dt\right)$$

⚠ un vector

Propiedad:

si $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ es un camino entonces

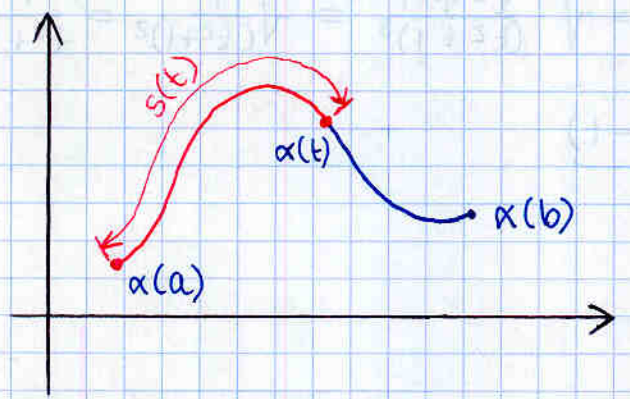
$$\boxed{\left\| \int_a^b \alpha(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|\alpha(t)\|\,dt}$$

Función longitud de arco

sea $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$

se define la función longitud de arco como

$$s: [a,b] \longrightarrow [0, L]$$
$$t \longmapsto s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\,du$$



Parametrización de un camino mediante longitud de arco

- Tª fundamental del cálculo: $s'(t) = \|\alpha'(t)\| \geqslant 0$
- camino regular: $s'(t) \neq 0$

$\Big\}$ $s'(t) > 0$ $\downarrow$ estrictamente creciente $\Rightarrow$ s es invertible

$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|du$

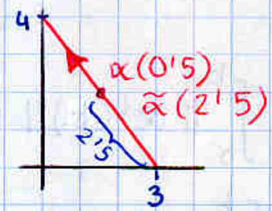
$$\boxed{\begin{array}{l} s = s(t) \xrightarrow{s^{-1}} t = t(s) \\ \alpha(t(s)) =: \tilde{\alpha}(s) \end{array}}$$

el camino queda parametrizado mediante la longitud de arco ejemplo: Hallar $s(t)$ para $\alpha(t) = (3-3t, 4t)$ $t \in [0,1]$ y hallar $\tilde{\alpha}(s)$

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| \, du = \int_0^t \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \, du = \int_0^t 5 \, du = 5t$$

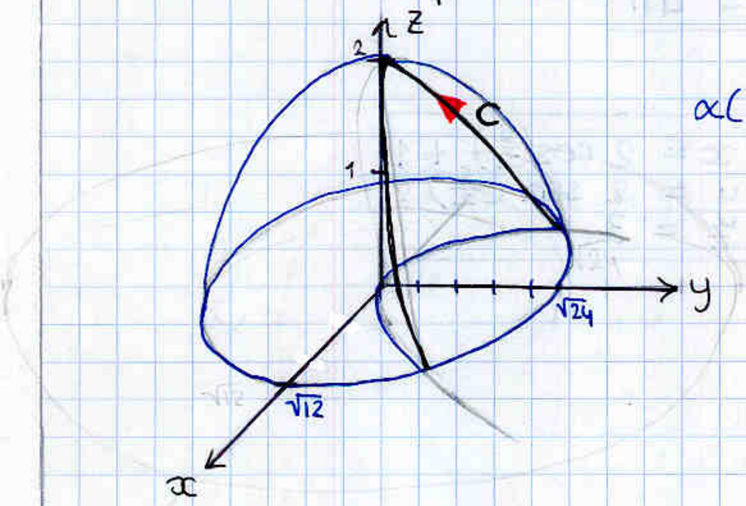
$\boxed{s(t) = 5t} \rightarrow t(s) = s/5$ $\qquad$ $\boxed{L = s(\underset{t}{1}) = 5}$

$$\boxed{\tilde{\alpha}(s) = \left(3 - \tfrac{3}{5}s, \tfrac{4}{5}s\right) \quad s \in [0,5]}$$



ejercicio: Representar gráficamente la curva C dada por la intersección del semielipsoide $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1$, $z > 0$ y el cilindro parabólico $y = x^2$

Hallar una representación paramétrica α



$$\alpha(t) \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \sqrt{\frac{(t^2+6)(4-t^2)}{6}} \end{cases}$$

$2x^2 + y^2 + 6z^2 = 24$

$z^2 = \frac{24 - 2x^2 - y^2}{6} = \frac{24 - 2t^2 - t^4}{6} = \frac{(t^2+6)(-t^2+4)}{6}$

$z > 0$

$\Leftrightarrow (t^2+6)(4-t^2) > 0$

$\Leftrightarrow |t| < 2$

$t \in [-2, 2]$

$$\alpha(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = (4 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t^4)^{1/2} \end{cases} \qquad \alpha'(t) = \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{2}{3}t - \frac{4}{6}t^3)}{(4 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t^4)^{1/2}} = \frac{-\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t^3}{\sqrt{4 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t^4}} \end{cases}$$

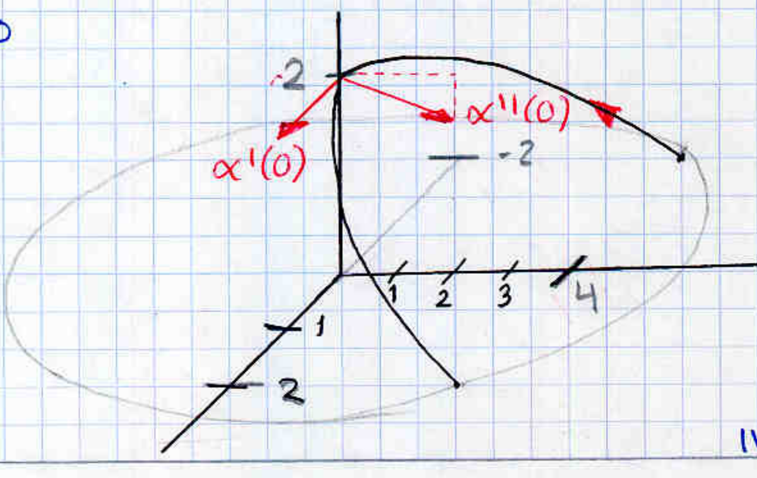
$$\alpha''(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = \left(-\frac{1}{3}\right) \dfrac{(1+3t^2)\left(\sqrt{4 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t^4}\right) - (t+t^3)\left(\frac{(-\frac{1}{3})(t+t^3)}{\sqrt{4 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t^4}}\right)}{4 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{6}t^4} \end{cases}$$

si $\alpha(t_0) = (0,0,2) \rightarrow t_0 = 0$

$\alpha(t_0) = (0,0,2)$

$\alpha'(t_0) = (1,0,0)$

$\alpha''(t_0) = (0,2,-\frac{1}{6})$



ejercicio: parametrizar la curva dada por

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$ y hallar su longitud

Hallar una parametrización mediante el parámetro longitud de arco

i) $2\cos t = x - 1 \rightarrow$
$2 \operatorname{sen} t = y \rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x = 2\cos t + 1 \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 3 \end{cases}}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\, du$$

$\|\alpha'(u)\|$

$$\alpha'(u) = \begin{cases} x = -2 \operatorname{sen} t \\ y = 2\cos t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\|\alpha'(u)\| = \sqrt{(2 \operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$$

$$s(t) = \int_0^t 2\, du$$

$$= [2u]_0^t$$

$\boxed{s(t) = 2t}$ $\boxed{L = s(2\pi) = 4\pi}$

$$t(s) = s/2$$

$$\boxed{\tilde{\alpha}(s) = \alpha(t(s)) = \begin{cases} x = 2\cos\left(\frac{s}{2}\right) + 1 \\ y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \\ z = 3 \end{cases}}$$

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se llama

- Función real de variable real: si $n = m = 1$
- Función real de variable vectorial: si $n > 1$ y $m = 1$
  ó CAMPO ESCALAR
- Función vectorial de variable real: si $n = 1$ y $m > 1$
- Función vectorial a valores vectoriales si $n > 1$ y $m > 1$
  ó CAMPO VECTORIAL

ejemplos
Campo Escalar: una función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que da la temperatura de un punto de la atmosfera
Campo Vectorial: una función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que da el vector de la velocidad del viento

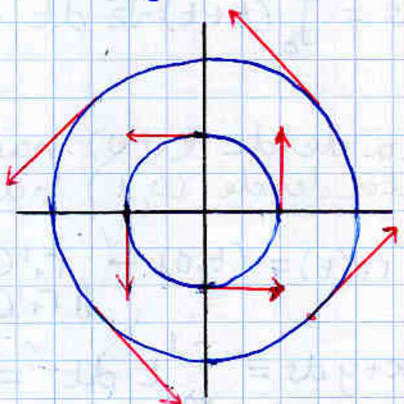
ejemplo:
Dibujar las curvas de nivel del campo vectorial plano $F(x,y) = (-y, x) = -y\,i + x\,j$ $\quad i = (1,0) = e_1$, $j = (0,1) = e_2$

Esto equivale a buscar curvas de nivel del campo escalar $\|F(x,y)\|$

$$\|\cdot\|: \operatorname{Im} F(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$$
$$F(x,y) \mapsto \|F(x,y)\|$$

i.e. $\|F(x,y)\| = c \iff \sqrt{(-y)^2 + (x)^2} = c$

$$\iff x^2 + y^2 = c^2$$



INTEGRALES CURVILÍNEAS

DEF: Sea un campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
f continua en $D \subseteq \mathbb{R}^2$
D contiene la curva regular C
C viene dada por $r(t) = (x(t), y(t))$ $a \le t \le b$
($r(t)$ es un camino)

se llama integral curvilínea de f sobre C desde $r(a)$ hasta $r(b)$ con respecto a la longitud de arco a:

$$\boxed{\int_C f(x,y)\, ds := \int_a^b f(x(t), y(t))\, \|r'(t)\|\, dt}$$

NOTA: si $f(x,y) = 1$

$$\int_C ds = \text{Long}(C) = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt$$

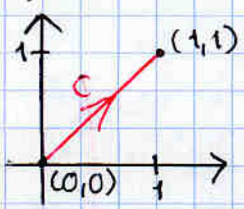
$$s = \int_a^t \|r'(u)\|\, du$$
$$\frac{ds}{dt} = \|r'(t)\|$$
$$ds = \|r'(t)\|\, dt$$

Propiedades:

La integral curvilínea se define como una integral definida, así sus propiedades son similares a las de aquellas.

ejemplo: Evaluar $\int_C (x+y)\, ds$ donde

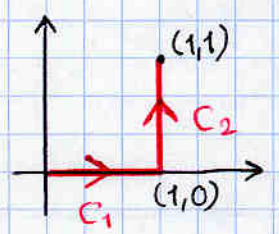
a) C es la recta q. va desde el origen hasta $(1,1)$



$C: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $\quad r(t) = (t,t) \to r'(t) = (1,1)$
$\|r'(t)\| = \sqrt{2}$

$$\int_C x+y\, ds = \int_0^1 (t+t)\sqrt{2}\, dt = \dots = \sqrt{2}$$

b) $C = C_1 \cup C_2$ $\quad C_1$ = recta desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$
C_2 = recta desde $(0,1)$ hasta $(1,1)$



$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad r_1(t) = (t,0) \to r_1'(t) = (1,0)$
$\|r_1'(t)\| = 1$

$$\int_{C_1} x+y\, ds = \int_0^1 t\, dt = \dots = 1/2$$

$C_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$ $\quad r_2(t) = (1,t) \to r_2'(t) = (0,1)$
$\|r_2'(t)\| = 1$

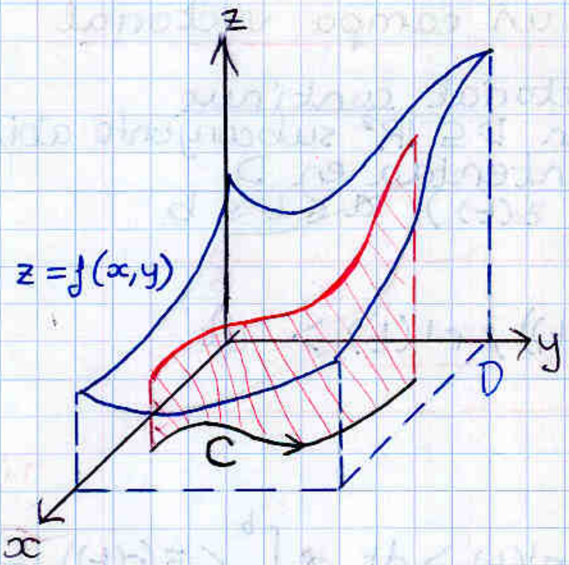
$$\int_{C_2} x+y\, ds = \int_0^1 1+t\, dt = \dots = 3/2$$

$$\boxed{\int_C x+y\, ds = \int_{C_1} x+y\, ds + \int_{C_2} x+y\, ds = 2}$$

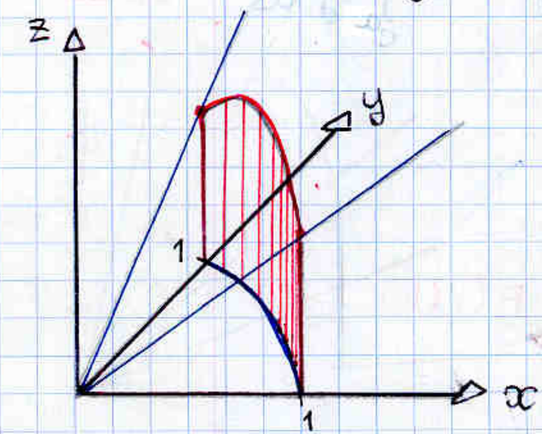
Interpretación geométrica

Sea $f(x,y) \geq 0$ continua en D
consideramos gráfica de $z = f(x,y)$
consideramos curva plana C recorrida sólo 1 vez

$\int f(x,y)\,ds$ representa el area de la parte del cilindro con directriz C y generatrices paralelas al eje z que se encuentra entre el plano XY y $z = f(x,y)$



ejemplo: Calcular el area de la superficie lateral de la figura sobre la curva C : $x^2 + y^2 = 1$ desde (1,0) hasta (0,1) del plano XY y bajo la superficie $z = f(x,y) = x + y$



$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$\int_C f\,ds = \int_0^{\pi/2} \cos t + \operatorname{sen} t \,dt = \ldots = 2$$

Aplicaciones:
- Trabajo
- circulación
- Masa de un cable
- momento de inercia

Integral curvilínea de un campo escalar

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo escalar continuo
Sea C: curva del espacio derivable con continuidad dada por $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $a \leq t \leq b$

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(\underbrace{x(t), y(t), z(t)}_{r(t)}) \cdot \|\underline{r'(t)}\|\, dt}$$

Integral curvilínea de un campo vectorial

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo definido en $D \subseteq \mathbb{R}^3$ subconjunto abierto
Sea C curva regular contenida en D
$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $a \leq t \leq b$

$$\boxed{\int_C \langle F, dr \rangle = \int_a^b \langle F(\underline{r(t)}), \underline{r'(t)} \rangle\, dt}$$

NOTA:

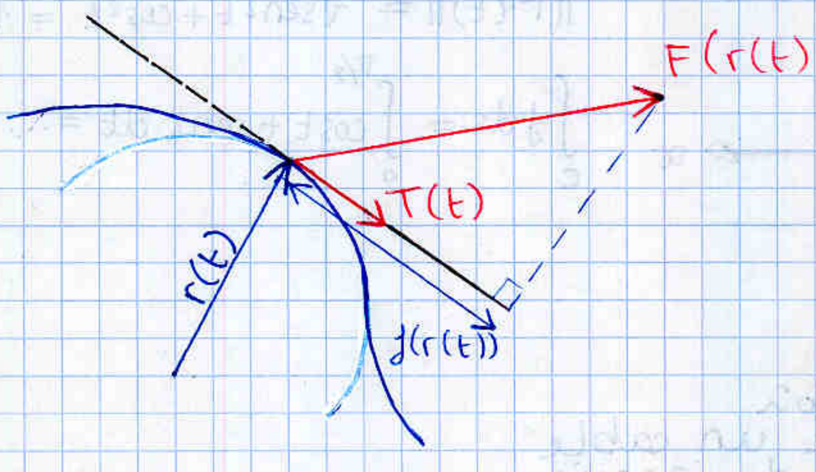
$$\int_C \langle F, dr \rangle = \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle\, dt = \int_a^b \underbrace{\langle F(r(t)), \overbrace{\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}}^{T(t) \text{ vector tangente}} \rangle}\, \|r'(t)\|\, dt$$

la integral curvilínea de un campo vectorial se puede expresar como integral curvilínea del campo escalar $f = \langle F(r(t)), T(t) \rangle$

$$= \int_a^b f \,\|r'(t)\|\, dt \quad f \rightarrow \text{campo escalar}$$

$$= \int_C f\, ds$$

$$f(r(t)) = \langle F(r(t)), \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \rangle$$



Propiedades

I. Linealidad

Sean F y G campos vectoriales
(relajando la continuidad)
- Definidos y acotados sobre curva regular a trozos C
- Existen las integrales curvilíneas de ambos sobre C

$$\exists \int_C \langle aF+bG, dr\rangle = a\int_C \langle F, dr\rangle + b\int_C \langle G, dr\rangle$$

II Aditividad respecto del camino

Sea $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ un camino regular a trozos ($C_1 \cup C_2$)
- $C_1: [a,c] \to \mathbb{R}^3$ regular
- $C_2: [c,b] \to \mathbb{R}^3$ regular

sea F campo vectorial definido y acotado sobre $\operatorname{Im} r = C$

$$\int_C \langle F, dr\rangle = \int_{C_1} \langle F, dr\rangle + \int_{C_2} \langle F, dr\rangle$$

Reparametrizaciones

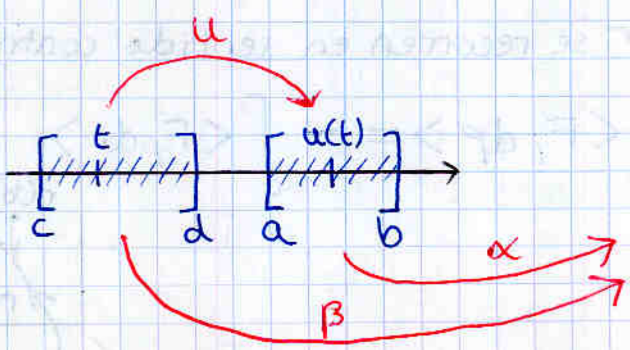
$$\left.\begin{array}{l}\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^3 \\ \beta: [c,d] \to \mathbb{R}^3\end{array}\right\}$$ dos caminos regulares a trozos

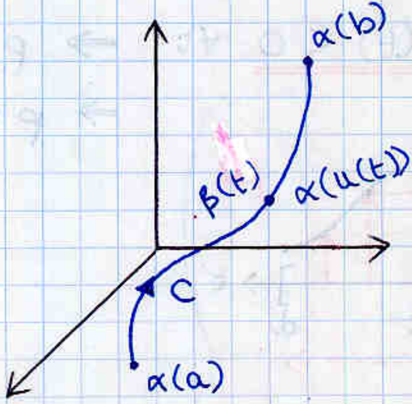
se dice que son CAMINOS EQUIVALENTES si existe

$u: [c,d] \to [a,b]$
- función sobreyectiva
- derivable
- $u'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [c,d]$

tal que

$$\alpha(u(t)) = \beta(t) \quad \forall t \in [c,d]$$ (tienen la misma curva asociada)





ejemplo

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi]$$
y
$$\beta(t) = (\cos t/2, \operatorname{sen} t/2), \quad t \in [0, 4\pi]$$

son EQUIVALENTES pues tomando $u(t) = t/2$ se tiene

$$\beta(t) = \alpha(u(t)) = \left(\cos \tfrac{t}{2}, \operatorname{sen} \tfrac{t}{2}\right) \quad \forall t \in [0, 4\pi]$$

derivando:

$$\beta'(t) = u'(t) \cdot \alpha'(u(t))$$

$$\| \beta'(t) \| = \| u'(t) \| \cdot \| \alpha'(u(t)) \|$$

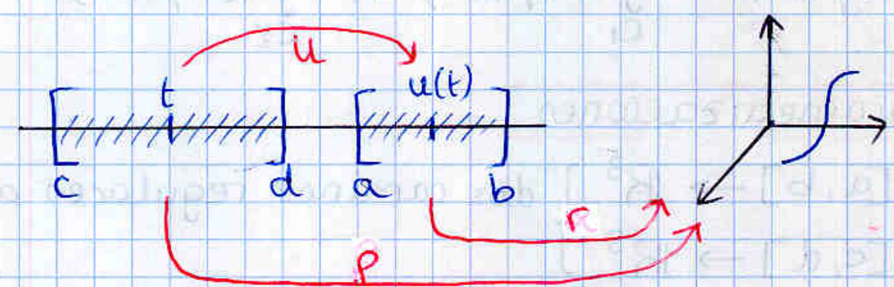
$$\underbrace{1/2}_{\text{rapidez recorriendo la curva con } \beta} = 1/2 \cdot \underbrace{1}_{\text{rapidez recorriendo la curva con } \alpha}$$

β recorre la misma curva pero con menos rapidez

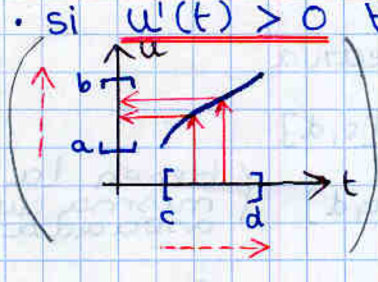
III. Cambio de parámetro

Sea F campo vectorial → definido y acotado sobre un camino regular a trozos r
→ $\int_C \langle F, dr \rangle$ existe

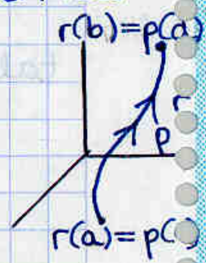
Sea $p : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$



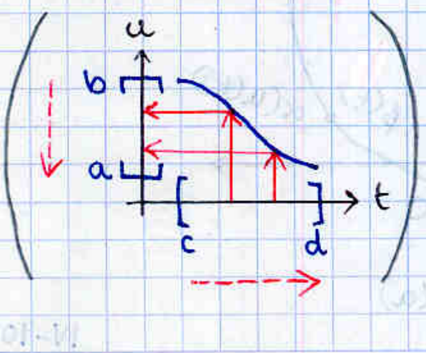
- si $u'(t) > 0 \ \forall t$ ⇒ p conserva la orientación
  ⇒ p y r se recorren en el mismo sentido



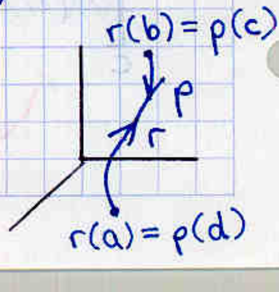
$$\int_C \langle F, dp \rangle = \int_C \langle F, dr \rangle$$



- si $u'(t) < 0 \ \forall t$ ⇒ p invierte la orientación
  ⇒ p y r se recorren en sentido contrario



$$\int_C \langle F, dp \rangle = - \int_C \langle F, dr \rangle$$



ejemplo: calcular $\int_C \langle F, dr \rangle$

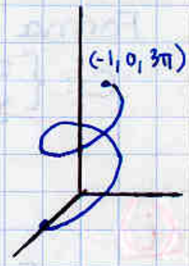
siendo $F(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y, \frac{1}{4}\right)$

y siendo C la curva dada por:

(a) $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \quad 0 \leq t \leq 3\pi$

$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$

$r(0) = (1,0,0)$
$r(3\pi) = (-1, 0, 3\pi)$



$$\int_C \langle F, dr \rangle = \int_0^{3\pi} \langle F(r(t)), r'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{3\pi} \left\langle \left(-\tfrac{1}{2}\cos t, -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t, \tfrac{1}{4}t\right), (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{3\pi} \left[\left(\tfrac{1}{2}\cos t \operatorname{sen} t\right) - \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t\right) + \tfrac{1}{4}t\right] dt$$

$$= \int_0^{3\pi} \tfrac{1}{4}t \, dt = \frac{3\pi}{4} \;//$$

(b) el segmento de recta que va desde $(1,0,0)$ hasta $(-1,0,3\pi)$

parametrizar una recta $r(t) = \vec{P} + \lambda \vec{v}$

$$r(t) = (1,0,0) + t\left[(-1,0,3\pi) - (1,0,0)\right]$$
$$= (1,0,0) + t(-2,0,3\pi)$$

$r(t) = (1-2t, 0, 3\pi t) \quad t \in [0,1]$

$r'(t) = (-2, 0, 3\pi)$

$$\int_C \langle F, dr \rangle = \int_0^1 \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \left(-\tfrac{1}{2}(1-2t), -\tfrac{1}{2}(0), \tfrac{1}{4}(3\pi t)\right), (-2, 0, 3\pi) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left(1 - 2t + \tfrac{3}{4}\pi\right) dt = \ldots = \frac{3}{4}\pi \;//$$

(c) el segmento de recta que va desde $(-1,0,3\pi)$ hasta $(1,0,0)$

$$\int_{-C} \langle F, dr \rangle = -\int_C \langle F, dr \rangle \overset{(b)}{=} -\frac{3\pi}{4}$$

ejemplo: Calcular $\int y\,dx + x^2\,dy$ donde

← nota: han dado el $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ya hecho

(a) C es el arco parabólico dado por $y = 4x - x^2$ de $(4,0)$ a $(1,3)$

Parametrizar el arco:

Forma fácil:

$$C: \cancel{\begin{cases} x = t \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad t \in [4,1]}$$

⚠ jamas !!

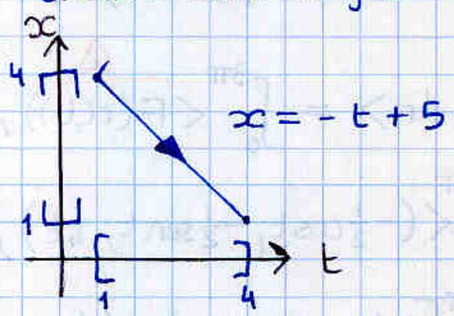
ⓘ

$$-C: \begin{cases} x = t \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad t \in [1,4]$$

tomamos la fácil

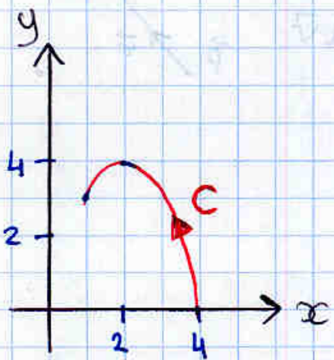
Forma 'matemática'

relación entre x y t



$$y = 4x - x^2 = 4(-t+5) - (-t+5)^2$$

$$C: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -t^2 + 6t - 5 \end{cases} \quad t \in [1,4]$$



$$\int_C y\,dx + x^2\,dy$$

$$= -\int_{-C} y\,dx + x^2\,dy$$

Propiedad

$$\int_{-C} = -\int_C \Big)\, x-1$$

$$-\int_{-C} = \int_C$$

$$\begin{cases} dx = dt \\ dy = (4-2t)\,dt \end{cases}$$

$$= -\int_1^4 (4t - t^2)\,dt + t^2(4-2t)\,dt$$

$$= -\int_1^4 \left[4t - t^2 + t^2(4-2t)\right] dt$$

$$= \dots = \frac{69}{2} \,//$$

(b) C es el segmento de recta que va desde $(4,0)$ hasta $(1,3)$.

$$r(t) = (4,0) + t\,((1,3) - (4,0))$$

$$r(t) = (4 - 3t,\ 3t), \quad t \in [0,1]$$

$$dx = -3\,dt$$
$$dy = 3\,dt$$

$$\int_C y\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 3t \cdot (-3\,dt) + (4-3t)^2 \cdot 3\,dt$$

$$= \dots = \frac{33}{2} \,//$$

CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS. INDEPENDENCIA DEL CAMINO.

Def: Conjunto Conexo

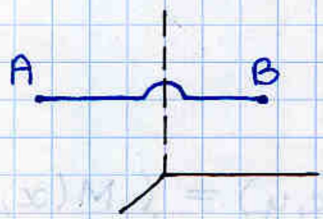
- un conjunto abierto D
- cualquier par de puntos puede unirse por un camino regular a trozos contenido en D.

D:


ES CONEXO

D:


NO ES CONEXO

D = $\mathbb{R}^3$ − eje z


es CONEXO

Def: Conjunto simplemente conexo

- un conjunto conexo donde además toda curva cerrada contenida en D se puede "deformar" hasta ser un punto. Todos los caminos en el proceso deben estar contenidos en D.

D:

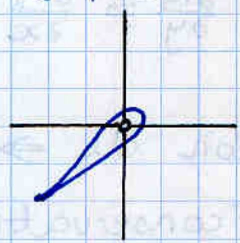

NO ES S.C.

D:


ES S.C.

D: $\mathbb{R}^3$ − eje z NO ES S.C.

D: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ NO ES S.C.



Def: Campo vectorial independiente del camino

- sea F campo vectorial
- F continuo
- En un conjunto conexo

se dice INDEPENDIENTE DEL CAMINO si para cualquier par de puntos A y B y cualquier camino regular a trozos desde A hasta B, el valor de la integral curvilínea es el mismo.

