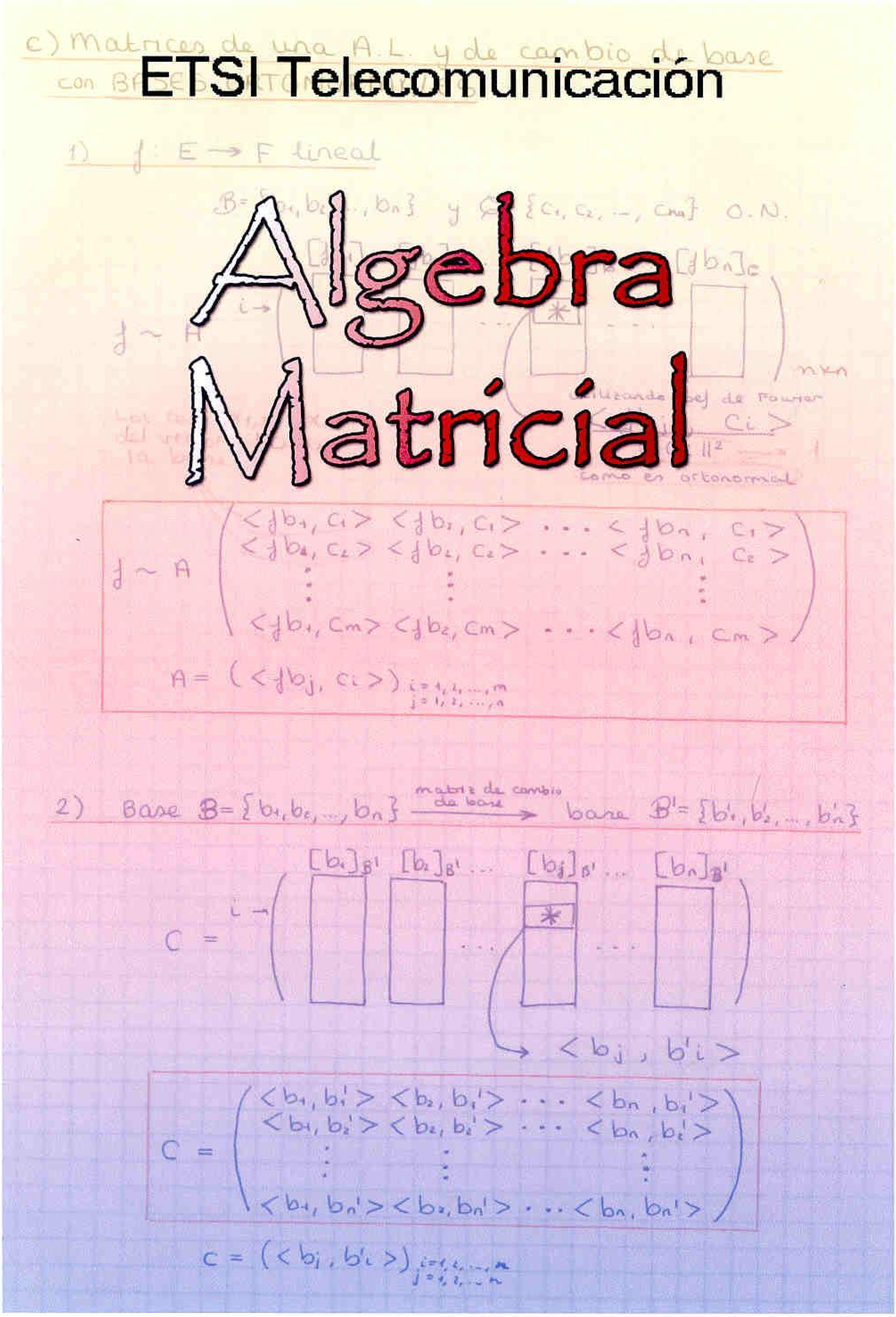
ETSI Telecomunicación

Algebra Matricial



Apuntes de Pak

Álgebra Matricial

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.
Primer cuatrimestre de 1^{er} curso
Curso 2003/2004

Contenido

Apuntes de la asignatura.
No hay resumen ya que era el primer curso de teleco y aún no tenía la costumbre de hacer referencia rápida ;)

Fecha de última actualización: 26 Agosto 2007

TEMA 1:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

Capítulo I.1. Álgebra matricial

Capítulo I.2. Sistemas de ec. lineales

I.3. Rango de una matriz → ya sabido

Capítulo I.4. Aplicaciones lineales

Libro Tema II

TEMA 1 SISTEMAS DE EC. DIFERENCIALES Y MATRICES

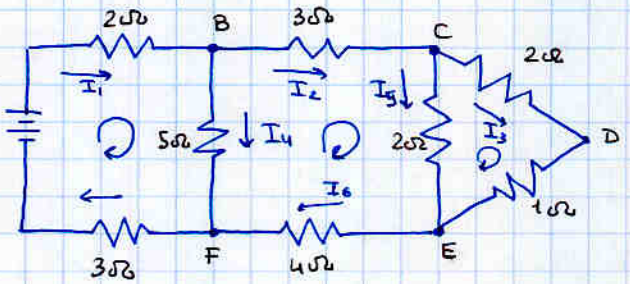
Capítulo I.1 ALGEBRA MATRICIAL

Objetivo básico del álgebra:
Resolver sistemas de ecuaciones

Teoría general
Técnicas eficientes de solución
Programación en ordenador

¿Porque? Son MUY frecuentes en los problemas prácticos.

ej: Leyes de Kirchoff



generalmente
cuanto mas ecuaciones
y menos incognitas
no tiene solucion
y si hay menos ecuaciones
que incognitas suelen
tener ∞ sol.
PERO HAY EXCEPCIONES

$x=1$ $\quad x+y+z=1$
$2x=2$ $\quad x+y+z=2$

	B.	$I_1 = I_2 + I_4$
1ª ley	C	$I_2 = I_3 + I_5$
	E	$I_3 + I_5 = I_6$
	F	$I_6 + I_4 = I_1$

$$2I_1 + 5I_4 + 3I_1 = V$$

2ª ley

$$3I_2 + 2I_5 + 4I_6 - 5I_4 = 0$$

$$(2+1)I_3 - 2I_5$$

7 ecuaciones y 6 incognitas (hay 1 que es dependiente y que tras detectada se puede eliminar)

Imagina un complejo prototipo con miles de circuitos

ej: unas pocas calles por las que pasan coches (ve libro)

Imagina una ciudad entera

• Matrices

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= -2 \\ -x + 2y + 2z &= 3 \\ 5x - y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots + \dots + \dots + \dots &= \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definición

A matriz: agrupación de datos organizados en filas y columnas ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$)

$m \times n$ Orden: nº de filas x nº de columnas

a_{ij} Elemento: cualquiera de sus números

A_i Filas: $\equiv$ A_j Columnas: $|||$

diag(A) Diagonal: $\diagdown$ $(a_{ij}) : i=j$

$$A = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = \text{fila} \\ j = \text{columna} \end{matrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Definición

Matriz cuadrada $m = n$

" rectangular $m \neq n$

Matriz triangular superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[ó \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right]$

se usa trapezoidal

" " inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

diagonal: $a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i \neq j$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Definición

$A = B \qquad m \times n \qquad a_{ij} = b_{ij}$

- ## Operaciones con Matrices

manipulación de números en masa

Suma y Producto por escalares

ej: Producción de 3 productos en 4 plantas

$$p_1 = \begin{array}{cccccc} & 560 & 360 & 340 & 0 & \text{prod } 1 \\ & 340 & 450 & 420 & 80 & \text{prod } 2 \\ & 280 & 270 & 210 & 380 & \text{prod } 3 \\ & \text{pl } 1 & \text{pl } 2 & \text{pl } 3 & \text{pl } 3 & \end{array}$$

Para sumar, sumar cada elemento. Para multiplicar, multiplicar cada elemento

Def:

A, B $\boxed{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$C = A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad D = \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Propiedades: elemento nulo $O_{m \times n}$
matriz opuesta $-A_{m \times n}$

$A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

a) $A + B = B + A$ conmutativa
b) $(A+B)+C = A+(B+C)$ asociativa (nos enseña a sumar 3)
c) $A + O = A$
d) $A + (-A) = O$
e) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
f) $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
g) $(\lambda \mu) A = \lambda(\mu A)$
h) $1 \cdot A = A$

$\in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ significa que pertenecen al conjunto de matrices de orden $m \times n$

dicho conjunto es un espacio vectorial

$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e.v;

~~subconjunto~~

dado el espacio vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$
cogemos 2 subconjuntos
triangulares superiores $\mathcal{M}^S_{m \times n}$
triangular inferiores $\mathcal{M}^I_{m \times n}$
en esos 2 subconjuntos, las operaciones producen matrices pertenecientes a su subconjunto.

$\mathcal{M}^S_{m \times n}$ es un sub espacio vectorial de $\mathcal{M}_{m \times n}$ ~~(subespacio vectorial)~~
$\mathcal{M}^I_{m \times n}$ es un sub espacio vectorial de $\mathcal{M}_{m \times n}$ ~~(subespacio vectorial)~~

se puede escribir:

$$\mathcal{M}^S_{m \times n} \hookrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}$$
$$\mathcal{M}^I_{m \times n} \hookrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}$$

$$\mathcal{M}^S_{m \times n} \cap \mathcal{M}^I_{m \times n} = \mathcal{M}^D_{m \times n} \hookrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}$$

Propiedades que se derivan:

$\lambda A = 0 \longleftrightarrow \lambda = 0$ ó $A = 0$
$\lambda \neq 0, \lambda A = \lambda B \longleftrightarrow A = B$

• Producto de Matrices

· La definición natural sería poco útil

ej piezas por ordenador

	O_1	O_2	O_3
P_1	4	3	2
P_2	2	2	1
P_3	1	1	1

a) ¿cuántas piezas harían falta para $8 O_1$, $12 O_2$ $10 O_3$?

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

b) ¿Núm de ordenadores con 156 de P_1, 120 de P_2, 80 de P_3?

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$$

c) ¿Cuánto material básico?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.6 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 3.4 & 2.8 & 2.2 \end{pmatrix}$$

ej material/pieza

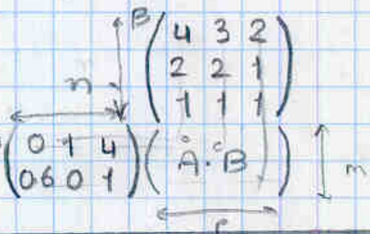
	P_1	P_2	P_3
m_1	0	1	4
m_2	0.6	0	1

- Definición

$$A, B \rightsquigarrow C = A \cdot B$$

$$m \times \boxed{n \quad n} \times p \rightsquigarrow m \times p \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Truquillo de Joaquín.



· Resultados Importantes

- Lema de las columnas

$A_{m \times n}$: A_i son columnas de A $\quad x = \mathbb{K}^n$

vector $n \times 1$

$$\boxed{Ax = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + \dots + x_n A_n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{tamaño } m \times 1}{A \cdot x} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ x_1 a_{21} \\ x_1 a_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 a_{12} \\ x_2 a_{22} \\ x_2 a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots = \overset{(m \times 1)}{\begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots \\ \cdots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \end{pmatrix}} = A \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \bigcirc \\ \\ \end{pmatrix} \leftarrow i \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}$$

$$A \cdot x = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} \\ \bigcirc \\ \\ \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$A \cdot x = b$$

$$\underset{(5\times 4)}{\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}} \underset{(4\times 1)}{\begin{pmatrix} x \\ \\ \end{pmatrix}} = \underset{(5\times 1)}{\begin{pmatrix} b \\ \\ \end{pmatrix}} = \boxed{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = b}$$

un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n} &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} &= b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots &= \cdots \\ a_{m1}x \end{aligned}$$

otra forma de escribir un sistema

Dice lo mismo que el teorema de Rouché.

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = b$$

significa que b es combinación lineal de las columnas

por lo tanto la matriz b no amplía el rango $rg(A|B) = rg(B)$

y hay solución

Propiedades del producto de matrices

- $A(BC) = (AB)C$ asociativa, enseña a multiplicar 3 matrices

  $A_{m\times n} B_{n\times p} C_{p\times q} = ABC_{m\times q}$

- $IA = AI = A$ matriz identidad

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

  existe una I para cada dimensión

  para quen funcione tanto IA como AI

  $I_{m\times m} A_{m\times n} = A_{m\times n} I_{n\times n}$

  para que I sea la misma: $m=n$

  A debe ser matriz cuadrada

- $A(B+D) = AB + AD$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ las matrices son muy permeables a los números

Producto escalar de antes

$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ $x \cdot y = ac + bd$

con matrices sería

$x = (a\ b)$ $y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ $(a\ b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \to ac + bd$

puede dar 0 sin una de las dos ser cero!

ej $(0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

¡No-propiedades!

- $AB = 0 \not\to A = 0$ ó $B = 0$
- $AB \neq BA$

ej 1er caso: no tenga siquiera sentido

ej: $(7\times \boxed{3}) \cdot (3\times 4)$

$(3\times 4) \times (7\times 3) \times$ X X

ej 2° el resultado cambia de dimensión

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0\ 1)$ $(0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ej si son cuadradas

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Hay ALGUNAS matrices que la cumplen ej I, matriz diagonal

- $AX = AY \not\to Y = X$ ó $A = 0$

$AX = AY$

$AX - AY = 0$

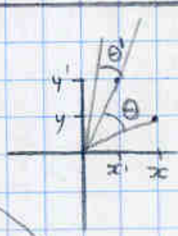
$A(X-Y) = 0$

el producto puede ser 0 sin que $A = 0$ ó $X - Y = 0$

↑ No se cumplen en general

Excepciones donde sí que se cumplen

a) $DD' = D'D$ diagonal b) $IA = AI$ c) Giro $\mathbb{R}^2$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

↓

matriz giro ángulo θ G_θ

$$G_\theta \cdot G_{\theta'} = G_{\theta'} \cdot G_\theta = G_{\theta+\theta'}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\mathrm{sen}\,\theta' \\ \mathrm{sen}\,\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' & -\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta' \\ \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta' + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' & -\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\mathrm{sen}(\theta+\theta') \\ \mathrm{sen}(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

· Potencia de una matriz cuadrada

Definición:

$$A^0 := I$$
$$A^{K+1} := A^K \cdot A$$

Propiedades:

a) $A^pA^q = A^{p+q}$ b) $(A^p)^q = A^{pq}$ $p, q \in \mathbb{N}$

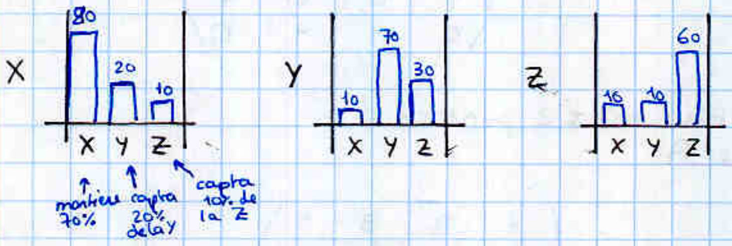
$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= (A+B)A + (A+B)B\\ &= AA + BA + AB + BB\\ &= A^2 + \underbrace{BA + AB}_{\neq 2AB} + B^2\end{aligned}$$

Interés de la potenciación de matrices

Ej:



X, Y, Z son las 3 marcas comerciales que venden un producto que todos consumen.

$X_0 = 20\%$ $Y_0 = 30\%$ $Z_0 = 50\%$

$$U_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8x_0 + 0.1y_0 + 0.1z_0 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot U_0 = U_1$$
$$A \cdot U_1 = U_2 = A \cdot A \cdot U_0 = A^2 U_0$$
$$U_3 = A \cdot U_2 = A \cdot A^2 \cdot U_0 = A^3 U_0$$

$$\boxed{U_n = A^n U_0}$$

se puede ver que estado límite $\equiv U_\infty = \begin{pmatrix} 45\% \\ 35\% \\ 20\% \end{pmatrix}$

Hay una manera mejor para calcular U_∞, que ya veremos, pero de momento:

$$A \cdot U_\infty = U_\infty$$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 0.8x + 0.1y + 0.1z &= x \\ 0.2x + 0.7y + 0.1z &= y \\ 0.1x + 0.3y + 0.6z &= z \end{aligned}$$

1. Escribir el sist de manera habitual (incognitas a un lado)
2. Resolver el sistema (es compatible indeterminado) → 2 ec con 3 incog. tiene ∞ soluciones (al restarle 1 a cada columna se queda en 0)
3. Hay que añadir la ecuación $x + y + z = 1$

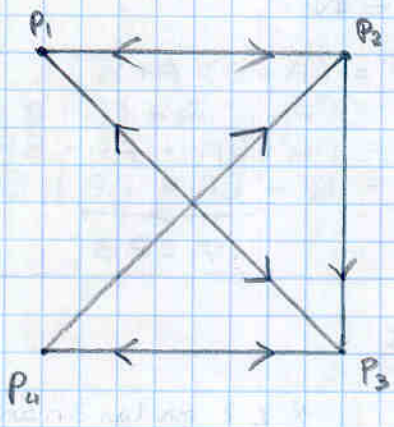
· Proceso de Markov

Matriz de transición A (q. cumple) a) $a_{ij} \geq 0$

b) $a_{ij} \leq 1$

c) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \ldots, n$

ejemplo: Grafo dirigido



si fuera un grafo mucho mas complejo, visto así no se puede analizar

Matriz de adyacencia

$a_{ij} = 1$ si $p_i \rightarrow p_j$

$a_{ij} = 0$ en los demas casos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuantos caminos posibles entre 2 puntos?

↳ Potencias de A

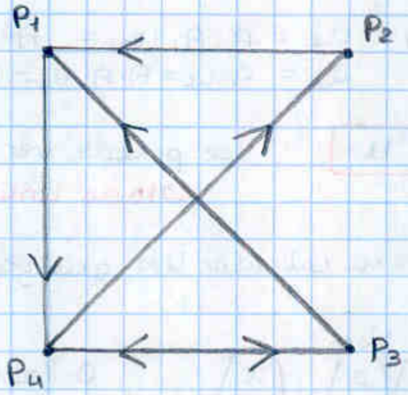
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

si $A = (a_{ij})$ matriz de adyacencia de un grafo entonces $a_{ij}^{(k)}$, elemento (i,j) de la potencia A^k

es el número de caminos de longitud K entre i y j

Ejercicio

Hallar B para



una vez encontrada: A + B es la forma de viajar utilizando el medio de transporte A y el B en un solo viaje

$(A+B)^2$ en 2 viajes

$(A+B)^n$ en n viajes

• Otras operaciones con matrices

↳ Definición: Matriz traspuesta de A

$A = a_{ij}$ $A^t = a^t_{ij}$

$a^t_{ij} = a_{ji}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} = H^T$

Propiedades

(a) $(A+B)^t = A^t + B^t$ (b) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

(c) $(A^t)^t = A$ (d) $(AB)^t = B^t A^t$ OJO CON EL ORDEN

Tiene sentido, imagina que tienen tamaños diferentes

Matriz simétrica: $A^t = A$

antisimétrica: $A^t = -A$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$ ej $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

su diagonal es cero

sólo matrices cuadradas

↳ Definición: Matriz conjugada de A

$A = a_{ij}$ $\overline{A} = \overline{a_{ij}}$

ej. $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ 0 & 1+2i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -2i \\ 0 & 1-2i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$

Propiedades

(a) $\overline{\overline{A}} = A$ (b) $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\,\overline{A}$

(c) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ (d) $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (e) $(\overline{A})^t = \overline{A^t}$

sólo matrices cuadradas

Matriz hermítica: $\overline{A}^t = A$

antihermítica: $\overline{A}^t = -A$

su diagonal sólo pueden ser números reales

ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -3 \end{pmatrix} = \overline{A}^t =$

↳ Definición: Traza de $A_{n \times n}$

$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{K}$ la suma de la diagonal

$B = (-5)$ $tr(B) = -5$ $|B| = -5$

↑determinante

Propiedades

(a)= $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ (b) $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$

(c): $tr(A) = tr(A^t)$ (d) $tr(AB) = tr(BA)$

$tr(AB) = tr(A)\,tr(B)$?$_{X}$ – buscar contraejemplo

¿la traza es una aplicación inyectiva?

no es inyectiva

Pueden haber 2 matrices con la misma traza

- **Determinantes**

Gran valor TEÓRICO. Muy poco valor PRÁCTICO

Definición por inducción

a) $A_{1\times1} = (a_{11}) \rightsquigarrow \det(A) \equiv |A| := a_{11}$

b) supongamos definido $|A|$ para $A_{(n-1)\times(n-1)}$

Dada $A_{n\times n}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c|cc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{array}\right)$$

A_{ij}

cofactor adjunto de a_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \underbrace{|A_{ij}|}_{}$$

el determinante que resulta de tachar la fila i y la columna j con un signo que depende de i y j

elegiendo fila i: $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + \dots + a_{in}C_{in}$

ó eligiendo columna j: $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{columna, por ej 2ª columna}]{\text{elegimos una fila o una}} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22}$$

$$= a_{12}\cdot(-a_{21}) + a_{22}\cdot(+a_{11})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ej:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{2ª fila}]{\text{elegimos}} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