Def: campo vectorial conservativo

· sea F un campo vectorial
· en un abierto D

se llama conservativo si se le puede expresar como el gradiente de un campo escalar f:
- continuamente diferenciable
- se le llama FUNCIÓN POTENCIAL

$$\boxed{F = \nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Teorema

- Sea $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ campo vectorial
- M y N tienen derivadas parciales continuas
- definido en un SIMPLEMENTE conexo D

$$\boxed{F \text{ conservativo en } D \Longleftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

NOTA: Puede ocurrir que D sea conexo pero no simplemente conexo (ej típico $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$) y que F sea conservativo en D pero $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ por no ser D simplemente conexo

Demostración de ⇒

Supongamos F conservativo ⇒ ∃ función potencial

$$\nabla f = F$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (M, N) \qquad M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ejemplo: ¿Es $F(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy} + x)$ conservativo?

nos podemos permitir suponerlo

Hipótesis: · $D = \mathbb{R}^2$ = simplemente conexo ✓
· M y N tienen derivadas parciales continuas ✓

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= e^{xy} + yxe^{xy} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^{xy} + xye^{xy} + 1 \end{aligned}\right] \neq$$

F no es conservativo en $\mathbb{R}^2$

ejemplo: Demostrar que el campo vectorial $F(x,y) = (e^x \operatorname{sen} y - y,\ e^x \cos y - x - 2)$ es conservativo

Hipótesis: · $D = \mathbb{R}^2$ es S.C. ✓
· M y N tienen derivadas parciales continuas ✓

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y - 1 \\[2mm] \dfrac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y - 1\end{array}\right] = \Rightarrow \boxed{\text{F es conservativo en } \mathbb{R}^2}$$

Cálculo de la función potencial $f: \nabla f = F$

ej: $F(x,y) = (e^x \operatorname{sen} y - y,\ e^x \cos y - x - 2)$

$f: \nabla f = F$
i.e.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M = e^x \operatorname{sen} y - y & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = N = e^x \cos y - x - 2 & (2) \end{cases}$$

- Integrando (1) con respecto a x:
  $$f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - xy + \varphi(y) \quad (3)$$
- Derivando (3) con respecto a y:
  $$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y - x + \varphi'(y)$$
- comparando con (2)
  $$\varphi'(y) = -2 \Rightarrow \varphi(y) = -2y + C$$
- Reemplazando en (3)
  $$\boxed{f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - xy - 2y + C}$$

ej: $F(x,y,z) = (e^x \cos y,\ -e^x \operatorname{sen} y,\ 2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M = e^x \cos y & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = N = -e^x \operatorname{sen} y & (2) \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z} = P = 2 & (3) \end{cases}$$

- Integrando (1) con respecto a x
  (4) $f(x,y,z) = e^x \cos y + g(y,z)$
- Derivando f con respecto a y
  $\partial f/\partial y = -e^x \operatorname{sen} y + \partial g/\partial y$
- comparando con (2)
  $\partial g/\partial y = 0 \rightarrow g(y,z) = h(z)$
- Reemplazando en (4)
  $$f(x,y,z) = e^x \cos y + h(z)$$
- Derivando con respecto a z
  $$\frac{\partial f}{\partial z} = h'(z)$$
- Comparando con (3) $\quad h'(z) = 2 \rightarrow h(z) = 2z + C$

$$\boxed{f(x,y,z) = e^x \cos y + 2z + C}$$

Teorema

- sea f campo escalar
  - f diferenciable
  - $\underbrace{\nabla f}_{F}$ continuo en un conexo D

Entonces para dos puntos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ unidos por un camino regular a trozos situado en D.

$$\boxed{\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \langle \underbrace{\nabla f}_{F}, dr \rangle = f(\vec{b}) - f(\vec{a})}$$

NOTA: El teorema asegura que la integral curvilínea de un campo conservativo es independiente del camino
en cualquier conjunto conexo donde ∇f sea continuo

---

ejemplo: Calcular $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,2)} \langle F, dr \rangle$

siendo $F(x,y) = (e^x \operatorname{sen} y - y,\ e^x \cos y - x - 2)$

$$\begin{cases} M = e^x \operatorname{sen} y - y \\ N = e^x \cos y - x - 2 \end{cases}$$

Hipotesis:
- $\mathbb{R}^2$ conjunto conexo
- M y N derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow F \text{ es conservativo}$$

Hipotesis:
$\rightarrow$ $F = \nabla f$ continuo

por tanto

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} \langle F, dr \rangle = f(1,2) - f(0,0)$$

calculando f : $\nabla f = F$

(...) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - xy - 2y + C$

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} \langle F, dr \rangle = f(1,2) - f(0,0) = [e^1 \operatorname{sen} 2 - 2 - 4 + C] - [C]$$
$$= e \operatorname{sen} 2 - 6$$

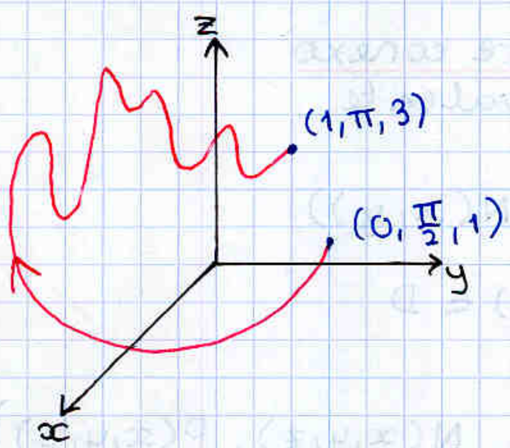
Teorema

Sea $F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$
↳ M, N y P derivadas parciales continuas
↳ en un simplemente conexo D

Entonces:

$$\text{F conservativo en D} \iff \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{array} \quad \forall (x,y,z) \in D$$

ejemplo:
Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y,z) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y, 2)$ para mover un objeto a través de la curva C de la figura.



Veamos si F es conservativo

Hipótesis:
- derivadas parciales cont.
- $\mathbb{R}^3$ es S.C.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x(-\operatorname{sen} y) = \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$$
$$\frac{\partial N}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ F es conservativo en $\mathbb{R}^3$

Por lo tanto existe campo escalar $f: \nabla f = F$

(calcular...) $f(x,y,z) = (e^x \cos y + 2z + c)$

Como F es conservativo, es independiente del camino

$$\int_{(0,\frac{\pi}{2},1)}^{(1,\pi,3)} \langle F, dr \rangle = f(1,\pi,3) - f(0,\tfrac{\pi}{2},1)$$
$$= 4 - e$$

Teorema (condiciones equivalentes para que un campo vectorial sea conservativo)

sea F
- un campo vectorial
- con derivadas parciales continuas
- en una región conexa D

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) F es un campo vectorial conservativo en D

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \langle F, dr \rangle = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \langle \nabla f, dr \rangle = f(\bar{b}) - f(\bar{a})$$

(b) La integral curvilinea de F es independiente del camino

(c) La integral curvilinea de F alrededor de todo camino cerrado y regular a trozos en D, es cero.

Si, además D es simplemente conexo hay otra condición equivalente

(d_1) $F(x,y) = (M(x,y),\ N(x,y))$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \forall (x,y) \in D$$

(d_2) $F(x,y,z) = (M(x,y,z),\ N(x,y,z),\ P(x,y,z))$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \forall (x,y,z) \in D$$

$$\text{rot} F = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z},\ \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

(d_{2b}) $\text{rot}(F) = 0$

NOTA: Los $\boxed{\text{únicos}}$ teoremas que exigen una región D simplemente conexa son (d_1) y (d_2) (derivadas cruzadas)

y el Tª de Green, que vemos ahora

Teorema de Green

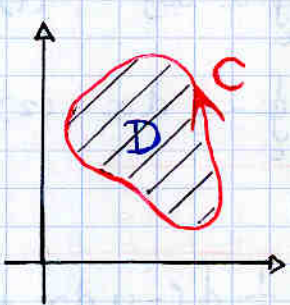
sea D - región simplemente conexa en $\mathbb{R}^2$
- acotada por una curva C
  - simple
  - acotada
  - regular a trozos
  - orientada positivamente (sentido antihorario)
  - parametrizada por r

sea $F(x,y) = ((M(x,y), N(x,y))$ campo vectorial
- M y N tienen derivadas parciales continuas en D

entonces:

$$\boxed{\oint_C \langle F, dr \rangle = \oint (M\,dx + N\,dy) = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)}_{\text{¡la leche!}} dA}$$

$dA \to dx\,dy$ (ó $dy\,dx$)

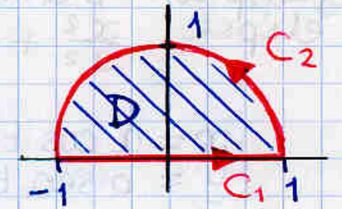


¡la leche!
Esto es el rotacional de $\vec{F} = (M, N, 0)$

en realidad el Tª Green es un caso particular del Tª de Stokes

ejemplo: Comprobar el Tª de Green para el campo $f(x,y) = (-y, x)$ usando la curva $C = C_1 \cup C_2$

Se cumplen las hipótesis.



$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $t \in [-1, 1]$, $C_2: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$

$dx = dt$ $\qquad dx = -\operatorname{sen} t\, dt$
$dy = 0$ $\qquad dy = \cos t\, dt$

$$\oint_C \langle F, dr \rangle = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{-1}^{1} (\overbrace{-0}^{f(x(t),y(t))}\,dt + t \cdot 0\,dt) + \int_0^{\pi} (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t\,dt) + \cos t(\cos t\,dt)$$
$$= \int_0^{\pi} dt = \pi$$

Por otro lado (Tª Green)

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D 2\,dA = (\text{polares}) = \int_0^{\pi} \int_0^{1} 2\,\underset{\text{coef. polar}}{r}\,dr\,d\theta$$
$$= \left[\int_0^{\pi} d\theta \right] \left[\int_0^{1} 2r\,dr \right] = \pi$$

Cálculo del area como integral curvilinea

Sea D una region
- plana
- simplemente conexa
- acotada por curva C – simple, cerrada, regular a trozos, orientada positivamente

Sabemos que:

$$\iint_D 1\, dA = \text{Área}(D)$$

si elegimos F adecuadamente tal que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$$y \quad \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_C \langle F, dr \rangle = \boxed{\text{Área}(D) = \oint M dx + N dy}$$

Elijamos adecuadamente F tal que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$$F(x,y) = (0, x) \rightarrow \boxed{A(D) = \oint_C x\, dy} \quad (1)$$

$$F(x,y) = (-y, 0) \rightarrow \boxed{A(D) = \oint_C -y\, dx} \quad (2)$$

$\frac{1}{2}((1)+(2))$

$$\boxed{A(D) = \frac{1}{2} \oint (-y\, dx + x\, dy)}$$

ejemplo: Demostrar que el area encerrada por una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ enciarra un área πab

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$dx = -a \operatorname{sen} t\, dt$
$dy = b \cos t\, dt$

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_C -y\, dx + x\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t\, dt) + (a \cos t)(b \cos t\, dt)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab\, dt$$

$$= ab\pi \checkmark$$

Análisis Vectorial

Tema 5:

Superficies e integrales de superficies.

TEMA 5 - SUPERFICIES E INTEGRALES DE SUPERFICIE

Representaciones de una superficie

- Representación Implícita : $F(x,y,z)=0$
- Representación Explícita : $z=f(x,y)$

ej. esfera

$x^2+y^2+z^2-a^2=0$

$z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

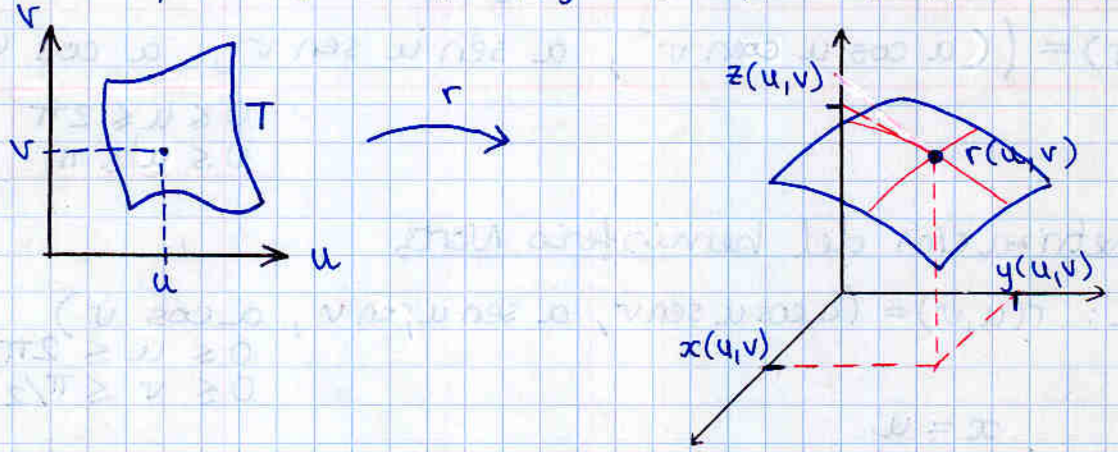
+ hemisferio norte /
− hemisferio sur

- Ecuaciones paramétricas:

$$S: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

- Ecuación vectorial

$$r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

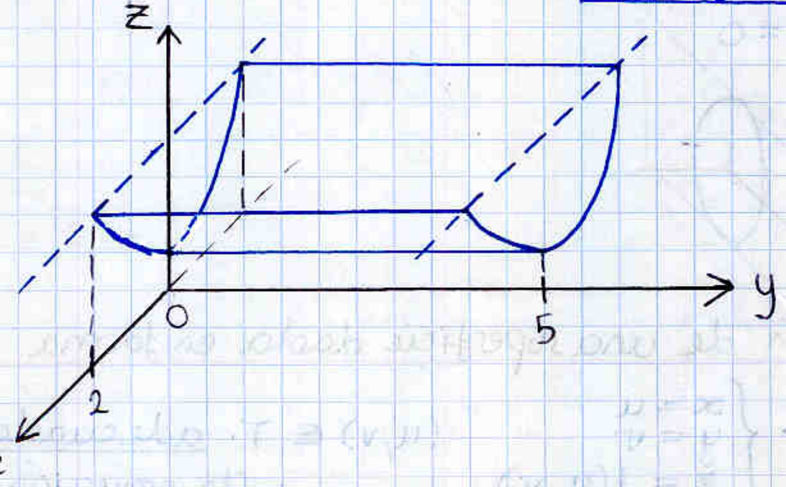


tanto a la SUPERFICIE PARAMETRIZADA (función r) como a su imagen $r(T) :=$ SUPERFICIE se las llamará de ahora en adelante indistintamente.

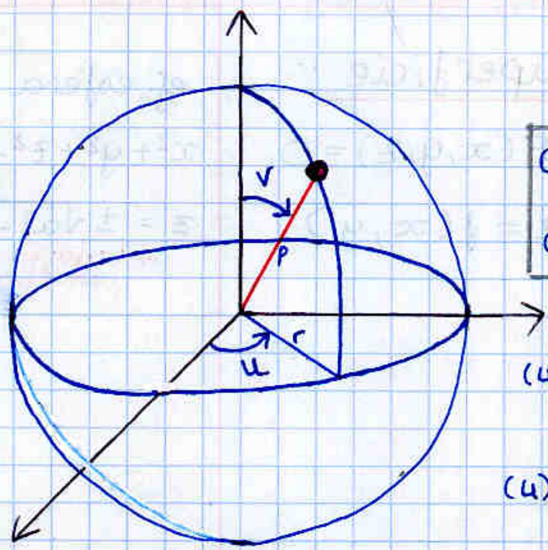
ejemplo: La ec. vectorial $r(u,v) = (u, v, u^2+1)$ $\quad -2 \leq u \leq 2$, $\ 0 \leq v \leq 5$

$$\begin{cases} x = u & u \in [-2,2] \\ y = v & v \in [0,5] \\ z = u^2+1 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} z = x^2+1 \\ x \in [-2,2] \\ y \in [0,5] \end{array}}$$

CILINDRO PARABOLICO



Parametrización de una esfera



es sencillo utilizando coordenadas esféricas

$$\boxed{\begin{matrix} (1)\ \cos u = \frac{x}{r} & \cos v = \frac{z}{\rho}\ (2) \\ (3)\ \operatorname{sen} u = \frac{y}{r} & \operatorname{sen} v = \frac{r}{\rho}\ (4) \end{matrix}}$$

(1) $x = r\cos u$

(4)→ $\underline{x = \rho \cos u \operatorname{sen} v}$

(3) $y = r \operatorname{sen} u$

(4)→ $\underline{y = \rho \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}$

(2) $\underline{z = \rho \cos v}$

se puede tambien ver graficamente

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$\boxed{r(u,v) = (a \cos u \operatorname{sen} v,\ a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ a \cos v)}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le \pi \end{matrix}}$$

Parametrización del hemisferio Norte

1ª forma: $r(u,v) = (a \cos u \operatorname{sen} v,\ a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ a\cos v)$
$0 \le u \le 2\pi$
$0 \le v \le \pi/2$

2ª forma:
$x = u$
$y = v$
$z = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$ $\quad (u,v) \in T: u^2 + v^2 \le a^2$

Notemos que fijando $v = v_0$, $r(u, v_0)$ describe circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 v_0$

Si fijamos $u = u_0$ se obtienen circunferencias verticales

$u_0 = 0$

Parametrización de una superficie dada en forma explícita

$$z = f(x,y) \rightsquigarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in T \ \underline{\text{adecuada}}$$

(la proyección sobre XY)

Superficie Simple

Sea $r: T \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie S

si r es <u>inyectiva</u>, la superficie se dice <u>simple</u>

i.e. S no se corta a sí misma, a cada (u,v) le corresponde <u>distintos</u> $r(u,v)$

Producto Vectorial Fundamental

Sea $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

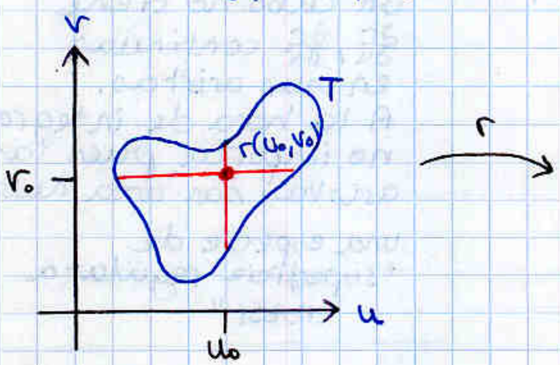
Se llama PRODUCTO VECTORIAL FUNDAMENTAL de la representación r a:

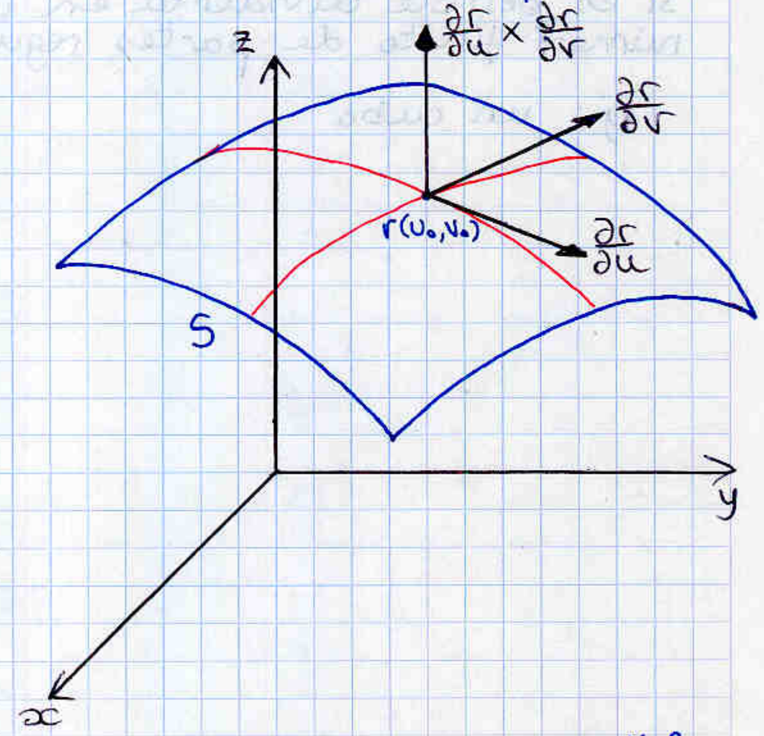
$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}$$

Interpretación geométrica

- Supongamos $v = v_0$, <u>$r(u, v_0)$</u> define una CURVA C_1 llamada <u>u-curva</u> (depende de un sólo parámetro u)
  - El vector tangente a C_1 en $r(u_0, v_0)$ está dado por
  $$\frac{\partial r}{\partial u}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(v_0,v_0), \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$$

- Análogamente, <u>$r(u_0, v)$</u> define una <u>v-curva</u> sobre S
  - El vector tangente a C_2 en $r(u_0,v_0)$ está dado por
  $$\frac{\partial r}{\partial v}(u_0,v_0) = \dots$$





Superficie Regular

Una superficie paramétrica $r(u,v)$ puede degenerar

- en un punto ej $r(u,v) = (a,b,c)$
- en una curva ej. $r(u,v) = (u+v, (u+v)^2, (u+v)^3)$ $\begin{matrix} u\in[0,1] \\ v\in[0,1]\end{matrix}$

$$r(\alpha) \equiv (\alpha, \alpha^2, \alpha^3) \quad \alpha \in [0,2]$$

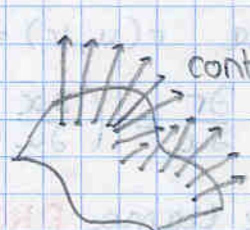
Para evitar estas situaciones definimos la regularidad

Def: Punto regular

un punto P_0 es REGULAR si

a) $\exists \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$

b) $\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$ son continuas en P_0



c) $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq \overline{0}$ en P_0

en otro caso se llama punto singular

Def: Superficie Regular

Si todos los puntos de S son regulares

(i.e. carece de puntos angulos y cimas, tiene plano tangente en todos sus puntos)

Def: Superficie Regular a Trozos

Si es posible dividirla en un número finito de partes regulares

ej: un cubo

NOTA:

un cubo no tiene $\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$ continuas en sus aristas, A la hora de integrar no importa, pues las aristas son area nula.

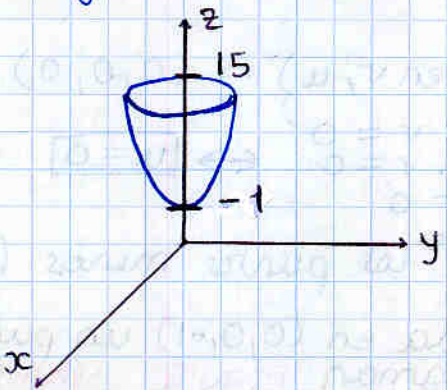
una especie de "superficie regular a trozos" ejemplo: sea la sup $r(u,v) = (u\cos v,\ u \operatorname{sen} v,\ u^2 - 1)$ $\quad 0 \le u \le 4$, $\ 0 \le v \le 2\pi$

a) Representar gráficamente

$$\begin{cases} x = u\cos v & u \in [0,4] \\ y = u \operatorname{sen} v & v \in [0, 2\pi] \\ z = u^2 - 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = u^2 = z + 1 \rightarrow \boxed{z = x^2 + y^2 - 1 \quad \begin{matrix} -1 \le z \le 15 \\ x^2 + y^2 \le 16 \end{matrix}}$$

Parametrización de un paraboloide



b) Dar la ecuación y dibujar la v-curva correspondiente a u=0 y la u curva correspondiente a $v = \pi/4$

$u = 2$

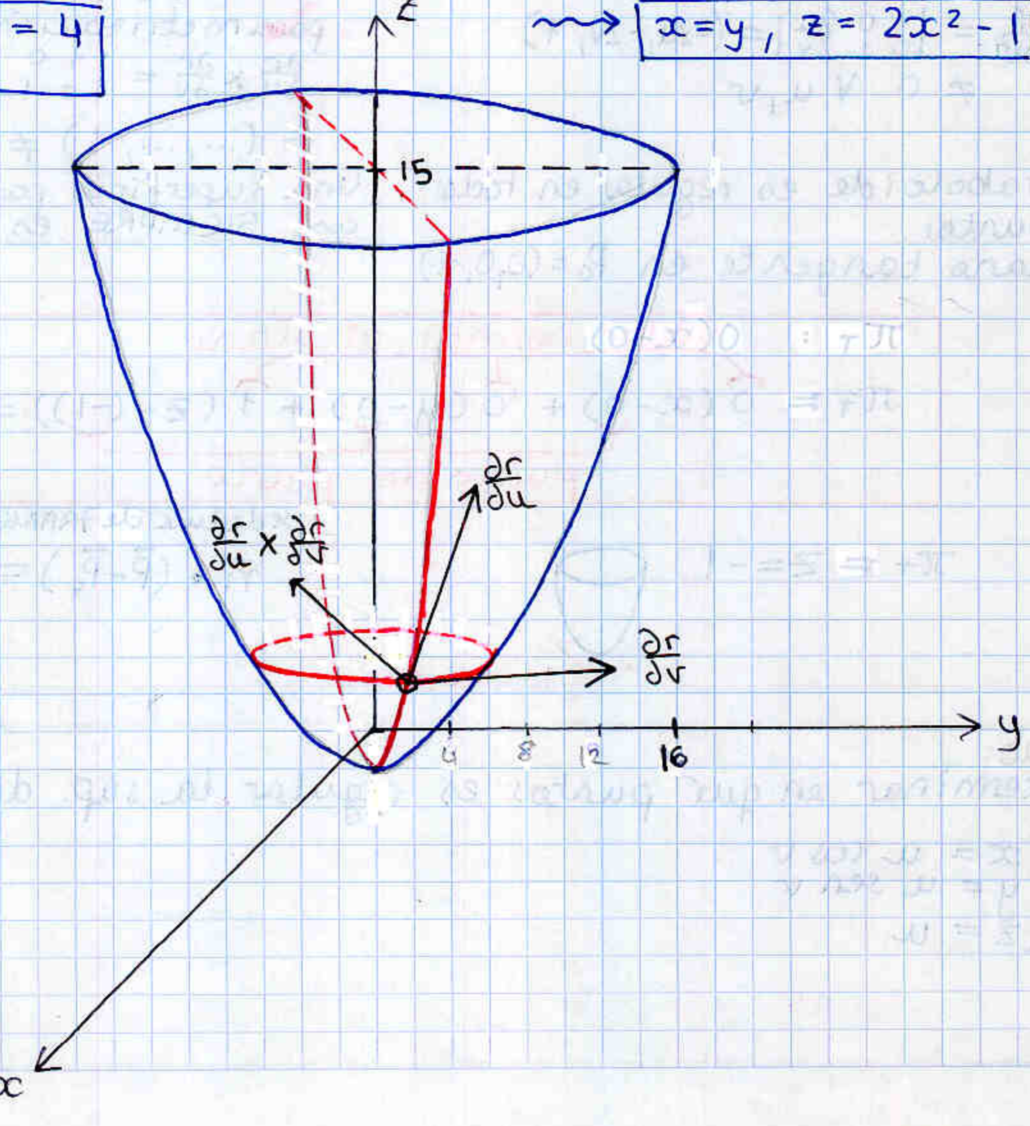
$r(2,v) = (2\cos v, 2 \operatorname{sen} v, 3)$

$$\boxed{\begin{matrix} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{matrix}}$$

$v = \pi/4$

$r(u, \pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}u, \frac{\sqrt{2}}{2}u, u^2 - 1\right)$

$$\rightsquigarrow \boxed{x = y,\ z = 2x^2 - 1}$$



(c) obtener $\frac{\partial r}{\partial u}$, $\frac{\partial r}{\partial v}$, $\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}$ en $u=2$, $v=\pi/4$ y representarlos

$$r(2,\pi/4)=(\sqrt{2},\sqrt{2},3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}=(\cos v,\ \operatorname{sen} v,\ 2u) \qquad \frac{\partial r}{\partial v}=(-u\operatorname{sen} v,\ u\cos v,\ 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\dots=(-4\sqrt{2},-4\sqrt{2},2)$$

(d) ¿Es S sup regular?

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\dots=(-2u^2\cos v,\ -2u^2\operatorname{sen} v,\ u)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2\cos v=0\\ u^2\operatorname{sen} v=0\\ u=0\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{u=0}$$

la superficie es regular en todos los puntos menos $(0,0,-1)$

(e) Si bien esta parametrización da en $(0,0,-1)$ un punto singular, algunos autores lo llaman PUNTO SINGULAR FALSO pues en ese punto $\exists$ plano tangente

cambiemos de parametrización

$$r(u,v)=(u,v,u^2+v^2-1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\begin{vmatrix}1&0&2u\\0&1&2v\end{vmatrix}=(-2u,-2v,1)$$

$$\neq 0 \quad \forall u,v$$

NOTA:
si se tiene $z=f(x,y)$ y se hace $\begin{cases}x=u\\y=v\\z=f(u,v)\end{cases}$ está parametrización tiene

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\begin{vmatrix}1&0&\dots\\0&1&\dots\end{vmatrix}=(\dots,\dots,1)\neq\vec{0}$$

Una superficie parametrizada así SIEMPRE es regular.

El paraboloide es regular en todos los puntos.
El plano tangente en $P_0=(0,0,-1)$ es:

vector normal al plano

$$\pi_T:\ 0(x-0)+0(y-0)+1(z-(-1))=0$$

punto del plano

se deduce CLARAMENTE de
$$\vec{n}\bullet(\vec{P}-\vec{P}_0)=0$$

$$\pi_T:\ z=-1$$

ejercicio:
Determinar en qué puntos es regular la sup. dada por

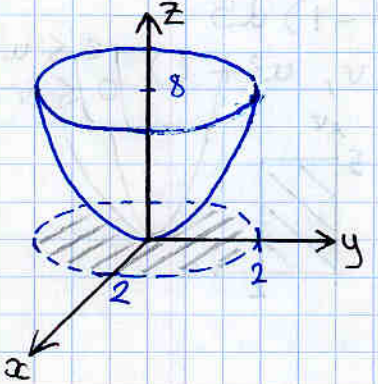
$$\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\operatorname{sen} v\\ z=u\end{cases}$$

Area de una superficie

Sea una superficie parametrizada regular a trozos.
El AREA de la superficie viene dada por:

$$\boxed{A(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\, dv}$$

ejemplo: Determinar el area del paraboloide $z = 2(x^2+y^2)$ debajo del plano $z = 8$



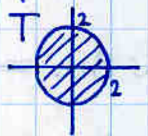
$$\begin{cases} z = 2(x^2+y^2) \\ z = 8 \end{cases} \qquad x^2+y^2 = 4$$

$$r(u,v) = (u, v, 2(u^2+v^2))$$
$$T: \; u^2+v^2 \leq 4$$

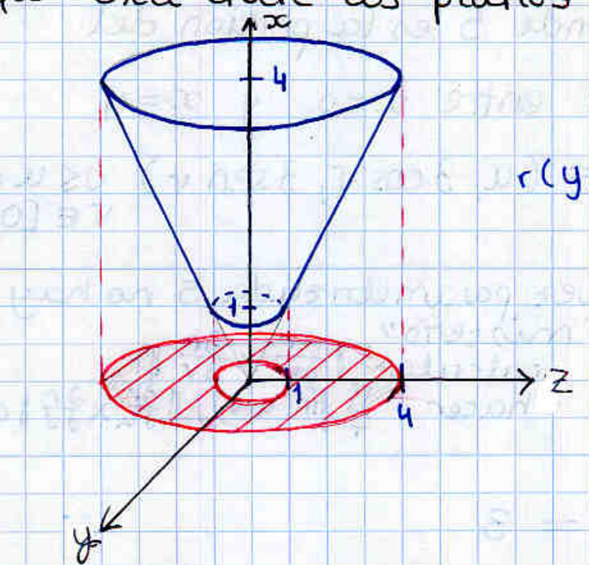
$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \dots = (-4u, -4v, 1) \neq \vec{0}$$
(regular)

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = \sqrt{16(u^2+v^2)+1}$$

$$A(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\, dv = (\text{polares}) = \frac{\pi}{24}(65^{3/2} - 1)$$



ejercicio: Hallar el area de la sup cónica $x^2 = y^2 + z^2$ que está entre los planos $x=1$ y $x=4$



$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2+z^2} \\ x = 1, \quad x = 4 \end{cases}$$

$$r(y,z) = (\sqrt{y^2+z^2}, y, z) \quad y, z \in T$$

$$T: \; 1^2 \leq y^2+z^2 \leq 4^2$$

Integral de superficie de un campo escalar

S : superficie regular $r(u,v)$ $\quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ acotado sobre S

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_T f(r(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv}$$

todo igual que integral curvilínea pero una dimensión más.
y $\|r'(t)\|$ equivale a $\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|$

NOTA: Si $f(x,y,z) = 1$

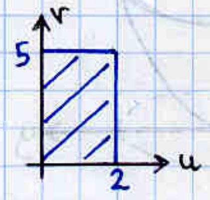
$$\iint_S dS = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv = A(S)$$

ejemplo: Calcula $I = \iint_S (z - x^2 + xy^2 - 1)\,dS$

donde S es la sup: $r(u,v) = (u, v, u^2+1)$ $\quad 0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 5$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \left| \quad \right| = (-2u, 0, 1)$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = \sqrt{4u^2+1}$$



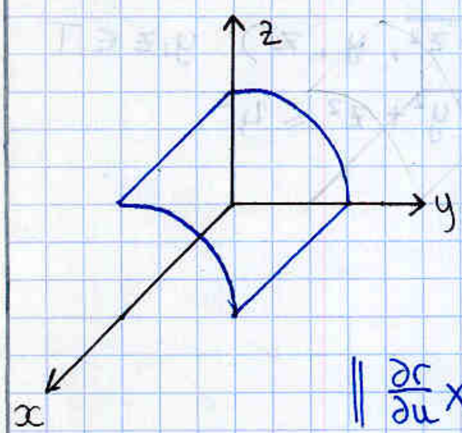
$$I = \iint_T f(r(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^5 [u^2 + 1 - u^2 + uv^2 - 1] \cdot \sqrt{4u^2+1}\,dv\,du$$

$$= \int_0^2 \int_0^5 v^2 u \sqrt{4u^2+1}\,dv\,du = \left[\int_0^5 v^2\,dv\right]\left[\int_0^2 u\sqrt{4u^2+1}\,du\right]$$

$$= \ldots = \frac{125}{36}(17\sqrt{17} - 1)$$

ejemplo 2:
calcular $\iint_S (x+z)\,dS$, donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ del 1er oct. entre $x=0$ y $x=4$



$r(u,v) = (u, 3\cos v, 3\,\text{sen}\,v)$ $\quad 0 \leq u \leq 4$, $v \in [0, 2\pi)$

una vez parametrizada S no hay más "misterio"
- calcular $\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|$
- hacer $\iint_T f(r(u,v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = \ldots = 3$$

$$\iint_S (x+z)\,dS = \int_0^4 \int_0^{\pi/2} (u + 3\,\text{sen}\,v) \cdot 3\,dv\,du = \ldots = 12\pi + 36$$

Orientación de una superficie

ej: orientable

ej: no orientable

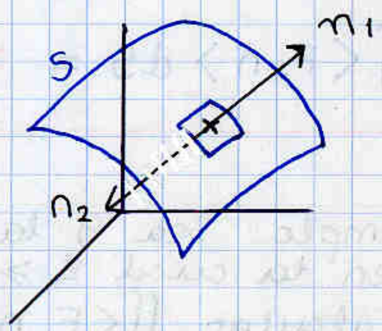
· Definición: Superficie orientada

Posee dos lados: LADO EXTERIOR – POSITIVO
LADO INTERIOR – NEGATIVO

· Vectores normales unitarios

Sea S superficie regular orientada
En cada punto existen dos vectores normales n_1 y n_2
$n_2 = -n_1$
Cada uno de estos vectores se asocia con un lado de la superficie y varía de manera continua

$$\boxed{n_1 = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|} \qquad n_2 = -n_1}$$



ejemplo: Hallar algunos vectores unitarios normales a la sup S: $z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ que apuntan hacia el exterior

$r(x,y) = (x, y, f(x,y))$, $(x,y) \in T = \text{proy } S$

$$N = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \partial f/\partial x \\ 0 & 1 & \partial f/\partial y \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \neq 0 \leftarrow \text{Caso general } \forall S: z = f(x,y)$$

$$\frac{N}{\|N\|} = \frac{\left(\pm \frac{\partial f}{\partial x}, \pm \frac{\partial f}{\partial y}, \mp 1\right)}{\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 + 1^2}}$$

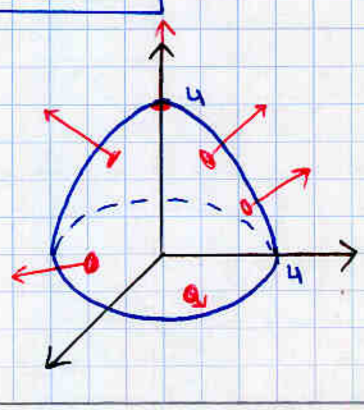
Recuerda: Cualquier sup tipo $z = f(x,y)$ es regular

en nuestro ejemplo:

$$\frac{N}{\|N\|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}$$

para elegir que apunte hacia fuera queremos el +1

en $(0,0,4) \rightarrow n = (0,0,1)$
en $(2,0,0) \rightarrow n = (4/\sqrt{17}, 0, 1/\sqrt{17})$



Integral de superficie de un campo vectorial

- sea sup. S: $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
- sea $n = n(u,v)$ vectores unitarios normales a S
- sea $F(x,y,z)$ campo vectorial definido sobre S

Se llama int. de sup. de F sobre S a:

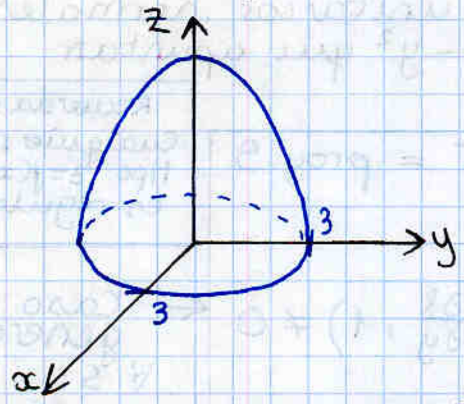
$$\boxed{\iint_S \langle F, n\rangle \, dS := \pm \iint_T \langle F(r(u,v)), n(u,v)\rangle \cdot \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\, dv}$$

ya que $n = \dfrac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|}$ podemos cancelar $\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|$ con el de fuera

$$\boxed{\iint_S \langle F, n\rangle \, dS = \pm \iint_T \left\langle F(r(u,v)), \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle du, dv}$$

ejemplo: Sea S la parte de la gráfica de $z = 9 - x^2 - y^2$ en la cual $z \geq 0$ y sea $F(x,y,z) = (3x, 3y, z)$

Calcular $\iint_S \langle F, n\rangle \, dS$



$r(u,v) = (u, v, 9 - u^2 - v^2)$ $\quad u^2 + v^2 \leq 9$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \ldots = (2u, 2v, 1)$$

⚠ no hace falta normalizar

$$\iint_S \langle F, n\rangle dS = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-u^2}}^{\sqrt{9-u^2}} \langle (3u, 3v, 9-u^2-v^2), (2u, 2v, 1)\rangle \, dv\, du$$

$$= \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-u^2}}^{\sqrt{9-u^2}} 5(u^2+v^2) + 9 \;\, dv\, du$$

$$= (\text{polares}) = \frac{567\pi}{2}$$

Flujo de un campo F a traves de una superficie S

$$\iint_S \langle F, n \rangle \, dS$$

Representa el volumen de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo.

ejercicio

Calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la mitad superior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $a>0$

$r(u,v) = (u, v, \sqrt{a^2-u^2-v^2})$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\right) \times \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -u/\sqrt{a^2-u^2-v^2} \\ 0 & 1 & -v/\sqrt{a^2-u^2-v^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, \frac{+v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, 1\right)$$

$$\iint_S \langle F,n\rangle \, dS = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-u^2}}^{\sqrt{a^2-u^2}} \left\langle (u,v,\sqrt{a^2-u^2-v^2}), \left(\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}, 1\right)\right\rangle dv\,du$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-u^2}}^{\sqrt{a^2-u^2}} \frac{u^2+v^2+(a^2-u^2-v^2)}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \, dv\,du = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-u^2}}^{\sqrt{a^2-u^2}} \frac{a^2}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \, dv\,du$$

$$= (\text{polares}) = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{a^2 \cdot r}{\sqrt{a^2-r^2}} \, dr\,d\theta = a^2 \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} dr\,d\theta\right]$$

$$= 2\pi a^2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} dr\,d\theta = 2\pi a^2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a-\varepsilon}$$

$$= 2\pi a^2 \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\sqrt{(a^2-(a-\varepsilon)^2} + \sqrt{a^2}\right] = 2\pi a^2 \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\sqrt{a^2} - \sqrt{2\varepsilon a - \varepsilon^2}\right)$$

$-a^2+2\varepsilon a-\varepsilon^2$

$$= 2\pi a^3$$

DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

· Operador Nabla

Utilizaremos el operador vectorial ∇ definido por:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Vector gradiente

f campo escalar con todas las derivadas necesarias

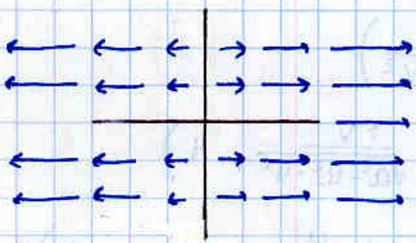
Vector gradiente: $\boxed{\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$

Divergencia

Divergencia del campo vectorial $F = (M, N, P)$

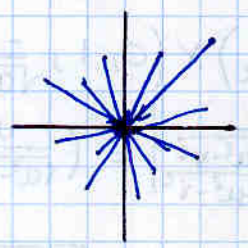
$$\boxed{\operatorname{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}} \quad \text{escalar}$$

(a) $F(x,y) = (x,0)$



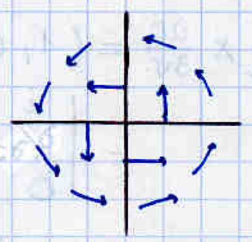
$\operatorname{div}(F) = 1 > 0$ (fuentes)

(b) $F(x,y) = (-x,-y)$



$\operatorname{div}(F) = -2 < 0$ (sumideros)

(c) $F(x,y) = (-y,x)$



$\operatorname{div}(F) = 0$ (solenoidal)

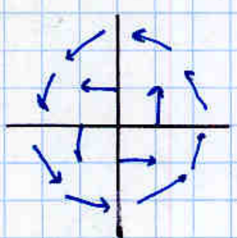
Rotacional

Rotacional del campo vectorial $F = (M,N,P)$

$$\boxed{\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}$$

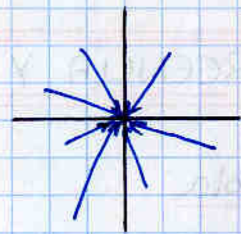
F es conservativo $\Longleftrightarrow \operatorname{rot}(F) = 0$

(a) $F(x,y) = (-y,x)$



$\operatorname{rot}(F) = (0,0,2) \neq \vec{0}$

(b) $F(x,y) = (-x,-y)$



$\operatorname{rot}(F) = (0,0,0)$ (irrotacional)

Operador de Laplace

$$\boxed{\Delta f \text{ ó } \nabla^2 f = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \right\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Identidades básicas del Análisis Vectorial

- "Linealidades"

1. $\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$
2. $\operatorname{div}(aF + bG) = a \operatorname{div}(F) + b \operatorname{div}(G)$
3. $\operatorname{rot}(aF + bG) = a \operatorname{rot}(F) + b \operatorname{rot}(G)$

- Gradiente de composición de funciones

4. $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$
5. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

- Divergencia de composición de funciones

6. $\boxed{\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div}(F) + \langle F, \nabla f\rangle}$
7. $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot}(F)\rangle - \langle F, \operatorname{rot}(G)\rangle$

- Rotacional de composición de funciones

8. $\boxed{\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot}(F) + \nabla(f) \times F}$

- Iguales a cero

9. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$
10. $\operatorname{rot}(\nabla f) = \vec{0}$
11. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

- Divergencia con composición de funciones y gradientes

12. $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

- Laplaciano

13. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$
14. $\nabla^2(f) = \operatorname{div}(\nabla f)$

Demostración de $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}(F) + \langle F, \nabla f \rangle$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(fF) \\
&= \operatorname{div}(f(M,N,P)) \\
&= \operatorname{div}(fM, fN, fP) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(fM) + \frac{\partial}{\partial y}(fN) + \frac{\partial}{\partial z}(fP) \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x}M + f\frac{\partial M}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial y}N + f\frac{\partial N}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial z}P + \frac{\partial P}{\partial z}f\right] \\
&= f\left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right] + \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), (M,N,P) \right\rangle \\
&= f\operatorname{div}(F) + \langle \nabla f, F \rangle
\end{aligned}$$

Demostración $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

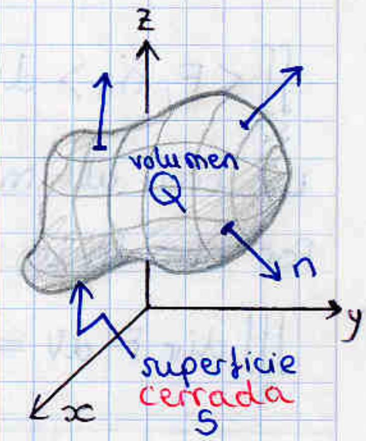
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 N}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial y}$$

si las derivadas 2^{as} continua, T^a Schwartz $\frac{\partial}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$

$$= 0$$

Teorema de Gauss-Ostrogradski o Teorema de la divergencia

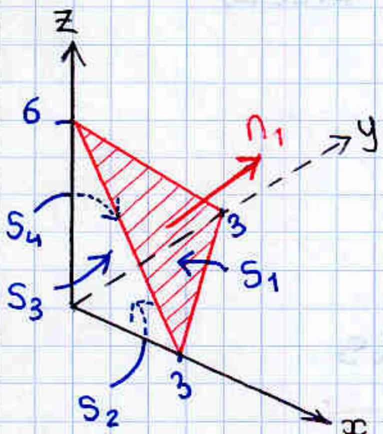


Hipotesis:
- sea Q una región sólida de $\mathbb{R}^3$
  - ↳ acotada por una sup cerrada S
    - ↳ S orientada por vectores normales unitarios dirigidos hacia el exterior de Q.
- Sea F campo vectorial con derivadas parciales de sus componentes continuas

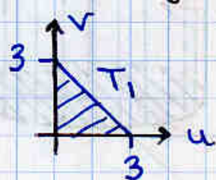
Entonces:

$$\boxed{\iint_S \langle F, n\rangle \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV}$$

ejemplo: Comprobar que se verifica el T. div para $F(x,y,z) = (x, y^2, z)$ siendo Q la región sólida acotada por los planos coordenados y el plano de ecuación $2x + 2y + z = 6$



$S_1: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 6-2u-2v \end{cases}$

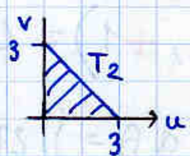


$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \overset{(\text{obvio})}{=} (2,2,1)$ exterior

$$\iint_{S_1} \langle F, n_1\rangle \, dS = \int_0^3 \int_0^{3-u} \langle (u, v^2, 6-2u-2v), (2,2,1)\rangle \, dv \, du$$

$$= \dots = 63/2$$

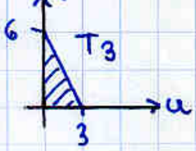
$S_2: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$



$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \overset{(\text{obvio})}{=} (0,0,-1)$ exterior

$$\iint_{S_2} \langle F, n_2\rangle \, dS = \int_0^3 \int_0^{3-u} (u, v^2, 0), (0,0,-1) \, dv \, du = 0$$

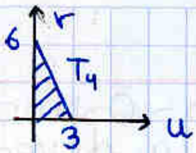
$S_3: \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = v \end{cases}$



$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \overset{(\text{obvio})}{=} (0,-1,0)$ exterior

$$\iint_{S_3} \langle F, n_3\rangle \, dS = \int_0^3 \int_0^{6-2u} (u, 0, v), (0,-1,0) \, dv \, du = 0$$

$S_4: \begin{cases} x = 0 \\ y = u \\ z = v \end{cases}$ $\quad u \in [0,3]$, $\quad 0 \leq v \leq 6-2u$



$n_4 = (-1,0,0)$ exterior

$$\iint_{S_4} \langle F, n_4 \rangle \, dS = \int_0^3 \int_0^{6-2u} \langle (0,u^2,v),(-1,0,0) \rangle = 0$$

Los tres ultimos se podian haber hecho razonando

Por otro lado

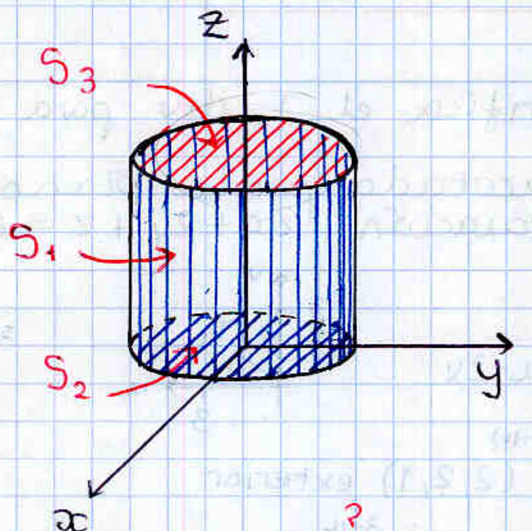
$$\iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{6-2x-2y} (1+2y+1) \, dz \, dy \, dx = \dots = \frac{63}{2}$$

---

ejemplo: utilizar el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ a traves de la sup $S = S_1 \cup S_2$

$S_1 =$ cilindro $x^2+y^2=4$ entre $z=0$ y $z=3$

$S_2 =$ circulo $x^2+y^2 \leq 4$, $z=0$



La superficie no está cerrada. El modo mas sencillo es cerrarla con $S_3: x^2+y^2 \leq 4$, $z=3$

$\bar{S} = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$Q = \bar{S} \cup \operatorname{int}(\bar{S})$

$$\underbrace{\iint_S \langle F, n \rangle \, dS}_{I_1} = \overbrace{\iint_{\bar{S}} \langle F, n \rangle \, dS}^{?} + \underbrace{\iint_{S_3} \langle F, n \rangle \, dS}_{I_2}$$

$\underline{I_2}$: $S_3 \begin{cases} z = 3 = f(x,y) \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$ $\quad n_3 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, +1\right) = (0,0,1)$

$$\iint_{S_3} \langle F, n \rangle \, dS = \iint_{S_3} \langle F(x,y,f(x,y)), (0,0,1) \rangle \, dA = \iint_{S_3} 27 \, dA \overset{A(T_3) = \pi 2^2}{=} 27 \cdot \pi 2^2$$

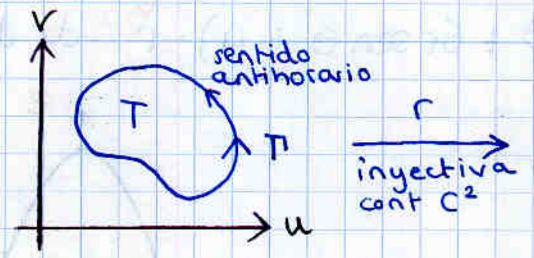
$\underline{I_1}$ $$\iint_S \langle F, n \rangle \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 3(r^2+z^2) \cdot r \, dz \, dr \, d\theta$$

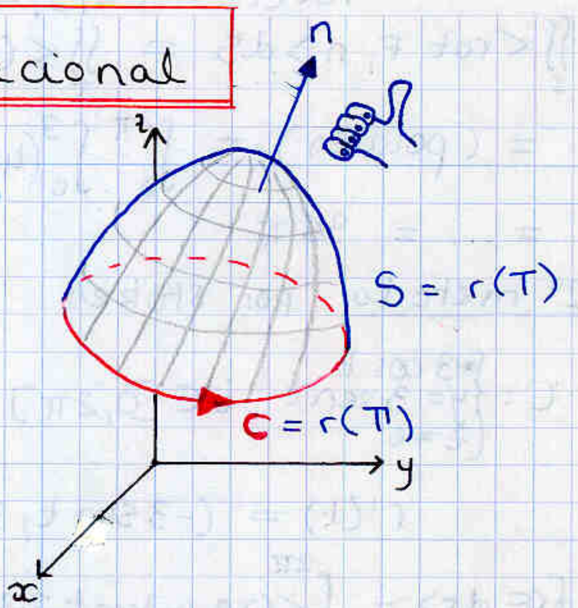
$$= 180\pi$$

$$\iint_S \langle F, n \rangle \, dS = I_1 - I_2 = 72\pi$$

Teorema de Stokes o Teorema del rotacional

Hipotesis:





T: región de UV limitada por Γ

Γ (gamma): curva cerrada, simple y regular a trozos recorrida en sentido antihorario

r: aplicación inyectiva con componentes de derivadas parciales 2as continuas

$S = r(T)$: sup parametrizada simple y regular

$C = r(\Gamma)$ recorrida en el sentido que resulte de aplicar r a Γ

$F = (M, N, P)$ con derivadas parciales continuas

entonces:

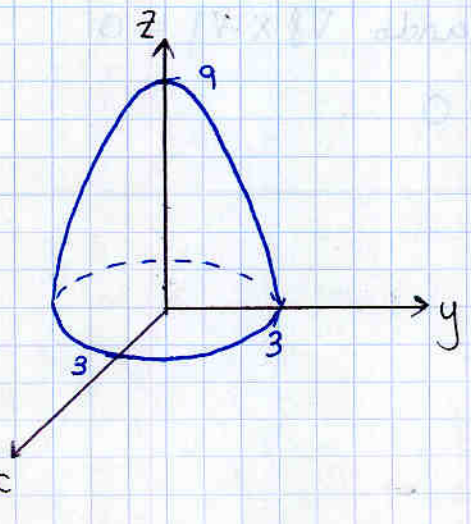
$$\boxed{\iint_S \langle \text{rot } F, n \rangle \, dS = \int_C \langle F, dr \rangle}$$

ejemplo:

Determinar $\iint_S \langle \text{rot } F, n \rangle \, dS$

S = parte de gráfica $z = 9 - x^2 - y^2 \quad z \geq 0$ con normal unitario exterior

$F(x, y, z) = (3z, 4x, 2y)$



$r(x, y) = (x, y, 9 - x^2 - y^2)$

por ser del tipo $r(x,y) = (x, y, f(x,y))$ sabemos que

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \left(\pm \frac{\partial f}{\partial x}, \pm \frac{\partial f}{\partial y}, \mp 1\right)$$

tomamos el exterior

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (2x, 2y, 1)$$

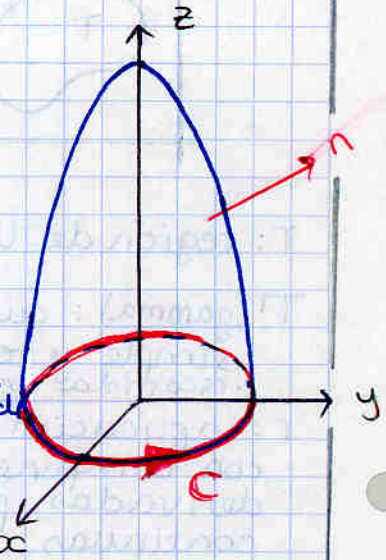
1er método

$$\mathrm{rot}(F) = (2,3,4)$$

$$\iint_S \langle \mathrm{rot}\, F, n \rangle \, dS = \iint_T \langle (2,3,4), (2x, 2y, 1) \rangle \, dS$$

$$= (\text{polares}) = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r\cos\theta + 6r\,\mathrm{sen}\,\theta + 4) \cdot \overset{\text{polares!}}{r} \; dr\, d\theta$$

$$= \ldots = 36\pi$$



2º método por stokes

$$C: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$r'(t) = (-3\,\mathrm{sen}\, t, 3\cos t, 0)$$

$$\oint \langle F, dr \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (3 \cdot 0, 4 \cdot 3\cos t, 2 \cdot 3\,\mathrm{sen}\, t), (-3\,\mathrm{sen}\, t, 3\cos t, 0) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 36\cos^2 t\, dt = 36 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

$$= 36 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) dt = 36\pi$$

ejemplo: sean f, g, campos escalares con deriv parc. cont. C y S satisfacen condiciones del T. stokes.

Probar:

(a) $\oint_C \langle f\nabla g, dr \rangle = \iint_S \langle \nabla f \times \nabla g, n \rangle \, dS$

$$\oint_C \langle f\nabla g, dr \rangle = \iint_S \langle \mathrm{rot}(f\nabla g), n \rangle \, dS$$

$$= \iint_S \langle [f \underbrace{\mathrm{rot}(\nabla g)}_{=0} + \nabla f \times \nabla g], n \rangle \, dS$$

$$= \iint_S \langle \nabla f \times \nabla g, n \rangle \, dS$$

(b) $\oint \langle f\nabla f, dr \rangle = 0$

tomando $g = f$ en (a) y usando $\nabla f \times \nabla f = 0$

en efecto $\oint \langle f\nabla f, dr \rangle = 0$

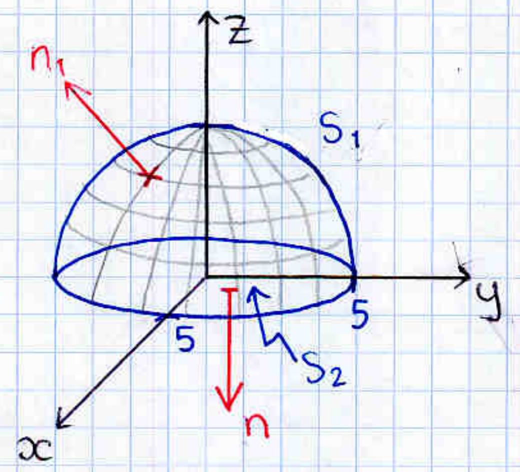
ejercicio de examen:

Usando convenientemente el teorema de Gauss, calcular el flujo del campo vectorial F a través de la superficie abierta de ec. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

sabiendo que existe un campo vectorial G con componentes C^2 tal que $F = \text{rot}(G)$

y sabiendo $F(x, y, 0) = (0, y, x-1)$

Indicar en una gráfica la orientación elegida para el vector normal.



$$\iint_{S_1} \langle F, n \rangle \, dS + \iint_{S_2} \langle F, n \rangle \, dS = \iiint_Q \text{div}(F) \, dV$$

$$= \iiint_Q \underbrace{\text{div}(\text{rot}(F))}_{=0} \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \langle F, n_1 \rangle \, dS = - \iint_{S_2} \langle F, n_2 \rangle \, dS \qquad n_2 = (0,0,-1)$$

$$= - \iint_{S_2} \langle (0, y, x-1), (0,0,-1) \rangle \, dA$$

$$= \iint_{T_2} (x-1) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (r\cos\theta - 1) r \, dr \, d\theta$$

$$= \ldots = -25\pi$$

ejercicio

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C_2
Sea el campo vectorial $G = \text{rot}(F)$ y S cualquier superficie cerrada

¿Es cierto que el flujo de G a traves de S es cero?

$$\iint_S \langle G, n \rangle \, dS \underset{\text{T. D.}}{=} \iiint_Q \text{div}(G) \, dV = \iiint_Q \underbrace{\text{div}(\text{rot}\, F)}_{=0} \, dV = 0$$

0'60

Análisis Vectorial

E.T.S.I.Telecomunicación

Requisitos necesarios para la asignatura

- Funciones reales de una variable real
  - Gráficas de funciones elementales: exponenciales, logarítmicas, potenciales, trigonométricas, hiperbólicas.
  - Límite, continuidad y derivabilidad: recta tangente.
  - Cálculo de máximos y mínimos, puntos de inflexión, asíntotas, etc.
  - Polinomio de Taylor.
  - Métodos elementales de integración: integrales inmediatas, sustitución, partes, integración de funciones trigonométricas.
  - Regla de Barrow y teorema fundamental del cálculo integral. Cálculo de áreas.
- Funciones reales de varias variables reales
  - Gráficas de superficies: esferas, elipsoides, cilindros, conos, hiperboloides, silla de montar, etc.
  - Límite, continuidad, derivación parcial y diferenciabilidad: plano tangente.
- Sucesiones y series numéricas
  - Sucesiones de números reales.
  - Series numéricas. Criterios de convergencia para: series de términos positivos (comparación, cociente, raíz), series alternadas (Leibniz). Convergencia absoluta.
- Producto escalar canónico de $\mathbb{R}^n$ y producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

1 Programa de la asignatura

TEMA 1: INTEGRALES IMPROPIAS.

TEMA 2: INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO.

TEMA 3: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE.

TEMA 4: CURVAS E INTEGRALES DE LÍNEA.

TEMA 5: SUPERFICIES E INTEGRALES DE SUPERFICIE.

TEMA 6: SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES.

P1

2 Programa detallado de la asignatura

TEMA 1: INTEGRALES IMPROPIAS. Definición de integral impropia de primera y de segunda especie. Criterios de convergencia. Criterio integral para series de términos positivos.

TEMA 2: INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO. Definiciones. La continuidad de la integral paramétrica. Diferenciabilidad bajo el signo integral (regla de Leibniz).

TEMA 3: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE. Definición de la integral doble. Cálculo de una integral doble por integración simple reiterada. Interpretación geométrica de la integral doble. Cambio de variable en una integral doble: coordenadas polares. Integral triple: Definición, cálculo y aplicaciones. Cambio de variable en una integral triple: coordenadas cilíndricas y esféricas.

TEMA 4: CURVAS E INTEGRALES DE LÍNEA. Curvas en $\mathbb{R}^n$. Derivada de una función vectorial de una variable real. Vectores tangente unitario y normal. Concepto de longitud de arco. Integrales de línea. Concepto de trabajo como integral de línea. Integrales de línea con respecto a la longitud de arco. Aplicaciones. Teorema de Green en el plano. Independencia del camino (campos vectoriales conservativos). Condiciones para que un campo vectorial sea un gradiente. Existencia de una función potencial. Aplicaciones.