Ej: Regla de Sarrus

Ej:

$$\begin{vmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1+i & 2 \\ 0 & 1 & -1 & i \\ i & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1+i & 2 \\ 1 & -1 & i \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} -i & 0 & 1 \\ 1 & -1+i & 2 \\ 1 & -1 & i \end{vmatrix} = -1 - i(-1+i) - 2 - (-1+i) - i(-i^2(-1+i) - 1 - (-1+2) - 2i)$$

$$= -1 + i + 1 - 2 + 1 - i + i + 1 + i - i + 1 - 2$$

$$= -1 + i$$

Propiedades de los determinantes

↳ $\det(\overbrace{A_1, \dots, A_i + A_i', \dots, A_n}^{\text{La matriz escrita por filas (o columnas)}}) = \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_i', \dots, A_n)$

ej: $\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ i & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ i & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 1 \\ i & 2 \end{vmatrix}$

↳ $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

* ↳ $\det(A_1, \dots, \alpha A_i, \dots A_n) = \alpha \det(A)$

* ↳ $\det(A_1, \dots, \underline{A_i}, \dots, \underline{A_j}, \dots, A_n) = \ominus \det(A_1, \dots, \underline{A_j}, \dots, \underline{A_i}, \dots A_n)$

↳ $\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots A_n) = 0$ si $A_i = A_j$

↳ $\det(A_1, \dots, A_i \dots A_n) = 0$ si $\exists A_i = 0$

* ↳ $\det(A_1, \dots, A_i + \alpha A_j, \dots, A_j \dots, A_n) = \det(A)$

↳ $\det(A_1, \dots, A_n) = 0$ si $\exists A_i$ combinación Lineal de los demás

* ↳ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

↳ $\det(A) = \det(A^t)$

↳ $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \underset{\uparrow \text{ elementos de la diagonal}}{a_{ii}}$ si A es triangular (sup o inferior)

Ejemplo: Resolver en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$$P(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 9 & \dots & 9 \\ 9 & x^2 & \dots & 9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 9 & \dots & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

- A la primera fila le sumo todas las demas

$$= \begin{vmatrix} x^2+9(n-1) & x^2+9(n-1) & \dots & x^2+9(n-1) \\ 9 & x^2 & \dots & 9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 9 & \dots & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

- Saco de la primera fila $x^2+9(n-1)$

$$= x^2+9(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 9 & x^2 & \dots & 9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 9 & \dots & x^2 \end{vmatrix}$$

- Resta la primera columna a todas las columnas

$$= x^2+9(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 9 & x^2-9 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 9 & 0 & \dots & x^2-9 \end{vmatrix}$$

es triangular inferior!

$$= (x^2+9(n-1))(x^2-9)^{n-1}$$

$$= (x^2+9(n-1))(x+3)^{n-1}(x-3)^{n-1}$$

+3, -3 raices de mult n-1

$$x^2+9(n-1) = 0$$

$$x^2 = 9(1-n)$$

$$x = \pm 3\sqrt{1-n} = \underline{\pm\sqrt{n-1} \cdot i}$$

- ## INVERSA DE UNA MATRIZ

$$ax = b \rightsquigarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \equiv 1x = a^{-1}b \equiv x = a^{-1}b$$

↳ si y sólo si $\exists a^{-1} = \frac{1}{a} \equiv a \neq 0$

$$Ax = b \xrightarrow{??} A^{-1}Ax = A^{-1}b \equiv 1x = a^{-1}b \equiv x = A^{-1}b$$

↳ si y sólo si ¿¿A??

Ejemplos

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2/9 & 5/9 & -1/9 \\ 4/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$ $BA = I_2$

$AB \neq I_3$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\nexists B : BA = I_3$

$\uparrow$

c) A $B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B' = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ -5/4 & 9/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = AB' = I$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a + 3b = 1$
$2a + 2b = 0$
$3a + b = 0$

Este sistema, o el de c,d, o el de e,f, es incompatible

Definición

$A_{m \times n}$ { inversa por la izquierda B : $BA = I_n$
inversa por la derecha C : $AC = I_m$

↳ $B \neq C$ en general
↳ Hay matrices sin inversa (Hay sistemas que no tienen solución)
↳ Hay matrices con varias inversas (Hay sist. con varias inversas)

Definición: Invertible

A invertible si $\exists B : AB = BA = I$
B es una inversa de A

A invertible ⟶ A inversa
B inversa de A ⟶ A es inversa de B
B inversa de A ⟶ B inversa por la derecha y por la izquierda de A

Propiedad: La inversa es única

A invertible $\Rightarrow \exists! B : AB = BA = I$

Demostración

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Definicion: A^{-1}

se define A^{-1} como la única inversa de A

En $\mathbb{K}$ $\quad \exists x^{-1} \Longleftrightarrow x \neq 0$

En $\mathcal{M}_{n\times n}$ $\quad \exists A^{-1} \Longleftrightarrow$???

$|A| \neq 0$

traspuesta de la adjunta

Teorema: $\quad \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$; $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(C_{ij}^{t}\right)$

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \qquad |A| = 1+i \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1+i}\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ -1+i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = \frac{-1+i+i-i^2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1+i$

$|A^{-1}| = \frac{1-i}{2}$

$|A||A^{-1}| = 1$

$\frac{(1+i)(1-i)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$AB = I \Rightarrow BA = I$

$AB = I \Rightarrow B = A^{-1}$

$BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$

Proposición

$A, B_{n\times n}$ invertibles $\quad \lambda \neq 0$

a) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \qquad (A^{-1})^{-1} = A$

b) AB invertible $\qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dem

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$?

$A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

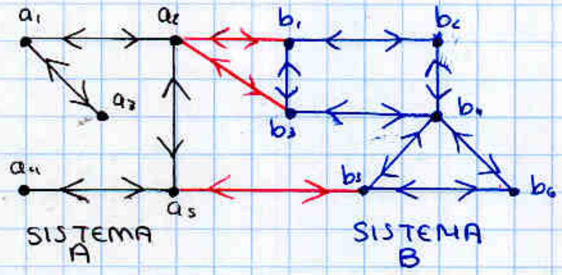
c) λA invertible $\qquad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

d) A^t invertible $\qquad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

e) $\quad (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

- **Matrices de Bloques**

ej 1.



$$G = \begin{array}{c|c|c} & a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5 & b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6 \\ \hline a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5 & A & C \\ \hline b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6 & C^t & B \end{array}$$

en C^t porque todos los viajes son de ida y vuelta. Sino sería otra

ej 2 $(A_1 | A_2 | A_3 | \ldots | A_n)$ ej 3 $\left(\frac{A_1}{\frac{1}{A_m}}\right)$ ej 4 $(A | B)$

Definición matriz por bloques

a) Todos los bloques de una fila tienen el mismo nº de filas
b) '' '' '' '' '' columna '' '' '' '' '' columnas

Operaciones por Bloques

$A = (\underbrace{A_{ij}}_{\text{matricitas}})$ $B = (B_{ij})$ A_{ij} y B_{ij} deben tener mismo orden

$+$ $A + B = (A_{ij} + B_{ij})$

$\lambda \cdot A = (\lambda A_{ij})$

$A^t = (A_{ij}^t)^t$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ \hline B_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{22} \end{array}\right)$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$A = (A_{11} | A_{12})$

$A_{11}{}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $A^t = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$A_{12}{}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\underset{m\times n}{A} = (A_{ik})$ $\underset{n\times p}{B} = (B_{kj})$

A_{ik} y B_{kj} conformes para multiplicar

$AB = C = (C_{ij})$

$$C_{ij} = \sum_{K=1}^{n} A_{iK} B_{Kj}$$

A_{ij} invertible $\not\Rightarrow$ A invertible

ej $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \end{array}\right)$

A invertible $\not\Rightarrow$ A_{ij} invertible

ej $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \\ \hline \\ \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{21} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{22} \\ \hline A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} \end{array}\right)$$

OJO CON EL ORDEN

Prop:

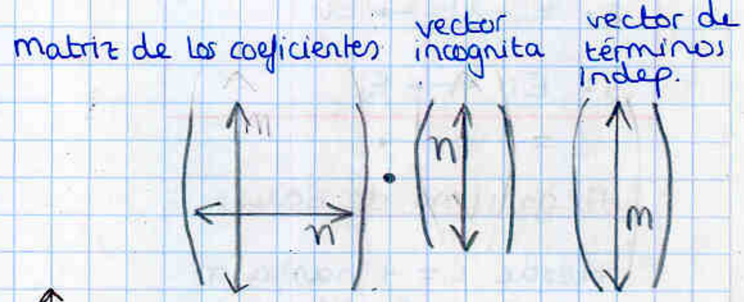
$A_{n\times n}$ triang $\overset{\text{sup.}}{\text{inf.}}$ $a_{ii} \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$ y ES triang $\overset{\text{sup}}{\text{inf}}$

↑ diagonal en cero
$|A| \neq 0$
$\exists !\ A^{-1}$

se demuestra por bloques

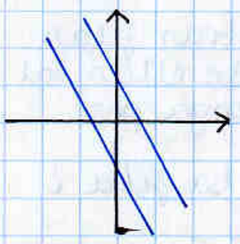
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuación lineal
Sistema lineal
Coeficientes del sistema
Términos independientes

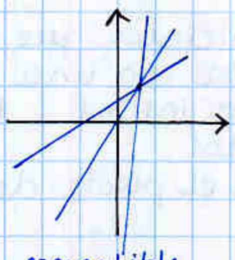


Matriz aumentada
(A|B)

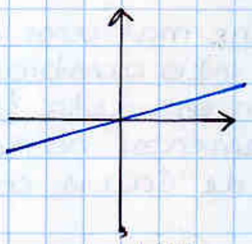
Solución:



incompatible



compatible determinado



compatible indeterminado

· Método de eliminación de Gauss

$$(A \mid b) \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{transformaciones de}} (U \mid c)$$

↳ matriz escalonada: cada fila tiene más ceros que la que precede

(A|b) y (U|c) tienen las mismas soluciones ⟷ ↳ soluciones mediante sustitución inversa

Sustitución inversa

ej: sea la matriz escalonada $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$

de abajo a arriba

$$\equiv \left\{\begin{array}{l} 2x + y - z + 2w = 1 \\ 2y + 2z = 2 \\ 5w = 4 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} w = 4/5 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \\ y = 1 - \alpha \\ x = -\frac{4}{5} + \alpha \end{array}\right.$$

ecuación paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^4$

$$P = \left(-\frac{4}{5}, 1, 0, \frac{4}{5}\right)$$
$$v = (1, -1, 1, 0)$$

→ variable libre

estas podrían ser libres, pero en el caso general no se puede asegurar (ej: w sólo puede ser básica)

variable libre: aquella cuya columna no tiene pivote.

- **Transformaciones de Gauss** (la matriz que resulta es EQUIVALENTE)

1. $\lambda E_i \longrightarrow E_i \quad (\lambda \neq 0)$ (sustituir la ecuación i por un multiplo de la ecuación i)
2. $E_i - \lambda E_j \longrightarrow E_i$
3. $E_i \longleftrightarrow E_j$

Algoritmo de Gauss

desde i = 1 hasta n:

- si la fila i tiene mas ceros iniciales que otras filas posteriores, intercambiarla con una de ellas tal que ningun cero de la fila inicial i tenga por debajo elementos no nulos
- Hacer un paso de Gauss con el pivote de la fila i

Paso de Gauss

sea i una fila, sea a_{ij} su pivote

Para las filas $K > i$

$$E_K - \left(\frac{a_{Kj}}{a_{ij}}\right) E_i \longrightarrow E_K$$

Ejemplos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overset{\text{pivote}}{\textcircled{1}} & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2 - (\frac{2}{1})E_1 \rightarrow E_2 \\ E_3 - (-\frac{2}{1})E_1 \rightarrow E_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \overset{\text{pivote}}{\textcircled{-4}} & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 - (-\frac{5}{4})E_2 \rightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7/4 & 3 \end{array}\right)$$

sustitución inversa:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y & = & -1 \\ -4y - z & = & 4 \\ 7/4 z & = & 3 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x = 13/7 \\ y = -10/7 \\ z = 12/7 \end{array}$$

Incluye consejos a la hora de programar:

$$\begin{pmatrix} \overset{\text{no sirve}}{\textcircled{0}} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_1} \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\underline{E_2 - (\frac{0}{2})E_1 \rightarrow E_2} \\ E_3 - (\frac{1}{2})E_1 \rightarrow E_3}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3 - (-\frac{1/2}{1})E_2 \rightarrow E_3}$$

que el PC no se ocupe de calcular eso

que el PC ponga ese cero automaticamente

- $\boxed{(A|b) \text{ y } (U|c) \text{ tienen las mismas soluciones}}$

son sistemas/matrices equivalentes

Tipos de variables:

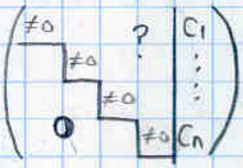
- libre: las variables cuyas columnas no tienen pivote son libres seguro. Las demas pueden serlo aveces, otras veces no. En general, siempre tomar como variable libre aquella cuya columna no tiene pivote
- básica: las demas

↳ Tipos de matrices escalonadas y cjto de soluciones asociado

- Antes que nada, suprimir las filas que son todo ceros (corresponden a ecuaciones que expresan las mismas condiciones que alguna de las anteriores.

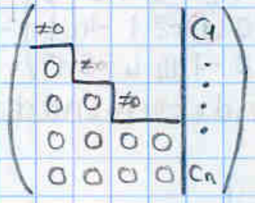
- Caso 1: $(U|c)$ $U_{n\times n}$ triang. sup $r_{ii} \neq 0$

  ∃! solución



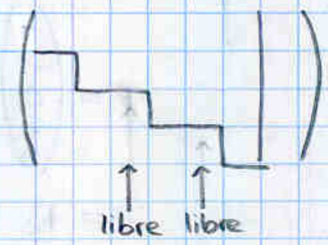
- Caso 2: Alguna fila de $(U|c)$ es todo ceros excepto último término

  ∄ solución



- Caso 3: ninguna de las anteriores ≡ U tiene mas columnas q. filas

  ∃ ∞ soluciones



Ejemplos

- $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 6 \end{array}\right)$ incompatible

- $\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$

compatible determinada

- $\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \textcircled{3} & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\uparrow}{0} & \underset{\uparrow}{0} & 0 \end{array}\right)$ compatible indeterminada

libres

TIENE MAS COLUMNAS QUE FILAS

$t = \alpha \in \mathbb{R}$

$z = \beta \in \mathbb{R}$

$y = -\frac{3\alpha + \beta}{3}$

$x = \frac{3\alpha - \beta}{3} + \beta - 2\alpha$

$= \frac{3\alpha - \beta + 3\beta - 6\alpha}{3}$

$= \frac{-3\alpha + 2\beta}{3}$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\alpha + \frac{2}{3}\beta \\ y = -\alpha + \frac{1}{3}\beta \\ z = \beta \\ t = \alpha \end{array}\right\}$$ ecuación paramétrica de un plano en $\mathbb{R}^4$

$$P = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} \textcircled{1} & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 14 & 4 & -5 & 15 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -33 & 22 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \underset{\uparrow}{0} & 1 & \underset{\uparrow}{-3} & 2 \end{array}\right)$

compatible indeterminada

este paso al PC le daría igual

libre libre

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - \alpha + \beta \\ y = -1 + \alpha + 2\beta \\ z = \beta \\ t = 2 + 3\alpha \\ u = \alpha \end{array}\right\}$$ ecuación paramétrica de un plano en $\mathbb{R}^5$

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P_0 + \pi$$

Nota : $P = P_0 + \pi$

- π (un subespacio vectorial, ya que pasa por el origen) es la solución del sistema homogéneo (term indep's = 0)
- P_0 es una solución particular del sistema completo

Para resolver un problema no homogeneo muy complicado $Ax = b$

Se soluciona primero $Ax = 0 \rightarrow$ solución S_h

Se encuentra una solución particular $Ax = b \rightarrow x_0$

la solución: $S = x_0 + S_h$

Factorización LU

Matrices elementales

Son matrices cuadradas m×m que, premultiplicando a una matriz m × n realizan las operaciones de Gauss

$\lambda E_i \to E_i$

$$\begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

multiplica la primera fila por K

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

multiplica la segunda fila por k

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

multiplica la cuarta fila por K

$E_i \longleftrightarrow E_j$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

intercambia primera y última filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

intercambia segunda y tercera fila

$E_i - \lambda E_j \to E_i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_2 + KE_1 \to E_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -K & 1 \end{pmatrix}$$

$E_3 - KE_2 \to E_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ K & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_3 + KE_1 \to E_3$

Proposición

$E_{m\times m}$ elemental
$A_{m\times n}$ $\Rightarrow E \cdot A$

$E \cdot A$ es la matriz que se obtiene al aplicar a A la operación que caracteriza a E.
E se obtiene aplicando dicha operación a la matriz identidad.

Proposición

Toda matriz elemental es invertible y su inversa es otra matriz elemental que realiza la operación 'inversa'

↳ $E: F_i \longleftrightarrow F_j \; = \; E^{-1}: F_j \longleftrightarrow F_i$ $\qquad E = E^{-1}$

↳ $E: \textcircled{\lambda} F_i \to F_i \qquad E^{-1}: \frac{F_i}{\textcircled{\lambda}} \to F_i$

↳ $E: F_i \textcircled{+} \lambda F_j \to F_i \qquad E^{-1}: F_i \textcircled{-} \lambda F_j \to F_i$

- Aplicando sucesivas matrices elementales

$$\boxed{A \xrightarrow{\text{GAUSS}} U}$$ → la matriz escalonada se llama U por 'upper'.

$$A \xrightarrow[E_1]{\text{transformación de Gauss dada por } E_1} E_1A \xrightarrow[E_2]{} E_2E_1A \xrightarrow[\dots]{} \dots \xrightarrow[E_n]{} \underbrace{E_n \dots E_2 E_1}_{} A = U$$

$$E \cdot A = U$$

$$\boxed{A = E^{-1}U}$$

- Matriz triangular unitaria
  - ↳ una matriz cuadrada triangular y con 1's en la diagonal
  - ↳ Las matrices elementales del tipo $F_i + \lambda F_j$ $i > j$ corresponden a matrices triangular ~~sup~~ inferior unitaria (t.i.u.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - ↳ Propiedades, sean E, D t.i.u.
    - E · D es t.i.u.
    - E^{-1} es t.i.u.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si sólo utilizamos la transformación $F_i - \lambda F_j \to F_i$

entonces $E_n, \dots, E_2, E_1,$ son t.i.u.

$\Rightarrow$ $E_n \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1$ es t.i.u = E

$\Rightarrow$ E^{-1} es t.i.u. = L (Lower)

$$A = LU$$

PERO

El intercambio de filas no corresponde a una matriz t.i.u.

- Si hicieramos todos los cambios de fila necesarios antes que nada
  $P \cdot A$
- Sólo se necesitaria el paso de gauss $F_i - \lambda F_j \to F_i$
  $P \cdot A \rightsquigarrow U$
  el cual si que corresponde a una t.i.u.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ F_i - \lambda F_j \to F_i}}{E} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ F_i \leftrightarrow F_i}}{P} \cdot A = U$$

$$P \cdot A = E^{-1}U$$

$$P \cdot A = L U$$

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot U}$$

↑ todos los $F_i \leftrightarrow F_j$ cambios de filas

↑ la inversa de toda los $F_i - \lambda F_j \to F_i$

· Coste de calcular L

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} \overset{\text{pivote}}{\boxed{2}} & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -8 & -1 & 12 \end{pmatrix}} \xrightarrow[F_2-\boxed{2}F_1\to F_2]{} \begin{pmatrix} \overset{\text{pivote}}{\boxed{2}} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -8 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-\boxed{1}F_1\to F_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \overset{\text{pivote}}{\boxed{3}} & 1 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-\boxed{(-3)}F_2\to F_3]{} \underset{U}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3E_2E_1A = U \qquad E_3E_2E_1 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$EA = U$$

$$A = E^{-1}U \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-3} & 1 \end{pmatrix} = L$$

La L se calcula a la vez que U
No hay coste, alguno en calcularla

$$A = \underset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{U}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

→ Requerimientos de memoria

Siendo inteligente y sabiendo que
U es superior
L es triangular inferior
L tiene unos en la diagonal

$$L\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{U}$$

no tiene coste adicional de memoria!