TEMA 5: SUPERFICIES E INTEGRALES DE SUPERFICIE.

Representación paramétrica de una superficie. Producto vectorial fundamental. Área de una superficie paramétrica. Integrales de superficie y de flujo. Aplicaciones. El rotacional de un campo vectorial. Teorema de Stokes. La divergencia de un campo vectorial. Teorema de la divergencia (Teorema de Gauss–Ostrogadsky). Expresión del gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en coordenadas esféricas y cilíndricas. Breve introducción al potencial electrostático. Ley de Gauss de la electrostática. Ecuación de Laplace.

TEMA 6: SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES.

Convergencia puntual y uniforme de sucesiones de funciones. Convergencia uniforme y continuidad. Convergencia uniforme e integración. Una condición suficiente para la convergencia uniforme. Series de potencias. Radio de convergencia. Funciones real-analíticas. Serie de Taylor generada por una función. Condición suficiente para la convergencia de una serie de Taylor. Desarrollos en serie de potencias de las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas.

3 Bibliografía recomendada

3.1 Bibliografía básica

- Cálculo Vectorial. Marsden, J; Tromba, A. T. *Addison Wesley Iberoamenricana*, 1991.
- Cálculo: teoría y problemas de funciones de varias variables. A. García López, A. López de la Rica, G. Rodríguez Sánchez, S. Romero Sánchez, A. de la Villa Cuenca. *CLAGSA*, 1996.
- Introdución al análisis matemático. R. G. Bartle. *Ed. Limusa*, 1982.
- Cálculo y geometría analítica. Larson, R. E. *Ed. Mc-Graw-Hill*, 1995.
- Calculus I, II. Apostol, T.M. *Ed. Reverté*, 1985.

3.2 Bibliografía complementaria

- Problems in Mathematical Analysis. Demidovich, B. *Ed. Mir*, 1976.
- Div, grad, curl and all that. H. M. Schey. *W. W. Norton*, 1997.

- Functions of several variables. Craven, B.D. *Ed. Chapman and Hall*, 1981.
- Cálculo Superior. M. Spiegel. *Schaum, McGraw-Hill.*

4 Organización

- 4'5 Créditos
- Segundo Cuatrimestre

5 Profesorado

- Julio Benítez.
- José Manuel Martínez (en baja temporal).
- Néstor Thome (prof. responsable de la asignatura).

6 Evaluación

La asignatura se aprueba mediante un examen final a realizar en las fechas establecidas por la Escuela. Los alumnos que en el examen final saquen 4 o más y menos de 5 tendrán opción a un examen oral, cuya fecha de realización se indicará el día de publicación de las notas del examen. El examen oral consistirá en la resolución en la pizarra de algunos ejercicios de las hojas de problemas de las que disponen los alumnos.

P2

Problemas de Análisis Vectorial

1 Integrales impropias.

1. Analícese la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}, \quad \int_1^\infty \frac{x+2}{x^2+1}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}\,dx,$$
$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx.$$

2. Estúdiese la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x}}, \quad \int_0^\infty \frac{\log(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_{\alpha-1}^{\alpha+1} \frac{dx}{(x-\alpha)^{1/3}},$$
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\log x}, \quad \int_0^\infty \frac{x}{\cosh x}\,dx.$$

3. Determínense los valores de $c \in \mathbb{R}$ para los cuales las integrales dadas convergen:

$$\int_0^\infty \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx, \qquad \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{c}{x+1}\right)dx.$$

4. Demuéstrese que $\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} \operatorname{sen} x\,dx\right) = 0$. ¿Es $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ convergente?

5. Pruébese que $\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ es divergente. Dedúzcase, aplicando la regla de L'Hopital, que

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt = 1.$$

6. Estúdiese la convergencia de las integrales de **Fresnel**:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx.$$

7. Analícese la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{1-x^3}, \quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

$u\, dv = vu - \int v\, du$

8. Determínense los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes integrales convergen:
$$\int_1^2 (\log x)^p \, dx, \qquad \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^p)}{x} \, dx.$$

9. Estúdiese la convergencia de las siguientes integrales:
$$\int_0^\infty e^{-x} \, dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx.$$
A esta segunda integral se le suele llamar **integral de probabilidad** o **integral de Gauss**.

10. En este problema se estudiará la **función Gamma de Euler**. Considérese la siguiente integral paramétrica:
$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \, dx.$$
   (a) Pruébese que $\Gamma(p)$ converge para $p > 0$.
   (b) Pruébese que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ para $p > 0$. Dedúzcase que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$.

11. Estúdiese la convergencia de la **función Beta de Euler**: $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx$.

12. (Junio 2000) Aplicando el método de integración por partes, pruébese que
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x} \, dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{(1+x)^2} \, dx.$$
Recordando que la integral $\int_0^\infty f(x) \, dx$ **converge absolutamente** si $\int_0^\infty |f(x)| \, dx$ converge, compruébese que una de ellas converge absolutamente y la otra converge.

13. (Septiembre 2000) El potencial creado por una varilla metálica sobre un punto que dista h es $\int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)}{\sqrt{h^2+x^2}} \, dx$, donde $h > 0$ y $f(x)$ es la densidad lineal de carga de la varilla.
   (a) Pruébese que si $f(x) = 1$, el potencial es infinito.
   (b) ¿Para qué valores de $\alpha \geq 0$ se obtiene un potencial finito, siendo $f(x) = \dfrac{1}{1+x^{2\alpha}}$?

14. (Enero 2001. Grupo E)
   (a) Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua que cumple que existen constantes $c \in \mathbb{R}$, $M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$. Pruébese que $\int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$ converge[1] para todo $s > c$.
   (b) Sea $I_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt$ definida para $n \in \mathbb{N}$ y para $s > 0$. Pruébese $I_n(s) = \frac{n}{s} I_{n-1}(s)$ y dedúzcase $I_n(s) = n!/s^{n+1}$.

15. (Junio 2002) Dígase si converge la integral $\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \exp(-x^2) \, dx$ en los siguientes intervalos: a) $[0,1]$; b) $[1, +\infty[$; c) $[0, +\infty[$.

16. (Junio 2003) Analícese la convergencia o divergencia de la siguiente integral:
$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{(2+x)^2(1-x)}} \, dx, \qquad \text{siendo} \qquad f(x) = \begin{cases} \cos(4\pi x) & x \in [-1, 1[, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

[1] Esta integral es la **transformada de Laplace de** f.

2 Integrales paramétricas.

1. Sea $f(x,y) = \log(1 - 2x\cos y + x^2)$, $(x,y) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi]$. Sea la función $G(x) = \int_0^{2\pi} f(x,y)\,dy$ para $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, calcúlese $G'(x)$ y dedúzcase $G = 0$. (Ayuda: Para calcular G' usando una integral, diferénciese con respecto a y la expresión $\operatorname{arctg} \dfrac{x \operatorname{sen} y}{1 - x\cos y}$.)

2. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x\operatorname{sen}^2 y)}{\operatorname{sen}^2 y} & y \neq 0, \\ x & y = 0. \end{cases}$$
en $K = [-\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{4}]$. Si $G(x) = \int_0^{\pi/4} f(x,y)\,dy$ para $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, pruébese que
$$G'(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{dy}{1 + x\operatorname{sen}^2 y}, \qquad x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],$$
y dedúzcase $G(x) = 2\sqrt{1+x}\operatorname{arctg}(\sqrt{1+x}) - \log(1 + \frac{x}{2}) - \frac{\pi}{2}$. (Ayuda: La integral que permite hallar G' se resuelve mediante el cambio $u = \operatorname{tg} y$.)

3. Calcúlese $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 + \alpha\operatorname{sen}^2 x)^2}\,dx$ por derivación de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \alpha\operatorname{sen}^2 x}$. Para este problema y el siguiente se debe usar el cambio $t = \operatorname{tg} x$ para resolver ambas integrales.

4. Calcúlese $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a\cos^2 x + b\operatorname{sen}^2 x)^2}$ a partir de la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\operatorname{sen}^2 x}$, siendo $a, b > 0$.

5. Se define
$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt.$$
   (a) Demuéstrese que $g'(x) + f'(x) = 0$ para todo x y dedúzcase que $g(x) + f(x) = \frac{\pi}{4}$ para todo x.
   (b) Utilícese lo que precede para probar que $\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Hállese $\int_0^1 x^\alpha \log^n x\,dx$ ($\alpha \geq \alpha_0 > 0, n \in \mathbb{N}$) a partir de $I(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha\,dx$.

7. Hállese $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\,dx$ para $\alpha \geq 0$.

8. Partiendo de la igualdad $\int_0^\alpha \frac{dx}{\beta^2 + x^2} = \frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$ (para $\beta > 0$) calcúlese el valor de $\int_0^\alpha \frac{dx}{(\beta^2+x^2)^2}$.

9. Sea $f(x,t) = \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}$, $F(t) = \int_0^1 f(x,t)\,dx$ para $t \geq 0$ y $x \in [0,1]$. Pruébese
   (a) $F(0) = \frac{\pi}{4}$. Y además $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.
   (b) $F'(t) = -\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} G(\sqrt{t})$, siendo $G(t) = \int_0^t e^{-u^2}\,du$.
   (c) Dedúzcase de lo anterior que $\lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

10. Sea $R > 0$.

P 4

(a) Pruébese que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\int_0^R \frac{e^{-xy}\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{1}{1+y^2} + \frac{e^{-Ry}(\cos R + y \operatorname{sen} R)}{1+y^2}.$$

(b) Úsese el apartado anterior para probar que para $R > 0$ se tiene

$$\int_0^R \frac{e^{-xy}\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x - \operatorname{arctg} y + \cos R \int_0^y \frac{e^{-Rs}}{1+s^2}\,\mathrm{d}s + \operatorname{sen} R \int_0^y s\frac{e^{-Rs}}{1+s^2}\,\mathrm{d}s.$$

(c) Pruébese que para $y \geq 0$ fijo se tiene

$$\lim_{R\to+\infty} \cos R \int_0^y \frac{e^{-Rs}}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{sen} R \int_0^y s\frac{e^{-Rs}}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = 0.$$

(d) Úsense los apartados anteriores para deducir

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}(1-e^{-xy})\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} y.$$

11. (Septiembre 2000) Sabiendo que $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$ para $\alpha > 1$, hállese $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(2-\cos x)^2}$ usando teoría de integración paramétrica.

12. (Junio 2000) Sean las funciones

$$f(t) = \int_0^t e^{-u^2}\,\mathrm{d}u,\ t \geq 0 \qquad \text{y} \qquad g_R(x) = \int_0^R \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u,\ x > 0,\ R > 0.$$

Pruébese que para $x > 0$ se tiene $g'_R(x) = g_R(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} f(R\sqrt{x})$. (Nota: No se debe intentar hallar f y g_R de manera cerrada pues las integrales que definen a f y a g_R no se pueden calcular por métodos elementales.)

13. (Junio 2001) Sea $G(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{arctg}(t/x^2)\,\mathrm{d}t$ para $x \in [1,2]$. Utilícese teoría de integración paramétrica para calcular:

(a) el límite $\lim_{x\to\sqrt{2}} G(x)$. ¿Es $G(x)$ continua en $x_0 = \sqrt{2}$? Justifíquese la respuesta. (Ayuda: la integral $\int \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x$ se puede hacer por partes.)

(b) la derivada $G'(x)$ para $x \in [1,2]$.

14. (Junio 2003) Sea $G(\lambda) = \int_0^\lambda x^n(\lambda - x)^m\,\mathrm{d}x$, donde m y n son números naturales fijos.

(a) Calcúlense las derivadas sucesivas de la función $G(\lambda)$ comprobando que

$$G^{(m)}(\lambda) = \frac{m!}{n+1}\lambda^{n+1}.$$

(b) Observando que $G(0) = G'(0) = \cdots = G^{(m-1)}(0) = 0$ e integrando m veces la última igualdad, pruébese que

$$G(\lambda) = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\lambda^{m+n+1}.$$

15. (Septiembre 2003) Sea $f_n(x,y) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+y^2)^n}$ para $0 \le x$, $0 < y_0 < y$, n natural.

   a) Obténgase ∇f_n en términos de funciones elementales y de f_{n+1}. Justifíquense todos los pasos.

   b) Calcúlese de forma explícita $f_1(x,y)$ y úsese el apartado anterior para obtener la integral $\int_0^x \frac{dt}{(t^2+y^2)^2}$ en términos de funciones elementales.

3 Integrales múltiples.

1. Calcúlense las siguientes integrales dobles por integración sucesiva:

   (a) $\iint_Q xy(x+y)\,dx\,dy$, $Q = [0,1] \times [0,1]$.

   (b) $\iint_Q (x^3+3x^2y+y^3)\,dx\,dy$, $Q = [0,1] \times [0,1]$.

   (c) $\iint_Q f(x+y)\,dx\,dy$, $Q = [0,2] \times [0,2]$, siendo $f(t)$ el mayor entero menor o igual que t.

2. Sea f una función definida en el rectángulo $Q = [0,1] \times [0,1]$ del siguiente modo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{si } x+y \le 1, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } Q. \end{cases}$$

   Represéntese el sólido y calcúlese su volumen por doble integración.

3. Resuélvase el ejercicio 2 cuando $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ y

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } x^2+y^2 \le 1, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } Q. \end{cases}$$

4. En los siguientes ejercicios, dibújese la región de integración y calcúlese la integral doble.

   (a) $\iint_S x\cos(x+y)\,dx\,dy$, siendo S el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π).

   (b) $\iint_S (1+x)\operatorname{sen} y\,dx\,dy$, siendo S el trapezoide de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$

   (c) $\iint_S \exp(x+y)\,dx\,dy$, siendo $S = \{(x,y) : |x|+|y| < 1\}$.

5. Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano XY y los planos $x = 1$, $x = 3$. Represéntese el sólido y calcúlese su volumen.

6. Calcúlese el volumen del sólido bajo la función f sobre S si

   (a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $S = \{(x,y) : |x|+|y| \le 1\}$.

   (b) $f(x,y) = 3x+y$, $S = \{(x,y) : 4x^2+9y^2 \le 36,\ x,y > 0\}$.

   (c) $f(x,y) = y+2x+20$, $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 16\}$.

7. Dibújese la región limitada por las curvas siguientes, y determínense las coordenadas del centroide supuesta la densidad constante.

   (a) $y = x^2$, $x+y = 2$.

P 5

(b) $y^2 = x + 3$, $y^2 = 5 - x$.

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

8. Una lámina delgada está limitada por el arco de parábola $y = 2x - x^2$ y el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Determínese su masa si su densidad en cada punto (x, y) es $f(x, y) = \frac{1-y}{1+x}$.

9. Determínese el centro de gravedad de una lámina delgada rectangular $ABCD$ si la densidad en cada punto es el producto de las distancias a los lados AB y AD.

10. El contorno de una lámina delgada es una elipse de semiejes a y b. L representa una recta en el plano de la lámina que pasa por el centro de la elipse y forma un ángulo α con el eje de longitud $2a$. Si la densidad es constante y la masa m, demuéstrese que el momento de inercia I_L es igual a $\frac{m}{4}(a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$.

11. Calcúlense los momentos de inercia I_x e I_y de una lámina delgada S del plano XY bordeada por las curvas $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = -\operatorname{sen}^2 x$, para $x \in [-\pi, \pi]$, donde $f(x, y) = 1$ representa la densidad de un punto cualquiera (x, y) de S.

12. Calcúlese el volumen y el centro de gravedad de un cono circular recto homogéneo de radio de la base R y altura H.

13. Calcúlese el volumen limitado por arriba por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y debajo por la superficie $z = x^2 + y^2$.

14. Hállese el volumen determinado por $z \leq 6 - x^2 - y^2$ y $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

15. Calcúlense las coordenadas del centro de gravedad de un octante de

    (a) una esfera de radio a,

    (b) un elipsoide de semiejes a, b y c,

    supuestos ambos volúmenes con densidad homogénea.

16. Transfórmese la integral a coordenadas polares y calcúlese su valor, siendo T el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (a, a), y a una constante positiva:

$$\iint_T \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

17. Utilícese una transformación lineal conveniente para calcular la integral doble

$$\iint_S (x - y)^2 \operatorname{sen}^2(x + y)\, dx\, dy,$$

donde S es el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ y $(0, \pi)$.

18. Los vértices de un paralelogramo S del plano XY son los puntos $(0, 0)$, $(2, 10)$, $(3, 17)$, $(1, 7)$.

    (a) Hállese una transformación lineal $u = ax + by$, $v = cx + dy$ que aplique S en un rectángulo R del plano UV con vértices opuestos en $(0, 0)$ y $(4, 2)$. El vértice $(2, 10)$ deberá aplicarse en un punto del eje U.

(b) Calcúlese el valor de la integral doble $\iint_S xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ transformándola en una integral equivalente en el rectángulo R del apartado previo.

19. Considerando la integral doble de $f(x,y) = e^{xy}$ sobre $[a,b] \times [\alpha,\beta]$, $(0 < a, \alpha)$ pruébese que
$$\int_a^b \frac{e^{x\beta} - e^{x\alpha}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{e^{xb} - e^{xa}}{x}\,\mathrm{d}x.$$
Dedúzcase que la función $\phi(x) = \int_a^b \frac{e^{xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ es derivable y calcular su derivada, sin usar la teoría de integración paramétrica.

20. Calcúlese
$$\iint_A \exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
con $A = \{(x,y) : y^2 - 2px \le 0, x^2 - 2py \le 0\}$, efectuando el cambio de variables $x = u^2v, y = v^2u$ y siendo $p > 0$.

21. Pruébese que el área del recinto plano $\{(\rho,\theta) : \rho \le \rho(\theta), \theta \in [\alpha,\beta]\}$ viene dado por $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

22. Sea R la región dentro de $x^2+y^2=1$, pero fuera de $x^2+y^2=2y$ con $x,y \ge 0$. Úsese el cambio $u = x^2+y^2$, $v = x^2+y^2-2y$ para calcular $\iint_R xe^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

23. Vimos que la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. En este problema calcularemos su valor usando integrales dobles. Para ello se definen el cuadrado $M_1(R) = [0, \sqrt{2}R/2]^2$, $M_2(R)$ la parte del círculo de centro 0 y radio R contenida en el primer cuadrante, y el cuadrado $M_3(R) = [0,R]^2$ (¡Hágase un dibujo!). Sea $I(R) = \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(a) A partir de la integral doble de $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ sobre los tres recintos definidos dedúzcase
$$I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \le I(R)^2.$$

(b) Conclúyase que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

24. El objetivo de este problema es demostrar (usando integrales dobles) la siguiente fórmula debida a Euler[2]:
$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$
Para ello considérense los recintos $M_1(R)$, $M_2(R)$ y $M_3(R)$ definidos en el problema previo y la función
$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}, \qquad f : [0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}.$$

(a) Pruébese $\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

(b) Pruébese

[2] Véanse los problemas de integrales impropias para la definición de las funciones Gamma y Beta de Euler.

P 6

i. $\iint_{M_1} f \, dx \, dy = \frac{1}{4}\left(\int_0^{R^2/2} e^{-t} t^{p-1} \, dt\right)\left(\int_0^{R^2/2} e^{-t} t^{q-1} \, dt\right)$,

ii. $\iint_{M_2} f \, dx \, dy = \frac{1}{4}\beta(p,q) \int_0^{R^2} e^{-t} t^{p+q-1} \, dt$,

iii. $\iint_{M_3} f \, dx \, dy = \frac{1}{4}\left(\int_0^{R^2} e^{-t} t^{p-1} \, dt\right)\left(\int_0^{R^2} e^{-t} t^{q-1} \, dt\right)$.

(c) Conclúyase $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\beta(p,q)$.

25. (Septiembre 2001) Calcúlese $\iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 \, dx \, dy$, donde D es la región plana comprendida entre las rectas $x+y=1$, $x+y=2$ y los ejes coordenados. [Ayuda: Hágase un cambio de variables apropiado.]

26. (Septiembre 2001) El potencial eléctrico que causa una distribución continua de carga (que ocupa una región Ω de $\mathbb{R}^3$ cuya densidad de carga es ρ) en un punto (a,b,c) es

$$U(a,b,c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \, dx \, dy \, dz,$$

donde ϵ_0 es una constante física llamada **permitividad eléctrica**.

(a) Sean Ω la esfera centrada en el origen de radio δ y ρ una función que sólo depende del módulo del vector de posición que cumple $\rho(r) \leq \frac{M}{r}$ para $r \in]0,\delta]$, siendo M una constante positiva (ρ puede hacerse infinita en $r=0$), pruébese que

$$U(0,0,0) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\delta r\rho(r) \, dr$$

(b) Dedúzcase que el potencial es finito (es decir, la integral es convergente).

27. (Junio 2002) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se define $F_n(x) := \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y) \, dy$ para $n = 0,1,2,\ldots$

(a) Pruébese que $\int_0^1 F_n(x) \, dx = F_{n+1}(1)$ cambiando el orden de integración en la última integral de la igualdad siguiente:

$$\int_0^1 F_n(x) \, dx = \int_0^1 \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y) \, dy \, dx.$$

(b) Pruébese $F_0' = f$ y $F_n' = F_{n-1}$ para $n = 1,2,\ldots$

(c) Úsese el apartado anterior para expresar (en forma de una única integral) una función cuya derivada de orden 2002 sea $g(x) = xe^x \cos x$.

28. (Septiembre 2002) Calcúlese $\iiint_W (1-z^2) \, dx \, dy \, dz$, donde W es la pirámide (de base cuadrada) con vértice superior en $(0,0,1)$ y vértices de la base $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(0,1,0)$.

4 Integrales de línea.

1. Calcúlese $\int_C xy^3\,\mathrm{d}s$, donde C es el segmento de la recta $y = 2x$, desde $A = (-1,-2)$ hasta $B = (1,2)$.

2. Calcúlese la integral $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2\,\mathrm{d}s$, donde C es el arco de la hélice circular $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$ desde $A = (1,0,0)$ hasta $B = (1,0,6\pi)$.

3. Hállese el trabajo realizado por el campo de fuerzas $f(x,y,z) = (yz, xz, x(y+1))$, para desplazar un cuerpo de manera que recorra el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$ en este orden.

4. Hállese el área determinada por $y = 2^x$, $y = 2x^3$, $y = -\frac{x}{2}$.

5. Se considera un alambre semicircular uniforme de densidad $\rho(x,y) = k$ de radio a. Demuéstrese que el centro de gravedad está situado a una distancia $\frac{2a}{\pi}$ del centro del círculo. Hállese el momento de inercia respecto del diámetro que pasa por los extremos.

6. Calcúlese la integral de línea de f a lo largo del camino que se indica.

   (a) $f(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, a lo largo de la porción de la parábola $y = x^2$ desde $(-1,1)$ a $(1,1)$.

   (b) $f(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, a lo largo del camino descrito por $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$.

   (c) $f(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, alrededor de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$ en sentido contrario a las agujas del reloj.

   (d) $f(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, desde $(0,0,0)$ a $(1,2,4)$ a lo largo del segmento que une ambos puntos.

7. Calcúlese el valor de la integral de línea en cada uno de los siguientes aparatados:

   (a) $\int_C (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$, donde C es el arco de parábola $y = x^2$ que une $(-2,4)$ con $(1,1)$.

   (b) $\oint_C \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x| + |y|}$, donde C es el cuadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.

   (c) $\oint_C (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z)$, donde

      i. C es la curva intersección de las dos superficies $x + y = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. La curva es recorrida de modo que, mirando desde el origen, el sentido es el de las agujas del reloj.

      ii. C es la curva intersección de las dos superficies $z = xy$ y $x^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido tal que, vista desde encima del plano XY, es el contrario al de las agujas del reloj.

8. Sea $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ y C una curva en el plano.

   (a) Pruébese la siguiente desigualdad: $\left|\int_C f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y\right| \le ML$, siendo L la longitud de la curva y $M = \max\{\|F(x,y)\| : (x,y) \in C\}$.

   (b) El resultado del apartado previo puede generalizarse a curvas en $\mathbb{R}^3$. Verifíquese esta desigualdad para el ejercicio 6.d.

P 7

9. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es un punto de la curva más próximo al origen, cumpliendo $\alpha'(t_0) \neq 0$, pruébese que $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

10. Un disco circular de radio 1 rueda sin deslizarse sobre el eje X. La figura descrita por un punto de la circunferencia del disco se llama **cicloide.**

    (a) Obténgase una parametrización de la curva.

    (b) ¿Para qué puntos de la curva no existe la tangente?

    (c) Calcúlese la longitud de la cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

11. Sea $\alpha(t) = ae^{bt}(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \infty[$, a y b constantes, $a > 0$ y $b < 0$. Pruébese que $\int_{t_0}^{\infty} \|\alpha'(t)\| \, dt$ es convergente, (esto es, α tiene una longitud finita en $[t_0, \infty[$.)

12. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada, $p = \alpha(a)$, $q = \alpha(b)$.

    (a) Pruébese que, para cualquier vector constante v de norma 1,
    $$\langle q - p, v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

    (b) Sea $v = \frac{q-p}{\|q-p\|}$. Pruébese $\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$. Esto es, la curva de longitud más corta entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ es el segmento rectilíneo que une estos dos puntos.

13. Considérese la curva plana dada en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [a, b]$. Pruébese que la longitud de la curva es $\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} \, \mathrm{d}\theta$, donde la derivada lo es con respecto a θ.

14. Compruébese que se verifica el teorema de Green para el campo vectorial $F(x, y) = (y^2, x)$ y la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

15. (Septiembre 2000) Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \ x, y \geq 0\}$, $0 < a < b$. La coordenada x del centro de gravedad de D, supuesto D con densidad constante 1 (que por simetría coincide con la coordenada y) es
    $$\frac{1}{m} \iint_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \qquad m = \text{masa} = \text{área}(D) = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2).$$

    (a) Calcúlese esta integral.

    (b) Encuéntrese funciones P y Q tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x$ y utilícese el teorema de Green para resolver la integral.

16. (Enero 2001. Grupo E) Considérese la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

    (a) Pruébese que la longitud total de la elipse es $L(a, b) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t} \, \mathrm{d}t$. No resuelva la integral.

(b) Una manera de hacer la integral (de forma aproximada) es la siguiente: Hállese el polinomio de Taylor[3] de orden 1 de $L(a,b)$ alrededor del punto (1,1). Relaciónese este polinomio con la longitud de las circunferencias de radios a y b, dando así una interpretación geométrica de este apartado.

(c) Al hacer girar la elipse alrededor del eje X se obtiene el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Hállese el volumen de este elipsoide.

17. (Junio 2001) Considérese la curva plana de ecuación $\alpha(t)=(e^t,1/t)$ para $t\in]0,1]$.

(a) Usando una integral curvilínea, exprésese en forma de integral el área comprendida entre la curva, la recta $y=1$ y el segmento de extremos $(e^{t_0},1)$ y $\alpha(t_0)$ para $0<t_0\leq 1$. Hágase un dibujo de la curva.

(b) Dígase si la integral hallada en el apartado previo es convergente para $t_0\to 0^+$.

18. (Septiembre 2001) Calcúlese el área que encierra la curva en polares $\rho(\theta)=\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$ para $\theta\in[0,2\pi]$. [Ayuda: Téngase en cuenta que la expresión paramétrica de una curva en polares $\rho=\rho(\theta)$ es $\alpha(\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$.]

19. (Septiembre 2002) Sea el camino definido en $\mathbb{R}^3$ por

$$\alpha(t)=(e^{-t}\cos(t^2),e^{-t}\,\mathrm{sen}(t^2),e^{-t}),\qquad t\in[0,+\infty[.$$

(a) Indíquese (sin resolver) la integral que permite calcular su longitud.

(b) Decídase si la inetgral del apartado anterior converge o diverge. Justifíquese

5 Integrales de superficie.

1. Hállese el vector normal a cada una de las siguientes superficies. Compruébese que las ecuaciones representan efectivamente las superficies que se indican.

(a) Plano: $r(u,v)=(a_1+b_1u+c_1v,a_2+b_2u+c_2v,a_3+b_3u+c_3v)$.

(b) Paraboloide elíptico: $r(u,v)=(au\cos v,bu\,\mathrm{sen}\,v,u^2)$.

(c) Elipsoide: $r(u,v)=(a\,\mathrm{sen}\,u\cos v,b\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v,c\cos u)$.

(d) Cilindro: $r(u,v)=(u,a\,\mathrm{sen}\,v,a\cos v)$.

2. Hállese el momento de inercia I de una lámina esférica homogénea $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ de masa M alrededor del eje Z.

3. Un reflector de una antena se construye girando la curva $z=x^2$ (en el plano XZ), $x\in[0,1]$.

[3] El polinomio de Taylor de orden 1 de $f(x,y)$ alrededor de (x_0,y_0) es

$$f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

P 8

(a) Parametrícese la superficie obtenida.

(b) Calcúlese su área.

(c) Hállese el volumen entre paraboloide resultante y el plano $z = 1$.

4. Hállese el área de la región que determina el cilindro $x^2+y^2 = a^2$ en el plano $x+y+z = a$.

5. Hállese el centro de gravedad de un hemisferio uniforme de radio a

6. Considérese la semiesfera superior de radio 1. Sea $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ un campo vectorial. Hállese $\iint_S \langle F, \mathbf{n}\rangle \,\mathrm{d}S$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario exterior a la superficie.

   (a) Utilizando la representación de S en coordenadas esféricas.

   (b) Utilizando el teorema de la divergencia.

7. Si S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, hállese $I = \iint_S \langle F, \mathbf{n}\rangle \,\mathrm{d}S$, donde $F(x, y, z) = (xz, yz, x^2)$ y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario exterior a la superficie.

8. Hállese el área de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$.

9. Compruébese el teorema de Stokes para el campo vectorial $F = (z - y, x + z, -(x + y))$ y la superficie limitada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

10. Hállese el área del cono de altura h obtenido por rotación de la recta $z = 3x$ del plano XZ, alrededor del eje Z.

11. Intégrense las siguientes funciones sobre las superficies que se indican:

    (a) $f(x, y, z) = (x^2+y^2)z$, sobre el hemisferio superior de la esfera de radio a centrada en $(0, 0, 0)$.

    (b) $f(x, y, z) = x$, sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 1$.

12. Calcúlese $\int_C zy \,\mathrm{d}x$, siendo C la curva intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $y + z = R$:

    (a) directamente.