· Interes de la factorización LU

$$\{Ax = b\} \equiv \{LUx = b\} \equiv \begin{cases} Ly = b & \text{sustit } \downarrow \\ Ux = y & \text{sustit } \uparrow \end{cases}$$

Ejemplo:

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 4x + 5y + z = 7 \\ 2x - 8y - z = 12 \end{array}\right\}$$

$$LUx = b \quad \text{sea } Ux = c \to Uc = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

sust. de arriba a abajo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = 4 \\ 2c_1 + c_2 = 7 \\ c_1 - 3c_2 + c_3 = 12 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c_1 = 4 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 5 \end{array}$$

sust. inversa

$$\text{donde} \quad \overset{U}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}\overset{x}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \overset{c}{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ 3y + z = -1 \\ 2z = 5 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} z = 5/2 \\ y = -5/6 \\ x = 19/2 \end{array}}$$

· Factorización LDU

de forma que U sea unitaria

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}}_{\text{La U de antes}}$$

↳ Descomposición de Cholesky

en caso de

- A simétrica
- Los pivotes sean positivos

al ser A simétrica, se tiene

$$A = LU$$
$$= C^tC$$

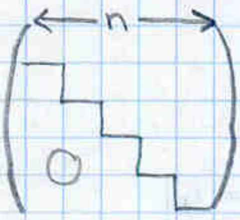
al ser los pivotes positivos:

$$A = LDU$$
$$= L\sqrt{D}\sqrt{D}\,U$$
$$= U^t\sqrt{D}\sqrt{D}\,U \quad \text{(por ser A simétrica)}$$

como D es diagonal, $\sqrt{D} = \sqrt{D}^t$

$$A = U^t\sqrt{D}^t\sqrt{D}\,U$$
$$= (\sqrt{D}U)^t(\sqrt{D}U)$$
$$= C^t\,C$$

· Reduce el coste de almacenamiento



normalmente se necesita n^2

ahora se necesita:

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n+1}{2}n = \frac{n^2+n}{2}$$

que es casi la mitad

• Resolución simultanea de sistemas

• con un único sistema no hace falta LU

$$Ax = b \longrightarrow (A \mid b) \xrightarrow[\text{GAUSS}]{} (U \mid c) \longrightarrow x \text{ sol.}$$

• cuando hay muchos sistemas con la misma matriz de coeficientes:

$$Ax = b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n$$

a) si hicieramos Gauss n veces estariamos repitiendo las mismas operaciones excepto los términos independientes.

$$Ax = b_i \xrightarrow[\text{largo}]{\text{GAUSS}} x^i \text{ sol} \quad \underset{\text{largo, largo, largo, largo, largo, ...}}{\forall i}$$

b)

$$\underset{\substack{\text{largo}\\ \text{- solo una vez}}}{A = LU} \quad \left\{ \begin{array}{l} Ly = b^i \xrightarrow[\text{sencillo}]{} Ux = y^i \\ \qquad\qquad\qquad\quad \xrightarrow[\text{sencillo}]{} x^i \text{ sol } \forall i \end{array} \right.$$

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 2 & 1 & 0 & 4 & -1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -8 & -1 & 12 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$(\; A \quad | b_1 | b_2 | b_3 | b_4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix} = \underset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{U}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

b_1 : $Ly = b^1 \xrightarrow[\text{sust}]{} y^1 \quad Ux = y^1 \xrightarrow[\text{sust}]{} x_1$

b_2 : $Ly = b^2 \xrightarrow[\text{sust}]{} y^2 \quad Ux = y^2 \xrightarrow[\text{sust}]{} x_2$

≡

Estimación del número de operaciones

consideramos : matriz cuadrada
una operacion ≡ multiplicacion y suma
pivotes no nulos, sin intercambio de filas

Obtención de matriz reducida = Obtención de LU

$$\left(\quad\right) \xrightarrow[\substack{\text{una operacion}\\ \text{para cada}\\ \text{termino } (n+1)\\ \text{para las}\\ (n-1) \text{ filas}\\ \\ (n-1)(n+1)}]{F_i - \lambda F_j \to F_i} \left(\quad\right) \xrightarrow[(n-1-1)(n+1-1)]{} \left(\quad\right) \cdots \xrightarrow[(k+1)(k-1)]{} \left(\quad\right) \cdots \xrightarrow[(2+1)(2-1)]{\text{paso final}}$$

$$\begin{aligned} \text{Total: } & (n^2-1) + \dots + (k^2-1) + \dots + (4-1) \\ & = 1 + 2^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2 - n \\ & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n \\ & \approx \frac{2n^3}{6} \approx \boxed{\frac{n^3}{3}} \end{aligned}$$

sustitución inversa

$$= \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Para m sistemas distintos

a) Gauss m veces: $m\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}\right)$

b) por LU (obtención LU una vez, sust inv 2m veces)

↑ una hacia arriba y otra hacia abajo

$$\frac{n^3}{3} + 2m\frac{n^2}{2} = \frac{n^3}{3} + mn^2$$

para $n = 10\,000$
$m = 100$
hay una diferencia del orden de
3×10^{13} operaciones

ALGORITMO DE JORDAN-GAUSS

- mismas operaciones que Gauss
  - \+ hacer 1's todos los pivotes
  - \+ hacer 0's por arriba de los pivotes

ejemplo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 14 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 14 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 14 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 14 & 0 & 0 & -28/3 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 62/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

tienen que ser unos

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 7/2 & 0 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 31/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right) \end{array}$$

$u = -7/3$

$t = -5/3$

$z = \alpha$

$y = 31/3 + 3\alpha$

$x = -7/3 - 7/2\,\alpha$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 3 & 2 \\ 0 & -27 & -11 & -5 \\ 0 & -14 & 0 & -3 \end{array}\right) \end{array} \to \cancel{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & -11 & -27 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & -3 \end{array}\right) \end{array}} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 3 & 2 \\ 0 & -27 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 11/14 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & -27 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 11/14 \end{array}\right) \end{array}$$

esto es lo que haria un humano

Hagamos lo que haria una maquina

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & -27 & 0 & -59/14 \\ 0 & 0 & -1 & 11/14 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 59/378 \\ 0 & 0 & 1 & -11/14 \end{array}\right) \end{array}$$

$z = -11/14$

$y = 59/378$

$x = 1/6$

HAY ALGO MAL,
PERO COGES LA
IDEA

- Comparación de número de operaciones

n	Gauss $\approx n^3/3$	J-G $\approx n^3/2$	Cramer $(e(n+1)!)$
10	333	500	109×10^6
100	333 333	500000	Ma Error

· Algoritmo de la inversa de una matriz

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \uparrow \\ C_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow \\ AC_1 \\ \downarrow \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ AC_1 & AC_2 & AC_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ AC_1 & AC_2 & AC_3 & \dots & AC_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = I$$

$A \cdot C_j = i_j \quad \forall j$

$$(A \mid i_j) \xrightarrow[\text{GAUSS}]{} \xrightarrow[\text{J. GAUSS}]{} (I \mid C_j)$$

tengo n sistemas de ecuaciones

$$(A_{n\times n} \mid i_1 i_2 i_3 \dots i_n)$$
$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{J. GAUSS}]{} (I \mid A^{-1})$$

Proposición: $\left\{ \begin{array}{l} (A \mid I) \xrightarrow{\text{J GAUSS}} (I \mid A^{-1}) \\ \text{si hay algun pivote nulo (no da la identidad)} \\ \text{es porque no existe inversa} \end{array} \right.$

ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad \boxed{0}} & & & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

esta fila es dependiente de las otras. Se puede escribir como combinación lineal de las anteriores

no tiene inversa

· Número de operaciones para calcular la inversa

a) Método Jordan-Gauss $\approx n^3$ operaciones

b) $A^{-1} = \frac{(A_{adj})^t}{|A|} \approx (n+1)!$

- ## Errores de redondeo

nº de operaciones muy alto $\Rightarrow$ imprecisión en los datos
aritmética computacional finita

Matrices bien y mal condicionadas

a) ej. Matriz bien condicionada:

$$\begin{aligned} 0.01x + 10y &= \underline{10} \\ 0.1x - 0.1y &= 0 \end{aligned}$$

solucion $= 0.999000999 = x = y$

con una pequeña imprecisión en los datos:

$$\begin{aligned} 0.01x + 10y &= \underline{9.9} \\ 0.1x - 0.1y &= 0 \end{aligned}$$

solución $x = y = 0.989010989$
muy parecida a la exacta

b) ej. Matriz mal condicionada

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 1.0001y &= 2.0001 \end{aligned}$$

solución $x = y = 1$

con una pequeña imprecisión en los datos:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 1.0001y &= 2.0002 \end{aligned}$$

solucion $x = 0$!! $y = 2$!!

fatal!!

esto se debe a que los vectores de cada ecuación $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\1.0001\end{pmatrix}$ son casi paralelos.

Aritmética computacional finito

ejemplo lejos de la realidad pero ejemplar: máquina que trabaja con tres cifras significativas.

$3852.37 = 385\times10^{1}$ $\boxed{3}\boxed{8}\boxed{5}\ \boxed{1}$

$0.017865 = 179\times10^{-4}$ $\boxed{1}\boxed{7}\boxed{9}\ \boxed{-4}$

ej ¡utilizando matriz BIEN condicionada!

$$\begin{aligned} 0.01x + 10y &= 10 \\ 0.1x - 0.1y &= 0 \end{aligned}$$

solución exacta:
$x = y = 0.999000999\ldots$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 10 & 10 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 10 & 10 \\ 0 & \underset{\rightarrow -100.1}{-100} & -100 \end{array}\right)$$

sol con 3 cifras significativas
$y = 1$ $x = 0$!!!

hemos destrozado al pobre sistema que estaba bien condicionado.

- ## PIVOTACION PARCIAL

- Intercambiar filas no solo cuando un pivote es cero
- Utilizar siempre el pivote con mayor valor absoluto

ej: $\left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 10 & 10 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{P.P.} \left(\begin{array}{cc|c} 0.1 & -0.1 & 0 \\ 0.01 & 10 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.1 & -0.1 & 0 \\ 0 & \underset{10.01}{10} & 10 \end{array}\right)$

sol
$x = 1$
$y = 1$

¿es la pivotación parcial el remedio infalible? NO

ej $x + y = 2$
$x + 1.007y = 9$

solución exacta

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1.007 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0.007 & 7 \end{array}\right)$$

$y = 1000$
$x = 0.002$

utilizando 3 cifras significativas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \underset{1.007}{1.01} & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0.01 & 7 \end{array}\right)$$

$y = 700$
$x = 0.003$

ejemplo:
Matriz mal condicionada:
Matrices de Hilbert

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

TEMA 2. APLICACIONES LINEALES

Definición

tenemos $(U, + ; \mathbb{K}, \cdot)$, $(V, + ; \mathbb{K}, \cdot)$

una aplicación $f: U \rightarrow V$

es lineal si

$$\left.\begin{array}{l} f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2) \\ f(\lambda u)=\lambda f(u) \end{array}\right\}$$

expresado de manera mas rigurosa pero menos intuitiva.

$$f(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)=\lambda_1 f(u_1)+\lambda_2 f(u_2)$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$$

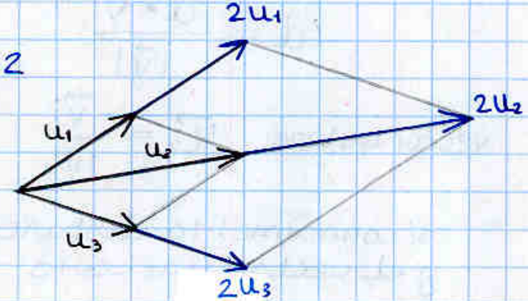
endomorfismo: aplicación lineal de un espacio vectorial en si mismo
epimorfismo: aplicación lineal sobreyectiva
isomorfismo: aplicación lineal biyectiva

Ejemplos

1. Homotecias

$$f_\lambda \quad U \longrightarrow V$$
$$u_i \rightsquigarrow \lambda u_i$$

ej $\lambda=2$



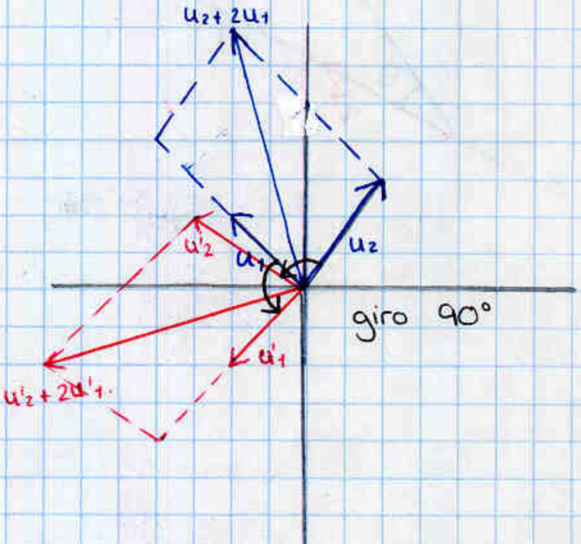
$\lambda>1$ amplifica el espacio vectorial
$0<\lambda<1$ disminuye el espacio vectorial
$\lambda=0$ colapsa todo
$-1<\lambda<0$ disminuye y da la vuelta
$\lambda<-1$ amplifica y da la vuelta

cumple ser aplicación lineal:
$f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)$
$f(\lambda u_1)=\lambda f(u_1)$

2. Giro en $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{f_\theta : U \rightarrow V}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



cumple ser aplicación lineal
$f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)$
$f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1)$

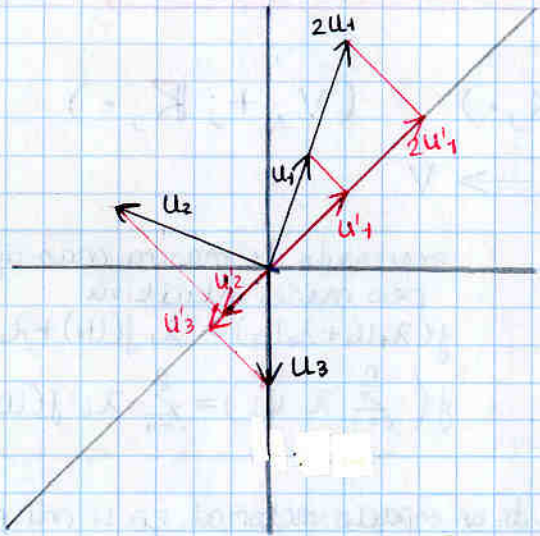
3. Ej de aplicación no lineal

$$f(x,y)=x^2+y^2$$
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

no cumple ser lineal $f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = (\lambda x)^2+(\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2+y^2) \neq \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ej $f\begin{pmatrix} 3\cdot 2 \\ 3\cdot 1 \end{pmatrix} = (3\ 2)^2+(3\cdot 1)^2 = 45 \neq 3(2^2+1^2)=15$

4. Proyección en $\mathbb{R}^2$ sobre $y = mx$



graficamente, se ve que cumple ser aplicación lineal

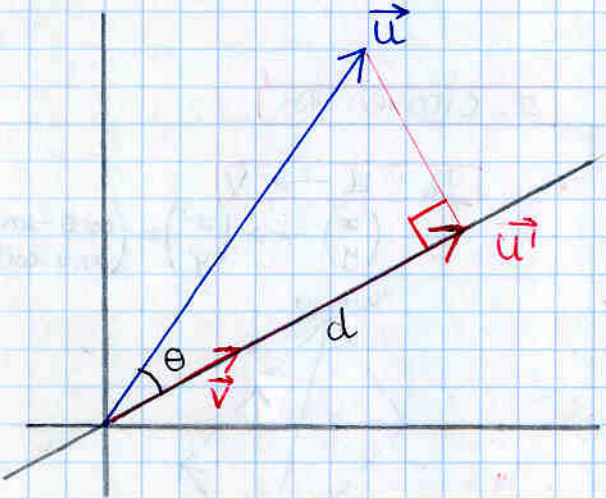
En el caso de $y = x$
utilizando caso general de abajo
siendo $\vec{u} = \binom{x}{y}$

unitario $\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{v} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En general



$$\underbrace{\text{por un lado: Proyección: } d = |\vec{u}| \cdot \cos\theta \qquad \text{por otro: producto escalar } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta}$$

$$d = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

vector unitario: $\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

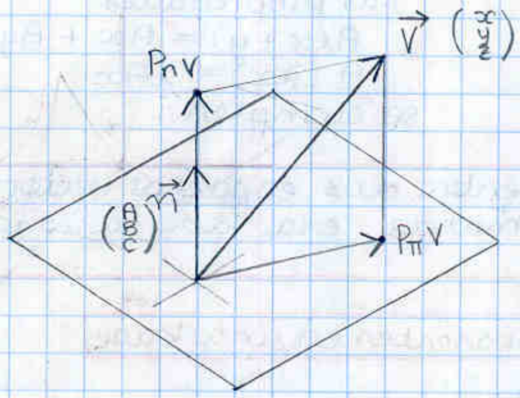
si conocemos la distancia y el vector unitario

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\boxed{\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}}$$

5. Proyección en $\mathbb{R}^3$ sobre π $(Ax + By + Cz = 0)$

pasa por el origen



$$P_\pi v = v - P_n v$$

$$\boxed{P_\pi v = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|n^2|} \cdot \vec{n}}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{Ax + By + Cz}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

caso particular: plano XY $(z = 0)$

$$P_\pi v = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|n^2|} \cdot \vec{n} \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_{\pi_{XY}} v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

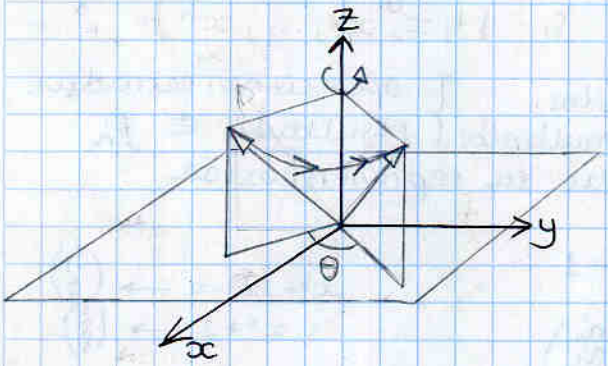
se puede escribir como una matriz. Por tanto, es aplicación lineal:

$$G(v + u) = G(u) + G(v)$$
$$G(\lambda v) = \lambda G(v)$$

se suele llamar igual a la aplicación y la matriz

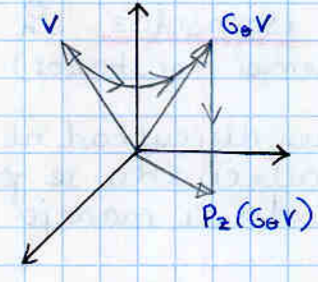
6. Giro en $\mathbb{R}^3$

caso particular, sobre eje z



$$\boxed{G_\theta v = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Giro compuesto con proyección



$$P_z(G_\theta v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En este caso da igual el orden de las aplicaciones; generalmente no da igual (piensa en el producto de matrices

7 $f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{K}^n$ $A\ m \times n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \rightsquigarrow A \cdot x_{m \times 1}$$

$$\mathbb{K}^n \rightsquigarrow \mathbb{K}^m$$

Cualquier aplicación que se pueda expresar como una matriz.
Las propiedades
$A(x+y) = Ax + Ay$
$A(\lambda x) = \lambda Ax$
se cumplen.

Siempre que una aplicación entre dos espacios vectoriales sea representable como una matriz, esa aplicación es lineal

8. $f: U \to \mathbb{K}^n$ $f(u)$= vector de componentes en una base

$$f: U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \xrightarrow[\substack{\text{base} \\ B = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}}]{\text{se toma una}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

cumple las propiedades de aplicación lineal

$$f(p+q) = f(p) + f(q) \qquad f(\lambda p) = \lambda f(p)$$

$$\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda q_0 \\ \lambda q_1 \\ \vdots \\ \lambda q_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

ejemplo:
representación de $\mathcal{P}_n :=$ {polinomios de grado $\leq n$}
utilizando la base canónica $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

con $\mathcal{P}_n$, sabemos sumarlos
, sabemos sacar multiplos } operaciones cerradas: resultado $\in \mathcal{P}_n$

se comportan igual que su representación en componentes $\mathbb{K}^{n+1}$

$$f: \mathcal{P}_n \xrightarrow[B = \{1, x, \ldots, x^n\}]{} \mathbb{K}^{n+1}$$

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ej

$$x^3 + 2x^2 - x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^3 + 2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilidad:
$\mathcal{P}_n$ y su representación en $\mathbb{K}^{n+1}$ son isomorfos $\mathcal{P}_n \cong \mathbb{R}^{n+1}$
(las mismas operaciones con los mismos resultados)

Algunos espacios muy abstractos ofrecen dificultad al trabajar con ellos. Si se obtiene una base adecuada se pueden pasar a componentes, simplificando su manejo

9. Operador derivada n-ésima

$$D^n : \mathcal{C}^n[a,b] \longrightarrow \mathcal{C}^0[a,b]$$

a una aplicación de este tipo (una función de funciones) se le llama operador.

Todas las funciones continuas en un iterbalo $[a,b]$ cumplen las propiedades de espacio vectorial.

ej: operador derivada primera

$$f \xrightarrow{\qquad} Df = f'$$
$$e^x \xrightarrow{\qquad} De^x = e^x$$
$$\operatorname{sen} x \xrightarrow{\qquad} D\operatorname{sen} x = \cos x$$
$$x^n \xrightarrow{\qquad} Dx^n = n x^{n-1}$$
$$\operatorname{sen}^5 x \xrightarrow{\qquad} D\operatorname{sen}^5 x = 5 \operatorname{sen}^4 x \cos x$$

cumple ser una función lineal ?

$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$$
$$D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda (f') = \lambda D(f)$$

Estos espacios vectoriales son mas complejos que los anteriores, asi como

$\mathbb{R}^2$ $\quad B = \{ \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix} \}$ por ej

$\mathcal{P}_n$ $\quad B = \{1, x, \ldots x^n\}$

· espacios como

$\mathcal{P} = \{\text{todos los polinomios}\}$ $\quad B = \{1, x, x^2, \ldots \ldots \ldots\}$ ∞!

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ $\quad B = \{\ldots\}$ todas las funciones... ∞!

no tienen ninguna base.

10. Operador Integral de Riemann

$$T : \underset{\text{integrable}}{\mathcal{R}[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \xrightarrow{\qquad} T(f) = \int_a^b f$$

cumple ser una aplicación lineal ?

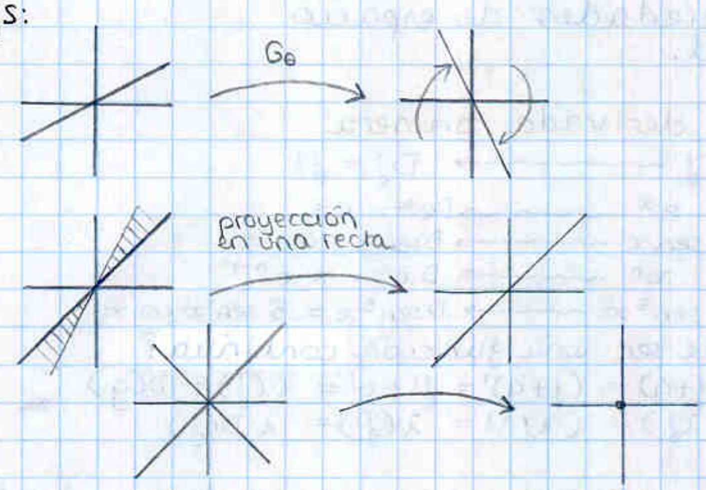
$$T(f+g) = T(f) + T(g) \qquad\qquad T(\lambda f) = \lambda T(f)$$
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad\qquad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

· Propiedades de una aplicacion lineal

$$* \begin{cases} f(0) = 0 \\ s \hookrightarrow u \implies f(s) \hookrightarrow v \quad \text{(en particular } f(u) \hookrightarrow v\text{)} \end{cases}$$

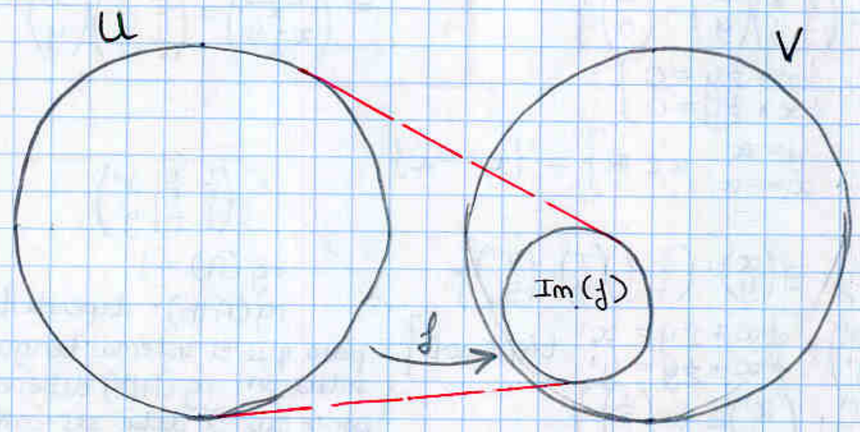
- la imagen del cero siempre es cero.
- la imagen de un subespacio es siempre un subespacio

ejs:



• Imagen y nucleo de una aplicación lineal

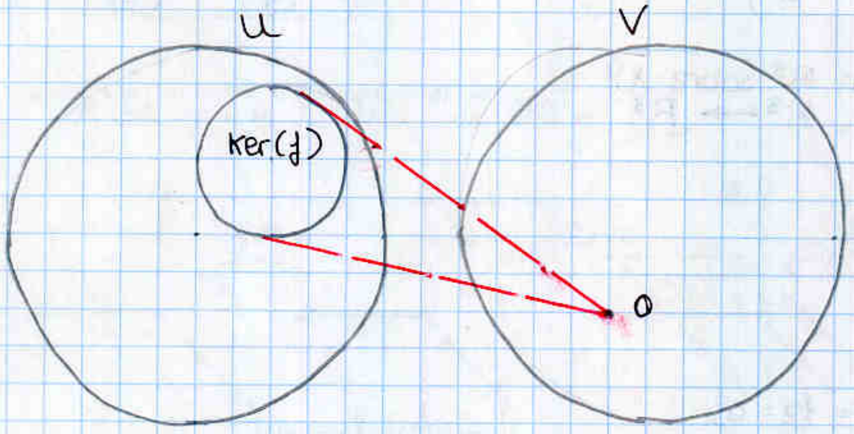
• Imagen $\mathrm{Im}(f)$



$\mathrm{Im}(f) \subset V$

Im(f) es un subespacio vectorial de V.

• Nucleo $\mathrm{Ker}(f)$



$\mathrm{Ker}(f) \subset U$

como mínimo
Ker(f) contiene
el elemento
nulo

Ejemplos:

(1) Homotecias $\quad f_\lambda : \begin{array}{l} U \longrightarrow U \\ u \longrightarrow \lambda u \end{array}$

si $\lambda \neq 0 \rightarrow \mathrm{Im}(f_\lambda) = U$
$\quad \rightarrow \mathrm{Ker}(f_\lambda) = \{u \in U : f(u) = \lambda u = 0\}$
$\quad = \{0\}$

si $\lambda = 0 \rightarrow \mathrm{Im}(f_\lambda) = \{0\}$
$\quad \rightarrow \mathrm{Ker}(f_\lambda) = U$

(2) Giro en $\mathbb{R}^2$ $\quad G_\theta : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} \rightsquigarrow G_\theta \binom{x}{y} \end{array}$

· intuitivamente se puede ver que: $\mathrm{Im}(G_\theta) = \mathbb{R}^2$ y $\mathrm{Ker}(G_\theta) = \{0\}$

· en algunos casos no se puede hacer intuitivamente, hagamoslo:

$$\mathrm{Ker}(G_\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\det(G_\theta) = \cos^2 + \mathrm{sen}^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rango 2
rango$(A|b) = 2$
$\Rightarrow$ compatible determinado
solución única $\binom{0}{0}$

$$\mathrm{Im}(G_\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : G_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta = x' \\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta = y' \end{array} \text{ tenga solución} \right\} = \mathbb{R}^2$$

como $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 2 \ \forall x' \forall y'$
el sistema tiene solución $\forall \mathbb{R}^2$

(3) Proyección en $\mathbb{R}^2$ sobre $y=x$

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

· intuitivamente: $Im(P) = \{y=x\}$

$Ker(P) = \{y=-x\}$

· formalmente

$$Ker(P) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{matrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{matrix} y = \alpha \\ x = -\alpha \end{matrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \{y=-x\}$$

Recuerda

$$P_u = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2}\cdot\vec{v}$$

$$= \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Im(P) = \left\{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \begin{matrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = x' \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = y' \end{matrix} \text{ tiene sol}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \{x' = y'\}$$

$$\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}\right)$$

$rg(A) = 1$

$rg(A|b)$: depende de $\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}$

para que el sistema tenga solución, $rg(A|b)$ debe ser 1, por lo que $\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}$ debe ser comb. lineal de otras columnas

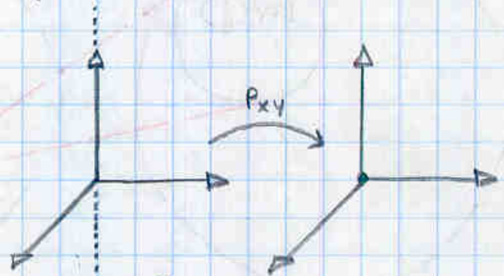
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(5) Proyección en $\mathbb{R}^3$ sobre XY

$$P_{xy} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^3}$$ → no por ser la imagen un plano significa que el espacio vectorial destino sea $\mathbb{R}^2$

· intuitivamente:

$Im(P_{xy}) = \{z=0\}$



$Ker(P_{xy}) = \{x=y=0\}$

· formalmente:

$$Ker(P_{xy}) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \qquad P \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} x & & = 0 \\ & y & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{matrix}\right\} = \{x=y=0\}$$

$$Im(P_{xy}) = \left\{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} : \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} : \begin{matrix} x & & = x' \\ & y & = y' \\ & 0 & = z' \end{matrix} \text{ tenga solución}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{z=0\}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right)$$

$rg(A) = 2$

para que el sistema tenga sol. $rg(A|b)$ debe ser 2.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ debe ser comb. lineal de las otras columnas.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6) En general, para una a. l. representable como una matriz

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

$$x_{n\times 1} \rightsquigarrow \underbrace{A_{m\times n}\, x_{n\times 1}}_{m\times 1}$$

$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0 \right\} \equiv$ espacio nulo de A $\equiv N(A)$

como mínimo existe la solución $x = 0$

sea $rg(A) = r \leq \min(m, r)$

↳ tiene r pivotes no nulos (r incógnitas básicas)

↳ hay $n-r$ incógnitas libres (es un sistema $n-r$ - paramétrico : dim : $n-r$

$\mathrm{Im}(f) = \left\{ x' \in \mathbb{K}^m : \exists x \in \mathbb{K}^n : A\cdot x = x' \right\} \equiv$ espacio columna de A $\equiv C(A)$

sea $rg(A) = r$

para que $A\cdot x = x'$ se cumpla, $rg(A|x')$ ha de ser $r = rg(A)$

es decir x' ha de ser combinación lineal de las columnas independientes de A : dim r

$\dim \mathrm{Ker}(f) = n - r$

$\dim \mathrm{Im}(f) = r$

- Teorema de las dimensiones

$$\dim U = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f)$$

- Teorema de la inversa?

f tiene inversa $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

es lógico

una homotecia con $\lambda=2$ tiene inversa, se puede 'deshacer'

una homotecia con $\lambda=0$ no tiene inversa, no se puede 'deshacer' Su $\underset{\text{únicamente}}{\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}}$

f	$\dim U$	$\dim V$	$\dim \mathrm{Ker}\, f$	$\dim \mathrm{Im}\, f$	$\exists f^{-1}$?
$\lambda\neq 0$ f_λ	n	n	0	n	✓
$\lambda=0$ f_0	n	n	n	0	✗
G_θ	2	2	0	2	✓
$P_{y=x}$	2	2	1	1	✗
P_{xy}	3	3	1	2	✗
A	n	m	$n-r$	r	$n=r$ ✓ $n>r$ ✗

¿Qué operaciones con a. l. son lineales?

$f + g$

$\lambda \cdot f$

$g \circ f$

f^{-1}

ej $\quad g \circ f$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Sabemos que:

f lineal $\begin{cases} f(u_1+u_2) = f(u_1)+f(u_2) \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$

g lineal $\begin{cases} g(v_1+v_2) = g(v_1)+g(v_2) \\ g(\lambda v) = \lambda g(v) \end{cases}$

Hay que ver si $g \circ f$ lineal

$(g \circ f)(u_1+u_2) = (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2)$?

$(g \circ f)(u_1+u_2) = g(f(u_1+u_2)) = g(\underbrace{f(u_1)}_{v_1}+\underbrace{f(u_2)}_{v_2}) = g(f(u_1)) + g(f(u_2))$ ✓

$(g \circ f)(\lambda u) = \lambda (g \circ f)(u)$?

$(g \circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda \underbrace{f(u)}_{v}) = \lambda g(f(u))$

REPRESENTACION MATRICIAL DE UNA A.L.

la pregunta es:

$$\underset{\dim U = n}{f: \mathbb{K}^{\underline{n}}} \longrightarrow \underset{\dim V = m}{\mathbb{K}^{\underline{m}}} \Longrightarrow \exists A_{\underline{m\times n}} : f(u) = A\cdot u \quad ?$$

ej: $D: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$

$p \rightsquigarrow Dp = p'$

$\ker(D) = \{p \in \mathcal{P}_3 : D_p = 0\} = \{p : gr(p) = 0\} = \{\mathbb{R}\}$

este caso es sencillo y se saca directo.

Veamos este otro:

ej: $L_\alpha : \mathcal{P}_n \longrightarrow P_n$

$p \rightsquigarrow L_\alpha p = [(1-x^2)p']' + \alpha(\alpha+1)p]$

$\ker(L_\alpha)$????

esta vez ya es mas complicado:

La pregunta es:

¿Puedo hacer una matriz que represente a L_α de forma que pueda trabajar con ella para obtener Ker?

la respuesta es SI:

en lugar de trabajar con polinomios, encuentra una base y trabaja con vectores y matrices

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorfo}"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, leftrightarrow, "\text{isomorfo}"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

$[u]_B \equiv$ los componentes de u en la base B

$$[u] \leftrightsquigarrow u \longrightarrow v = f(u) \leftrightsquigarrow [v]$$

$$[v] = g[u] = A\cdot[u]$$

$$\boxed{[f[u]] = A\cdot[u]}$$

¿cómo se obtiene A?

sea $f: U \longrightarrow V$ lineal

Base de U $B = \{u_1, \dots, u_n\}$

Base de V $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$

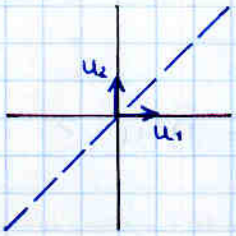
$$[f(u)]_{B'} = A\cdot[u]_B$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [f(u_1)]_{B'} & \dots & [f(u_n)]_{B'} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} \square & \dots & \square \end{array}\right)_{m\times n} \end{array}$$

Ejemplo (1)

$S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$u\binom{x}{y} \rightsquigarrow Su :=$ simétrico de u respecto de la recta $y = x$



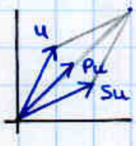
elejimos $B = \left\{ \underset{u_1}{\binom{1}{0}}, \underset{u_2}{\binom{0}{1}} \right\}$

hay que calcular Su_1 y Su_2 en componentes usando la base del espacio de llegada (en este caso coincide con el de salida)

$Su_1 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2$
$Su_2 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$

$$S \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si no supieramos lo de la matriz



$u + Su = Pu$

$$Su = 2\,Pu - u$$
$$= 2\,\frac{u \cdot v}{|v^2|} \cdot v - u$$
$$= 2\,\frac{x+y}{2}\binom{1}{1} - \binom{x}{y}$$
$$= \binom{x+y}{x+y} - \binom{x}{y} = \binom{y}{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\binom{x}{y}$$

Ejemplo (2)

$L: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$

$p \rightsquigarrow Lp = ((1-x)p')'$

elegimos $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B' = \{1, x, x^2\}$

$L1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$Lx = -1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$Lx^2 = 2 - 4x = 2 \cdot 1 + -4 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$
$Lx^3 = 6x - 9x^2 = 0 \cdot 1 + 6x + -9 \cdot x^1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$

$$L \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Hallar los $p \in \mathcal{P}_3 : Lp = 0 \equiv$ ¿$\operatorname{Ker} P$?

$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{sol: } \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b = c = d = 0 \end{array}$$
(libre, por no tener pivote)

Operaciones $\overset{\text{con}}{\text{entre}}$ a. l. y efecto en sus matrices

sea f una a. l. $\sim A$
sea g una a. l. $\sim B$

$U \xrightarrow{f+g} V \qquad f+g \sim A+B \qquad \lambda \cdot f \sim \lambda \cdot A$

$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \qquad f \circ g \sim B \cdot A$

$U \xrightarrow{f} V \qquad f \sim \underset{\text{cuadrada}}{A_{n \times n}} \Rightarrow \exists f^{-1} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ y $f^{-1} \sim A^{-1}$

$\Leftrightarrow f$ es biyectiva

Ejercicio

$$\phi : \mathcal{P}_4 \longrightarrow \mathcal{P}_3$$

$$\phi(P(x)) = D^3(p(x)) + x\,D(p(x)) - 4\,p(x)$$

a) Probar que ϕ es lineal, y $\phi \sim A$ respecto bases canónicas

$$\phi(p+q) \overset{?}{=} \phi p + \phi q \quad \forall p,q \in \mathcal{P}_4$$
$$\phi(\lambda p) \overset{?}{=} \lambda \phi p \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\phi(p+q) &= D^3(p+q) + xD(p+q) - 4(p+q)\\ &= D^3p + D^3q + x(Dp + Dq) - 4p - 4q\\ &= D^3p + D^3q + xDp + xDq - 4p - 4q\\ &= \phi(p) + \phi(q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(\lambda p) &= D^3(\lambda p) + xD(\lambda p) - 4(\lambda p)\\ &= \lambda D^3 p + \lambda x Dp - 4\lambda p\\ &= \lambda(D^3p + xDp - 4p)\\ &= \lambda \phi p\end{aligned}$$

Representación matricial respecto de las bases canónicas.

$$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \qquad B' = \{1, x, x^2, x^3, \quad\}$$

$$\phi \sim A \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} [\phi 1]_{B'} & [\phi x]_{B'} & [\phi x^2]_{B'} & [\phi x^3]_{B'} & [\phi x^4]_{B'} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} -4 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)_{4\times 5}\end{array}$$

$$\phi 1 = -4 = -4\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$
$$\phi x = -3x = 0\cdot 1 + -3\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 +$$
$$\phi x^2 = -2x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x - 2\cdot x^2 + 0\cdot x^3$$
$$\begin{aligned}\phi x^3 &= D^3(x^3) + xD(x^3) - 4x^3\\ &= 6 + 3x^3 - 4x^3\\ &= 6 - x^3 = 6\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 - 1\cdot x^3\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\phi x^4 &= D^3(x^4) + xD(x^4) - 4x^4\\ &= 24x + 4x^4 - 4x^4\\ &= 24x = 0\cdot 1 + 24\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\end{aligned}$$

b) Resolver $y''' + xy' - 4y = 0$ en $\mathcal{P}_4$. ¿Es ϕ inyectiva?

$$\phi p = 0 \equiv \mathrm{Ker}(\phi)$$
$$A[p]_B = 0 \equiv N(A)$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \underset{\uparrow}{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left.\right\} \begin{array}{l} e = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ d = 0 \\ c = 0 \\ 3b = 24\alpha \rightarrow b = 8\alpha \\ a = 0 \end{array}$$

Libre por no tener pivote
un parámetro libre
- una recta

$$= \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = 8\alpha x + \alpha x^4 = \alpha(8x + x^4)$$

¿es inyectiva?
ser inyectiva implica que $\ker(\phi) = \{0\}$
este no es el caso

$$\text{a.l. inyectiva} \iff \ker(\text{a.l.}) = \{0\}$$

Inyectiva:
2 elementos no pueden tener misma imagen

sobreyectiva:
los polinomios del espacio de llegada son todos imagen de alguien.

¿es sobreyectiva?

$$\dim(\ker\phi) + \dim(\text{Im}\,\phi) = \dim P_4$$
$$1 \quad + \dim(\text{Im}\,\phi) = 5$$
$$\dim(\text{Im}\,\phi) = 4$$

4 dimensiones implica TODO
un espacio de dimensión 4.
TODO el espacio de llegada

Por el teorema de las dimensiones, $\dim(\text{Im}\,\phi) = 4$
y, como $\text{Im}(\phi) \subseteq P_3$
$$4 = 4$$
$\text{Im}(\phi)$ no es un subespacio de P_3

Si, es sobreyectiva

c) Determine si los polinomios de Legendre: $1, x, 3x^2 - 1, 5x^3 - 3x$ pertenecen a la imagen de ϕ

son polinomios P_3. Y como todo P_3 es imagen de ϕ, como hemos visto en b). Entonces esos polinomios son imagen de ϕ

Si no supieramos que es sobreyectiva:

$$\overset{?}{\exists}\, p \in P_4 : \quad \phi\, p = q$$

$$\exists \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = [p]_B : \quad A[p]_B = [q]_{B'} \equiv \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) Considere $D^3 p + x Dp - 4p = x^3$ Encontrar una solución

$$\phi p = x^3$$
$$A \cdot [p]_B = [x^3]_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$e = \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
$d = -1$
$c = 0$
$b = 8\alpha$
$a = -\frac{3}{2}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 8\alpha \\ 0 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$ como se pide una solución p.ej $\alpha = 0$ $$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1(x) = -\frac{3}{2} - x^3$$

e) Demuestre que en el espacio $\mathcal{P}_4$, la solución general de $D^3p + xDp - 4p = x^3$ es $p_1(x) + Ker(\Phi)$

Ya sabiamos que la solucion de un problema no homogeneo es una solución particular del no homogeneo mas la solucion del problema homogeneo

$$S = x_0 + S_0$$

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{solucion particular}} + \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{solucion del homogeneo}} = x_0 + N(A) \right\}$$

$$S = \left\{ p(x) = -\frac{3}{2} + 8\alpha x - x^3 + \alpha x^4,\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} - x^3 + \left\{ \alpha(8x - x^4),\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= p_1(x) + Ker(\Phi)$$

CAMBIOS DE BASE. MATRICES SEMEJANTES

$$¿\,[f(u)]_{B_1} = A[u]_B \Rightarrow [f(u)]_{B_2} = A[u]_{B_2}\ ?$$ NO

- Cambio de base

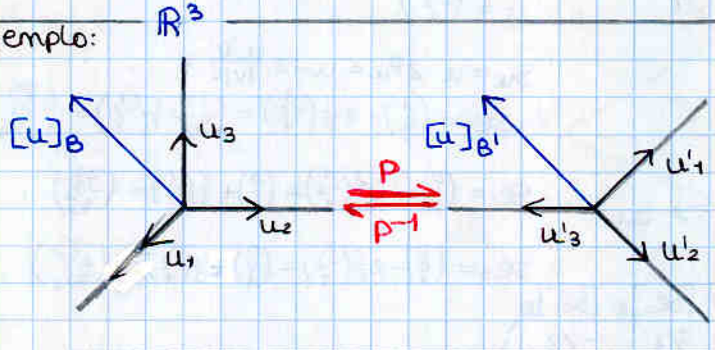
de $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ a B' en un mismo espacio
(B y B' tendrán n componentes)

$$[u]_{B'} = P[u]_B \qquad B \xrightarrow{P} B'$$

↑ matriz de cambio de base

$$\text{donde}\quad P = \begin{pmatrix} [u_1]_{B'} & \dots & [u_n]_{B'} \\ \boxed{} & \dots & \boxed{} \end{pmatrix}_{n\times n}$$ invertible

ejemplo:



$$u'_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad u'_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad u'_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 &= -2\alpha_3 \\ 0 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned} \qquad \alpha_3 = 0 \qquad 1 = 2\alpha_1 \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 &= -2\alpha_3 \\ 0 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned} \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$\frac{1}{2} = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \downarrow +$$
$$2\alpha_1 = 1$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}$$
$$\alpha_2 = 0$$

$$u_3 = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 &= -2\alpha_3 \quad \alpha_3 = 0 \\ 1 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned} \qquad 2\alpha_1 = 1 \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

para $[u]_B = \begin{pmatrix}7\\2\\-3\end{pmatrix}$

$$[u]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

3 sistemas con los mismos coeficientes! Se podía hacer así:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{J.G.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$ porq estamos en base canónica

que es justo la inversa. Se obtienen directamente P y P^{-1} con sólo los calculos de P.