    (b) aplicando el teorema de Stokes.

13. Verifíquese el teorema de Stokes para la helicoide

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \theta), \qquad (\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2],$$

    y el campo vectorial $F(x, y, z) = (z, x, y)$.

14. (Junio 1999) Si un objeto metálico, que ocupa una región cerrada y acotada de $\mathbb{R}^3$ con superficie regular S, se calienta de forma que se conoce la distribución de temperatura en su superficie, la temperatura $g(x, y, z)$ en cada punto del interior del objeto verifica la llamada **Ecuación de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0.$$

    Se supone que g está definida en un conjunto abierto U que contiene a T, siendo T la unión de la superficie S y su interior. Pruébense las siguientes afirmaciones, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a la superficie S.

(a) $\iint_S \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}S = 0$.
(b) $\iint_S g(\mathbf{x}) \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}S = \iiint_T \|\nabla g\|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.
(c) Si $\langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle = 0$ en todo punto $\mathbf{x} \in S$, entonces g es constante en T.

15. (Junio 1999) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$ y positiva. Se considera la superficie de revolución generada por la gráfica de f al rotarla según el eje X. Una parametrización es

$$\mathbf{r}(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\operatorname{sen}\theta), \qquad x \in [a,b],\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Aplíquese el teorema de la divergencia a la región de $\mathbb{R}^3$ encerrada por la superficie de revolución a las funciones $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,0,0)$ y $\mathbf{G}(x,y,z) = (0,y,z)$, para obtener respectivamente que el volumen V, encerrado por la superfice, es

(a) $V = \pi(bf(b)^2 - af(a)^2) - 2\pi \int_a^b x f(x) f'(x) \, dx$.
(b) $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$.

16. Pruébese el teorema de Pappus: el área de una superficie generada por rotación completa de una curva plana es 2π multiplicada por la distancia del centro de gravedad de la curva al eje de rotación y por la longitud de la curva. Dedúzcase el área de un toro[4].

17. Sean las funciones

$$f(x,y) = e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2), \qquad g(x,y) = -e^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2 - y^2).$$

(a) Pruébese que existe una función escalar U tal que $\nabla U = (f,g)$; de donde se deduce que $\int_C f \, \mathrm{d}x + g \, \mathrm{d}y$ sólo depende de los puntos inicial y final de C.
(b) Sea γ_1 la unión de los segmentos $(0,0),(R,0)$ y $(R,0),(R,R)$. Sea γ_2 el segmento $(0,0),(R,R)$. Úsese el apartado anterior para deducir

$$\int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t - \int_0^R e^{-2Rt}\operatorname{sen}(R^2 - t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^R e^{-2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(c) Sabiendo que $\int_0^\infty \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$ es convergente y su valor es $\sqrt{\pi}/2$, conclúyase

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \text{ es convergente}, \qquad \int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

(d) Úsese un método similar para calcular $\int_0^\infty \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t$.

18. En este problema se estudiará la **ecuación del calor**. Imaginemos que una placa metálica que ocupa el dominio T del plano XY se calienta, y denotemos por $u(x,y,t)$ la temperatura del punto $(x,y) \in T$ en el tiempo $t \in [0,b]$. Por medio de argumentos físicos se demuestra que u satisface la llamada **ecuación del calor**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde $u : T \to \mathbb{R}$, y u es de clase $\mathcal{C}^2$. El objetivo del problema es probar que si u y v son dos distribuciones de temperatura que coinciden en el instante inicial en todo T y en la frontera de T en todo instante, entonces $u = v$.

[4]Un **toro** es la superficie de revolución generada por una circunferencia paralela y exterior al eje de revolución. Un "donut".

P 9

(a) Defínase $f := u - v$. Pruébese que $f = f(x,y,t)$ satisface

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$f(x,y,0) = 0, \qquad \forall\,(x,y) \in T,$$

$$f(x,y,t) = 0, \qquad \forall\,(x,y) \in \text{ frontera de } T,\ t \in [0,b].$$

(b) Considérese el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,t) := (2f\frac{\partial f}{\partial x}, 2f\frac{\partial f}{\partial y}, -f^2)$. Pruébese que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2\left[(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2\right]$.

(c) Úsese el teorema de la divergencia en el "cilindro" $V := T \times [0,b]$ para probar

$$2\iiint_V \left[(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \iint_T f(x,y,b)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

(d) Dedúzcase que $f(x,y,t) = 0$ para todo $(x,y) \in T$, $t \in [0,b]$.

19. (Septiembre 2000) Sean los campos vectorial $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ y escalar $r(x,y,z) = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) Si S es una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ que encierra una región V y $\vec{n}$ es el vector unitario normal exterior de S, pruébese

$$\iint_S r\langle\vec{r},\vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S = 4\iiint_V r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

(b) Compruébese el resultado anterior cuando S es una superficie esférica de radio R centrada en el origen.

20. Pruébese que los siguientes campos son conservativos, y mediante su función potencial, calcúlense las integrales

(a) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2+y)\,\mathrm{d}x + (x-4y)\,\mathrm{d}y$.

(b) $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$.

21. (Junio 2000) Sea $F(x,y,z) = (x^2+y^2, 2xy, 0)$ un campo vectorial definido sobre $\mathbb{R}^3$.

(a) ¿Es F conservativo en $\mathbb{R}^3$? Justifíquese. En caso afirmativo hállese su potencial ϕ.

(b) Evaluar:

i. $\int_{(1,2,1)}^{(2,0,-1)} F\,\mathrm{d}\alpha$.

ii. $\int_C \nabla\phi\,\mathrm{d}\alpha$, siendo C la curva intersección de las siguientes superficies $S_1 : z = x^2+y^2$ y $S_2 : x^2+y^2 = 4y$ indicando sobre una gráfica de la curva el sentido de recorrido elegido y siendo ϕ la función hallada en el apartado (a).

iii. $\iint_S \langle \mathrm{rot}(F), n\rangle\,\mathrm{d}S$, siendo S la superficie del paraboloide S_1 que se encuentra por debajo de la curva C del apartado (ii) y n normal a la superficie S.

22. (Junio 2000) Compruébese que se verifica el teorema de la divergencia (de Gauss) para el campo vectorial $F(x,y,z) = (1+2x, y, z)$ y la superficie cerrada $S = S_1 \cup S_2$, donde $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2, z \in [0,4]\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 16, z = 4\}$.

23. (Enero 2001. Grupo E) Sea la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, z = xy\}$ y C la curva frontera de S orientada de forma que su proyección sobre el plano XY esté orientada positivamente. Calcúlese $\oint_C \bar{F}\, d\alpha$ primero directamente y luego usando el teorema de Stokes, donde $\bar{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$.

24. (Junio 2001) Usando convenientemente el teorema de la divergencia, calcúlese el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}$ a través de la superficie abierta de ecuación $z = +\sqrt{25-x^2-y^2}$ sabiendo que existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $\mathbf{F} = \mathrm{rot}(\mathbf{G})$ y además que $\mathbf{F}(x,y,0) = (0, y, x-1)$. Indíquese en una gráfica la orientación elegida para el vector normal considerado.

25. (Septiembre 2001) Considérese el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y)$.

    (a) Pruébese que el campo $\mathbf{F}$ es conservativo y hállese su función potencial.

    (b) Considérese la curva $\mathbf{c}(t) = (\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿Es válido el siguiente razonamiento? Justifíquese brevemente.
    "Como $\mathbf{F}$ es conservativo, su rotacional es nulo. Entonces, si $\mathbf{n}$ denota el vector normal a la superficie S, $\int_C \mathbf{F}\, d\alpha = \iint_S \langle \mathrm{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{n}\rangle\, dS = 0$."

26. (Junio 2002)

    (a) Calcúlese el área del círculo de ecuación $x^2+y^2 \leq r^2$, $r > 0$.

    (b) Para el cilindro de ecuación $x^2+y^2 = r^2$, $0 \leq z \leq h$, con $r, h > 0$, calcúlese:

        i. el área de la superficie lateral y,

        ii. el volumen.

    (c) Sea S la superficie frontera del cilindro macizo $x^2+y^2 \leq r^2$, $0 \leq z \leq h$, con $r, h > 0$ y sea el campo vectorial $F(x,y,z) = (2x+y, xz, 3z+y^2)$. Hállense los valores de r y h que maximicen el flujo de F a través de S sabiendo que el área de S es 6π.

27. (Junio 2002) Sea F el campo vectorial plano

$$F(x,y) = \left(\frac{2x^3+2xy^2+y}{x^2+y^2}, \frac{2x^2y+y^3+x}{x^2+y^2}\right), \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

    (a) ¿Es conservativo en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$? Justifíquese.

    (b) Calcúlese la circulación de F a lo largo de cada una de las dos curvas siguientes:

$$\text{(i) } x^2+y^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad \text{(ii) } (x-3)^2 + \frac{y^2}{9} = 1.$$

28. (Septiembre 2002) Sea V el cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Sea S la superficie del cubo y sea $\mathbf{n}$ el vector normal unitario exterior a S.

(a) Demuéstrese que

$$\iint_S \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}S = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

para cualquier campo escalar f derivable cuantas veces sea preciso.

(b) Compruébese la igualdad del apartado (a) para el campo $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$.

29. (Junio 2003) Sea $S = S_1 \cup S_2$ la superficie dada por las superficies $S_1 : z = x^2 + y^2, \ 0 \leq z \leq 1$, $S_2 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, \ 1 \leq z \leq 2$.

   (a) Hállese el área de la superficie S.

   (b) Calcúlese el volumen de la región Q cuya frontera es la superficie S.

   (c) Un campo escalar $f(x, y, z)$ suficientemente diferenciable que no se anula en ningún punto tiene las propiedades siguientes: $||\nabla f||^2 = 4f$ y $\operatorname{div}(f \nabla f) = 10f$. Calcúlese la integral de superficie $\iint_S \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}S$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario que apunta hacia el exterior de S.

30. (Junio 2003) Sean $F(x, y) = (x + y^2, x^2)$ un campo vectorial y $C = C_1 \cup C_2$ la curva definida por $C_1 : x^2 + y^2 = 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0$ y C_2 : el segmento que une los puntos $(0, 1)$ y $(0, 1/2)$.

   (a) Utilícese el teorema de Green para calcular la integral curvilínea del campo vectorial F a lo largo de la curva C. Indíquese en una gráfica el sentido elegido.

   (b) Justificando la respuesta, dedúzcase de los cálculos previos si la integral de F que que va desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1/2)$ es independiente de la trayectoria.

31. (Septiembre 2003) La superficie lateral de la llamada "trompeta de Gabriel" viene dada por

$$r(u, v) = \left(\frac{1}{u} \cos(v), \frac{1}{u} \operatorname{sen}(v), u \right), \qquad u \in [1, b], \quad v \in [0, 2\pi]$$

(tómese $b > 1$) y las dos "tapas" que son

tapa inferior: $x^2 + y^2 = 1, \ z = 1,$ tapa superior: $x^2 + y^2 = 1/b^2, \ z = b.$

Sea S la unión de la superficie lateral y las dos tapas.

a) Hállese una representación del tipo $z = f(x, y)$ de la superficie y represéntese gráficamente.

b) Calcúlese el volumen encerrado por la superficie S mediante una integral múltiple.

c) Demuéstrese que el área total viene dada por

$$\pi + \frac{\pi}{b^2} + 2\pi \int_1^b \frac{\sqrt{1 + u^4}}{u^3} \, \mathrm{d}u.$$

d) Hágase tener b a $+\infty$ y demuéstrese que el área de la superficie tiende a infinito, mientras que el volumen permanece finito.

e) Considérese ahora la porción de la superficie lateral correspondiente a $v \in [0, \pi/2]$, $u \in [1, 2]$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, y, y)$. Calcúlese de dos modos distintos la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C, que es la frontera de la porción mencionada. Indíquese en una gráfica el sentido elegido para la orientación de C.

6 Sucesiones y series de funciones.

1. Estúdiese si existen los límites de las siguientes sucesiones de funciones:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-nx}, \qquad \lim_{n\to+\infty} xe^{-nx}, \qquad \lim_{n\to+\infty} x^2e^{-nx},$$

   para $x \geq 0$. En tal caso, ¿la convergencia es uniforme?

2. Sea $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ para $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Demuéstrese que la sucesión (f_n) converge uniformemente a una cierta función f.

   (b) Pruébese que la expresión $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ es correcta si $x \neq 0$; pero es falsa si $x = 0$.

3. Demuéstrese que la convergencia de la sucesión $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $x \in]0, +\infty[$ no es uniforme en $]0, +\infty[$; pero sí lo es en $[c, +\infty[$, siendo $c > 0$.

4. ¿Es uniforme la convergencia en $\mathbb{R}$ de la sucesión $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$?

5. Estúdiese si es uniforme en el intervalo [0,1] la convergencia de las sucesiones

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases} \qquad g_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{n+1}(1-x) & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

6. Demuéstrese que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ converge uniformemente en todo intervalo acotado; pero no converge absolutamente.

7. (a) Sea $h_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Pruébese que (h_n) converge uniformemente en $\mathbb{R}$ hacia cierta función que se deberá determinar.

   (b) Pruébese que (h_n^2) no converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Ésto demuestra que el producto de dos sucesiones uniformemente convergentes no tiene por qué serlo.

8. Sea $g_n(x) = nx(1-x^2)^n$ para $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Discútase la convergencia de (g_n) y $\left(\int_0^1 g_n(x)\,dx\right)$. Conclúyase que no siempre es posible intercambiar el límite por la integral.

9. (Junio 1999) Dado $x > 0$, se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. (Obsérvese que **no** es una serie de potencias.)

   (a) Pruébese que la serie converge si y solamente si $x > 1$.

   (b) A la vista de lo anterior, se puede definir $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Pruébese que la convergencia es uniforme en $[x_0, +\infty[$, donde $x_0 > 1$. (Sugerencia: úsese el criterio M de Weierstrass. Dedúzcase que f es continua en $]1, +\infty[$.)

   (c) Pruébese que $f'(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^x}$ para $x > 1$ dando un argumento preciso.

P 11

(d) Pruébese $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. (Sugerencia: considérese $\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\cdots$ y obténgase una cota superior mediante el área encerrada por la curva $h(t) = \frac{1}{t^2}$ en $]1,+\infty[$. Calcúlese el área y conclúyase $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\cdots = 0$.)

10. Sea $f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{e^{-tx}\operatorname{sen} t}{t} & t \neq 0, \\ C(x) & t = 0. \end{cases}$$

(a) ¿Qué valor hay que dar a $C(x)$ para que f sea continua? Para este valor de $C(x)$, calcúlese $\partial f/\partial x$. ¿Es $\partial f/\partial x$ continua?

(b) Pruébese que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ es convergente para todo $x \geq 0$.

(c) Sea $F_n(x) = \int_0^{n\pi} f(x,t)\, dt$. Pruébese que

$$F_n'(x) = \frac{(-1)^n e^{-n\pi x}}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2}.$$

(d) Hállese el límite puntual (para los valores de $x \geq 0$ para los que exista dicho límite) de $(F_n'(x))_{n=1}^\infty$. Pruébese que la convergencia es uniforme en $[x_0,+\infty[$, siendo $x_0 > 0$. ¿Es uniforme en $]0,+\infty[$?

(e) Dedúzcase de lo anterior

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\operatorname{sen} t}{t} = -\operatorname{arctg} x + K, \qquad \forall\, x > 0.$$

11. Determínese el radio de convergencia y la convergencia en los puntos de la frontera de las siguientes series ($0 < a < 1$):

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{2^n}, \quad \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)2^n}, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}, \quad \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{2n},$$

$$\sum_{n=0}^\infty (1-(-2)^n)x^n, \quad \sum_{n=0}^\infty a^{n^2}x^n, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{3\sqrt{n}\,x^n}{n}.$$

12. Observando que $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ es una serie geométrica, hállese el radio de convergencia y compruébese que su suma es $\frac{1}{1+x^2}$ para los x tales que la serie converge. Dedúzcase la serie de Taylor de $\operatorname{arctg} x$.

13. Encuéntrese la expansión en serie de Taylor de $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

14. Sea $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Supóngase que esta función admite un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x_0 = 0$; es decir

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n, \qquad x \in]-\delta,\delta[.$$

El objetivo del problema es calcular los coeficientes (a_n) sin hallar la derivada n-ésima de $f(x)$. Para ello obsérvese que

$$x = (e^x - 1)(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n), \qquad x \in]-\delta, \delta[.$$

Úsese ahora la expansión de $e^x - 1$ y el producto de Cauchy para probar

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

Calcúlese a_0, a_1, a_2, a_3.

15. (Septiembre 2000) Sea $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

 (a) Si $\alpha > 1/2$, pruébese que la serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$. (Sugerencia: $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.)

 (b) Pruébese que: $\displaystyle\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nt^2)}{2n^2}$ para $t \geq 0$.

16. (Junio 2000) Considérese la serie $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nt}$, siendo $t \geq 1$.

 (a) Utilícese el criterio integral de Cauchy para demostrar que la serie converge.

 (b) Pruébese que la serie converge uniformemente en $[1, +\infty[$.

 (c) Demuéstrese que $\displaystyle\int_1^x f(t)\, dt = \frac{1}{e-1} - \frac{1}{e^x - 1}$. Dedúzcase $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ para $x > 1$. (Ayuda: para este apartado se necesita usar que si $|r| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$.)

17. El objetivo de este problema es encontrar una fórmula no recurrente para la sucesión de **Fibonacci** (¡usando series de funciones!). La sucesión de Fibonacci se define como

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \; n \geq 0.$$

 (a) Pruébese $a_n \leq 2^n$ para $n \in \mathbb{N}$. (Ayuda: Esto se puede hacer de dos modos, bien por inducción o bien probando previamente $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 2$ para $n \in \mathbb{N}$.)

 (b) Dedúzcase que la serie $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente (como mínimo) en $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. (De hecho converge en un intervalo mayor, como veremos al final del problema).

 (c) Encuéntrense constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(x^2 + ax + b)f(x) = -1$, para $|x| < \frac{1}{2}$.

 (d) Hállese la serie de Taylor de $\frac{-1}{x^2+x-1}$ alrededor del cero. (Ayuda: descompóngase esta fracción en suma de fracciones simples.)

P 12

(e) Hállese, igualando la serie de Taylor de $f(x)$ con la de $\frac{-1}{x^2+x-1}$, una fórmula explícita para a_n. (Nota: una forma posible de expresar la solución final es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^{n+1} - (1-\Phi)^{n+1}\right], \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

donde $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la **razón áurea**[5].)

(f) Determínese el radio de convergencia de la serie que define a $f(x)$.

18. El objetivo de este problema es estudiar la **serie binómica**. Sea la función real a valores reales dada por $f(x) = (1+x)^\alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Demuéstrese que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).\cdots.(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

El número así obtenido es el coeficiente de x^n en el desarrollo de $(1+x)^\alpha$. Se denomina coeficiente binómico y se denota por

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).\cdots.(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

(b) Demuéstrese que la serie binómica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

tiene radio de convergencia 1.

Se deduce entonces que la serie binómica converge en el intervalo abierto $]-1,1[$, definiendo en él una función infinitamente diferenciable. Lo que se debe probar a continuación es que la función definida por la serie es realmente $(1+x)^\alpha$.

(c) Compruébese la identidad

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n}.$$

(d) Úsese la identidad anterior para demostrar que la suma de la serie binómica

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n, \qquad -1 < x < 1$$

satisface la ecuación diferencial

$$(1+x)\Phi'(x) = \alpha\Phi(x)$$

Ahora se puede probar el resultado principal.

[5] Fue llamada de esta manera por los griegos, ya que pensaban que la planta de un edificio con esta proporción era la más estética posible.

(e) Resolviendo la ecuación diferencial a variables separables anterior, demuéstrese que

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad \text{para} \qquad -1 < x < 1.$$

Como aplicación, desarrollar las siguientes expresiones en potencias de x hasta x^4:

i. $\sqrt{1+x}$.

ii. $\sqrt{1+x^2}$.

19. (Enero 2001. Grupo E) Encuéntrese la serie de Taylor de $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^t-1}{t}\,dt$. A partir de esta serie, hállese $f^{(n)}(0)$ para $n \in \mathbb{N}$ (sin usar la teoría de integración paramétrica).

20. (Junio 2001) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$.

(a) Encuéntrese su radio de convergencia y analícese la convergencia en los extremos del intervalo. Indíquese dónde hay convergencia uniforme de la serie.

(b) Obténgase la suma de la serie que representa a $f(x)$. Justifíquense los pasos. (Ayuda: previamente obténgase una serie de potencias para: $\int_0^x f(t)\ dt$.)

(c) A partir de los apartados anteriores, súmese la serie: $\frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$.

21. (Septiembre 2001) Sea $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2} = x \cdot \dfrac{1}{1-(-x^2)}$.

(a) A partir de la serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x_0 = 0$, hállese la serie de Taylor de $f'(x)$. Indíquese la región de $\mathbb{R}$ donde la serie de $f(x)$ converge.

(b) Dedúzcase el valor de $f^{(2001)}(0)$.

22. (Junio 2002) Sean $f, g :]-\delta, \delta \to \mathbb{R}$ funciones derivables que cumplen $f' = g$, $f = g'$, $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ y $\delta > 0$. Supóngase que f y g admiten desarrollo de Taylor en el intervalo $]-\delta, \delta[$.

(a) Encuéntrese el desarrollo de Taylor alrededor de $x_0 = 0$ de $f(x)$.

(b) Úsese el apartado anterior para obtener la serie de Taylor de g alrededor de $x_0 = 0$.

(c) ¿Dónde convergen las series anteriores?

23. (Septiembre 2002) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de clase infinito que cumple

$$f(x) = a - \int_b^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Exprésese $f'(x)$ mediante una integral que contenga sólo a $f(t)$. Justifíquese.

(b) Calcúlese $f''(x)$. Justifíquese.

(c) Suponiendo que la función f admite desarrollo de Taylor alrededor de $x_0 = b$,

i. Hállese este desarrollo y

ii. calcúlese el radio de convergencia de la serie.

(d) Identifíquese con una función elemental, la suma de la serie para f obtenida en (c).

P 13

24. (Junio 2003) Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{12} + \cdots + \dfrac{x^n}{(n-1)n} + \cdots$

    (a) Por derivación sucesiva de la serie de f, calcúlese la función f mediante funciones elementales.

    (b) ¿Se puede usar la serie para aproximar $f(0'5)$? ¿Y para $f(1'5)$? Justifíquese.

25. (Septiembre 2003) El objetivo de este ejercicio es calcular la suma de la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}. \qquad (1)$$

Para ello considérese una serie de potencias adecuada, calcúlese su radio de convergencia y, mediante la técnica de derivación o integración término a término, calcúlese su suma. Luego, particularícese para un valor adecuado para hallar la suma de (1).

Problemas de Análisis vectorial.

1. Integrales Impropias

1. • $\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x + x^{3/2}}$

$$\frac{1}{x(1+\sqrt{x})} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+\sqrt{x}}$$

$$1 = A(1+\sqrt{x}) + B(x)$$

$x=0$ $1 = A$

$$1 = 1 + \sqrt{x} + Bx$$

$$0 = Bx + \sqrt{x}$$

$$B = -\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{x} - \frac{1/\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{x} - \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1/\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$= \lim_{t\to+\infty} \left[\ln|x|\right]_0^t + \lim_{t\to+\infty} 2\int_0^t \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}$

$= \lim_{t\to+\infty} \left[\ln|x|\right]_0^t + \lim_{t\to+\infty} 2\left[\ln|1+\sqrt{x}|\right]_0^t$

$= +\infty$ diverge

• $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = \int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_1^\infty \frac{2}{x^2+1}$

$= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x}{x^2+1}\,dx + \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{2}{x^2+1}$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\int_1^t \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \lim_{t\to+\infty} 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_1^t + \lim_{t\to+\infty} 2\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_1^t$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+1}{2} + \lim_{t\to+\infty} 2(\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 1)$

$= (+\infty) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= +\infty$ diverge

• $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} 1/x}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \cancel{\left[\ln(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^\infty} \ldots$

$\cancel{-\int \frac{\ln x}{x}\cos\frac{1}{x}}$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^{x}} = (L'H)\ \frac{x^{\alpha-2}}{e^{x}} = (L'H) \text{ hasta } \frac{1}{e^x x^{algo}} = 0$$

$$\lim \frac{e^{-x}x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{x^2 x^{\alpha-1}}{e^x} = \lim \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} \xrightarrow{L'H} \text{muchas veces} = 0$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x}\, dx$$

DIRICHLET
- f continua
- tiene primitiva F
- F acotada
- g' continua
- g decrece
- $\lim g = 0$

$\operatorname{sen}(1/x)$ continua
$\operatorname{sen}(1/x)$ tiene primitiva ?
$\int \operatorname{sen}(1/x)\,dx = -$ [illegible]
no lo se!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x} \underset{L'H}{=} \frac{\ln x \cos(1/x)}{1}$$

no existe el límite

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen} x}{1+x^2}\, dx \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)\cdot\operatorname{sen} x}{1+x^2} = \lim \Big[\underbrace{\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x}_{\text{acotado}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\to 0}\Big] = 0$$

partes $\displaystyle\int_1^{\infty} \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(x)\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\, \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(x)\Big|_1^{\infty} - \int \operatorname{arctg} x$

13. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{h^2+x^2}}\, dx$$

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{(2+x)^2(1-x)}}\, dx \qquad \text{siendo } f(x) = \begin{cases} \cos(4\pi x) & x\in[-1,1] \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(4\pi x)}{\sqrt[3]{(2+x)^2(1-x)}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(4\pi x)}{(2+x)^{3/2}\sqrt[3]{(1-x)}}$$

$(4+4x+x^2)(1-x)$
$(4+\cancel{4x}+x^2-\cancel{4x}-4x^2+x^3)$
$4-3x^2+x^3$

$$= \cancel{\int_{-1}^{1} \frac{\cos(4\pi x)}{\sqrt[3]{4-3x^2+x^3}}}$$

$\cos(4\pi x)$ continua [illegible] $[-1,1[$
tiene primitiva acotada $[-1,1[$

$\cancel{g = (4-3x^2+x^3)^{-1/3}}$

$\cancel{g' = -\frac{1}{3}(-6x+3x^2)(4-3x^2+x^3)^{-4/3}}$

$\cancel{g' = \frac{-x^2+2x}{\sqrt[3]{(4-3x^2+x^3)^4}}}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{\cos(4\pi x)}{(2+x)^{3/2}\cancel{\sqrt[3]{(1-x)}}}}{\dfrac{1}{\cancel{\sqrt[3]{1-x}}}} = \frac{\cos 4\pi}{3^{3/2}}$$

se comportan igual → conv

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2+x)^{2/3}\sqrt[3]{(1-x)}} \qquad \lim \frac{1}{(2+x)^{2/3}\sqrt[3]{1-x}} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{4-3x^2+x^3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}} = 0$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}}$$

$$\text{comp} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1\cancel{+}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}} = 1$$

se comportan igual $\Rightarrow$ diverge

14. (Enero 2001)

a) $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ – continua
$|f(t)| \leq Me^{ct}$

estudiemos la convergencia absoluta:

$\int_0^\infty \frac{|f(t)|}{e^{st}} dt$ se comporta igual que $\int_T^\infty \frac{|f(t)|}{e^{st}} dt$

$$\int_T^\infty \frac{|f(t)|}{e^{st}} dt \leq \int_T^\infty M \frac{e^{ct}}{e^{st}} dt = \int_T^\infty M \frac{1}{e^{(s-c)t}} dt$$

$$= M \int_T^\infty \frac{1}{e^{(s-c)t}} dt = \cancel{M \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{(c-s)t} dt = M \lim \left[\frac{1}{c-s} e^{(c-s)t}\right]_0^t}$$

converge si $s - c > 0 \leftrightarrow s > c$

b) $I_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt \qquad n \in \mathbb{N}, \; s > 0$

converge siempre, pues $\cancel{|t^n| \leq Me^{ct}}$ para $t > T$

$\cancel{\frac{|T^n|}{M} = e^{cT}}$

$\cancel{\ln \frac{T^n}{M} = cT}$

$\cancel{c = \frac{\ln\left(\frac{T^n}{M}\right)}{T}}$

$$I_n(s) = -\frac{1}{s} e^{-st} t^n \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} n \, t^{n-1} dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-st}}{s} t^n\right]_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt$$

$$= [\, 0 - 0 \,] + \frac{n}{s} I_{n-1}(s)$$

$$\boxed{I_n(s) = \frac{n}{s} I_{n-1}(s)}$$

supongamos que se cumple para n

$$I_n(s) = \frac{n}{s} I_{n-1}(s)$$

$$= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} I_{n-2}(s) = \dots = \frac{(n)(n-1)\dots(2)}{s^{n-1}} I_1(s) = \frac{n!}{s^{n-1}} I_1(s)$$

como $I_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} t \, dt = \left[\frac{1}{s} e^{-st} t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-st} dt$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

$$I_n(s) = \frac{n!}{s^{n-1}}\frac{1}{s^2} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

15. (Junio 2002)

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} e^{-x^2} dx = \int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 e^{x^2}}$$

a) $[0,1)$ entre $[0,1)$ $\operatorname{sen} x \geq 0 \rightarrow$ se puede aplicar comparación $|\operatorname{sen} x| \sim x$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 e^{x^2}} \text{ comp } \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x^2 e^{x^2}}}{\frac{1}{x^1}} = \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \frac{x^1}{e^{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^1 e^{x^2}} = \lim \frac{x}{x} = 1$$

como $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ div $\longrightarrow \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 e^{x^2}} dx$ ~~conv abs → conv.~~ div

b) $\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2 e^{x^2}} dx$ comp $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2 e^{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{|\operatorname{sen} x|}{e^{x^2}} = 0$

como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ conv $\longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 e^{x^2}} dx$ conv abs $\rightarrow$ conv

c) como no converge en los casos anteriores, no converge

16. (Junio 2003)

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{(2+x)^2(1-x)}} dx \qquad f(x) = \begin{cases} \cos(4\pi x) & x \in [-1,1[\\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

analicemos

IMPROPIA DE 2ª ESP en $x=1$

positivo en $[-1,1)$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos 4\pi x}{\sqrt[3]{(2+x)^2(1-x)}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos 4\pi x \; dx}{\sqrt[3]{(4+2x+x^2)(1-x)}}$$

positivo en $[1,1[$

$$(2+x)^2 > 0 \qquad 1-x > 0 \qquad 1 > x$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\cos 4\pi x}{\sqrt[3]{4+2x+x^2-4x-2x^2-x^3}} = \int_{-1}^{1} \frac{\cos 4\pi x}{\sqrt[3]{-x^3-x^2-2x+4}} dx$$

comparando ($\cos 4\pi x > 0 \ \forall x \in [-1,1]$)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\cos 4\pi x}{\sqrt[3]{x^3(-1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3})}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\cos 4\pi x}{\cancel{x}\sqrt[3]{-1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}}}{\frac{1}{\cancel{x}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = -1$$

se comportan igual $\Rightarrow$ diverge

Tema 1.