En general. Con la base canónica SÓLO.
P^{-1} es poner la nueva base como columnas.
y P se saca haciendo la inversa

· Matrices semejantes

$$\begin{tikzcd} U_B \arrow[r, "f", "A_{m\times n}"'] & V_B \\ U_{B'} \arrow[u, "P_{n\times n}"] \arrow[r, "f", "B_{m\times n}"'] & V_{B'} \arrow[u, "Q_{m\times m}"'] \end{tikzcd}$$

$B = Q^{-1} A P$

A y B son matrices semejantes

Definición:

$A \sim B$ si $\exists P \,/\, B = P^{-1} A P$

semejante a

en el caso de un endomorfismo
$U_B = V_B$
$P = Q$

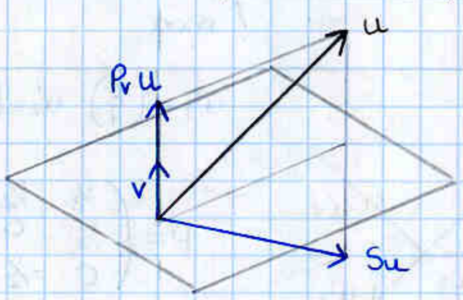
Ejemplo

$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

endomorfismo: aplicacion de un espacio en si mismo.
Solo necesitamos una base para los dos

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ simétrica respecto del plano $x - 2y + z = 0$

Calculemos A, la matriz que representa a S en la base canónica $\mathcal{E}$



$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Su = u - 2P_u = u - 2\frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v$

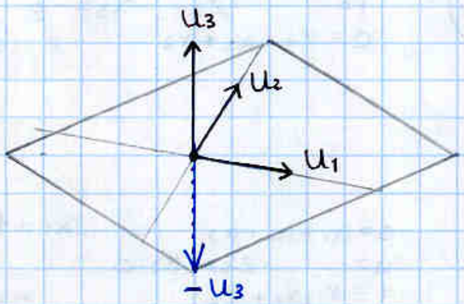
$Se_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$Se_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{-2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$Se_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$$S \sim A \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [Se_1]_{\mathcal{E}} & [Se_2]_{\mathcal{E}} & [Se_3]_B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

utilizando otra base astutamente escogida: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



$$S \sim B \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [Su_1]_B & [Su_2]_B & [Su_3]_B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$Su_1 = u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3$

$Su_2 = u_2 = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3$

$Su_3 = -u_3 = 0u_1 + 0u_2 - 1u_3$

y la matriz de cambio de base de B a $\mathcal{E}$ viene dada por

$$P \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [u_1]_{\mathcal{E}} & [u_2]_{\mathcal{E}} & [u_3]_{\mathcal{E}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

con este diagrama se ve rapidamente el uso de cada matriz

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \\ \mathbb{R}^3_B \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^3_B \arrow[u, "P"] \end{tikzcd}$$

y se puede comprobar que

$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

TEMA 3: TEORIA ESPECTRAL

• Valor y vector propio

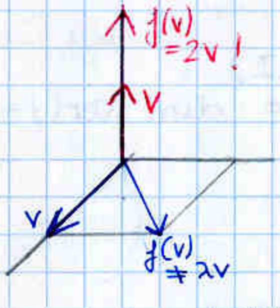
$f: V \longrightarrow V$ lineal (endomorfismo: aplicación de un espacio en si mismo)

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \qquad \vec{v} \neq 0 \qquad \lambda \in \mathbb{K} \ (\lambda \text{ puede ser cero}) \\ \vec{v} \equiv \text{vector propio} = \text{autovector} = \text{eigen vector} \\ \lambda \equiv \text{valor propio} = \text{autovalor} = \text{eigen value} \end{array}}$$

Ejemplos

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2z \end{pmatrix}$

se puede ver geometricamente que $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad a \neq 0$



por lo tanto 2 es un valor propio con toda una recta de vectores propios asociados $\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (salvo el cero)

(2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ 0 \end{pmatrix}$

se puede ver que $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a \\ -3b \\ 0 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

valor propio -3 tiene la recta $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de vectores propios asociados

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

valor propi 0 tiene la recta $\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de vectores propios asociados

cada valor propio tiene todo un subespacio (recta, plano...) de vectores SALVO el cero ....> casi. Como minimo una recta.

¿Porqué? si $f(v) = \lambda v$
$f(av) = af(v) = \lambda(av)$ por ser una aplicación lineal

(3) $D: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
$y \rightsquigarrow y'$

¿Qué funciones tienen como derivada un múltiplo de ella?

$$y' = \lambda y$$
$$\frac{y'}{y} = \lambda$$
$$(\ln y)' = \lambda$$
$$\ln y = \lambda x + cte$$
$$\ln y - \ln C = \lambda x$$
$$\ln\left(\frac{y}{C}\right) = \lambda x$$
$$\frac{y}{C} = e^{\lambda x}$$
$$y = Ce^{\lambda x}$$

· Propiedades

- si $\lambda=0$ es valor propio $\Longleftrightarrow \nexists f^{-1} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) \neq \{0\} \Longleftrightarrow$ f no es biyectiva
- ¿λ valor propio de I?
- $$\begin{aligned} f(v) &= \lambda \cdot v \\ f v &= \lambda I v \\ f v - \lambda I v &= 0 \\ (f-\lambda I)\cdot v &= 0 \end{aligned}$$

  $\longrightarrow$ $f-\lambda I$ mancha v al cero

  $\Rightarrow \operatorname{Ker}(f-\lambda I) \neq \{0\}$

  $\Rightarrow \nexists (f-\lambda I)^{-1}$

  $\equiv f-\lambda I$ es singular (no tiene inversa)

  ($\Rightarrow |f-\lambda I| = 0 \Rightarrow$ el sistema $(f-\lambda I)\cdot v = 0$ tiene ∞ soluciones ademas de la trivial)
- sea λ un v. p. de f.
  - $f-\lambda I$ es singular
  - los vectores propios correspondientes a λ son los vectores no nulos de $\ker(f-\lambda I)$

Definiciones:

↳ Subespacio propio de $\lambda := \ker(f-\lambda I)$ (incluye los $\vec{v}.p$ y el 0)

↳ Multiplicidad geométrica de $\lambda :=$ $\dim \ker(f-\lambda I)$

---

ejemplo

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

comprobemos que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ son los $\vec{v}.p$ de $\lambda=-3$

$$\begin{aligned} &\ker(f-\lambda I) \\ &= \ker(f+3I) \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (f+3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad a,b \in \mathbb{R},\ a\neq 0 \text{ ó } b\neq 0 \end{aligned}$$

multiplicidad geométrica de $\lambda=-3 = \dim\ker(f-\lambda I) = 2$

↳ los $\vec{v}.p.$ son todo un plano menos el cero

---

lo mismo para $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \vec{v}.p: \quad &\ker(f-\lambda I) \\ &= \ker(f) \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R},\ c\neq 0 \end{aligned}$$

multiplicidad geométrica de$(\lambda=0) = \dim\ker(f) = 1$

↳ los $\vec{v}.p.$ son una recta

Problemas de valor propio. Cálculo de valores y vectores propios

¿Cómo hallar los v.p. y sus $\vec{v}$.p. asociados?

En general no es posible mediante técnicas geométricas o solución a ecuaciones diferenciales...

MATRICES!!

$$\begin{tikzcd} f: V \arrow[r, "\text{endomorfismo}"] \arrow[d, leftrightarrow] & V \arrow[d, leftrightarrow, "\text{isomorfismo}"] \\ A: \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$f(v) = \lambda v$$
$$\Updownarrow$$
$$AX = \lambda X$$
$$AX = \lambda I X$$
$$AX - \lambda I X = 0$$
$$\underline{(A - \lambda I)X = 0}$$

Sistema homogéneo dependiente de λ.
Para cada valor propio λ existen vectores propios X

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

la solución trivial $X = \vec{0}$ se excluye.
los vectores propios son el resto de infinitas soluciones del sistema indeterminado.

↳ Los valores de λ deben generar un sistema indeterminado $\Longleftrightarrow |A - \lambda I| = 0$

$$\underbrace{\underbrace{p(\lambda)}_{\text{polinomio característico}} = 0}_{\text{ecuación característica}}$$

polinomio característico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
↳ grado: n
↳ coef. de mayor grado (λ^n) es $(-1)^n$

ecuación característica: $p(\lambda) = 0$

- Los valores propios son las RAICES del POLINOMIO

↖ lo difícil

- Teorema Fundamental del álgebra
- Teorema de Factorización
- Teorema de Factorización única

} en $\mathbb{C}$

↳ multiplicidad algebraica de λ_0

$$p(\lambda) = c\,(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_0)^{m_0} \dots (\lambda - \lambda_e)^{\lambda_e}$$

no confundir con la multiplicidad geométrica de λ_0

- los vectores propios son

$\vec{v}$.p son la solución del SISTEMA C. I. $\boxed{(A - \lambda I)X = 0}$
con cada λ hallado FACIL!

ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Valores propios:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 7-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \ldots\ldots$$

BUSCAR RAICES ...

(Cardano-Vietta si coef $\mathbb{Z}$, Ruffini ...)

$$= -(\lambda-10)(\lambda-6)(\lambda-5) = 0$$

- Vectores propios: $(A-\lambda I)X = 0$

1) $\lambda = 10$

$$\left.\begin{aligned} -2x + 2y + z &= 0 \\ x - 3y + 3z &= 0 \\ x + y - 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ya sabemos que es un sistema compatible indeterminado (1 ó mas ec. dependientes

GAUSS

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3.5 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-3.5} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{-2} & 2 & \overset{\text{no pivote}}{1} \\ 0 & \textcircled{-2} & 7/2 \end{pmatrix}$$

$z = \alpha$
$y = \frac{7}{4}\alpha$
$x = \frac{9}{4}\alpha$

Los vectores propios de $\lambda=10$ / el subespacio propio asociado a $\lambda=10$ / el subespacio propio de $\lambda=10$ es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad / \quad \text{la recta generada por } X_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda = 6$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{2x + 2y + z = 0} \\ x + y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{aligned}\right\}$$

menor no nulo

Como sabemos que es indeterminado y como no hay filas múltiplo de otras elimino una. (Comprobar se puede mediante menor no nulo. YODA HABLANDO!)

$x = \alpha$
$y = -\alpha$
$z = 0$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda = 5$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{3x + 2y + z = 0} \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{aligned}\right\}$$

menor no nulo

$z = \alpha$

$$+\downarrow\begin{aligned} x + 2y &= -3\alpha \\ x + y &= -\alpha \\ \hline y &= -2\alpha \end{aligned}$$

$y = 2\alpha$
$x = \alpha$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Sobre valores propios en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$

- λ v.p. real de $A \in M_n(\mathbb{R})$ si : $\exists x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$: $AX = \lambda X$
- λ v.p. complejo de $A \in M_n(\mathbb{C})$ si : $\exists x \in \mathbb{C}^n$ $x \neq 0$: $AX = \lambda X$

$$\forall \lambda \text{ v.p. } \underbrace{\text{de } A \in M_n(\mathbb{R})}_{\text{real}} \text{ es v.p. } \underbrace{\text{de } A \in M_n(\mathbb{C})}_{\text{complejo}}$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

ejemplo 2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- valores propios:

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda-2)^2(\lambda^2+4)$$

en $\mathbb{R}$ / en $\mathbb{C}$ $\begin{cases} \lambda = 2 \text{ es un v.p. de multiplicidad algebraica } 2 \\ \lambda = \pm 2i \text{ son dos v.p. de multiplicidad algebraica } 1 \end{cases}$

- vectores propios:

(1) $\lambda = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{-x + y - z - t = 0} \\ x - y + z + t = 0 \\ x - y - z - t = 0 \\ \cancel{x - y - z - t = 0} \end{array}\right\} \overset{\text{GAUSS}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \underset{\uparrow}{0} & -2 & \underset{\uparrow}{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} t = \alpha \\ z = -\alpha \\ y = \beta \\ x = \beta \end{array}$$

todo un plano de $\vec{v}$.p. multiplicidad geométrica 2

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\lambda = 2i$

$$\left.\begin{array}{l} (1-2i)x + y - z - t = 0 \\ x + (1-2i)y + z + t = 0 \\ x - y + (1-2i)z - t = 0 \\ x - y - z + (1-2i)t = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{GAUSS}^*} \quad X_3 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\lambda = -2i$

Teorema: se puede demostrar que:
si $\lambda \rightsquigarrow x$
$\bar{\lambda} \rightsquigarrow \bar{x}$

$$X_4 = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Gauss hecho en una hoja en sucio.
Los pasos han sido:

(1) $X_1 \longleftrightarrow X_4$, $X_2 \longleftrightarrow X_3$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 1-2i \\ 1 & -1 & 1-2i & -1 \\ 1 & 1-2i & 1 & 1 \\ 1-2i & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $X_2 - X_1 \to X_2$, $X_3 - X_1 \to X_3$, $X_4 - (1-2i)X_1 \to X_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 2-2i & -2+2i \\ 0 & 2-2i & 2 & 2i \\ 0 & 2-2i & -2i & 2+4i \end{pmatrix}$$

(3) $X_2 \longleftrightarrow X_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1-2i \\ 0 & \boxed{2-2i} & -2i & 2+4i \\ 0 & 2-2i & 2 & 2i \\ 0 & 0 & 2-2i & -2+2i \end{pmatrix}$$

(4) $X_3 - X_2 \to X_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1-2i \\ 0 & 2-2i & -2i & 2+4i \\ 0 & 0 & \boxed{2+2i} & -2-2i \\ 0 & 0 & 2-2i & -2+2i \end{pmatrix}$$

(5) $X_4 - \left(\frac{2-2i}{2+2i}\right) X_3 \to X_4$ $(\equiv X_4 + i X_3 \to X_4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1-2i \\ 0 & 2-2i & -2i & 2+4i \\ 0 & 0 & 2+2i & -2-2i \\ 0 & 0 & 0 & \underset{\uparrow}{0} \end{pmatrix}$$

Resumen de los ejemplos anteriores

	A_{3x3}	B_{4x4}	$J_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$p(\lambda)$	$\overset{\to(-1)^n}{\textcircled{-}}(\lambda-10)(\lambda-6)(\lambda-5)$ te puedes olvidar de el asi $=(10-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda)$	$(\lambda-2)^2(\lambda^2+4)$	λ^2
v. p. (m.a)	10 (1) 6 (1) 5 (1)	2 (2) 2i (1) -2i (1)	0 (2)
$\vec{v}$. p. (m.g.)	X_1 (1) X_2 (1) X_3 (1)	X_1 X_2 (2) X_3 (1) X_4 (1)	X_1 (1)

Se puede demostrar que:

- multiplicidad geométrica de $\lambda \leq$ mult. algebraica de λ
- Vectores propios correspondientes a valores propios distintos son independientes.

Truquillos para calcular v.p. y $\vec{v}$.p.

- los valores propios de una matriz TRIANGULAR son los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & ? & \\ 0 & \lambda_2 & ? & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

(el det de una matriz triangular ~~sea~~ es el producto de la diagonal, y como el determinante se calcula de $A-\lambda I$ los elementos de la diagonal son $(a_{ii}-\lambda)$ que al multiplicarlos da justamente la factorización de un polinomio cuyas raíces son a_{ii})

- Cuando se resuelve el sistema para cada valor propio, ya se sabe de antemano que es indeterminado (pues ha de dar infinitos $\vec{v}$.p como solución). Esto permite en muchos casos eliminar una de las filas. ¡si la m.a era 1, sabemos que es uniparamétrico!
- si: $\lambda \longrightarrow \vec{v}$.p. asociados x
  entonces: $\overline{\lambda} \longrightarrow \vec{v}$.p. asociados $\overline{x}$

· Valores y vectores propios de un endomorfismo

Los valores propios de un endomorfismo son siempre los mismos y con idéntica multiplicidad algebraica sea cual sea la representación matricial utilizada para calcularlos

Esto se comprueba: el polinomio característico de dos matrices semejantes es idéntico

$$\begin{aligned} \det(B-\lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}(A-\lambda I)P) \\ &= \det(P^{-1})\cdot\det(A-\lambda I)\cdot\det(P) \end{aligned}$$

recuerda
$\det(M)\cdot\det(M^{-1}) = 1$

$$\boxed{\det(B-\lambda I) = \det(A-\lambda I)}$$

igualándolo a cero para obtener v.p.

$$\det(B-\lambda I) = \det(A-\lambda I) = 0$$
$$\boxed{p(\lambda) = p(\lambda)} = 0$$

· en cuanto a los vectores propios:

Los $\vec{v}$.p. obtenidos mediante la representación matricial de un endomorfismo en una base $\mathcal{B}$ son los $\vec{v}$.p. del endomorfismo expresados por los componentes en dicha base $\mathcal{B}$

de forma que:
los $\vec{v}$.p. de un endomorfismo son siempre los mismos, aunque sus componentes serán distintas según la base utilizada para la representación matricial correspondiente

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[rr, "f"] \arrow[d, shift left] \arrow[dd, bend left=10] & & U \arrow[d] \arrow[dd, bend left=10] \\
\mathcal{B} & K^n \arrow[rr, "A"] \arrow[u, shift left] & & K^n \arrow[u, shift left] \arrow[d, bend left=60, "P^{-1}"] \\
\mathcal{B}' & K^n \arrow[rr, "B"] \arrow[u, bend left=60, "P"] & & K^n
\end{tikzcd}$$

v.p. de f
||
v.p. de A
||
v.p. de B

A y B son semejantes

ejemplo: Polinomios de Legendre

$$p \rightsquigarrow ((1-x^2)p')'$$

$$\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3\} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}_3 \arrow[r, "L"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, leftrightarrow] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd} \qquad A=\left(\begin{array}{cccc} [L1]_B & [Lx]_B & [Lx^2]_B & [Lx^3]_B \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)_{4\times 4}$$

$\det(A-\lambda I) = \underset{\text{por ser triangular}}{\text{producto de la diagonal}} = -\lambda(-2-\lambda)(-6-\lambda)(-12-\lambda)$

valores propios de A: $\lambda = 0, -2, -6, -12$ = elementos de la diagonal, por ser triangular!

los $\vec{v}.p.$ de A serán los $\vec{v}.p.$ de L en la base $\mathcal{B}$

- $\lambda=0$ $\quad \left.\begin{array}{r} \cancel{2z = 0} \\ -2y + 6t = 0 \\ -6z = 0 \\ -12t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t=0 \\ z=0 \\ y=0 \\ x=\alpha \end{array} \qquad X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad p_1(x)=1$

- $\lambda=-2$ $\quad \left.\begin{array}{r} 2x + 2z = 0 \\ 6t = 0 \\ -4z = 0 \\ -10t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t=0 \\ z=0 \\ x=0 \\ y=\alpha \end{array} \qquad X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad p_2(x)=x$

- $\lambda=-6$ $\quad \left.\begin{array}{r} 6x + 2z = 0 \\ 4y + 6t = 0 \\ 0 = 0 \\ -6t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t=0 \\ y=0 \\ z=3\alpha \\ x=-\alpha \end{array} \qquad X_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\0\end{pmatrix} \qquad p_3(x)=-1+3x^2$

- $\lambda=-12$ $\quad \left.\begin{array}{r} 12x + 2z = 0 \\ 10y + 6t = 0 \\ 6z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t=\alpha \\ z=0 \\ y=-\frac{3}{5}\alpha \\ x=0 \end{array} \qquad X_4=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\5\end{pmatrix} \qquad p_4(x)=-3x+5x^3$

hemos resuelto $[(1-x^2)y']'-\lambda y=0$ en $\mathcal{P}_3$ matricialmente.
se llaman polinomios de Legendre.

$p_1(x)=1 \qquad p_2(x)=x \qquad p_3(x)=x^2-\frac{1}{3} \qquad p_4(x)=x^3-\frac{3}{5}x$

si ahora expresamos el endomorfismo L utilizando como base los polinomios de Legendre:

$$\mathcal{B}=\{1,x,x^2-\tfrac{1}{3},x^3-\tfrac{3}{5}x\} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}_3 \arrow[r, "L"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, leftrightarrow] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

calculemos la matriz B.

$$B=\left(\begin{array}{cccc} [Lp_1] & [Lp_2] & [Lp_3] & [Lp_4] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

Los valores propios de la matriz B son (por ser triangular)
$\lambda = 0, -2, -6, -12$
los mismos que la matriz A.

Ademas, la matriz B es diagonal.
Esto ocurre cuando se utiliza una base constituida por los vectores propios.
Diagonalización de endomorfismos.

• DIAGONALIZACION DE ENDOMORFISMOS

ejemplo:
el endomorfismo $P_n \xrightarrow{L} P_n$ expresado matricialmente utilizando la base de los polinomios de Legendre, que son los vectores propios de L.

No todo endomorfismo tiene una base en la cual su representación matricial es diagonal.

Solamente ocurre cuando el endomorfismo tiene suficientes vectores propios independientes como para crear su base.

• Definición : Diagonalizable.

Sea f: endomorfismo $V \longrightarrow V$
se dice ques diagonalizable si
$f \sim D$ diagonal

f tiene representación matricial diagonal

sea $A_{n\times n}$ una representación matricial de un endomorfismo f se dice que es diagonalizable si:

$A \sim f$ diagonalizable $\equiv$ $\exists P$ invertible: $P^{-1}AP$ es diagonal

• Condiciones de diagonalizabilidad

linealmente independientes

f diagonalizable $\Leftrightarrow$ tiene n $\vec{v}$.p. que son l.i.

y sabiendo que:
- mult. geom de $\lambda \leq$ mult. algeb. de λ
- $\vec{v}$.p. correspondientes a v.p. distintos son l.i.

se deduce:

f endomorfismo de V con n valores propios distintos $\Rightarrow$ f diagonalizable

es condición SUFICIENTE pero no NECESARIA

ej: $S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ simetria $x-2y+z=0$

$$\begin{tikzcd}
\text{v.p.} & & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & -1 \arrow[d] \\
& X_1 & & X_2 & X_3
\end{tikzcd}$$

tien sólo 2 v.p.

proporciona suficientes $\vec{v}$.p. l.i. como para formar una base sea f. endomorfismo $\bar{V} \to V$.

- en base canónica representable mediante $A_{n\times n}$

$$f \overset{\mathcal{C}}{\sim} A$$

$A_{n\times n}$ con $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$ vectores propios l.i.
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ valores propios corresp.
← (pueden ser repetidos)

- en la base de sus $\vec{v}$.p. $\mathcal{B} = \{X_1, X_2 \dots X_n\}$ representable mediante $D_{n\times n}$ diagonal

$$f \overset{\mathcal{B}}{\sim} D \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

la matriz de cambio de base $\mathcal{B} \xrightarrow{S} \mathcal{C}$

$$S = \begin{array}{c} \begin{matrix} [X_1]_{\mathcal{C}} & [X_2]_{\mathcal{C}} & \dots & [X_n]_{\mathcal{C}} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} | & | & & | \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \end{array}$$

tal que

$$D = S^{-1}\, A\, S$$
$$A = S\, D\, S^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}: & \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, bend right, "S^{-1}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, bend left, "S^{-1}"] \\
\mathcal{B}: & \mathbb{K}^n \arrow[r, "D"] \arrow[u, "S"'] & \mathbb{K}^n \arrow[u, "S"]
\end{tikzcd}$$

entonces:

$$A \cdot S = A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ AX_1 & AX_2 & \dots & AX_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \dots & \lambda_3 X_3 \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D}$$

$$\boxed{AS = SD}$$

$A \cdot S = S \cdot D$

$S = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

matriz de cambio de base $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ matriz diagonal

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} & \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \\ \mathcal{B} & \mathbb{K}^n \arrow[r, "D"] \arrow[u, "S"] & \mathbb{K}^n \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

$D = S^{-1} A S$

$A = S D S^{-1}$

· Propiedades

- S no es única (hay MUCHOS vectores propios)
- Tener n valores propios distintos es suficiente, pero no es necesario para ser diagonalizable

ejemplo: simetría respecto a π: $x - 2y + z = 0$

$S_\pi = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$

$\lambda = 1$ doble $\left< \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right.$

$\lambda = -1$ simple $-$ u_3

$S_\pi \sim D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

- Existen matrices y endomorfismos NO DIAGONALIZABLES

mult. geom $\lneq$ mult. algeb. $\Longrightarrow$ no diagonalizable

$\Longleftarrow$ en $\mathbb{C}$

$\not\Longleftarrow$ en $\mathbb{R}$

- Matrices reales $\mathbb{R}$, simétricas, son diagonalizables

demostrar que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es diagonalizable

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2$
$= \lambda^2 + (-a-c)\lambda + (ac - b^2) = 0$

el discriminante: $(-a-c)^2 - 4(1)(ac - b^2)$
$= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2$
$= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2$
$= (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$

el polinomio tiene raices reales

$\lambda = \dfrac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$

2 casos:

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \left< \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right.$

$\lambda_1 = \lambda_2$

demostrar $\left< \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right.$

APLICACIONES DE TEORIA ESPECTRAL

- Desacoplamiento de Ecuaciones Diferenciales.
- Ecuaciones en diferencias
- Identificación de figuras geométricas

· Ecuaciones en diferencias

ejemplo: filtro digital

$$e_{i+1} = e_i + e_{i-1}$$

Condiciones iniciales: $e_0 = 1$, $e_1 = 1$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots, e_k$??

Sucesión de Fibonacci

sea $u_0 = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix}$ $u_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

$$u_1 = A\, u_0$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

$e_1 = 0e_0 + 1e_1$ ¡gracias! ¡de nada! no, es una chorrada

$e_2 = 1e_0 + 1e_1$

El problema expresado matricialmente.

$$u_k = A\, u_{k-1}$$

$$u_k = \boxed{A^k} u_0$$

$$\begin{pmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

será un problema fácil si A es diagonalizable.

- Calculemos valores y vectores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \searrow \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$$

percatate de que: $\lambda_1 > 1$

$\lambda_2 < 1$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

razón aurea

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Hay 2 (= n) valores propios distintos ⇒ A diagonalizable

$\lambda = \lambda_1$:

$$\left. \begin{matrix} -\lambda_1 x + y = 0 \\ \cancel{x + (1-\lambda_1) y = 0} \end{matrix} \right\}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \lambda_2$:

$$\left. \begin{matrix} -\lambda_2 x + y = 0 \\ \cancel{x + (1-\lambda_1) y = 0} \end{matrix} \right\}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k = S\,D^k\,S^{-1} \qquad (S\,D\,\underbrace{S^{-1})(S}_{I}\,D\,\underbrace{S^{-1})(S}_{I}\,D\,S^{-1})\ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_k = A^k u_0$$

$$\begin{pmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e_0\lambda_2 - e_1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{-e_0\lambda_1 + e_1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e_0\lambda_2 - e_1}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot \lambda_1^k \\ \frac{-e_0\lambda_1 + e_1}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot \lambda_2^k \end{pmatrix}$$

llamemos $\alpha_1 = \frac{e_0\lambda_2 - e_1}{\lambda_2-\lambda_1}$ $\quad \alpha_2 = \frac{-e_0\lambda_1 + e_1}{\lambda_2-\lambda_1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot \lambda_1^k \\ \alpha_2 \cdot \lambda_2^k \end{pmatrix}$$

Suma de las columnas

$$\begin{pmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{pmatrix} = \alpha_1\lambda_1^k \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \alpha_2\lambda_2^k \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1\,\lambda_1^k\,X_1 + \alpha_2\cdot\lambda_2^k\cdot X_2$$

$$\boxed{e_k = \alpha_1\lambda_1^k + \alpha_2\lambda_2^k}$$

- e_k es un número entero
- como $\lambda_1 > 1$, $\lambda_1^k \gg 1$ para $k \to \infty$

  como $\lambda_2 < 1$, $\lambda_2^k \to 0$ para $k \to \infty$

  el segundo término es despreciable para k's altas

basta con obtener el entero mas próximo a $\alpha_1\lambda_1^k$

para k grande: $e_k = E(\alpha_1\lambda_1^k + 0\cdot 5)$

ejemplo: Proceso de Markov

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)(0.6-\lambda)(0.5-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0.6 \\ \lambda_3 = 0.5 \end{array}\right\} \text{n. v.p.} \neq \Rightarrow \text{diagonalizable}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \rightsquigarrow X_1 \\ \lambda_2 \rightsquigarrow X_2 \\ \lambda_3 \rightsquigarrow X_3 \end{array}\right\} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

estado k-ésimo:

$$\begin{aligned} u_k &= A^k u_0 \\ &= S D^k S^{-1} u_0 \\ &= \ldots \\ &= \alpha_1 \lambda_1^k X_1 + \alpha_2 \lambda_2^k X_2 + \alpha_3 \lambda_3^k X_3 \\ \text{sust. valores de } \lambda_i: \quad &= \alpha_1 \cdot 1 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot 0.6^k X_2 + \alpha_3 \, 0.5^k X_3 \end{aligned}$$

¿qué pasa cuando $k \to \infty$?

$$\underbrace{u_\infty}_{\text{como } u_\infty \text{ representa la proporción de consumidores, suma 1.}} = \underbrace{\alpha_1 X_1}_{\text{un múltiplo de un vector propio ES un vector propio}}$$

→ el estado límite es el $\vec{v}$.p. correspondiente al v.p. $\lambda = 1$ cuyas componentes suman 1.

$$u_\infty = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.35 \\ 0.20 \end{pmatrix}$$ el estado límite no depende del estado inicial

Matrices de transición:

- siempre tienen el v.p. $\lambda = 1$
- los demás v.p. $|\lambda| < 1$

CURIOSIDAD
$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ es $\vec{v}$.p. de A^t

↳ Matriz de transición regular
  el v.p. $\lambda = 1$ tiene m. a. $= 1$
    ↳ tiene un $\vec{v}$.p. (y todos sus múltiplos) asociado
    ↳ tiene estado límite

↳ Matriz de transición no regular
  el v.p. $\lambda = 1$ no tiene m.a. $= 1$
    ↳ tiene varios $\vec{v}$.p.
    ↳ no tiene estado límite

ejemplo: cada año, todos los habitantes del país $\substack{A \\ B}$ migran al $\substack{B \\ A}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = +\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda^2 = 1$ se va alternando

TEMA 4. GEOMETRIA

Geometria afín: aspectos cualitativos

Geometria euclidea: aspectos cuantitativos

↳ MEDIDAS

Distancias
Areas, Volúmenes

Ángulos
entre vectores, planos, ...

APROXIMACION

Soluciones aproximadas
- sistemas lineales
- ecuaciones diferenciales
- ecuaciones integrales

ORTOGONALIDAD

- Bases ortogonales
- Proyecciones ortogonales

La tecnologia/instrumento de medida: producto interior (escalar)

PRODUCTO INTERIOR EN $(\underset{\text{espacio vectorial}}{E}, \underset{\text{suma}}{+} ; \underset{\text{escalares}}{\mathbb{K}}, \underset{\text{múltiplos}}{\cdot})$

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \quad \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \rightsquigarrow & \langle x, y \rangle \end{array}$$

Propiedades:

→ Simetria conjugada: $(\bar{S})$ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

→ Linealidad: (L) $\langle \alpha x + \beta x', y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x', y \rangle$

→ Positividad (P) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$; $\langle 0, 0 \rangle = 0$

$\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Linealidad del segundo componente?
Utilizando $(\bar{S})$ y (L) se deduce:

$$\langle x, \alpha y + \beta y' \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, y' \rangle$$

y, en general:

$$\langle \sum_i \alpha_i x_i , \sum_j \beta_j y_j \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j \langle x_i, y_j \rangle$$

$$\|x\| = +\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_i x_i^2} \qquad d(x, y) = \|x - y\| \qquad \cos(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Ejemplos:

(1) $\mathbb{R}^n$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow \langle x,y\rangle$$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$ (¡Base canónica!)

$$= y^t \cdot x$$ (expresión matricial) $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\\ (y_1\ y_2 \cdots y_n) & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\end{array}$$

algunas propiedades
se pueden comprobar matricialmente.
otras matemáticamente

(S) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (en $\mathbb{R}$, conjugar no afecta)

(L) $\langle \alpha x + \alpha' x', y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \alpha'\langle x',y\rangle$

$\langle x, \alpha y + \alpha' y'\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \alpha'\langle x,y'\rangle$

(P) $\langle x,x\rangle = \sum x_i x_i = \sum x_i^2 > 0$

(2) $\mathbb{C}^n$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

$$= \overline{y}^t \cdot x$$ (expresion matricial)

(S) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} = \overline{\sum_i y_i \overline{x_i}} = \sum_i \overline{y_i \overline{x_i}} = \sum_i \overline{y_i}\, x_i = \langle x,y\rangle$

(P) $\langle x,x\rangle = \sum_i x_i \overline{x_i}$

$= \sum |x_i|^2 \geq 0$

$$\boxed{\text{Recuerda} \quad z\cdot\overline{z} = |z|^2}$$

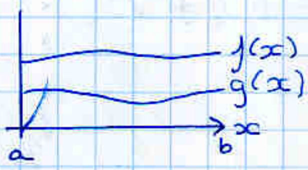
ej: $x=\begin{pmatrix}i+1\\-1\\i\end{pmatrix}$

$\langle x,x\rangle = (1+i)(1-i) + (-1)(-1) + (i)(-i) = 2+1+1 = 4$

(3) $\ell^2 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$

$$\begin{array}{l} x_n \to x_1 \quad x_2 \ldots x_n \ldots \\ \underline{y_n \to y_1 \quad y_2 \ldots y_n \ldots} \\ n \to 1 \quad 2 \ldots n \ldots \quad x_n y_n \, \forall n \end{array} \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

(4) $\mathcal{C}[a,b] = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua



$f(x)g(x) \; \forall x$ $\qquad \langle x, y \rangle = \int_a^b fg$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[a,b] \times \mathcal{C}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \rightsquigarrow & \langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g \end{array}$$

(S): $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \qquad \int_a^b fg = \int_a^b gf$

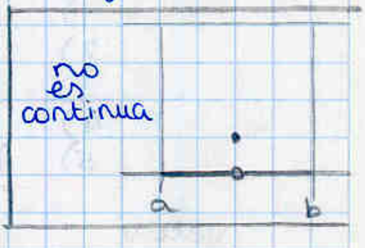
(L): $\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \alpha_1 \langle f_1, g \rangle + \alpha_2 \langle f_2 g \rangle$

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \alpha_2 f_2) g = \alpha_1 \int_a^b f_1 g + \alpha_1 \int_a^b f_2 g$$

(P): $\langle f, f \rangle > 0$ si $f \neq 0$ y $\langle 0, 0 \rangle = 0$

$$\int_a^b f^2 > 0$$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2 = 0 \xRightarrow{\text{si } f \text{ es continua}} f = 0$$



(5) $\mathbb{R}^2$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(S) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(L) $\langle \alpha x + \beta x', y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x', y \rangle$

(P) $\langle x, x \rangle$? $\quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \langle x, x \rangle = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 < 0$

no es producto interior.

(6) $\mathbb{R}^n \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i, \quad \alpha_i > 0$

ej:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightsquigarrow & \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 10 x_2 y_2 + 0.1 x_3 y_3 \end{array}$$

(7) $\mathcal{C}[a,b] \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) \, dx \quad \omega(x) > 0 \in \mathcal{C}[a,b]$

DISTANCIA en $(E, <\cdot,\cdot>)$

- Norma: $\|x\| := \sqrt{<x,x>}$

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

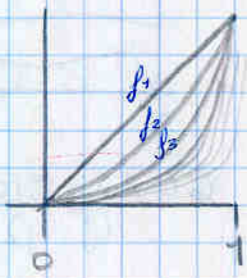
ejemplos: 1) En $\mathbb{R}^n$ $\|x\| = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ como en $\mathbb{R}^3$

2) En $\mathcal{C}[0,1]$ $\|f\| = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$

ej $f_n(x) = x^n$

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2 = \int_0^1 x^{2n}\,dx = \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

$$\|f_n\| = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \longrightarrow 0$$



Las reglas usuales de la medida de distancias en $\mathbb{R}^3$ son generalizables.

Propiedades

1) $\|x\| \geq 0$
2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
4) $|<x,y>| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)
5) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdad triangular)

Notas.

3) $|\alpha| :=$ valor absoluto en $\mathbb{R}$, módulo en $\mathbb{C}$

4) en $\mathbb{R}$ $-1 \leq \frac{<x,y>}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \rightsquigarrow \cos(x,y)$, $<x,y> = 0$ $x \perp y$

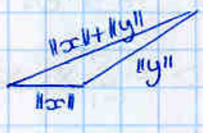
en $\mathbb{C}$ $\left|\frac{<x,y>}{\|x\| + \|y\|}\right| \leq 1$

no tiene interés lo del ángulo

la ortogonalidad sí!

4') $|<x,y>| = \|x\| \cdot \|y\| \longleftrightarrow y = \lambda x$ (x e y son paralelos)

5) significado geométrico



ORTOGONALIDAD

Ángulo: interesante en e.v. $\mathbb{R}$, no generalizable en $\mathbb{C}$
Perpendicularidad: si generalizable
$\Rightarrow$ simplicidad en el manejo de bases y matrices

Ortogonalidad: Definición

$$\boxed{x \perp y \equiv \langle x, y \rangle = 0}$$

$$\begin{cases} x \perp x \Rightarrow x = 0 \\ x \perp y \ \forall y \in E \Rightarrow x = 0 \\ x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x^2\| + \|y^2\| \end{cases}$$ (Pitágoras)

Demostración

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle \underset{(1)}{=} \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Conjunto ortogonal $\{x_1, x_2, \dots\}$

Todos los vectores que lo componen son perpendiculares entre si:

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0 \iff i \neq j$$

Conjunto ortonormal

Un conjunto ortogonal, donde además todos los vectores son unitarios

$$\|x_i\| = 1 \quad \forall i$$

Base ortogonal

Conjunto ortogonal con base de dimensión finita

La utilización de bases ortogonales (mejor aun si son ortonormales) tiene muchas ventajas.

Ventajas de una base ortogonal / ortonormal

a) cálculo de componentes

- normalmente el cálculo de las componentes de un vector en una determinada base se realiza así:

ej $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 92 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \pi \\ 92 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 7\alpha + \pi\beta + \sqrt{2}\gamma \\ -3 &= 2\alpha + 92\beta + 7\gamma \\ 2 &= \alpha + 4\beta + 9\gamma \end{aligned}$$

un sistema que puede ser un coñazo vamos

- Perosi la base elegida es ortogonal

Demostración

$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n$

multiplicando por $\vec{v}_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$

$< \vec{v}, \vec{v}_i > = < \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n , \vec{v}_i >$

y por la ortogonalidad de los vectores $< \vec{v}_i, \vec{v}_j > = 0 \leftrightarrow i \neq j$

$< \vec{v}, \vec{v}_i > = \cancel{\alpha_1 < \vec{v}_1, \vec{v}_i >} + \ldots + \alpha_i < \vec{v}_i, \vec{v}_i > + \ldots + \cancel{\alpha_n < \vec{v}_n, \vec{v}_i >}$

$< \vec{v}, \vec{v}_i > = \alpha_i < \vec{v}_i, \vec{v}_i >$

$$\alpha_i = \frac{< \vec{v}, \vec{v}_i >}{< \vec{v}_i, \vec{v}_i >} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Coeficientes generalizados de Fourier

$$\boxed{\alpha_k = \frac{< x, b_k >}{\| b_k \|^2}}$$

si $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es ortonormal $\boxed{\alpha_k = < x, b_k >}$ ya que $\| b_k \|^2 = 1$

ejemplo:

escribir $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ortogonal

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{< x, u_1 >}{\| u_1 \|^2} = -\frac{1}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{< x, u_2 >}{\| u_2 \|^2} = 0 \\ \alpha_3 &= \frac{< x, u_3 >}{\| u_3 \|^2} = \frac{9}{6} \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ejemplo:

funciones continuas en $[0, 1]$ expresada usando funciones sinusoidales, cosinusoidales y constantes

$$S \left\{ \begin{aligned} S_k(t) &= \operatorname{sen} k\pi t \quad k = 1, 2, \ldots \\ C_k(t) &= \cos k\pi t \quad k = 1, 2, \ldots \\ &1 \end{aligned} \right.$$

↑ ortogonal, PERO no es base, puesto que tiene dimensión ∞

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k S_k + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k C_k + \gamma_0$$

por simplicidad, utilizando sólo

$$S = \{ S_k(t) = \text{sen } k\pi t \quad k=1,2,\dots \}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \text{ sen } k\pi x \quad \text{en} \quad [0,1]$$

$$\alpha_k = \frac{\langle f, \text{ sen } k\pi x \rangle}{\| \text{sen } k\pi x \|^2} = \frac{\int_0^1 f(x) \text{ sen } k\pi x \, dx}{\int_0^1 \text{sen}^2 k\pi x \, dx}$$

ej: $f(x) = x$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \text{sen}^2 k\pi x \, dx &= \int_0^1 \frac{1 - \cos(2k\pi x)}{2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} dx - \int_0^1 \frac{1}{2} \cos(2k\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2} x \Big|_0^1 - \frac{1}{4k} \text{ sen}(2k\pi x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

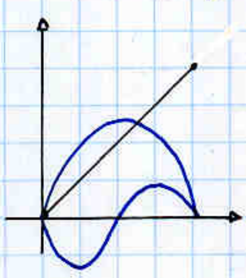
$$\begin{aligned}\int_0^1 x \text{ sen } k\pi x \, dx &= \left(-\frac{1}{k\pi} \cos k\pi x\right)(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{4\pi} \cos k\pi x \, dx \\ &= -\frac{x}{k\pi} \cos k\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{k^2\pi^2} \text{ sen } k\pi x \Big|_0^1 \\ &= -\frac{(-1)^k}{k\pi} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\end{aligned}$$

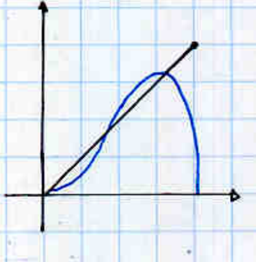
$$b_k = \frac{\int_0^1 x \text{ sen } k\pi x \, dx}{\int_0^1 \text{sen}^2 k\pi x \, dx} = \frac{\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\boxed{b_k = \frac{(-1)^{k-1} \cdot 2}{k\pi}}$$

$b_1 = \frac{2}{\pi} \qquad x \approx \frac{2}{\pi} \text{ sen } \pi x$

$b_2 = -\frac{1}{\pi} \qquad x \approx \frac{2}{\pi} \text{ sen } \pi x - \frac{1}{\pi} \text{ sen } 2\pi x$





b) Producto escalar/interior

$\{e_1, e_2, \dots\}$ base O.N.