11. $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

$\underline{\underline{q\neq 1}}$ $= \int_0^1 \left(x^{\frac{p-1}{q-1}}(1-x)\right)^{q-1} dx$

$\underline{=}_{\text{mal.}} \int_0^1 \left(x^{\frac{p-1}{q-1}} - x^{\frac{q+p-2}{q-1}}\right) dx$

$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}} \frac{1}{(1-x)^{1-q}}\,dx$

comparación con x^{1-p}

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{x^{1-p}}}\frac{1}{(1-x)^{1-q}}}{\frac{1}{\cancel{x^{1-p}}}} = \lim \frac{1}{(1-x)^{1-q}} = \frac{1}{1^{1-q}} = 1 \quad \forall q \in \mathbb{R}$

luego ~~...~~ $\beta(p,q)$ se comporta igual que

$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}}dx \longleftrightarrow$ converge si $1-p<1 \longleftrightarrow p>0$

12. (Junio 2000)

$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \left.\frac{\operatorname{sen} x}{1+x}\right|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{\operatorname{sen} x}{(1+x)^2}dx$

$\underline{\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{(1+x)^2}dx$

(b)

$\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{(1+x)^2}\right| dx = \int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{(1+x)^2}dx$

como el integrando $\geq 0 \to$ comparación

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{|\operatorname{sen} x|}{1+2x+x^2}}{\frac{1}{x^{1'5}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|\, x^{1'5}}{1+2x+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|\, x^{1'5}}{x^{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{x}\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)}_{\text{tiende a } 1}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{|\operatorname{sen} x|}_{\text{acotado}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)}}_{\to 0} = 0$

como $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1'5}}$ converge $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{(1+x)^2}dx$ converge

$\leftarrow a>0$!!!

$\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{(1+x)^2}dx = \underbrace{\int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{(1+x)^2}}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{|\operatorname{sen} x|}{(1+x)^2}}_{\text{integral PROPIA converge}}$

por tanto $\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{(1+x)^2} dx$ conv. abs $\Longrightarrow \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{(1+x)^2}$ conv

13. (Septiembre 2000)

$$V(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{h^2+x^2}} dx \qquad \underline{\underline{h>0}}$$

(a) $f(x) = 1$

$$V(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} dx$$

comparación

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2\left(\frac{h^2}{x^2}+1\right)}}}{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\frac{1}{x\sqrt{\frac{h^2}{x^2}+1}}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} dx$ se comporta igual que $\int_1^\infty \frac{1}{x} \longrightarrow$ diverge

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x^{2\alpha}}$ $\qquad \underline{\underline{\alpha \geq 0}}$

$$V(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^{2\alpha})\cdot\sqrt{h^2+x^2}} dx$$

si ~~pero~~ distingo casos para $\int_1^\infty$, se comporta igual que $\int_{-\infty}^{-1}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{\infty}$$

$\int_{-1}^{1}$ → PROPIA (no hay maldad en cero)

por simetría se comportan igual (es función par)

estudio sólo $\int_1^\infty \frac{1}{(1+x^{2\alpha})\cdot\sqrt{h^2+x^2}} dx$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^{2\alpha})\, x\sqrt{\frac{h^2}{x^2}+1}} = \int_1^\infty \frac{1}{(x+x^{2\alpha+1})\sqrt{\frac{h^2}{x^2}+1}}$$

comparación

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x+x^{2\alpha+1})\sqrt{\frac{h^2}{x^2}+1}}}{\frac{1}{x^{2\alpha+1}}} = \lim \frac{\frac{1}{\cancel{x^{2\alpha+1}}\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}+1\right)\sqrt{\frac{h^2}{x^2}+1}}}{\frac{1}{\cancel{x^{2\alpha+1}}}} = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}+1\right)\sqrt{\frac{h^2}{x^2}+1}}$$

$= 1$ se comporta igual que $\frac{1}{x^{2\alpha+1}}$ converge $\Longleftrightarrow 2\alpha+1>1$ $\quad$ 1 $\quad$ 1

$\Longleftrightarrow \boxed{\alpha \geq 0}$

Tema 2 – Integración paramétrica

11. Septiembre 2000

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \quad \text{para } \alpha > 1$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2-\cos x)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{(\alpha - \cos x)} = \frac{-1}{(\alpha-\cos x)^2}$$

$f(x,\alpha) = \frac{1}{\alpha - \cos x}$ continua $\alpha > 1$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{1}{(\alpha-\cos x)^2}$ continua

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2} = \int_0^{\pi} -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{dx}{\alpha-\cos x}\right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha-\cos x}}$$

$$\cancel{\int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha-\cos x} = \int_0^{\pi}(\alpha-\cos x)^{-1}dx}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\pi(\alpha^2-1)^{-1/2}$$

$$= + \pi(-1/2)(2\alpha)(\alpha^2-1)^{-3/2}$$

$$= \frac{\pi}{(\alpha^2-1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1} = \int \frac{\partial}{\partial\alpha} + f(x_1,\alpha)\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} - f(x_0,\alpha)\frac{\partial x_0}{\partial\alpha}$$

12. Junio 2000

$$G(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x^2}\right) dt \qquad x \in [1,2]$$

$\int \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x^2}\right)$ por partes

$$\int_0^{x^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x^2}\right)dt = x \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x^2}\right)\Big|_0^{x^2} - \int_0^{x^2} x\,\frac{\frac{-2t}{x^3}}{1+\left(\frac{t}{x^2}\right)^2}\,dt$$

$$= x \operatorname{arctg} 1 + \int_0^{x^2}\frac{\frac{2t}{x^2}}{\frac{x^4+t^2}{x^4}}\,dt$$

$$= x\operatorname{arctg} 1 + \int_0^{x^2}\frac{2t\,dt}{\frac{x^4+t^2}{x^2}} = \cancel{x\operatorname{arctg}1 + \left[\ln|x^2+t^2|\right]_0^{x^2}}$$

$$\cancel{= x\operatorname{arctg}1 + \ln\frac{|x^2+x^4|}{|x^2|} = x\operatorname{arctg}1 + \ln\left|\frac{x^2(x^2+1)}{x^2}\right|}$$

$$\cancel{\boxed{G(x) = x\operatorname{arctg}1 + \ln|1+x^2|}}$$

$= x \operatorname{arctg} 1 + \int_0^{x^2} \frac{2t}{x^2 + \frac{t^2}{x^2}} dt$

$= x \operatorname{arctg} 1 + x^2 \int_0^{x^2} \frac{2t/x^2}{x^2 + \frac{t^2}{x^2}} dt$

$= x \operatorname{arctg} 1 + x^2 \left[\ln \left| x^2 + \frac{t^2}{x^2} \right| \right]_0^{x^2}$

$= x \operatorname{arctg} 1 + x^2 \ln \left| \frac{x^2+1}{x^2} \right|$

$= x \operatorname{arctg} 1 + x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x^2} \right|$

$\int_0^{x^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x^2}\right) dt = \left[t \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x^2}\right) \right]_0^{x^2} - \int_0^{x^2} t \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{t^2}{x^4}}$

$= x^2 \operatorname{arctg} 1 - \int_0^{x^2} \frac{t/\cancel{x^2}}{\frac{x^4+t^2}{x^{\cancel{4}2}}} dt = x^2 \operatorname{arctg} 1 - \int_0^{x^2} \frac{t}{\frac{x^4+t^2}{x^2}} dt$

$= x^2 \operatorname{arctg} 1 - x^2 \int_0^{x^2} \frac{t\, dt}{x^4+t^2} = x^2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{x^2}{2} \int_0^{x^2} \frac{2t}{x^4+t^2} dt$

$= x^2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{x^2}{2} \left[\ln |x^4 + t^2| \right]_0^{x^2}$

$= x^2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{x^2}{2} \left[\ln \left| \frac{2\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} \right| \right]$

$G(x) = x^2 \left[\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right] = 0'4388\ldots\, x^2$

ejeeeeeeem!!!

¿¿¿porq dicen si es continua en $\sqrt{2}$???!

aaAaaaaAAaAa

3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1+\alpha \operatorname{sen}^2 x)^2}\,dx$ por derivación de $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\alpha \operatorname{sen}^2 x}$

en efecto, sea $f(x,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha \operatorname{sen}^2 x}$

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 x - 0}{(1+\alpha \operatorname{sen}^2 x)^2}$$

se pide

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$$

Hipotesis de leibniz

$f(x,\alpha) = \frac{1}{1+\alpha \operatorname{sen}^2 x}$ continua ? para $\alpha > 0$ suponemos

recordar $x \in [0, \pi/2]$

$\operatorname{sen} x \in [0,1]$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ continua $\forall \alpha > 0$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_0^{\pi/2} f\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\alpha \operatorname{sen}^2 x}\,dx = \begin{cases} u = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} u \\ dx = \frac{1}{1+u^2}\,du \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{u^2}{1+u^2} \end{cases} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1/1+u^2}{1+\frac{\alpha u^2}{1+u^2}}\,du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2+\alpha u^2}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{(1+\alpha)}\,u)^2} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+(\sqrt{1+\alpha}\,u)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1+\alpha}\,u)\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{1+\alpha}\,t) - \operatorname{arctg} 0\right) \\
&= \frac{\pi/2}{\sqrt{1+\alpha}}
\end{aligned}}$$

$\cancel{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$\cancel{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}}$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

$= 1 - \frac{1}{1+u^2}$

$= \frac{u^2}{1+u^2}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\pi}{2}(1+\alpha)^{-1/2}$$

$$= \frac{\pi}{\cancel{2}}(-1/\cancel{2})(1+\alpha)^{-3/2} = \frac{-\pi}{4(1+\alpha)^{3/2}}$$

4. Cálculese $\int_0^{\pi/2}$

$$f(x,y) = \log(1-2x\cos y + x^2) \quad (x,y)\in[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\times[0,2\pi]$$

$$G(x) = \int_0^{2\pi} f(x,y)\,dy \qquad \underline{x \text{ es el parámetro}}$$

Hipotesis

Primero • $f(x,y)$ continua?

$$1-2x\cos y + x^2 = 0$$

$$(x-\cos y)^2 - \cos^2 y + 1 = 0$$

$$(x-\cos y)^2 + \operatorname{sen}^2 y = 0$$

$$x - \cos y = 0 \to \cos y = x$$

$$\operatorname{sen} y = 0 \to y = k\pi \longrightarrow \cos k\pi = x = (-1)^k$$

no pertenece a $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

luego $1-2x\cos y + x^2$ no se anula en $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$1-2x\cos y + x^2$ es siempre ≥ 0, pues en $0 \to 1>0$

$f(x,y)$ continua

• $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ continua?

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{-2\cos y + 2x}{\underbrace{1-2x\cos y + x^2}_{>0}} \quad \text{continua}$$

Calculese $G'(x)$

$$G'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dy = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{2x-2\cos y}{1-2x\cos y + x^2}\,dy =$$

PISTA DEL EJERCIO : calcular $\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2} = \frac{\frac{x\operatorname{sen} y\cdot x\operatorname{sen} y-(-x\cos y)(1-x\cos y)}{(1-x\cos y)^2}}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{(x\operatorname{sen} y)^2 + x\cos y - (x\cos y)^2}{(1-x\cos y)^2}}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2} = \frac{\frac{x^2(\operatorname{sen}^2 y-\cos^2 y)+x\cos y}{(1-x\cos y)^2}}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2}$$

retrocediendo un poco

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \frac{x \operatorname{sen} y}{1-x\cos y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x \operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x \operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right) &= \frac{x \operatorname{sen} y\,(x \operatorname{sen} y) - (x\cos y)(1-x\cos y)}{(1-x\cos y)^2} \\ &= \frac{x^2\operatorname{sen}^2 y - x\cos y + x^2\cos^2 y}{(1-x\cos y)^2} \\ &= \frac{x^2 - x\cos y}{(1-x\cos y)^2} = \frac{x(x-\cos y)}{(1-x\cos y)^2} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \frac{x \operatorname{sen} y}{1-x\cos y} = \frac{x(x-\cos y)}{(1-x\cos y)^2+(x\operatorname{sen} y)^2} = \frac{\frac{x(x-\cos y)}{(1-x\cos y)^2}}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2}$$

$$G'(x) = \int_0^{2\pi} \frac{2x-2\cos y}{1-2x\cos y+x^2}\,dy$$

$$\begin{aligned} &1-2x\cos y + x^2 \\ &(1-x\cos y)^2 - x^2\cos^2 y + x^2 \\ &(1-x\cos y)^2 + x^2(1-\cos^2 y) \\ &(1-x\cos y)^2 + (x\operatorname{sen} y)^2 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2(x-\cos y)\,dy}{(1-x\cos y)^2+(x\operatorname{sen} y)^2} = \frac{2}{x}\int_0^{2\pi} \frac{x(x-\cos y)}{(1-x\cos y)^2+(x\operatorname{sen} y)^2}$$

$x \neq 0$

para $(1-x\cos y)^2 \neq 0$ SIEMPRE $\forall\ (x,y) \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times[0,2\pi]$

$$= \frac{2}{x}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{x(x-\cos y)}{(1-x\cos y)^2}}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right)^2}\,dy = \frac{2}{x}\left[\operatorname{arctg}\frac{x\operatorname{sen} y}{1-x\cos y}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

$x=0$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2\cos y}{1} = 2\operatorname{sen} y\Big|_0^{2\pi} = 0$

$G'(x) = 0 \rightarrow G$ cte

$G(0) = \int_0^{2\pi} \ln 1\,dy = 0$

$\rightarrow G(x) = 0 \quad \forall\, x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x\,\mathrm{sen}^2 y)}{\mathrm{sen}^2 y} & y \neq 0 \\ x & y = 0 \end{cases}$$

$\boxed{K = [-\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{4}]}$

Si $G(x) = \int_0^{\pi/4} f(x,y)\,dy$ para $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$

pruébese que
$$G'(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{dy}{1+x\,\mathrm{sen}^2 y}$$

Hipotesis:

- $f(x,y)$ continua ?

$1 + x\,\mathrm{sen}^2 y > 0 \quad \forall (x,y) \in [-\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+x\,\mathrm{sen}^2 y)}{\mathrm{sen}^2 y} = \cancel{\lim_{y\to 0}}$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$

$\mathrm{sen}^2 x = \cos^2 x - \cos 2x$

$\cos 2x = 1 - \mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}^2 x$

$2\,\mathrm{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$

$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\text{l'h} \rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{2x\cos y\,\mathrm{sen}\,y}{1+x\,\mathrm{sen}^2 y}}{2\cos y\,\mathrm{sen}\,y} = \lim_{y\to 0} \frac{x}{1+x\,\mathrm{sen}^2 y}$$

$$= x = f(x,0)$$

$\boxed{\text{SI ES CONTINUA}}$

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua ?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2 y} \cdot \frac{\mathrm{sen}^2 y}{1+x\,\mathrm{sen}^2 y} = \frac{1}{1+x\,\mathrm{sen}^2 y} \qquad y \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$$

$\boxed{\text{SI ES CONTINUA}}$

$$G(x) = \int_0^{\pi/4} \cancel{\log(1+x\,\mathrm{sen}^2 y)} \, f(x,y)\, dy$$

$$G'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\pi/4} f(x,y)\, dy$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\, dy$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+x\,\mathrm{sen}^2 y}\, dy \quad \checkmark$$

deduzca $\quad G(x) = 2\sqrt{1+x}\ \mathrm{arctg}(\sqrt{1+x}) - \ln(1+\frac{x}{2}) - \frac{\pi}{2}$

AYUDA: Cambio de variable $u = \mathrm{tg}\, y$

$$G'(x) = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+x\,\mathrm{sen}^2 y}\, dy = \begin{cases} u = \mathrm{tg}\, y \\ y = \mathrm{arctg}\, u \\ dy = \frac{1}{1+u^2}\, du \\ \mathrm{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y \\ \qquad = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} \\ \qquad = 1 - \frac{1}{1+u^2} \\ \mathrm{sen}^2 y = \frac{u^2}{1+u^2} \end{cases}$$

$\mathrm{tg}\, y = 1 \quad y = \pi/4$

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \mathrm{tg}^2 y \\ \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \cos^2 y \end{matrix}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{xu^2}{1+u^2}} \frac{1}{1+u^2}\, du = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2+xu^2}\, du = \cancel{\int_0^1 \frac{1}{1+2u^2} du}$$

$$\cancel{= \int_0^1 \frac{1}{1+(\sqrt{2}u)^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\, \sqrt{2}u \Big|_0^1}$$

$$\cancel{G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\sqrt{2}}$$

$$\cancel{G(x) - G(0) = \int_0^x \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\, dx}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+(1+x)u^2}\, du = \int_0^1 \frac{1}{1+(\sqrt{1+x}\,u)^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\ \mathrm{arctg}\sqrt{1+x}\,u \Big|_0^1$$

$$G'(x) = \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$G(x) - G(0) = \int_0^x \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\, dx$$

$$= \left(2\sqrt{1+x}\ \mathrm{arctg}\sqrt{1+x} \Big|_0^x\right) - \int_0^x \frac{2\sqrt{1+x}\ \frac{1/2}{\sqrt{1+x}}}{1+1+x}$$

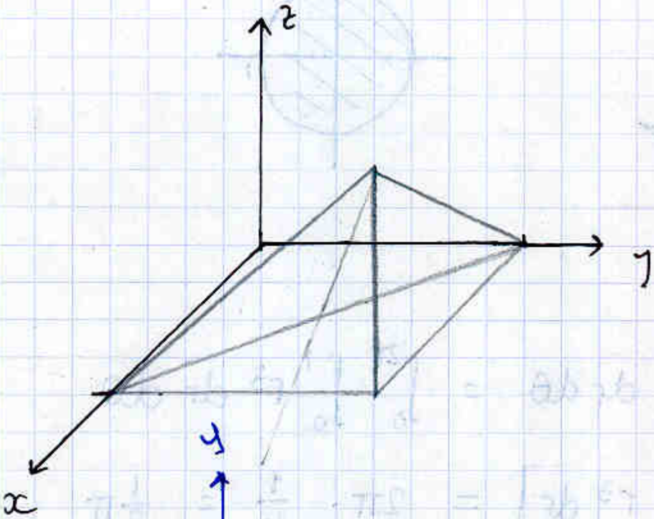
$$= \left(2\sqrt{1+x}\ \mathrm{arctg}\sqrt{1+x} - \frac{2\pi}{4}\right) - \ln|2+x| \Big|_0^x$$

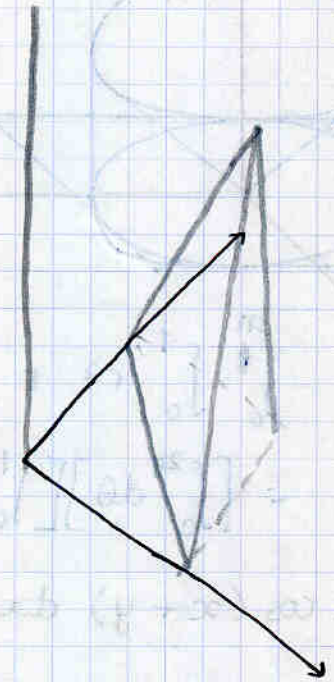
$$G(x) = 2\sqrt{1+x}\ \mathrm{arctg}\sqrt{1+x} - \frac{\pi}{2} - \ln 1 + \frac{1}{2}x + G(0)$$

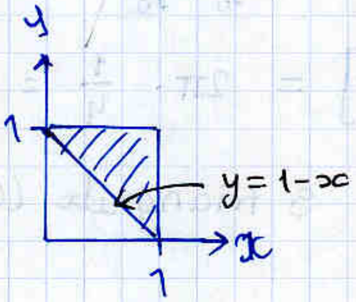
$$G(0) = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln 1}{\mathrm{sen}^2 y}$$

Integrales multiples.

2. $f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{si } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{en los demas puntos } Q \end{cases}$ $\quad Q = [0,1]\times[0,1]$







$$V = \int_0^1 \int_{1-x}^{1} 1-x-y \; dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[y - xy - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_{1-x}^{1} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(1 - x - \tfrac{1}{2}\right) - \left((1-x) - x(1-x) - \tfrac{1}{2}(1-x)^2 \right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 1 - x - \tfrac{1}{2} - 1 + x + x - x^2 + \tfrac{1}{2}(1 - 2x + x^2))$$

$$\cancel{= \int_0^1 \left(-x^2 - \tfrac{x^2}{2} - x^2 + \tfrac{1}{2}x^2\right) + (x + x + x - x) + \left(-1 + \tfrac{1}{2}\right))}$$

$$\cancel{= \int_0^1 -2x^2 + 2x - \tfrac{1}{2}\, dx}$$

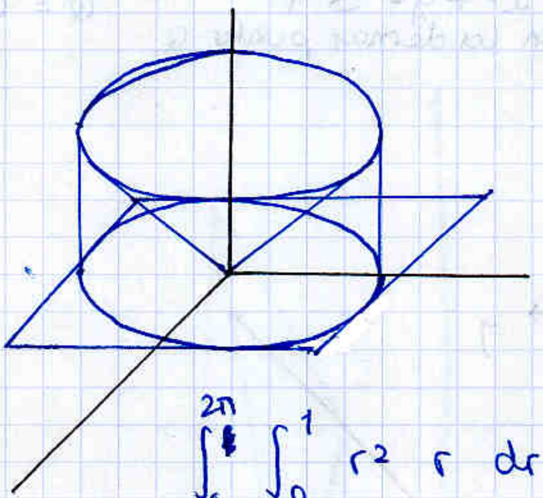
$$\cancel{= \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + x^2 - \tfrac{1}{2}x \right]_0^1}$$

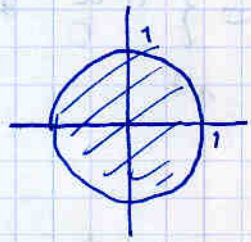
$$\cancel{= -\tfrac{2}{3} + 1 - \tfrac{1}{2} =}$$

$$\cancel{= \int_0^1 -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}}$$

3. $Q = [-1,1] \times [-1,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en los demás puntos} \end{cases}$$

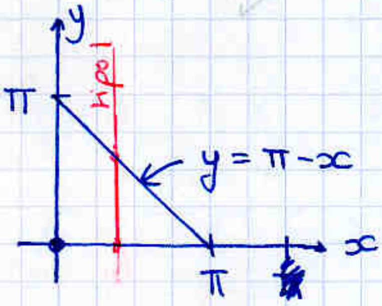




$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^1 r^3\, dr\right] = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\pi$$

4. a) $\iint_S x\cos(x+y)\,dx\,dy$, S triángulo $(0,0), (\pi,0), (\pi,\pi)$



$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi-x} x\cos(x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi}\left[x\,\text{sen}\,(x+y)\right]_0^{\pi-x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} x\,(\underbrace{\text{sen}\,\pi}_{0} - \text{sen}\,x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} -x\,\text{sen}\,x\,dx$$

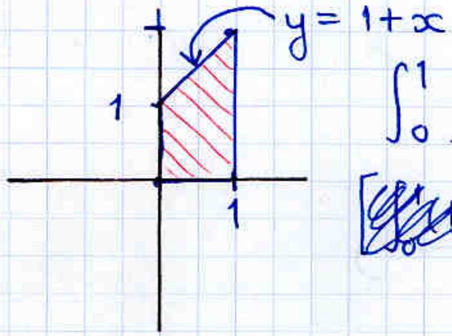
(partes)

$$= -\cos x\,(-x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)(-1)\,dx$$

$$= (\pi\cos\pi - 0) - \left[\text{sen}\,x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi$$

(b) $\iint_S (1+x)\,\mathrm{sen}\,y \,dx\,dy$ $\qquad S \to$ trapezoide $(0,0), (1,0), (1,2), (0,1)$



$$\int_0^1 \int_0^{1+x} (1+x)\,\mathrm{sen}\,y \;dy\,dx$$

$$\int_0^1 \Big[(1+x)(-\cos y)\Big]_0^{1+x} dx$$

$$\int_0^1 (1+x)\Big[\big(-\cos(1+x)+\cos 0\big)\Big]\,dx$$

$$\int_0^1 (1+x)(1-\cos(1+x))\,dx$$

$$\int_0^1 1+x-\cos(1+x)-x\cos(1+x)\,dx$$

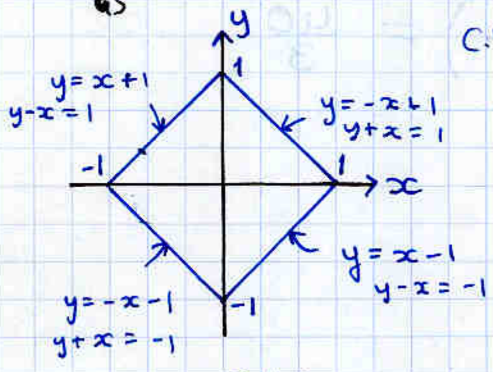
$$= \int_0^1 1+x-\cos(1+x)\,dx - \int_0^1 x\cos(1+x)\,dx$$

$$= \Big[x+\frac{x^2}{2}-\mathrm{sen}(1+x)\Big]_0^1 - \Big[\mathrm{sen}(1+x)\,x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{sen}(1+x)\,dx\Big]$$

$$= 1+\frac{1}{2}-\mathrm{sen}\,2+\mathrm{sen}\,1-\mathrm{sen}\,2+\Big[-\cos(1+x)\Big]_0^1$$

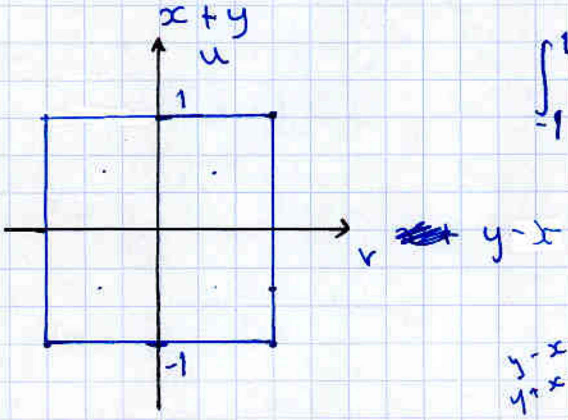
$$= \frac{3}{2}-2\,\mathrm{sen}\,2+\mathrm{sen}\,1-\cos 2+\cos 1$$

(c) $\iint_S \exp(x+y)\,dx\,dy$ $\qquad S=\{(x,y) : |x|+|y|<1\}$



C.V. $\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\det\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{vmatrix}} = \frac{1}{\det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 e^u\,\tfrac{1}{2}\,du\,dv$$

$$= \Big[\int_{-1}^1 dv\Big]\Big[\int_{-1}^1 e^u\,du\Big]\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \Big[v\Big]_{-1}^1 \Big[e^u\Big]_{-1}^1 \cdot \frac{1}{2}$$

$y-x=1$
$y+x=-1/2$

$$= (1+1)\cdot\left(e-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

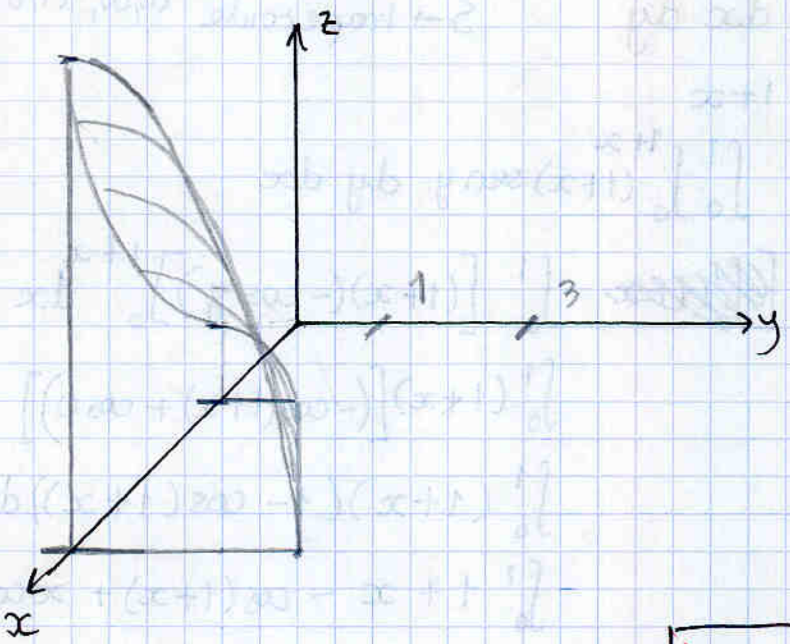
$$= e-\frac{1}{e}$$

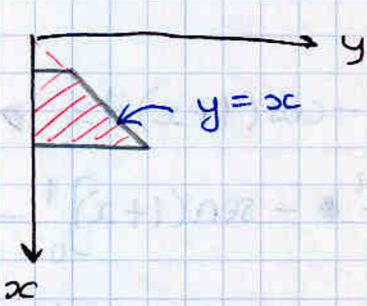
5. xy, $x=1$, $x=3$, $z = x^2 - y^2$

$x = 1 \quad z = -y^2 + 1$

$x = 3 \quad z = -y^2 + 9$

$y = 0 \quad z = x^2$





$$\int_1^3 \int_0^x x^2 - y^2 \, dy \, dx = \int_1^3 \left[x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^x dx$$

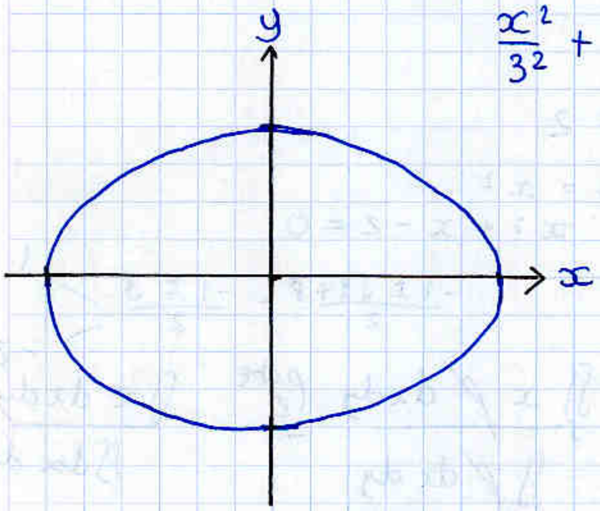
$$= \int_1^3 \left[x^3 - \frac{x^3}{3} \right] dx = \int_1^3 \frac{2}{3} x^3 \, dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{2}{3} \left(\frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{40}{3}$$