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_1\rangle\langle e_i, y\rangle}$$

que es el método típico que usamos nosotros para el producto escalar

Demostración:

Sabiendo todo esto:

- $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_i e_i + \dots + x_n e_n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ x_n \end{pmatrix}$
- $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_i e_i + \dots + y_n e_n$ $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_i \\ y_n \end{pmatrix}$
- $x_i = \langle x, e_i\rangle$
  $y_i = \langle y, e_i\rangle$
- $\overline{y_i} = \langle e_i, y\rangle$

se obtiene

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle$$

$$\overset{(L)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(x_i \overline{y_j} \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\text{se van todos menos los que se multiplican a sí mismos}} \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle}_{1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot \langle e_i, y\rangle$$

De los coeficientes generalizados de Fourier se tiene que para un vector $\vec{v} = (v_1\ v_2 \dots v_n)'$ expresado en una base $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ ortonormal

$$\boxed{[v]_B \quad \begin{pmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \langle v, b_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_n\rangle \end{pmatrix}}$$

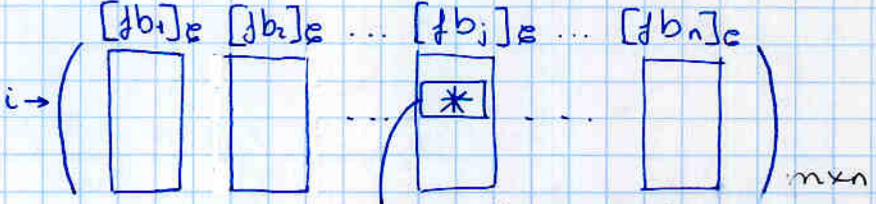
de donde se obtienen las matrices de la página siguiente

c) Matrices de una A.L. y de cambio de base con BASES ORTONORMALES

1) $f: E \to F$ lineal

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ O.N.

$f \sim A$



utilizando coef de Fourier

$$\frac{\langle f b_j , c_i \rangle}{\|c_i\|^2} \qquad \|c_i\|^2 \to 1$$

como es ortonormal

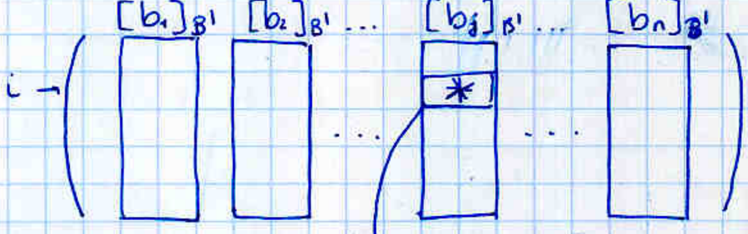
Los coef $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ del vector $f b_1$ en la base $\mathcal{C}$

$$f \sim A \quad \boxed{\begin{pmatrix} \langle f b_1, c_1 \rangle & \langle f b_2, c_1 \rangle & \cdots & \langle f b_n , c_1 \rangle \\ \langle f b_1, c_2 \rangle & \langle f b_2, c_2 \rangle & \cdots & \langle f b_n , c_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle f b_1, c_m \rangle & \langle f b_2, c_m \rangle & \cdots & \langle f b_n , c_m \rangle \end{pmatrix}}$$

$$A = \left(\langle f b_j , c_i \rangle \right)_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$$

2) Base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \xrightarrow[\text{de base}]{\text{matriz de cambio}}$ base $\mathcal{B}' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$

$C =$



$\langle b_j , b'_i \rangle$

$$C = \boxed{\begin{pmatrix} \langle b_1, b'_1 \rangle & \langle b_2, b'_1 \rangle & \cdots & \langle b_n , b'_1 \rangle \\ \langle b_1, b'_2 \rangle & \langle b_2, b'_2 \rangle & \cdots & \langle b_n , b'_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle b_1, b'_n \rangle & \langle b_2, b'_n \rangle & \cdots & \langle b_n , b'_n \rangle \end{pmatrix}}$$

$$C = \left(\langle b_j , b'_i \rangle \right)_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}}$$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Existen bases O.N. en cualquier $(E, <\cdot,\cdot>)$ dim E $\neq \infty$

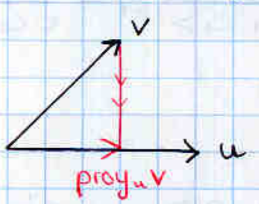
$$\text{Base cualquiera} \longrightarrow \boxed{G.S.} \longrightarrow \text{Base ortogonal} \longrightarrow \text{Base ortonormal}$$

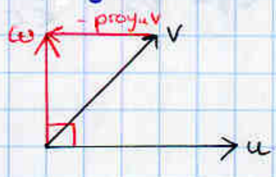
ej. intuitivo en $\mathbb{R}^2$

base cualquiera

fijamos un vector u.

Obtenemos un vector $\omega \perp u$ haciendo $v - proy_u v$





$$\omega = v - \frac{<v,u>}{\|u\|^2} \cdot u$$

· En general: ortogonalización de gram-schmidt

$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ base ¡ Vaya mierda de base !

$$c_1 = b_1$$

$$c_2 = b_2 - \frac{<b_2, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1$$

$$c_3 = b_3 - \frac{<b_3, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1 - \frac{<b_3, c_2>}{<c_2, c_2>} c_2$$

$$c_4 = b_4 - \frac{<b_4, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1 - \frac{<b_4, c_2>}{<c_2, c_2>} c_2 - \frac{<b_4, c_3>}{<c_3, c_3>} c_3$$

$$\vdots$$

$$c_k = b_k - \frac{<b_k, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1 - \frac{<b_k, c_2>}{<c_2, c_2>} c_2 - \ldots - \frac{<b_k, c_{k-1}>}{<c_{k-1}, c_{k-1}>} c_{k-1}$$

$\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ base ortogonal !!

$L\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = L\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

↳ envoltura lineal
= vectores que genera la base

ejemplo en $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

1ero reordenamos la base porque nos viene bien!

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \right\}$$

$$c_1 = b_1$$

$$c_2 = b_2 - \frac{<b_2, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$c_3 = b_3 - \frac{<b_3, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1 - \frac{<b_3, c_2>}{<c_2, c_2>} c_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ejemplo: $\left(\mathcal{P}_3 \, , \, \int_{-1}^{1} pq \right)$

$$B = \{ \underset{b_1}{1}, \underset{b_2}{x}, \underset{b_3}{x^2}, \underset{b_4}{x^3} \}$$

$$c_1 = b_1$$

$$c_2 = b_2 - \frac{<b_2, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x \, dx}{\int_{-1}^{1} dx} \cdot 1 = x$$

$$c_3 = b_3 - \frac{<b_3, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1 - \frac{<b_3, c_2>}{<c_2, c_2>} c_2 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 \, dx}{\int_{-1}^{1} x^2 \, dx} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2/3$

$$c_4 = b^4 - \frac{<b_4, c_1>}{<c_1, c_1>} c_1 - \frac{<b_4, c_2>}{<c_2, c_2>} c_2 - \frac{<b_4, c_3>}{<c_3, c_3>} c_3$$

$$= x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 \, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \, dx} 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^4 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 (x^2 - \frac{1}{3}) \, dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3}) dx} (x^2 - \frac{1}{3})$$

$\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

$$\int_{-1}^{1} x^5 - \frac{1}{3} x^3 dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} \, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{9} x^3 + \frac{1}{9} x \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \right)$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{18-10}{45} = \frac{8}{45}$$

$$= x^3 - 0 - \frac{2/5}{2/3} x - 0$$

$$= x^3 - \frac{3}{5} x$$

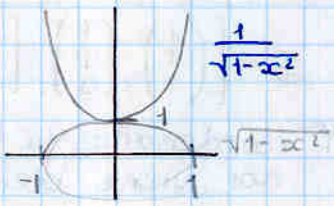
$$\mathcal{C} = \{ 1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} x \} \quad \text{ortogonal}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2/3}}, \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{8/45}}, \frac{x^3 - \frac{3}{5} x}{\| x^3 - 3/5 x \|} \right\} \quad \text{ortonormal}$$

base canónica $\xrightarrow[\text{en el intervalo } [-1,1]]{}$ polinomios de Legendre

¡en otros intervalos no es así!
muchos problemas se llevan primero al intervalo [-1, 1], porque es el mejor.

ejemplo: $\left(\mathcal{P}_3 \, , \, \int_{-1}^{1} \frac{pq}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ → producto escalar ponderado que mima mucho los extremos.



Base Canónica ⟶ Polinomios de Tchebyscher

Consecuencias del Teorema / Proceso de Gram-Schmidt

- Todo espacio vectorial no trivial de dimensión finita (con $\langle\cdot,\cdot\rangle$) tiene una base O.N.
- Extensión de una base ortonormal
  Todo conjunto O.N. en un $(E, \mathbb{K}; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de dimensión finita, puede ser extendido a una base O.N.
- Factorización QR de una matriz

  Toda matriz $A_{m \times n}$ (m suele ser mas grande $A = \left(\vdots\right)$) con columnas linealmente independientes puede expresarse como QR

ejemplo
consideremos $A_{4\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ llamamos a_1, a_2, a_3 a las columnas de A

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como $\{a_1, a_2, a_3\}$ es un conjunto de vectores l.i. podemos aplicar Gram-Schmidt:

$$\begin{cases} v_1 = a_1 \\ v_2 = a_2 - \dfrac{\langle a_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = a_2 - \frac{2}{3} v_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\ v_3 = a_3 - \dfrac{\langle a_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \dfrac{\langle a_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = a_3 + \frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{5} v_2 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ahora normalizamos

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{5/3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{2\sqrt{2}/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ expresando los vectores ai a partir de los qi se tiene:

sust v_i por $\|v_i\| q_i$

$$a_1 = v_1 = \|v_1\| q_1 = \boxed{\sqrt{3}\, q_1} = a_1$$

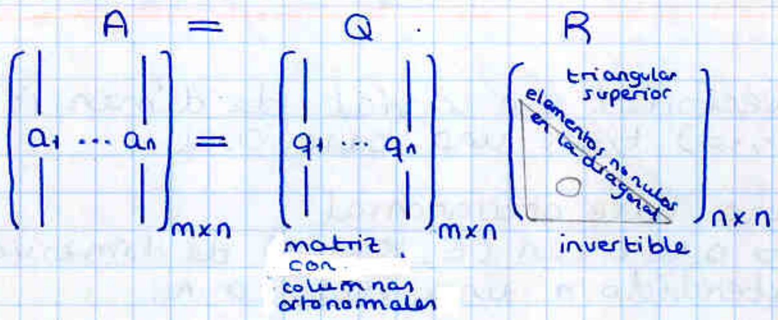
$$a_2 = \frac{2}{3} v_1 + v_2 = \frac{2}{3}\|v_1\| q_1 + \|v_2\| q_2 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3} q_1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} q_2} = a_2$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} v_1 - \frac{1}{5} v_2 + v_3 = -\frac{1}{3}\|v_1\| q_1 - \frac{1}{5}\|v_2\| q_2 + \|v_3\| q_3 = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3} q_1 - \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} q_2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} q_3} = a_3$$

expresando estas 3 ecuaciones matricialmente

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}_{4\times3} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}_{3\times3} = Q \cdot R$$

· Factorización QR de una matriz : Explicación



- Las columnas de Q son los vectores obtenidos por el proceso de Gram-schmidt. (normalizados)
- Las entradas de R pueden verse facilmente analizando dicho proceso.
  - Estas fórmulas expresan a_i como combinación de $v_1, v_2, \dots, v_i$ y sólo tenemos que reemplazar cada v_i por $\|v_i\| q_i$.
  - a_i es combinación de $q_1, q_2, \dots, q_i$ y no involucra las restantes q ; esta es la razon por la que R es triangular superior
  - Los coeficientes de dicha combinación están en la i-ésima columna de R, en particular, la entrada de la diagonal es el coeficiente $\|v_i\|$ distinto de cero
    - ↳ R tiene entradas positivas en la diagonal y por lo tanto es invertible.

- Cualquier matriz A con columnas l.i puede factorizarse en un producto A = QR
- Q es una matriz del mismo orden que A con columnas ortonormales
- R es triangular superior e invertible

Nota:
si A es cuadrada ⟷ Los factores Q y R son cuadrados y Q será una matriz ortogonal

Factorización QR

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$v_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = a_2 - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{50}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix}$$

$a_1 = v_1$

$a_2 = \frac{50}{24} v_1 + v_2$

$a_3 = \frac{5}{6} v_1 - \frac{88}{83} v_2 + v_3$

$$v_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle a_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11/6 \\ 2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 11/6 \\ 2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11/6 \\ 2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 11/6 \\ 2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{20}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-44/3}{83/6} \begin{pmatrix} 11/6 \\ 2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{88}{83} \begin{pmatrix} 11/6 \\ 2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1607/498 \\ -135/83 \\ -2330/249 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad q_2 = \frac{83}{6} \begin{pmatrix} 11/6 \\ 2/3 \\ -19/6 \end{pmatrix} \qquad q_3 = \frac{1}{100.6\ldots} \begin{pmatrix} 1607/498 \\ -135/83 \\ -2330/249 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{50}{24} & 1 & 0 \\ 5/6 & -\frac{88}{83} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$a_1 = \|v_1\| q_1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{11} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \|v_1\| \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{pmatrix}$$

$a_2 = \frac{50}{24} \|v_1\| q_1 + \|v_2\| q_2$

$a_3 = \frac{5}{6} \|v_1\| q_1 - \frac{88}{83} \|v_2\| q_2 + \|v_3\| q_3$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|v_1\| & & \\ \frac{50}{24}\|v_1\| & \|v_2\| & \\ \frac{5}{6}\|v_1\| & -\frac{88}{83}\|v_2\| & \|v_3\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|v_1\| & \frac{50}{24}\|v_1\| & \frac{5}{6}\|v_1\| \\ 0 & \|v_2\| & -\frac{88}{83}\|v_2\| \\ 0 & 0 & \|v_3\| \end{pmatrix}$$

Matrizes Ortogonales y unitarias

- **Definición: 1**

Se llama matriz $\overset{\text{ortogonal (en } \mathbb{R})}{\text{unitaria (en } \mathbb{C})}$ si :

$$\boxed{\text{sus columnas son vectores ortonormales}}$$

- Deducción de la definición 2 : a partir de la 1

$$P = \begin{array}{c} [b_1]_E \dots [b_j]_E \dots [b_n]_E \\ \left(\begin{array}{c} \boxed{} \\ \downarrow \\ \langle b_j , c_i \rangle \end{array} \right) \leftarrow i \end{array}$$

este término

expresado en esta base

$$\begin{tikzcd} E_{B_{o.N.}} \arrow[r, squiggly, shift left, "P"] & E_{\mathcal{E}_{o.N.}} \arrow[l, squiggly, shift left, "P^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$P^{-1} = \begin{array}{c} [c_1]_B \dots [c_j]_B \dots [c_n]_B \\ \left(\begin{array}{c} \boxed{} \\ \swarrow \\ \langle c_j , b_i \rangle \end{array} \right) \leftarrow i \end{array} = \begin{array}{l} \underline{\underline{P^t}} \text{ en } \mathbb{R} \\ \overline{P}^t \text{ en } \mathbb{C} \\ P^* \end{array}$$

$$= \begin{cases} \langle b_i , c_j \rangle \text{ en } \mathbb{R} \\ \overline{\langle b_i , c_j \rangle} \text{ en } \mathbb{C} \end{cases}$$

Se define

$$\boxed{A^* := \overline{A}^t = \overline{A^t}}$$

adjunta de A

en $\mathbb{R}$ es igual a A^t

- **Definición 2 :**

una matriz $\overset{\text{real}}{\text{compleja}}$ cuadrada es $\overset{\text{ortogonal}}{\text{unitaria}}$ si :

$$A^{-1} = A^t \qquad\qquad A^{-1} = \overline{A}^t \;(= A^*)$$

$$\boxed{AA^t = A^tA = I} \qquad\qquad AA^* = A^*A = I$$

Deducción de la definición 1 a partir de la 2

$$\begin{pmatrix} — A^t_1 — \\ — A^t_2 — \\ \vdots \\ — A^t_n — \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$A_i^t A_i = \langle A_i , A_i \rangle = 1$

$\rightarrow \|A_i\| = 1$

las columnas de A son vectores unitarios

$A_j^t A_i = \langle A_i , A_j \rangle = 0$

$\rightarrow A_i \perp A_j$

las columnas de A son ortogonales

A es matriz ortogonal $\Longrightarrow$ las columnas de A son ortoNORMALES

razonando de manera similar

$\Longrightarrow$ las filas de A tb son ortonormales

$\downarrow$

filas de A = columnas de A^t

$\Longrightarrow$ A^t es ortogonal

Definición 1 $\Longleftrightarrow$ Definición 2

Ejemplos de matrices ortogonales:

1) G_α en $\mathbb{R}^3$ (giro)

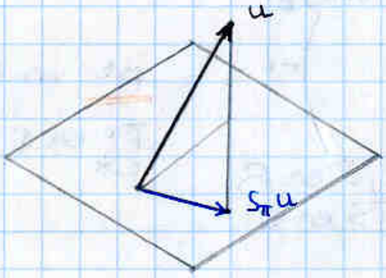
$$G_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos-\alpha & -\operatorname{sen}-\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}-\alpha & \cos-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G_\alpha{}^t$$

además se puede ver que sus columnas $G_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ $G_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ $G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son ortonormales:

$< G_1, G_2 > = 0$, $< G_1, G_3 > = 0$, $< G_2, G_3 > = 0$, $\| G_1 \|^2 = 1$, $\| G_2 \|^2 = 1$, $\| G_3 \|^2 = 1$

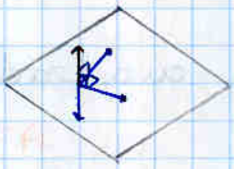
2) S_π en $\mathbb{R}^3$ (simetría plano π)



la matriz S es simétrica

$$S \sim A_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

en una base astutamente escogida



$$S_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A_{\mathcal{E}} = D^{-1} S P$

$S = S^t$

además, se puede ver que: $S = S^{-1}$

luego $S^t = S^{-1}$

$\Rightarrow$ S es matriz ortogonal

3) P_π en $\mathbb{R}^3$ (proyección sobre plano π)
no puede ser ortogonal puesto que no tiene inversa

4) Cualquier matriz permutación es una matriz ortogonal

ej $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P^t$

Propiedades matrices ortogonales

Recordando:

(i) $(A^*)^* = A$

(ii) $A \substack{\text{real ortogonal} \\ \text{compleja unitaria}} \longleftrightarrow$ A tiene columnas O.N.

(iii) $< x, \underset{\uparrow \text{imagen de } y}{A \cdot y} > = < A^* \cdot x, y >$

Demostración en $\mathbb{R}$

$<x, Ay> = (Ay)^t \cdot x = (y^t A^t) x = y^t (A^t x) = <a^t x, y>$

- Propiedades:

- $< Ax, Ay > = < x, y >$ A conserva ángulos
- $\| A \cdot x \| = \| x \|$ A conserva distancias
- $| \det(A) | = 1$ A conserva areas / volumenes

ejs: giro, simetria respecto del plano

Isometria: aplicación que conserva ángulos y distancias

1) Hay isometrias no lineales (ej. traslacion)

2) En $\mathbb{R}^2$ son las siguientes: giro, simetria respecto a recta, traslación.

TEMA 5. PROYECCIONES SOBRE SUBESPACIOS Y MINIMOS CUADRADOS

Teoria de la aproximación: Cálculo, Álgebra, Geometria

ejemplo 1: Experimentación. Obtención lineal de modelos

$$\begin{tikzcd} \text{señal} \arrow[r, squiggly, "\text{experimento}"] & \text{respuesta} \\ s_1 \arrow[r] & r_1 \\ s_2 \arrow[r] & r_2 \\ \vdots & \vdots \end{tikzcd}$$

$$r = f(s)$$

supóngase que f es cuadrática: $r = a + bs + cs^2$

$$r_1 = a_1 + b_1 s_1 + c_1 s_1^2$$
$$r_2 = a_2 + b_2 s_2 + c_2 s_2^2$$
$$\vdots$$
$$r_n = a_n + b_n s_n + c_n s_n^2$$

en teoría con 3 ecuaciones basta para obtener las tres incógnitas.