6. b) $f(x,y) = 3x + y$

$S = \{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36 ,\ x, y > 0\}$

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36$$
$$\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/9} \leq 36$$
$$\frac{x^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/3)^2} \leq 6^2$$
$$\frac{x^2}{(6/2)^2} + \frac{y^2}{(6/3)^2} \leq 1$$
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \leq 1$$



coordenadas elípticas

$$\begin{cases} x = 3r \cos\theta \\ y = 2r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix}$$
$$= \det \begin{vmatrix} 3\cos\theta & 2\operatorname{sen}\theta \\ -3r\operatorname{sen}\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix}$$
$$= 6r\cos^2\theta + 6r\operatorname{sen}^2\theta$$
$$= 6r$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 [3(3r\cos\theta) + (2r\operatorname{sen}\theta)] \cdot 6r \, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9r\cos\theta + 2r\operatorname{sen}\theta)6r \, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 54r^2\cos\theta + 12r^2\operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta$$

mal! piden $x, y > 0$

$$= \int_0^{2\pi} \left[54\cos\theta \frac{r^3}{3} + 12\operatorname{sen}\theta \frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{54}{3}\cos\theta + \frac{12}{3}\operatorname{sen}\theta \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 18\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta \, d\theta$$
$$= [18\operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta]_0^{2\pi}$$
$$= [(18\operatorname{sen}2\pi - 4\cos 2\pi) - (18\operatorname{sen}0 - 4\cos 0)]$$
$$= (-4) - (-4) = 0$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 [3(3r\cos\theta)+2r\,\text{sen}\,\theta)]\cdot 6r\, dr\, d\theta$$

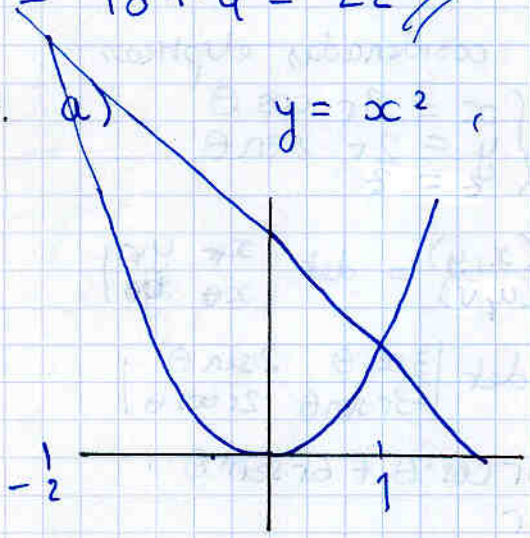
$$= \int_0^{\pi/2} 18\cos\theta + 4\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$= \left[18\,\text{sen}\,\theta - 4\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[(18\underbrace{\text{sen}\,\pi/2}_{1} - 4\underbrace{\cos\pi/2}_{0}) - (18\underbrace{\text{sen}\,0}_{0} - 4\underbrace{\cos 0}_{1})\right]$$

$$= 18 + 4 = 22$$

7. a) $y = x^2$, $x + y = 2$



$2 - x = x^2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x \cancel{\rho}\, dx\, dy}{\iint_S \cancel{\rho}\, dx\, dy} \overset{\rho\text{ cte}}{=} \frac{\iint x\, dx\, dy}{\iint dx\, dy}$$

$$\iint x\, dx\, dy = \int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} x\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} [xy]_{x^2}^{2-x}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2x - x^2 - x^3)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(4 - \frac{-8}{3} - \frac{16}{4}\right) = -\frac{9}{4}$$

$$\iint dx\, dy = \int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} dy\, dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 - -\frac{8}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

$$\iint y\, dx\, dy = \int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} y\, dy\, dx = \int_{-2}^{1}\left(\frac{y^2}{2}\right)_{x^2}^{2-x} dx = \int_{-2}^{1} \frac{(2-x)^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \frac{4 - 4x + x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\, dx = \int_{-2}^{1} -\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{6} - 1 + 2\right) - \left(-\frac{32}{10} + \frac{-8}{6} - 4 - 4\right)$$

$$= 68/5$$

$$\bar{x} = \frac{-9/4}{9/2} = -\frac{1}{2} \quad \bar{y} = \frac{68/5}{9/2} = 3'0\overline{22}$$

Análisis Vectorial

$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx$

(a) pruebe que $\Gamma(p)$ converge para $p>0$

$\lim \frac{x^{p-1}}{e^{-x}} = 0 \to$ no da información

$e^{-x} x^{p-1}$ es siempre $\geq 0 \;\; \forall x \in [0,\infty]$

comparación $f(x) = \frac{x^{p-1}}{e^{x}} = \frac{1}{e^{x} x^{1-p}}$

$g(x) = \frac{1}{x^{1-p}}$

$\lim_{x\to+\infty} = \frac{\frac{1}{e^{x} x^{1-p}}}{\frac{1}{x^{1-p}}} = \frac{1}{e^{x}} = 0$ si $\int \frac{1}{x^{1-p}}dx$ converge $\Rightarrow \frac{1}{e^{-x} x^{1-p}}$ conv

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1-p}}$ conv si $1-p>1$

$\underline{\underline{p>0}}$

(a) $\Gamma(p) = \int_0^\infty \frac{1}{e^{x} x^{1-p}}\, dx$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x} x^{1-p}} = 0 \to$ no da información

separamos $\Gamma(p) = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{e^{x} x^{1-p}}}_{2^a\ esp} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{e^{x} x^{1-p}}}_{1^a\ esp}$

$\underline{1^a\ esp}$ comp $\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^{x} x^{1-p}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x} x^{-p-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^{x}} = 0$

como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ conv $\to \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{x} x^{1-p}}$ conv

$\underline{2^a\ esp}$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{e^{x} x^{1-p}}}{\frac{1}{x^{1-p}}} = \frac{1}{e^{x}} = 1$ (se comportan igual)

$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}}dx$ conv $\leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{e^{x} x^{1-p}}$ conv $\longleftrightarrow 1-p<1 \leftrightarrow p>0$

(b) $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ para $p>0$

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^p dx=\int_0^\infty \frac{x^p}{e^x}\,dx$$

$$p\,\Gamma(p)= p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = p\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x}\,dx$$

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty \frac{x^p}{e^x}dx = \cancel{\lim_{t\to+\infty}}\int_0^{\cancel{\infty}} e^{-x}x^p\,dx$$

por partes $\quad p>0$

$$= \cancel{\lim_{t\to+\infty}}\left[-e^{-x}x^p\right]_0^{\cancel{\infty}} - \int_0^{\cancel{\infty}} -e^{-x}p\,x^{p-1}dx$$

$$= (0) + p\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = p\,\Gamma(p)$$

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \;///$$

c) $\Gamma(n) = (n-1)!$

~~para $n=1$ $(p=0)$ $\Gamma(1) = 0 = (n-1)!$~~

para $n=1$ $\quad \Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = (-0+1)=1$
$= (1-1)!$

se cumple

suponiendo que se cumple para n, se cumple para $n+1$?

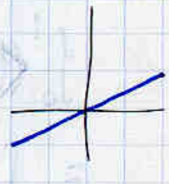
$$\Gamma(n+1)= n\,\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

Por inducción, se cumple $\forall\, n\in\mathbb{N}$

4. Integrales de línea

1. $\int_C xy^3 \, ds$ C segmento de $y = 2x$ desde $A = (-1,-2)$, $B = (1,2)$

$x = t$
$y = 2t$
$r(t) = (t, 2t)$ $t = -1$, $t = 1$



$\|r'(t)\| = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{5}\, t$

$$\int_C xy^3 \, ds = \int_{-1}^{1} t(2t)^3 \sqrt{5}\, t \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} 8\sqrt{5}\, t^5 \, dt = 8\sqrt{5} \left[\frac{t^6}{6}\right]_{-1}^{1} = 8\sqrt{5} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = 0$$

2. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, ds$ C: $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$

$A = (1,0,0)$
$B = (1,0,6\pi)$

$\|r'(t)\|$

$r'(t) = (1, 2)$
$\|r'(t)\| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\int_C xy^3 \, ds = \int_{-1}^{1} t(2t)^3 \sqrt{5} \, dt = \int_{-1}^{1} 8\sqrt{5}\, t^4 \, dt$$

$$= 8\sqrt{5} \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = 8\sqrt{5} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16\sqrt{5}}{5} \,//$$

2. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, ds$ C: $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$

$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 3)$
$\|r'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 9} = \sqrt{10}$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + 9t^2)^2 \sqrt{10} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + 18t^2 + 81t^4) \sqrt{10} \, dt$$

$$= \sqrt{10} \left[t + \frac{18t^3}{3} + \frac{81t^5}{5}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{10} \left[2\pi + \frac{18(2\pi)^3}{3} + \frac{81(2\pi)^5}{5}\right]$$

3. $f(x,y,z) = (yz,\ xz,\ x(y+1))$ $\quad (0,0,0)\ (1,1,1),\ (-1,1,-1)$

$C_1: \ (0,0,0) + t(1,1,1)$

$r(t) = (t,t,t)$

$r'(t) = (1,1,1)$

$\|r'(t)\| = \sqrt{3}$

$$\int_0^1 \langle (t^2,\ t^2,\ t(t+1)),(1,1,1)\rangle\, dt$$

$$= \int_0^1 t^2+t^2+t^2+t\, dt = \int_0^1 3t^2+t\, dt$$

$$= \left[3\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1+\frac{1}{2} = 3/2 \ //$$

$C_2: \ (1,1,1) + t(-1-1,\ 1-1,\ -1-1)$

$r(t) = (1-2t,\ 1,\ 1-2t)$

$r'(t) = (-2,0,-2)$

$$= \int_0^1 \langle (1-2t,\ 1-4t+4t^2,\ 2-4t),(-2,0,-2)\rangle\, dt$$

$$= \int_0^1 -2+4t-2+8t\, dt = \int_0^1 12t-4\, dt$$

$$= \left[12\frac{t^2}{2} - 4t\right]_0^1 = 6-4 = 2 \ //$$

$C_3: \ (-1,1,-1) \to (0,0,0)$

$r(t) = (-1,1,-1) + t(0+1,\ 0-1,\ 0+1)$

$r(t) = (t-1,\ 1-t,\ t-1)$

$r'(t) = (1,-1,1)$

$\|r'(t)\| = \sqrt{3}$

$$\int_0^1 \langle ((1-t)(t-1),\ (t-1)(t-1),\ (t-1)(2-t)),(1,-1,1)\rangle\, dt$$

$$= \int_0^1 \langle (t-1-t^2+t,\ t^2-2t+1,\ 2t-t^2-2+t),(1,-1,1)\rangle\, dt$$

$$= \int_0^1 \langle -t^2+2t-1,\ t^2-2t+1,\ -t^2+3t-2),(1,-1,1)\rangle\, dt$$

$$= \int_0^1 -t^2+2t-1-t^2+2t-1-t^2+3t-2\, dt$$

$$= \int_0^1 -3t^2+7t-4\, dt$$

$$= \left[-\frac{3t^3}{3} + 7\frac{t^2}{2} - 4t\right]_0^1 = -1+\frac{7}{2}-4 = -5+\frac{7}{2} = -1\tfrac{1}{2} = -\frac{3}{2} \ //$$

la suma da 2

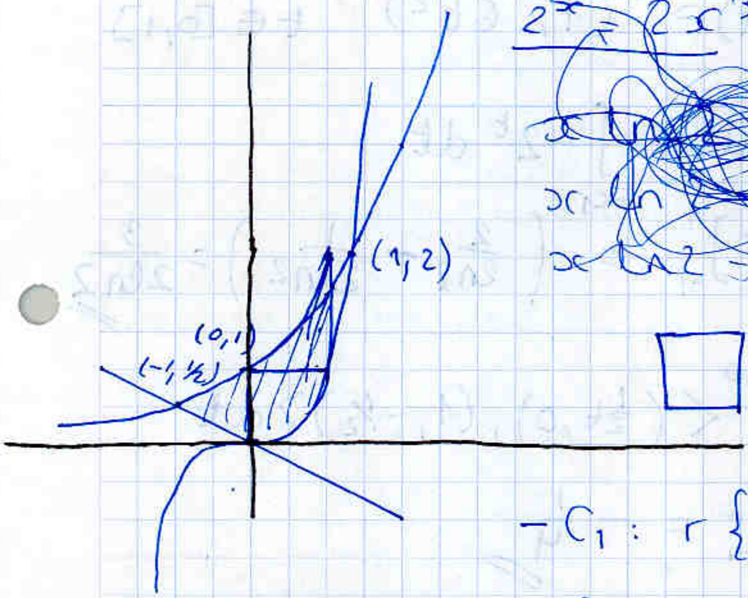
4. $\underline{\underline{\text{T}^a \text{ Green}}}$

$$\oint \langle F, dr \rangle = \iint_S \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \, dA$$

→ simplemente conexo
→ camino simple, regular a trozos

tomando ~~F(0,x)~~ $F(x,y) = (0, x)$

$$A = \oint \langle (0,x), dr \rangle$$



$$\underline{2^x = 2x^3}$$

$x \ln 2 = \ln 2 + 3 \ln x$

$x \ln 2 = 3 \ln x = \ln 2$

$\square$

$-C_1: \; r \begin{cases} x = t \\ y = 2^t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$

$C_2: \; r \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{2} t \end{cases} \quad t \in [-1, 0]$

$C_3: \; r \begin{cases} x = t \\ y = 2t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$

$I_1 = -\oint_{-C_1} \langle (0,x), dr \rangle = -\int_{-1}^{1} \langle (0,t), (t, 2^t) \rangle \, dt$

$= -\int_{-1}^{1} t 2^t \, dt$ no sirve

$\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) = 1$

probemos $F(x,y) = (-y, 0)$

$I_1 = -\oint_{-C_1} \langle (-y, 0), (t, 2^t) \rangle \, dt = -\oint_{-C_1}$

$r_1(t) = (t, 2^t)$
$r'_1(t) = (1, \ln 2 \cdot 2^t)$

utilizamos claramente $F(x,y) = \cancel{(x,0)} \; (-y, 0)$

$I_1 = -\oint_{-C_1}$

$$A = \oint_C \langle (-y,0), r'(t) \rangle \, dt$$

$$= -\int_{-C_1} \langle (-y,0), (r_1'(t)) \rangle dt + \int_{C_2} \langle (-y,0), (r_2'(t)) \rangle dt + \int_{C_3} \langle (-y,0), (r_2'(t) \rangle$$

$r_1(t) = (t, 2^t) \quad r_1'(t) = (1, \ln 2 \cdot 2^t) \quad t \in [-1,1]$

$r_2(t) = (t, -\frac{1}{2}t) \quad r_2'(t) = (1, -\frac{1}{2}) \quad t \in [-1,0]$

$r_3(t) = (t, 2t^3) \quad r_3'(t) = (1, 6t^2) \quad t \in [0,1]$

$$-\int_{-C_1} \langle (-y,0), (1, \ln 2 \cdot 2^t) \rangle dt = -\int_{-C_1} -2^t \, dt$$

$$= \int_{-C_1} 2^t \, dt = \left[\frac{1}{\ln 2} 2^t\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2}\right) = \frac{3}{2\ln 2}$$

$$\int_{C_2} \langle (-y,0), (1,-\tfrac{1}{2}) \rangle dt = \int_{-1}^{0} \langle (\tfrac{1}{2}t, 0), (1, -\tfrac{1}{2}) \rangle dt$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}t \, dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4}$$

$$\int_{C_3} \langle (-y,0), (1, 6t^2) \rangle dt = \int_0^1 \langle (-2t^3, 0), (1, 6t^2) \rangle dt$$

$$= \int_0^1 -2t^3 \, dt = \left[-\frac{2}{4}t^4\right]_0^1 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{3}{4}}$$

7. (a) $\int_C (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$

C: $y = x^2$ desde $(-1,1)$ a $(1,1)$

$r(t) = (t, t^2) \quad t \in [-1,1]$

$$\begin{cases} x = t & dx = dt \\ y = t^2 & dy = 2t\,dt \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3)\,dt + (t^4 - 2t^3)\,2t\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4)\,dt$$

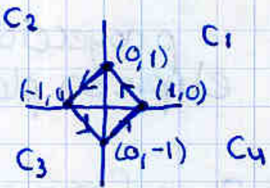
$$= \left[\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^6}{6} - 4\frac{t^5}{5} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{8}{5} \quad ///$$

(b) $\oint_C \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$



$$= -\int_{-C_1} - \int_{-C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

$-C_1$: $\begin{cases} x = t & dx = 1 \\ y = 1 - t & dy = -1 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$$-\int_{-C_1} \frac{dx+dy}{x+y} = -\int_0^1 \frac{(1-1)\,dt}{t+1-t} = 0 \;//$$

$-C_2$: $\begin{cases} x = t & dx = 1\,dt \\ y = 1 + t & dy = 1 \end{cases} \quad t \in [-1,0]$

$$-\int_{C_2} \frac{dx+dy}{-x+y} = -\int_{-1}^{0} \frac{1+1}{-t+1+t}\,dt = -\int_{-1}^{0} \frac{2}{1}\,dt = -\left[2t\right]_{-1}^{0}$$

$$= -(0 - -2) = -2 \;//$$

C_3: $\begin{cases} x = t & dx = 1 \\ y = -1 - t & dy = -1 \end{cases} \qquad \int_{C_3} \frac{dx + dy}{-x-y} = 0 \;//$

C_4: $\begin{cases} x = t & dx = 1 \\ y = -1 + t & dy = 1 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$$\int_{C_4} \frac{dx+dy}{x-y} = \int_0^1 \frac{2}{1} = [2t]_0^1 = 2 \;//$$

TOTAL $= 2 - 2 = 0$

(c) $\oint_c y\,dx + z\,dy + x\,dz$

T^a Green

$F(N, M)$

$\iint \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\, dA = \oint (F, dr)$

(i) Intersección $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y) \end{cases}$

$x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$

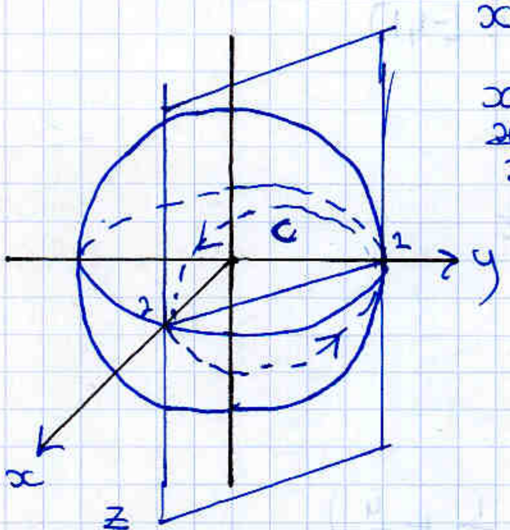
$\cancel{x^2 + (2-x)^2} + z^2 = 4$

$\cancel{x^2 + 2^2 - 4x + x^2 + z^2} = 4$

$x^2 - 4x + \cancel{x^2 + z^2} = 0$

$2x^2 - \cancel{4x} + z^2 = 0$

$\cancel{z = \sqrt{4x} - 2x^2}$



$y = 2 - x$

$x^2 + (2-x)^2 + z^2 = 2(x + 2 - x)$

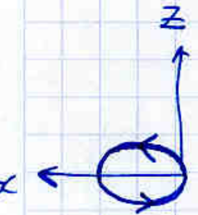
$x^2 + 4 - 4x + x^2 + z^2 = 4$

$x^2 - 4x + x^2 + z^2 = 0$

$2x^2 - 4x + z^2 = 0$

$2(x-1)^2 - 2 + z^2 = 0$

$\frac{(x-1)^2}{1/2} + z^2 = 2$



proyección de la elipse en plano YZ: $\boxed{(x-1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1}$

$(x-1) = \cos\theta \rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta + 1 \\ z = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$\frac{z}{\sqrt{2}} = \mathrm{sen}\,\theta \rightarrow$

le damos el valor y

se pide el otro sentido

$y = 2 - x$

$-C : \begin{cases} x = \cos\theta + 1 \\ y = 1 - \cos\theta \\ z = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad \begin{aligned} dx &= -\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \\ dy &= \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \\ dz &= \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta \end{aligned}$

$-\oint_{-C} (1-\cos\theta)(-\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta) + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta(\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta + (\cos\theta + 1)(\sqrt{2}\cos\theta)\,d\theta$

$= -\oint_{-C} \left(-\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2\theta + \sqrt{2}\cos^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta\right) d\theta$

$= -\oint_{-C} (\mathrm{sen}\,\theta(\cos\theta - 1) + \sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$

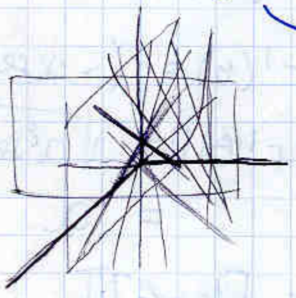
$= -\oint_{-C} \mathrm{sen}\cos - \mathrm{sen} + \sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$

$= -\left[\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2} + \cos\theta + \sqrt{2}\theta + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right]_0^{2\pi}$

$= -([0 + 1 + \sqrt{2}\,2\pi + 0] - (0 + 1 + 0 + 0) = -2\sqrt{2}\pi$ ///

ii) $z = xy \qquad x^2 + y^2 = 1$

$\longrightarrow \quad y = \frac{z}{y}$



$$\frac{z^2}{y^2} + y^2 = 1$$

$$z^2 + y^4 = y^2$$

$$z^2 + y^4 - y^2 = 0$$

$$z^2 + y^2(y^2 - 1) = 0$$

$$z^2 + y^2(-x^2) = 0$$

$$z^2 - y^2x^2 = 0$$

~~$z = \sqrt{1-y}\, y$~~

$$\begin{cases} x = \cos\theta & dx = -\operatorname{sen}\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta & dy = \cos\theta \\ z = \cos\theta \operatorname{sen}\theta & dz = -\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \cos 2\theta \end{cases}$$

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$
$$1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$$

$$\oint_C (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$$

$$= \cancel{\int_0^{2\pi} \cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \ldots \cos\theta + \cos\theta\cos 2\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\cos 2\theta \; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\cos 2\theta \; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \; d\theta$$

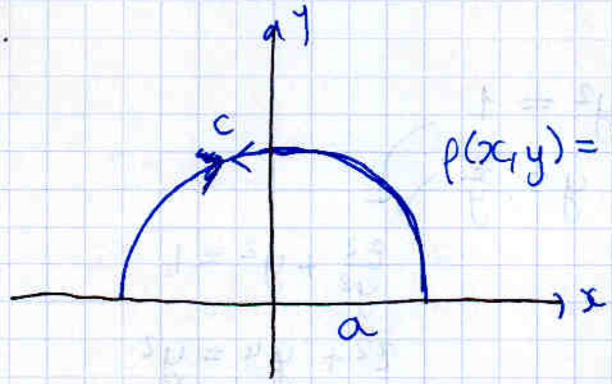
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta - 1}{2} + \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + \cos\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \; d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta - \theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta + \operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\left(0 - 2\pi - \frac{1}{3} + 0 - 0\right) - \left(0 - 0 - \frac{1}{3} + 0 - 0\right)\right]$$

$$= -2\pi \;///$$

5.



$\rho(x,y) = k$

$$r \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$r'(\theta) = (-a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta)$$

$$\|r'(\theta)\| = \sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta} = a$$

$$\int_c k\,ds = \int_0^{\pi} k\cdot a\,d\theta = [ka\theta]_0^{\pi} = ka\pi$$

$$\int_c xk\,ds = \int_0^{\pi} a\cos\theta\, k a\,d\theta = [a^2k\,\text{sen}\,\theta]_0^{\pi} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{0}{ka\pi} = 0$$

$$\int_c yk\,ds = \int_0^{\pi} a\,\text{sen}\,\theta\, ka\,d\theta = -[a^2k\cos\theta]_0^{\pi} = -[-a^2k - a^2k] = 2a^2k$$

$$\bar{y} = \frac{2a^{\cancel{2}}\cancel{k}}{\cancel{k}\cancel{a}\pi} = \frac{2a}{\pi}$$

Momento de inercia respecto eje x.

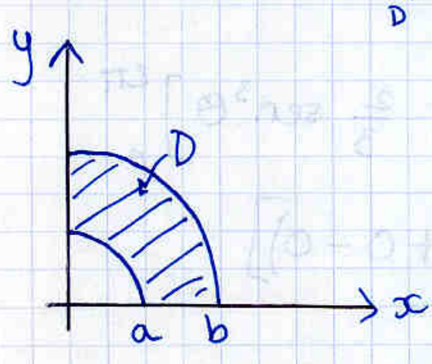
Masa x distancia eje x

$$ka\pi\cdot\frac{2a}{\pi} = 2ka^2$$

15. Septiembre 2000

(a)

$$\iint_D x\,dx\,dy = (\text{polares}) = \int_0^{\pi/2}\int_a^b x\,r\,dr\,d\theta$$



$$= \int_0^{\pi/2}\int_a^b r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \left[\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right]\cdot\left[\int_a^b r^2\,dr\right] = [\text{sen}\,\theta]_0^{\pi/2}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_b^a$$

$$= 1\cdot\frac{a^3-b^3}{3}$$

$$\frac{1}{m}\iint_D x\,dx\,dy = \frac{1}{\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)}\cdot\frac{a^3-b^3}{3}$$

PS-9

(b) (sept 2000)

D simplemente conexo
C camino simple, regular a trozos, orientado positivamente
F campo vectorial y sus componentes tienen derivadas parciales continuas

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\, dA = \oint_C \langle F, dr \rangle$$

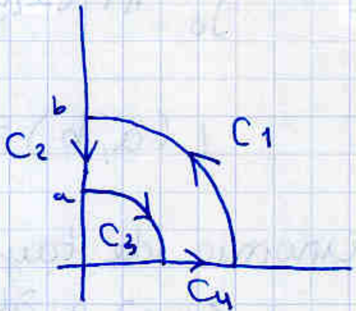
tomando

$$F(x,y) = (xy, 0)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x$$

$$\iint_D x \, dx dy = \oint_C \langle (xy, 0), dr \rangle$$

hay que encontrar C.



$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

$$C_1 : \begin{cases} x = b\cos\theta \\ y = b \,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \begin{matrix} dx = -b\,\text{sen}\,\theta \, d\theta \\ dy = b\cos\theta \, d\theta \end{matrix} \quad \theta \in [0, \pi/4]$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = b - t \end{cases} \quad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = -1 \, d\theta \end{matrix} \quad t \in [0, a]$$

$$C_3 = -C_3' : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \begin{matrix} dx = -a\,\text{sen}\,\theta \, d\theta \\ dy = a\cos\theta \, d\theta \end{matrix} \quad t \in [0, \pi/4]$$

$$C_4 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} dx = 1 \, d\theta \\ dy = 0 \end{matrix} \quad t \in [a, b]$$

$$\oint_C \langle (xy,0), dr \rangle = \int_{C_1} \langle (xy,0), dr \rangle + \underbrace{\cancel{\int_{C_2} \langle F, dr \rangle}}_{0}^{x=0 \to F=0} + \int_{C_3} \langle F, dr \rangle + \underbrace{\cancel{\int_{C_4} \langle F, dr \rangle}}_{0}^{y=0 \to F=0}$$

$$\int_{C_1} \langle (xy,0), (dx,dy) \rangle = \int_0^{\pi/4} \langle (b^2 \cos\theta \,\text{sen}\,\theta, 0), (-b\,\text{sen}\,\theta, b\cos\theta) \rangle$$

$$= \int_0^{\pi/4} -b^3 \cos\theta \,\text{sen}^2\theta \, d\theta = -b^3 \left[\frac{1}{3} \text{sen}^3\theta \right]_0^{\pi/4} = -\frac{b^3}{3}$$

$$-\oint_{-C_3'} \langle (xy,0), (dx,dy) \rangle = -\int_{-C_3'} \langle (a^2 \cos\theta \,\text{sen}\,\theta, 0), (-a\,\text{sen}\,\theta \, d\theta, a\cos\theta \, d\theta) \rangle$$

$$= -\int_0^{\pi/4} -a^3 \cos\theta \,\text{sen}^2\theta \, d\theta = a^3 \left[\frac{1}{3} \text{sen}^3\theta \right]_0^{\pi/4} = \frac{a^3}{3}$$

$$\oint_C \langle F, dr \rangle = \frac{a^3 - b^3}{3} \quad ///$$

16. (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} dx = -a\,\text{sen}\,\theta\, d\theta \\ dy = b\cos\theta\, d\theta \end{matrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$r(t) = (a\cos\theta,\ b\,\text{sen}\,\theta)$$

$$r'(t) = (-a\,\text{sen}\,\theta,\ b\cos\theta)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{a^2\,\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

$$L(a,b) = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\|\, dt \quad //$$

(b) $$L(a,b) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\,\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

Polinomio de taylor de orden 1 alrededor de (1,1)

$$L(1,1) + \frac{\partial L}{\partial a}(1,1)\cdot(a-1) + \frac{\partial L}{\partial b}(1,1)\cdot(b-1)$$

$$L(1,1) = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\,\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

- continua
- derivadas parciales continuas

$(a^2\,\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t > 0)$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a}(a^2\,\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}\cdot(2a\,\text{sen}^2 t)}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}}\, dt$$

$\cos 2t = \cos^2 t - \text{sen}^2 t$
$= 1 - \text{sen}^2 t - \text{sen}^2 t$
$\cos 2t = 1 - 2\,\text{sen}^2 t$
$\cos 2t = \cos^2 t - 1 + \cos^2 t$

$$\frac{\partial}{\partial a}L(1,1) = \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2 t}{1}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{\text{sen}\, 2t}{4}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \pi$$

$$\frac{\partial}{\partial b}L = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial b}(a^2\,\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(2b\cos^2 t)}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}}\, dt$$

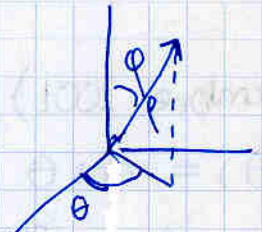
$$\frac{\partial}{\partial b}L(1,1) = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt = \left[\frac{\text{sen}\, 2t}{4} + \frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = \pi$$

polinomio de Taylor

$$P_1(1,1) = 2\pi + \pi(a-1) + \pi(b-1)$$
$$= \pi(a+b)$$

$$L_{\text{elipse radios } a \text{ y } b} = \frac{L_{\text{circunf } a} + L_{\text{circunf } b}}{2} = \frac{2\pi a + 2\pi b}{2} = \pi(a+b)$$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$



coordenadas elipsoidales

$\frac{x}{a} = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$

$\frac{y}{b} = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = a\,\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = b\,\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = b\,\rho \cos\varphi \end{cases}$

$\frac{z}{b} = \rho \cos\varphi$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \cancel{\det \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix}} = \det \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \det \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \end{vmatrix}$$

de memoria

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = abc\,\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

$$\iiint_V z = f(x,y)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 abc\,\rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \cancel{\left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^1 d\rho\right]}$$

$$= abc \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right]\left[\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right]$$

$$= abc\,(2\pi)\left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1$$

$$= abc\,(2\pi)\left[-1+1\right]\left[\frac{1}{3}\right] = 0$$ (claro, la parte de arriba se cancela con la de abajo)

el Volumen

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 abc\,\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2abc\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\right]\left[\int_0^1 \rho^2 d\rho\right]$$

$$= 2abc\,[2\pi][1+1]\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{8}{3}\pi abc$$

17 (Junio 2001)

$$\alpha(t) =$$

18 (septiembre 2001) Area que enciera

$$\rho(\theta) = \cos\theta \operatorname{sen}\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

expresión paramétrica:

$$\alpha(\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$= (\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta)$$

$$\alpha(\theta) = (\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta, \cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

~~Tª Green~~ $\cancel{\iint_A \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\, dA} = \oint \langle F, dr\rangle$ mal!!!!

$$\cancel{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1} \qquad \cancel{F(x,y) = (y, 0)} \qquad F(x,y) = (0, -x)$$

Tª Green $\displaystyle\iint_A \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\, dA = \oint \langle F, dr\rangle$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \longrightarrow \begin{array}{l} F(x,y) = (0, x) \\ F(x,y) = (-y, 0) \\ F(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right) \end{array}$$

$$dr = (\cos\theta\cos^2\theta + 2(-\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

$$= (\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta, -\operatorname{sen}^3\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta)$$

$$\oint\langle F, dr\rangle = \oint \left\langle \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right), (\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta, -\operatorname{sen}^3\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta)\right\rangle$$

$$= \oint \left\langle \left(-\frac{\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{2}, \frac{\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{2}\right), (\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta, -\operatorname{sen}^3\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta)\right\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{-\cos^4\theta\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta\operatorname{sen}^4\theta}{2} + \frac{-\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\cos^4\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\operatorname{sen}^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta\cos^2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^4\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen}^4\theta}{2}\, d\theta \qquad \begin{array}{l}\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta - 1}{2}\end{array}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{2}(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\left(\frac{\cos 2\theta - 1}{2}\right) d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta - 1 - \cos^2 2\theta + \cos 2\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} 2\cos 2\theta - 1 - \frac{\cos 4\theta - 1}{2}$$

19. (septiembre 2002)

$$\alpha(t) = \left(e^{-t}\cos(t^2),\ e^{-t}\,\mathrm{sen}(t^2),\ e^{-t}\right)$$

(a) $$\alpha'(t) = \left(e^{-t}(-\cos t^2 - 2t\,\mathrm{sen}(t^2)),\ e^{-t}(-\mathrm{sen}(t^2) + 2t\cos(t^2)),\ -e^{-t}\right)$$

$$\boxed{-e^{-t}\cos(t^2) + e^{-t}(-2t\,\mathrm{sen}(t^2))}$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(e^{-t}(-\cos(t^2) - 2t\,\mathrm{sen}(t^2)))^2 + (e^{-t}(-\mathrm{sen}(t^2) + 2t\cos(t^2)))^2 + (-e^{-t})^2}$$

$$= \sqrt{e^{-2t}\left[(-\cos t^2 - 2t\,\mathrm{sen}\,t^2)^2 + (-\mathrm{sen}\,t^2 + 2t\cos t^2)^2 + 1\right]}$$

$$= \sqrt{e^{-2t}\left[((\cos t^2)^2 + \cancel{4t\cos t^2\,\mathrm{sen}\,t^2} + (2t\,\mathrm{sen}\,t^2)^2) + ((\mathrm{sen}\,t^2)^2 - \cancel{4t\cos t^2\,\mathrm{sen}\,t^2} + (2t\cos t^2)^2)\right.}$$

$$= \sqrt{e^{-2t}(\cos^2 t^2 + \mathrm{sen}^2 t^2 + 4t^2\,\mathrm{sen}^2 t^2 + 4t^2\cos^2 t^2 + 1)}$$

$$= e^{-t}\sqrt{(1 + 4t^2 + 1)} = e^{-t}\left(\sqrt{4t^2+2}\right) \quad //$$

(b) $$\int_0^\infty \frac{\sqrt{4t^2+2}}{e^{t}}\,dt \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{4t^2+2}}{e^t} = 0$$

comparación $$\lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{t^2(4+\frac{2}{t^2})}}{e^t}}{\dfrac{1}{t^2}} = \lim \frac{t\sqrt{4+\frac{2}{t^2}}}{e^t/t^2} = \lim \frac{t^3\sqrt{4+2/t^2}}{e^t} = 0$$

como $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ converge $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sqrt{4t^2+2}}{e^t}\,dt$ converge

$\int_0^1 \frac{\sqrt{4t^2+2}}{e^t}\,dt$ es una integral de Riemann propia ~~normal~~ $\Rightarrow$ converge

por tanto $\int_0^\infty \frac{\sqrt{4t^2+2}}{e^t}\,dt$ converge

Tema 5- Integrales de Superficie

1. (a) Plano $r(u,v) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 u + c_1 v \\ a_2 + b_2 u + c_2 v, \\ a_3 + b_3 u + c_3 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (b_1, b_2, b_3) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2 c_3 - b_3 c_2)\vec{i} - (b_1 c_3 - b_3 c_1)\vec{j} + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\vec{k}$$

(b) $r(u,v) = (au\cos v, bu \operatorname{sen} v, u^2)$

$$\frac{\partial r(u,v)}{\partial u} = (a\cos v, b \operatorname{sen} v, 2u)$$

$$\frac{\partial r(u,v)}{\partial v} = (-au \operatorname{sen} v, bu\cos v, 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos v & b\operatorname{sen} v & 2u \\ -au\operatorname{sen} v & bu\cos v & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2bu^2\cos v) - \vec{j}(2au^2 \operatorname{sen} v) + \vec{k}(abu\cos^2 v + abu \operatorname{sen}^2 v)$$

$$= -2bu^2\cos v\,\vec{i} - 2au^2 \operatorname{sen} v\,\vec{j} + abu\,\vec{k}$$

(c) $r(u,v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c\cos u)$

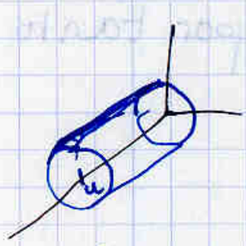
$$\frac{\partial r}{\partial u} = (a\cos u\cos v, b\cos u \operatorname{sen} v, -c \operatorname{sen} u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, b \operatorname{sen} u \cos v, 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos u\cos v & b\cos u \operatorname{sen} v & -c\operatorname{sen} u \\ -a\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & b\operatorname{sen} u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(bc\operatorname{sen}^2 u\cos v) - \vec{j}(-ac \operatorname{sen} u^2 \operatorname{sen} v) + \vec{k}(ab\cos u \operatorname{sen} u \cos^2 v$$

(d) $r(u,v) = (\cancel{a}\, u, a \operatorname{sen} v, a\cos v)$



$$\frac{\partial r}{\partial v} = (0, a\cos v, -a\operatorname{sen} v)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a\cos v & -a\operatorname{sen} v \end{vmatrix} = \vec{j}(a \operatorname{sen} v) + \vec{k}(a\cos v)$$

$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + \langle F, \nabla f \rangle$

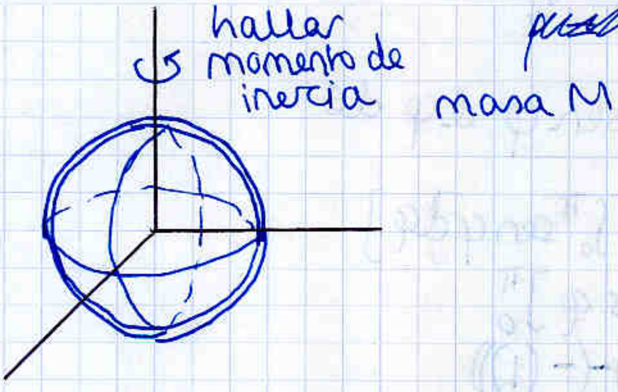
$\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + F \wedge \nabla f$

Gauss: $\iint F\,dS = \iiint \operatorname{div} F\,dV$

Stokes: $\oint \langle F, dr \rangle = \iint \operatorname{rot} F\,dS$

$\iint \langle F, n \rangle\,dS$

2.



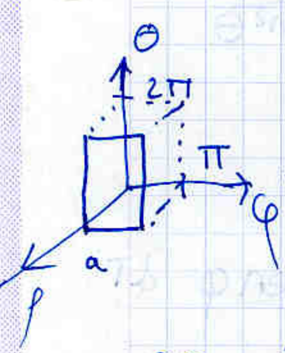
Primero: hallar la densidad:

$$\rho = \frac{M}{Sup}$$

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\theta \\ y = a\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$$

$$Sup = \iint_S 1\, dS$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$$



$$r(\varphi,\theta) = (a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta,\ a\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ a\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} = (a\cos\varphi\cos\theta,\ a\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -a\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

$$\frac{\partial r}{\partial\theta} = (-a\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta,\ 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos\varphi\cos\theta & a\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & -a\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ -a\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(a^2\mathrm{sen}^2\varphi\cos\theta) - \vec{j}\,(-a^2\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta) + \vec{k}\,(a^2\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^2\theta + a^2\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}^2\theta)$$

$$= a\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos\theta\,\vec{i} + a\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j} + a\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{k}$$

$$\cancel{Sup = \iint_S 1\, dS = \iint_T \left\|\frac{\partial r}{\partial\varphi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta}\right\| dT = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}}$$

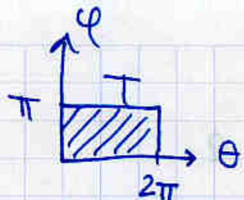
$$\left\|\frac{\partial r}{\partial\varphi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta}\right\| = \sqrt{a^4\mathrm{sen}^4\varphi\cos^2\theta + a^4\mathrm{sen}^4\varphi\,\mathrm{sen}^2\theta + a^4\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi}$$

$$= \sqrt{a^4\mathrm{sen}^2\varphi\,(\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\varphi)}$$

$$= a^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\sqrt{\underbrace{\mathrm{sen}^2\varphi\,\underbrace{(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)}_{1} + \cos^2\varphi}_{1}}$$

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial\varphi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta}\right\| = a^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\text{Sup} \iint_S 1\, dS = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dT$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

si T no fuera cuadrado y lo quisiéramos expresar en polares habría q. mult. por el coef. areolar

$$= a^2 \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \right]$$

$$= 2\pi a^2 \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi a^2 \left((-(-1)) - (-(1)) \right)$$

$$= 4\pi a^2$$

densidad $\rho = \dfrac{M}{4\pi a^2}$

distancia al EJE Z al cuadrado

$$I_z = \iint_S \rho \, (x^2+y^2) \, dS$$

$$x^2+y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$I_z = \iint_S \rho \, a^2 \operatorname{sen}\varphi \, dS = \rho a^2 \iint_S \operatorname{sen}^2\varphi \, dS$$

$$= \rho a^2 \iint_T \operatorname{sen}^2\varphi \left\| \frac{\partial r}{\partial \varphi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| dT = \rho a^2 \iint_T \operatorname{sen}^2\varphi \, a^2 \operatorname{sen}\varphi \, dT$$

$$= a^4 \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= a^4 \rho \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi \, d\varphi \right]$$

$$= a^4 \rho \, 2\pi \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi (1-\cos^2\varphi) \, d\varphi \right]$$

$$= a^4 \rho \, 2\pi \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \right]$$

$$= a^4 \rho \, 2\pi \left[-\cos\varphi + \frac{1}{3} \cos^3\varphi \right]_0^{\pi}$$

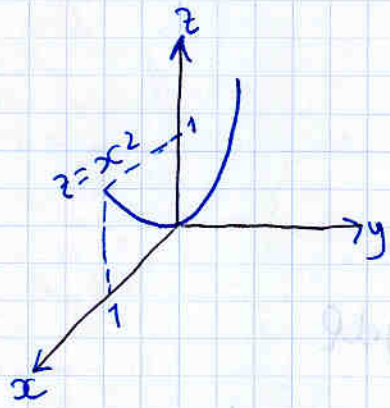
$$= a^4 \rho \, 2\pi \left[\left(-(-1) + \tfrac{1}{3}(-1)^3 \right) - \left(-(1) + \tfrac{1}{3}(1)^3 \right) \right]$$

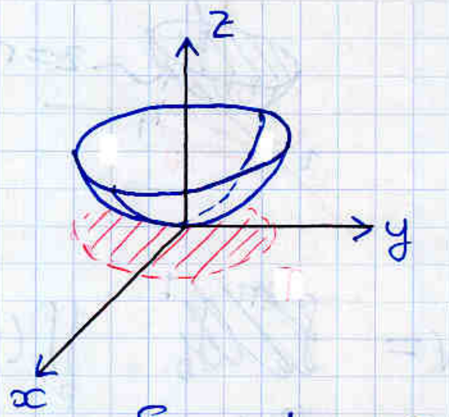
$$= a^4 \rho \, 2\pi \left(1 - \tfrac{1}{3} + 1 - \tfrac{1}{3} \right)$$

$$= a^4 \rho \, 2\pi \left(\tfrac{4}{3} \right)$$

$$= \frac{8}{3} \pi \rho a^4 \;///$$

3.

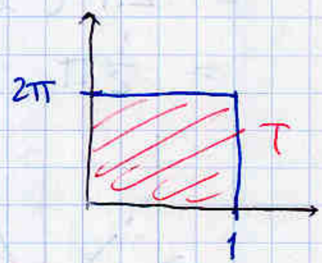




$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\,\text{sen}\,\theta \\ z = t^2 \end{cases}$$

$t \in [0,1]$
$\theta \in [0, 2\pi]$

$r(u,v) = (u\cos v, u\,\text{sen}\,v, u^2)$



$\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) = (\cos v, \text{sen}\,v, 2u)$

$\frac{\partial r}{\partial v} = (-u\,\text{sen}\,v, u\cos v, 0)$

$\cancel{\left\|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right\| = u}$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \text{sen}\,v & 2u \\ -u\,\text{sen}\,v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$= \vec{i}(-2u^2\cos v) - \vec{j}(2u^2\,\text{sen}\,v) + \vec{k}(u\cos^2 v + u\,\text{sen}^2 v)$

$= -2u^2\cos v\,\vec{i} - 2u^2\,\text{sen}\,v\,\vec{j} + u\vec{k}$

$\left\|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right\| = \sqrt{4u^4\cos^2 v + 4u^4\,\text{sen}^2 v + u^2}$

$= \sqrt{4u^4 + u^2}$

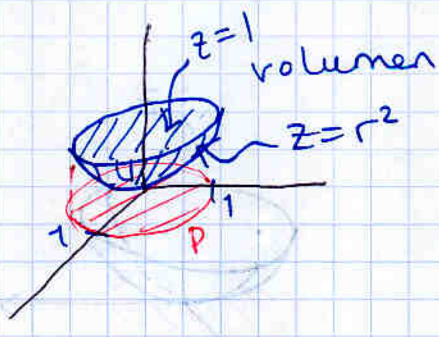
$\text{Sup} = \iint_S 1\,dS = \iint_T \left\|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right\| dT = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4u^4+u^2}\,du\,dv$

$= \left[\int_0^{2\pi} dv\right]\left[\int_0^1 (4u^4+u^2)^{1/2}\,du\right] = 2\pi \cancel{\left[\frac{\frac{1}{2}(16u^3+2u)}{\sqrt{4u^4+u^2}}\right]_0^1}$

$= 2\pi\left[\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\,du\right] = 2\pi\left[\frac{1}{8}\frac{2}{3}(4u^2+1)^{3/2}\right]_0^1$

$= 2\pi\ \frac{2}{24}\ 5^{3/2} = \frac{1}{6}\cancel{\pi\sqrt{125}} = \frac{1}{6}\pi\sqrt{5^2\,5} = \frac{5}{6}\pi\sqrt{5}$ ///

c)



$$V = \cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^1} \iint_P (1-(x^2+y^2))\,dP$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r - r^3\,dr\,d\theta$$

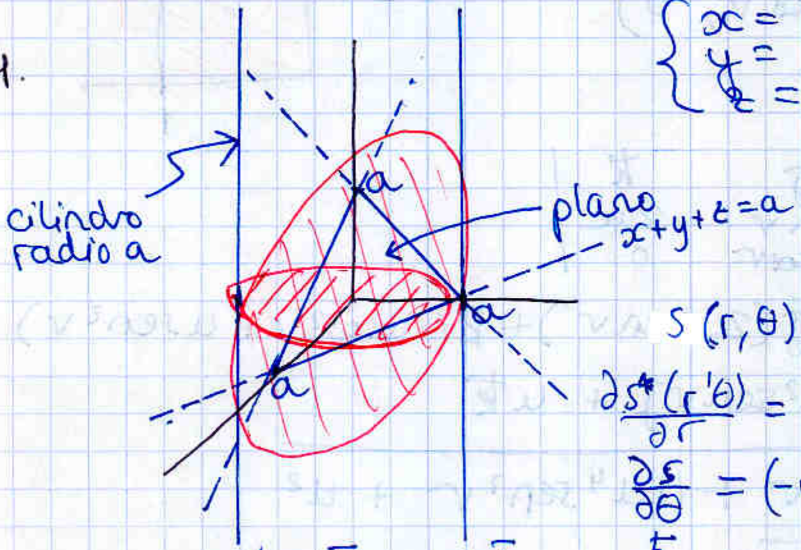
$$= \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi$$

4.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = a - r\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



$$s(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, a - r(\cos\theta) - r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\frac{\partial s}{\partial r}(r,\theta) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, -\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta - r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} \times \frac{\partial s}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & -\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & r\,\mathrm{sen}\,\theta - r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$+ r\cos^2\theta + r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$= \vec{i}\,(r\,\mathrm{sen}^2\theta - \cancel{r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}) - \vec{j}\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta\cancel{\cos\theta} - r\cos^2\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta\cancel{\cos\theta} - r\,\mathrm{sen}^2\theta)$$

$$+ \vec{k}\,(r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta)$$

$$= \vec{i}\,(r) + \vec{j}\,(r) + \vec{k}\,(r)$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = \sqrt{r^2 + r^2 + r^2} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}\,r$$

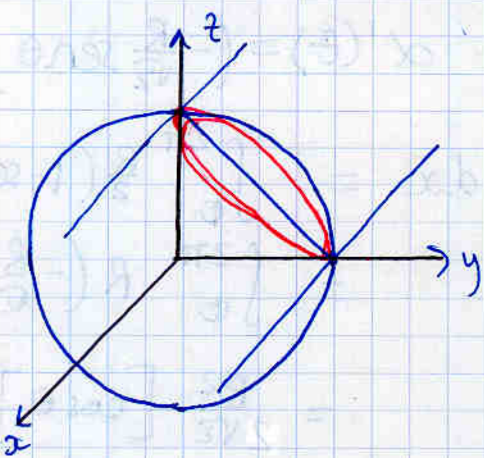
$$Sup = \iint_S 1\,dS = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dT = \int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{3}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{3}\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^a r\,dr\right] = \sqrt{3}\,2\pi\,\frac{a^2}{2} = \sqrt{3}\,a^2\pi \;///$$

$$\iint_S \langle F, n\rangle\, dS = \iiint_V \operatorname{div} F\, dV$$

6. $$\oint_C \langle F, dr\rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} F, n\rangle\, dS$$

12. $\int_C zy\, dx$



C: intersección entre

$x^2+y^2+z^2 = R^2$

$y+z = R$

$z = R-y$ $\quad R^2-2yR+y^2$

$x^2+y^2+(R-y)^2 = R^2$

$x^2+y^2+\cancel{R^2}-2yR+y^2 = \cancel{R^2}$

$x^2+2y^2-2yR = 0$

$\cancel{x^2+2(y-\frac{R}{2})^2}$

$x^2+2(y^2-yR) = 0$

$x^2+2\left[(y-R/2)^2-\frac{R^2}{4}\right] = 0$

$x^2+\frac{(y-R/2)^2}{1/2} = \frac{R^2}{2}$

$\frac{2}{R^2}x^2+\frac{2}{R^2}\frac{(y-R/2)^2}{1/2} = 1$

$\frac{x^2}{(R^2/2)}+\frac{(y-R/2)^2}{(R^2/4)} = 1$

$\left(\frac{x}{R/\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y-R/2}{R/2}\right)^2 = 1$

$\cos\theta = x/\frac{R}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta$ $\qquad$ elipse en XY

$\operatorname{sen}\theta = \frac{y-R/2}{R/2} \rightarrow y = \frac{R}{2}(\operatorname{sen}\theta+1)$

añadimos $z = R-y$

$$\begin{cases} x = R/\sqrt{2}\cos\theta \\ y = R/2\operatorname{sen}\theta + R/2 \\ z = R/2 - R/2\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

a) directamente

$$\alpha(\theta) = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{R}{2}(\operatorname{sen}\theta+1), \frac{R}{2}(1-\operatorname{sen}\theta)\right) \cdot \theta \in (1, 2\pi)$$

$$\alpha'(\theta) = \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta, \frac{R}{2}\cos\theta, -\frac{R}{2}\cos\theta\right)$$

$$\oint zy\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{R}{2}(1-\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\theta+1)\left(-\frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} R\left(-\frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta\right)d\theta = -\frac{R^2}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{R^2}{\sqrt{2}}\left[\cos\theta\right]_0^{2\pi} = 0$$

b) usando stokes

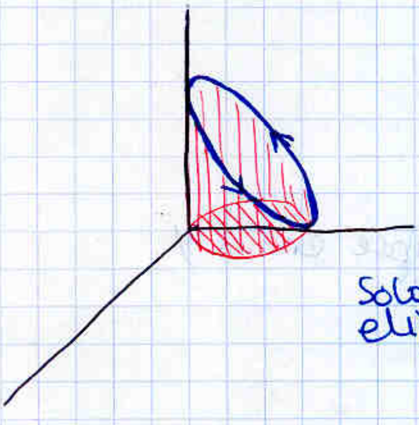
$$\oint_C \langle F, dr\rangle = \iint_S \langle \operatorname{rot} F, n\rangle\, dS$$

$$F = (xy, 0, 0)$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}\left(-\partial/\partial z(xy)\right) + \vec{k}\left(-\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right)$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} - x\vec{k} = (0, 0, -x)$$



El flujo en la sup lateral será nulo pues $\langle \operatorname{rot} F, n\rangle = \langle (0,0,-x), (\alpha(\theta), \beta(\theta), 0)\rangle = 0$

Solo queda pues calcular el flujo en ~~el~~ la elipse cuyo contorno es

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta$$
$$y = \frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta - R/2$$

podemos tomar la superficie

$$s(r,\theta) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta - R/2, 0\right) \quad r \in [0, R], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

n es obviamente $(0,0,-1)$ (dirigido hacia el exterior)

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n\rangle\, dS = \iint_T \langle \operatorname{rot} F, (0,0,-1)\rangle \left\|\frac{\partial s}{\partial r} \times \frac{\partial s}{\partial \theta}\right\| dT \quad \text{(no me gusta)}$$

$$S(r,\theta) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ \frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta - R/2,\ 0\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}},\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{2},\ 0\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta,\ \frac{r}{2}\cos\theta,\ 0\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r}\times\frac{\partial S}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{r}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta & \frac{r\cos\theta}{2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\left(\frac{r\cos^2\theta}{2\sqrt{2}} + \frac{r}{2\sqrt{2}}\operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$= \vec{k}\left(\frac{r}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n\rangle\, dS = \iint_T \left\langle \operatorname{rot} F, \frac{\partial S}{\partial r}\times\frac{\partial S}{\partial \theta}\right\rangle dT$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R \left\langle (0,0,-x), \left(0,0,\frac{r}{2\sqrt{2}}\right)\right\rangle dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R \left\langle \left(0,0,\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta\right), \left(0,0,\frac{r}{2\sqrt{2}}\right)\right\rangle dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r^2}{4}\cos\theta\, dr\, d\theta = \left[\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right]\left[\int_0^R \frac{r^2}{4}\, dr\right]$$

$$= \underbrace{\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi}}_{=0}\left[\frac{r^3}{12}\right]_0^R = 0$$

$$F(x,y,z) = (\overset{M}{e^x\cos y},\ \overset{N}{-e^x\operatorname{sen} y},\ \overset{P}{2})$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\ ?\quad -e^x\operatorname{sen} y = -e^x\operatorname{sen} y \checkmark$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}\ ?\quad 0 = 0 \checkmark$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}\ ?\quad 0 = 0 \checkmark$$

deriva de Potencial

$$F = \Delta f$$

$$(e^x\cos y,\ -e^x\operatorname{sen} y,\ 2) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f,\ \frac{\partial}{\partial y}f,\ \frac{\partial}{\partial z}f\right)$$

$$e^x \cos y = \frac{\partial}{\partial x} f$$

$$\int e^x \cos y \, dx = f$$

$$f = e^x \cos y + \alpha(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y + \frac{d\alpha}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \rightarrow \cancel{\alpha = \alpha(z)}$$

$$\alpha = \int 0 \, dy = \beta(z)$$

$$f = e^x \cos y + \beta(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \beta}{\partial z} = 2$$

$$\beta = \int 2 \, dz = 2z + C$$

$$\boxed{f = e^x \cos y + 2z + C}$$

25. $F(x,y,z) = (2xyz + \operatorname{sen} x,\ x^2 z,\ x^2 y)$

(a) Pruébese que F es conservativo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad 2xz = 2xz$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad 2xy = 2xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad x^2 = x^2$$

$$2xyz + \operatorname{sen} x = \partial f/\partial x$$

$$f = yzx^2 - \cos x + \alpha(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = zx^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial y} = zx^2 \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \rightarrow \alpha = \beta(z)$$

$$f = yzx^2 - \cos x + \beta(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = yx^2 + \frac{\partial \beta}{\partial z} = yx^2 \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0 \rightarrow \beta = c$$

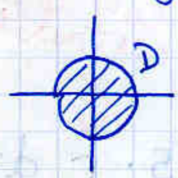
$$\boxed{f = yzx^2 - \cos x + c} \qquad F = \nabla f$$

(b) $c(t) = (\cos^5 t,\ \operatorname{sen}^3 t,\ t^4)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$

No es cierto el razonamiento, pues falla la hipótesis del teorema del rotacional que exige que c debe ser un camino cerrado.

26. (Junio 2002)

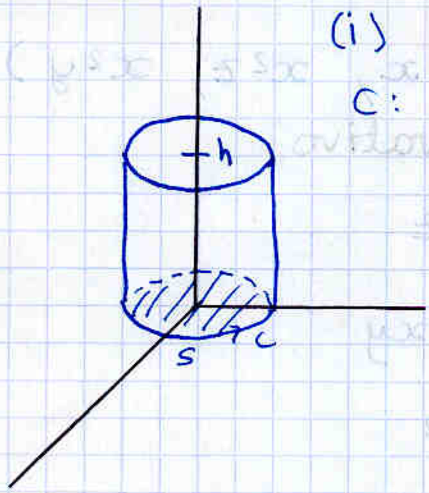
(a) $x^2 + y^2 \leq r^2 \qquad r > 0$



$$A = \iint_A 1\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^r r\, dr\, d\theta$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^r r\, dr\right] = 2\pi \frac{r^2}{2} = \pi r^2$$

(b)



(i) Area de la sup lat:

$C: \quad r(t) = (r\cos t,\ r\,\mathrm{sen}\, t)$

$r'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\, t,\ r\cos t)$

$\|r'(t)\| = \sqrt{r^2} = r$

$$\int_C h\, dr = \int_0^{2\pi} h\, r\, dt$$

$$= hr\int_0^{2\pi} dt = \cancel{h\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = h\,2\pi^2}$$

$$= 2\pi r h$$

(ii) Volumen

$$\iint_S h\, ds = \iint_T h\, \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^r h r\, dr\, d\theta$$

$$= h\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^r r\, dr\right] = h(2\pi)\frac{r^2}{2} = h\pi r^2$$

(c) $\sup S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 6\pi$

$= 2r^2 + 2rh = 6$

$r^2 + rh = 3 \rightarrow h = \dfrac{3-r^2}{r}$

$\boxed{r(r+h) = 3}$

flujo: $F(x,y,z) = (2x+y,\ xz,\ 3z+y^2)$

$$\iint_S \langle F,n\rangle dS = \iint_{S_1}\langle F,n_1\rangle dS_1 + \iint_{S_2}\langle F,n_2\rangle dS_2 + \iint_{S_3}\langle F,n_3\rangle dS_3$$

S_1 (tapa superior)

$r(u,v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\, v,\ h) \qquad u\in[0,r],\ v\in[0,2\pi]$

mejor lo hago por el teorema de Gauss

→ sup cerrada

→ der parc. continuas

$\mathrm{div}\, F = 2+0+3 = 5$

coef areolar cilíndricas

$$\iint_S \langle F,n\rangle dS = \iiint_V \mathrm{div}\, F\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^r\int_0^h 5\cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 5\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^h dz\right]\left[\int_0^r r\, dr\right] = 5(2\pi)(h)\frac{r^2}{2} = \underline{\underline{5\pi h r^2}}$$

$$\Phi = 5\pi\left(\frac{3-r^2}{r}\right)r^2 = 5\pi(3-r^2)r = 5\pi(3r-r^3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 15\pi - 15\pi r^2 = 0 \leftrightarrow r=1 \leftrightarrow h = \frac{3-1^2}{1} = 2$$

$\boxed{r=1,\ h=2}$