En la practica, se necesitan mas de 3 medidas, y la imprecisión de éstas resulta en un sistema incompatible

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 \\ 1 & s_2 & s_2^2 \\ \vdots & & \\ 1 & s_n & s_n^2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{x}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} = \underset{y}{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}}$$

combinación lineal

Álgebra: $\exists$ solución $\longleftrightarrow y \in C(A)$

para q la columna de terminos indep no haga mayor el rango al ampliarla, es decir, sea linealmente independiente

Gauss:

residuo $r(x) = A \cdot x - y \in \mathbb{K}^n$

$\boxed{\text{Hallar } x \in \mathbb{K}^n : r(x) \in \mathbb{K}^m \text{ esté lo mas próximo a } 0 \in \mathbb{K}^m}$

Hallar $x \in \mathbb{K}^n$
$\|r(x)\| \leq \|r(u)\| \quad \forall u \in \mathbb{K}^n$
'minimizar' $r(x)$ → cálculo

Ejemplo 2:

Sea f solución de una ecuación diferencial $E(y) = 0$ en $[a,b]$
↳ la auténtica, maravillosa, pero inalcanzable

Hallar $p \in \mathcal{P}_n[a,b]$ que mejor aproxima a f.

criterio de pequeñez: $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$

Gauss: $r_p(x) = f(x) - p(x)$

Hallar $p \in \mathcal{P}_n[a,b]$: $r_p(x)$ sea lo mas pequeño posible

Hallar $p \in \mathcal{P}_n[a,b]$: $\|r_p(x)\| \leq \|r_q(x)\| \quad \forall q \in \mathcal{P}_n[a,b]$
minimizar $\|r_p(x)\|$ → cálculo

· Planteamiento comun de ambos problemas

Dado V con $\langle \cdot , \cdot \rangle$ y $v \in V$ ← solución inalcanzable

el espacio V es excesivo, utilicemos un subespacio $S \hookrightarrow V$

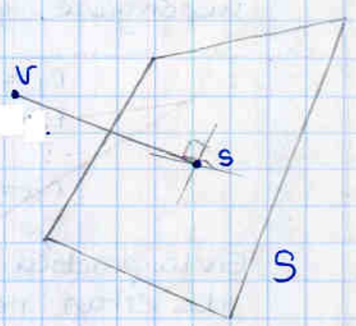
Hallar $s \in S$ lo más próximo a v

Álgebra:

si V fuese $\mathbb{R}^3$

$S \hookrightarrow V$ podria ser un plano

$s \in S$ mas cercano a v = proyección ortogonal de v sobre S.



Esto es generalizable a espacios más generales.

Teorema de mejor aproximación

$$S \hookrightarrow V \quad \dim S < +\infty$$

Dado $v \in V$, los siguientes problemas son equivalentes y tienen la misma solución única

(i) Hallar $s \in S$ mas proximo a v

$$\boxed{\|v - s\| \leq \|v - s'\| \quad \forall s' \in S}$$

(ii) Hallar $s \in S$: $v - s \perp S$

$$\boxed{v - s \perp s' \quad \forall s' \in S}$$

ejemplo: 1 variable

p = 72
p = 71
p = 72
p = 70
p = 70

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (p) = \begin{pmatrix} 72 \\ 71 \\ 72 \\ 70 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

sistema incompatible

rango A = 1

rango (A|b) = 2

para ser compatible, rg(A|b) debe ser 1

b debe ser comb. lineal de A

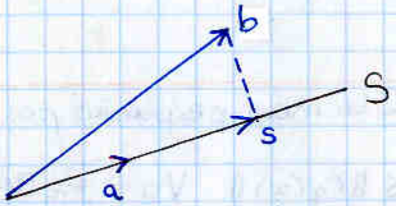
en este caso, A es una recta en $\mathbb{R}^5 := S$

para que b sea C(A), debe estar en la recta S

cual es $s \in S$ (será un sistema compatible det puesto que no se ampliará el rango)

tal que s es lo mas proximo posible a b? Proyección ortogonal!

$$Ax = b \Rightarrow A\bar{x} = s$$



en cálculo seria el complicado problema de minizar $R := \|r(x)\|^2 = \|ax - b\|^2$

$\frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{a_1 b_1 \ldots}{a_1^2 \ldots}$

$\frac{d^2R}{dx^2} > 0 \Rightarrow \bar{x}$ min relativo

$$s = \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a$$

$$s = \bar{x} \, a$$

$$\bar{x} = \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} = \frac{a^t b}{a^t a} = \frac{a_1 b_1 \ldots a_n b_n}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = \frac{72 \cdot 1 + 71 \cdot 1 + 72 \cdot 1 + 70 \cdot 1 + 70 \cdot 1}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}$$

¡¡coincide con la media!!

Teorema de mejor aproximación matricialmente en varias variables

Problema: Resolver $Ax = b$ $A_{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$

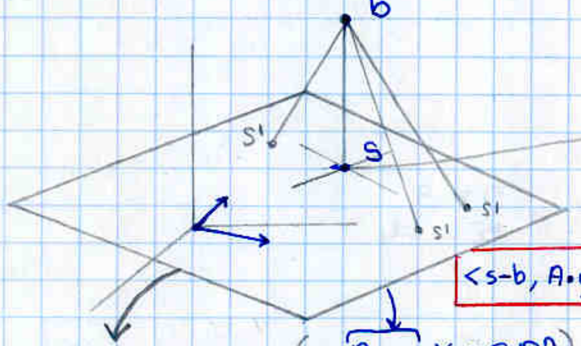
INCOMPATIBLE : $b \notin C(A)$

Solucion: mejor aproximación:

Hallar $s \in C(A)$ lo más proximo a b

↳ Hallar $\bar{x}$: $\underbrace{A\cdot\bar{x} = s}$ será c.d. puesto que $s \in C(A)$

representación en R^3



$\boxed{<s-b, A\cdot y> = 0}$

plano : $C(A)$ $(\equiv \overbrace{A\cdot y}$ $\forall y \in \mathbb{R}^n)$
combinación lineal de A

(formado por los vectores que son las columnas de la matriz A)

el sistema tiene solución si el vector de términos independientes se encuentra en este plano.

(los vectores de este plano no amplian el rango al hacer la matriz ampliada)

Hallar $s \in C(A)$: $b - s \perp C(A)$

$s = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \ldots + \bar{x}_n A_n$ comb lineal

$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_i \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$

$s = A\cdot\bar{x}$ lema de las columnas

mejor que encontrar el vector s sería encontrar sus componentes

Hallar $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $A\bar{x} = s$

$A\bar{x} - b \perp C(A)$

Hallar $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $A\bar{x} - b \perp A\cdot y$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$

en lugar de pedir que sea perpendicular a todo un subespacio, mejor pedimos que sea perpendicular a todos los vectores del espacio Ay

$(A\bar{x} - b \perp Ay \longleftrightarrow \boxed{<A\bar{x} - b, Ay> = 0})$

Hallar $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $(Ay)^t (A\bar{x} - b) = 0$

$$\begin{pmatrix} (Ay)^t (A\bar{x} - b) \\ = y^t A^t (A\bar{x} - b) \\ = y^t (A^t A\bar{x} - A^t b) \end{pmatrix}$$

Hallar $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $y^t (A^t A\bar{x} - A^t b) = 0$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$

$< A^t A\bar{x} - A^t b, y > = 0$ $\forall y$

$\underbrace{A^t A\bar{x} - A^t b}$ $\perp y$ $\forall y$ → un vector con nombre muy largo. Es de sangre real!

$\Rightarrow A^t A\bar{x} - A^t b = 0$

$= A^t A\bar{x} = A^t b$

Matricialmente:

ecuaciones normales

Hallar $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{A^t A\bar{x} = A^t b}$$

$\bar{x}$ es la mejor solución al sistema incompatible $Ax = b$

¿de que tipo es? ¿Propiedades de A^tA?

a ver si va a ser:
- para ir a la luna, mira, primero vas a Jupiter y desde Jupiter vas a la luna
- Gracias!

ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 2\\ x + 3y &= 5\\ 0 &= 3\end{aligned}$$

$$A^tA \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&5\\5&13\end{pmatrix}\end{array}$$

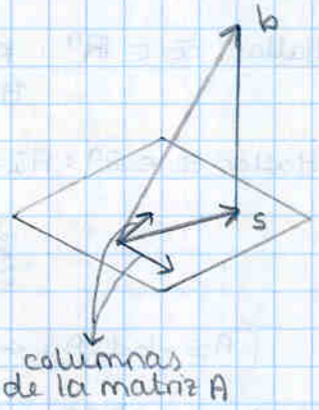
- → cuadrada
- → simétrica
- → invertible / de Cramer
- → pivotes positivos (Cholesky)

$$A^tb \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2&5\\5&13\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7\\19\end{pmatrix}\end{array}$$

$$A^tA\,\bar{x} = A^tb$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&5&7\\5&13&19\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}\enclose{circle}{2}&5&7\\0&\enclose{circle}{0.5}&1.5\end{array}\right) \qquad \begin{aligned}\bar{y} &= 3\\ \bar{x} &= -4\end{aligned}$$

Interpretación:



$$s = -4\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$A\,x = b$$

INCOMPATIBLE

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2\\ x + 3y &= 5\\ 0 &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$A\,\bar{x} = s$$

COMPATIBLE

$$\begin{aligned} \bar{x} + 2\bar{y} &= 2\\ \bar{x} + 3\bar{y} &= 5\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

- Propiedades de A^tA

a) A^tA es cuadrada y simétrica

espacio nulo de A

b) $N(A) = N(A^tA)$

c) $rg(A^tA) = rg(A)$

d) $rg(A) = n \Rightarrow A^tA$ invertible

e) pivotes positivos

¿Qué mas piropos se le puede echar?

Demostración

$$A x = 0 \qquad A^tAx = 0$$

$$\text{SOLUCION} \overset{?}{=} \text{SOLUCION}$$

$\subset$

x es sol de $Ax=0$ $\rightarrow A^tAx = A^t0 = 0$

x es sol de $A^tAx = 0$
$\rightarrow x^tA^tAx = x^t0$
$(Ax)^tAx = 0$
$<Ax, Ax> = 0$
$\|Ax\|^2 = 0$
$\rightarrow Ax = 0$

$$\boxed{A \text{ con columnas independientes} \Rightarrow A^tA \text{ invertible}}$$

- Otras propiedades de las ecuaciones normales

$Ax = b$ incompatible $b \not\in C(A) \equiv rg(A) \neq rg(A|b)$

$$\begin{tikzcd} Ax = b \arrow[d, "T.M.A."'] \arrow[dr, "\text{si resulta que no era incomp.}", "\text{solucion}"'] & \\ A^tA\bar{x} = A^tb \arrow[r, "\text{solucion}"'] & \bar{x} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } Ax = b \text{ tiene solucion, } \{x : Ax = b\} \equiv \{\bar{x} : A^tA\bar{x} = A^tb\} \\ \text{y la proyección de } b \text{ sobre } C(A) \text{ es } b. \end{array}}$$

- A^tA tiene defecto

tamaño grande $\Rightarrow$ fatal condicionamiento

Las ec. normales no se suelen usar en la práctica

- Excepción: A tiene columnas ortoNORMALES

A columnas ortonormales $\xRightarrow[\text{ortonormal}]{\text{Def de}}$ $A^tA = I$

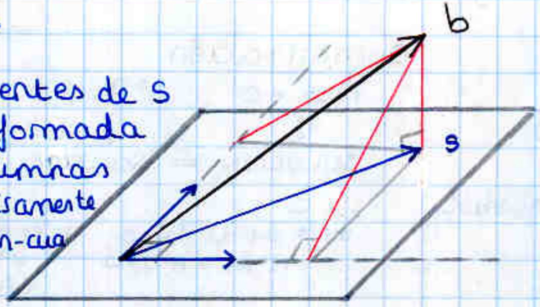
$$A^tA\bar{x} = A^tb$$
$$\bar{x} = A^tb$$
y fuera!

$$\boxed{A \text{ columnas ortonormales} \Rightarrow \text{La sol. única mínimo-cuadrática es } \boxed{\bar{x} = A^tb}}$$

A columnas O.N ⇒ la proyección de b sobre C(A) es $AA^tb = A_1A_1^tb + \ldots + A_nA_n^tb$

$\bar{x} = A^t b$

las componentes de S en la base formada por las columnas de A es precisamente la solución min-cua



$$\begin{aligned} s &= A\bar{x} \\ &= A(A^t b) \\ &\quad \text{lema de las columnas} \\ &= A_1A_1^t b + \ldots + A_n A_n^t b \end{aligned}$$

si los vectores directores del plano son O.N. ⇒ la proyección de b en el plano es la suma de la proyección de b sobre cada uno de los ejes formados por los vectores directores O.N.

$$\frac{\langle b, A_1\rangle}{\underbrace{\langle A_1, A_1\rangle}_{1}} A_1 = \langle b, A_1\rangle A_1 = A_1 \langle b, A_1\rangle = A_1 A_1^t b$$

Conseguir que A tenga columnas O.N.

A columnas l.i. ⇒ $A = QR$ → Q → cols. ortonormales

R → cuadrada, triang sup, invertible

$$Ax = b \quad\quad QRx = b$$

$$A^tA\bar{x} = A^tb \quad\quad (QR)^t(QR)x = (QR)^tb$$

$$R^t\underbrace{Q^tQ}_{I}Rx = R^tQ^tb$$

$$R^tRx = R^tQ^tb$$

R invertible → R^t invertible premultiplicando por $(R^t)^{-1}$

$$\boxed{R\bar{x} = Q^tb}$$

triangular!!

se resuelve por sust. inversa ¡Pocas operaciones!

Algoritmo solución min-cua de $Ax = b$ (A con columnas l.i.)

1) Obtener QR
2) Calcular Q^tb
3) Resolver $R\bar{x} = Q^tb$

Ajuste por mínimos cuadrados

→ Caso generalizado: polinomio de grado n

Dado el cjto de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$

ajustarlos a un polinomio:

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$\left\{\begin{matrix} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n \\ a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_n x_2^n \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_m + \dots + a_n x_m^n \end{matrix}\right\}$$

en general $m >> n$
(alto y delgado)

$$\Big\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

SISTEMA INCOMPATIBLE

$b \notin C(A)$

ecuaciones normales: $A^t A \bar{x} = A^t b$

$$A^t A: \begin{pmatrix} m & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & & \ddots \\ \Sigma x_i^2 & & \ddots & \\ & \ddots & & \Sigma x_i^n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$A^t b: \begin{pmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_i^n y_i \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Resolver
$A^t A \bar{x} = A^t b$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{a_0} \\ \bar{a_1} \\ \vdots \\ \bar{a_n} \end{pmatrix}$$

con la solución, $\bar{x}$, puedes crear un polinomio (de grado n) que cumple que la suma de los cuadrados de la diferencia a la recta y los puntos es mínima (menor que cualquier otro polinomio de grado n)

→ Generalización a cualquier modelo lineal

Dado el cjto de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ ajustarlos a $y = a_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots + a_n \phi_n$

ejemplo: (x_i, y_i) $i=1\dots m$

$$\underline{y = ae^{x} + be^{-x}}$$

$$\begin{Bmatrix} ae^{x_1} + be^{-x_1} = y_1 \\ \vdots \\ ae^{x_m} + be^{-x_m} = y_m \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{x_1} & e^{-x_1} \\ e^{x_2} & e^{-x_2} \\ \vdots & \\ e^{x_m} & e^{-x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$A \quad x \quad = \quad b$$

Resolver $A^tAx = A^tb \dots$

→ Linealización de algunos modelos no-lineales

espabílese V.d.

ejemplo

ajustar mediante $y = ae^{bx}$

$$y = ae^{bx} \xrightarrow{\text{linealización!}} \underline{\ln y = \ln a + bx}$$

$$\begin{Bmatrix} \ln a + bx_1 = \ln y_1 \\ \vdots \\ \ln a + bx_m = \ln y_m \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_m \end{pmatrix}$$

$$A \quad x \quad = \quad b$$

Resolver $A^tA\bar{x} = A^tb$

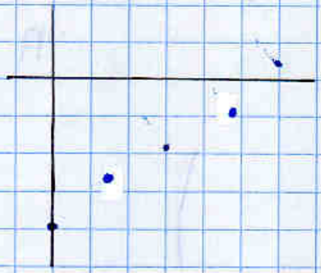
Ejemplos

~~Algoritmo solución min-cuad de $Ax = b$ (A con col l.i.)~~

~~1) Obtener QR~~
~~2) Calcular $Q^t b$~~
~~3) Resolver $Rx = Q^t b$~~

Ajuste por mínimos cuadrados

ej: Dado el cjto de puntos
(1, 1.63), (1.25, 1.77), (1.5, 1.87), (1.75, 2), (2, 2.13)



ajustar una recta
$y = ax + b$
sobre ellos

$$\left.\begin{array}{l} b + ax = b \\ \hline b + a1 = 1.63 \\ b + 1.25a = 1.77 \\ b + 1.5a = 1.87 \\ b + 1.75a = 2 \\ b + 2a = 2.13 \end{array}\right\} \quad \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.25 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 1.75 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}} = \underset{b}{\begin{pmatrix} 1.63 \\ 1.77 \\ 1.87 \\ 2 \\ 2.13 \end{pmatrix}}$$

$$A^t A \bar{x} = A^t b$$

$A^t A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.25 & 1.5 & 1.75 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.25 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 1.75 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7.5 \\ 7.5 & 11.775 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix}$$

$A^t b$

$$\begin{pmatrix} 1.63 \\ 1.77 \\ 1.87 \\ 2 \\ 2.13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7.5 \\ 7.5 & 11.775 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9.4 \\ 14.4075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7.5 \\ 7.5 & 11.775 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.4 \\ 14.4075 \end{pmatrix}$$

pivotes positivos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7.5 & 9.4 \\ 7.5 & 11.775 & 14.4075 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7.5 & 9.4 \\ 0 & \underline{0.525} & 0.3075 \end{array}\right)$$

pivotes positivos pero problemáticos

representación
b + ax

$\bar{b} = 1.145$
$\bar{a} = 0.492$

esto no es una aproximación local como Taylor ¡no pasa por ningún punto! pero es aproximación global.

$\|Ax - b\|$
la suma de los cuadrados de la diferencia entre la recta y los puntos es mínima

ejercicio:

para los mismos puntos

en vez de
$y = ax + b$
hacer
$x = cy + d$
no da la misma recta.

ejercicio:

aproximar mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$
los mismos puntos

$$\underline{c + bx + ax^2 = y}$$

$$\left.\begin{array}{l} c + 1 \cdot b + 1^2 a = 1.63 \\ c + 1.25 b + 1.25^2 a = 1.76 \\ c + 1.5 b + 1.5^2 a = 1.88 \\ c + 1.75 b + 1.75^2 a = 2 \\ c + 2b + 2^2 a = 2.13 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.25 & 1.25^2 \\ 1 & 1.5 & 1.5^2 \\ 1 & 1.75 & 1.75^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.63 \\ 1.76 \\ 1.88 \\ 2 \\ 2.13 \end{pmatrix}$$

$$A \quad x = b$$

$$A^t A \bar{x} = A^t b$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{pmatrix}$$

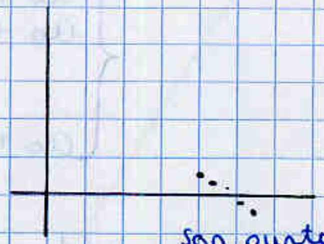
$$A^t b = \begin{pmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i^2 \end{pmatrix}$$

ej. a) mediante $y = mx + h$ ajustar los puntos $(2.3, 0.45)$ $(2.4, 0.18)$ $(2.6, -0.2)$ $(2.7, -0.57)$ trabajando con 3 cifras exactas

$$\underline{h + mx = y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.3 \\ 1 & 2.4 \\ 1 & 2.6 \\ 1 & 2.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.18 \\ -0.2 \\ -0.57 \end{pmatrix}$$

$$A \quad x = b$$



son puntos muy acumulados. Hay que hacer un zoom y plantearse el problema pivotando alrededor de la media

$$A^tA\,\bar{x} = A^t b$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 2.3 \\ 1 & 2.4 \\ 1 & 2.6 \\ 1 & 2.7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.18 \\ -0.2 \\ -0.57 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.3 & 2.4 & 2.6 & 2.7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25.1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.14 \\ 1.56 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & -0.14 \\ 10 & 25.1 & -0.592 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & -0.14 \\ 0 & 0.1 & \end{array}\right)$$

los errores de redondeo podrían hacer aparecer un cero aquí

b) mediante la recta $y = h + m(x - x_0)$

siendo $x_0 = \frac{\sum x_i}{n} = 2.5$

$$\underline{h + m(x - 2.5) = y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & -0.1 \\ 1 & 0.1 \\ 1 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.18 \\ -0.2 \\ -0.57 \end{pmatrix}$$

columnas ortogonales!

muchas menos operaciones
menos errores de redondeo

A^tA

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & -0.1 \\ 1 & 0.1 \\ 1 & 0.2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.18 \\ -0.2 \\ -0.57 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.2 & -0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.14 \\ \ \end{pmatrix} \end{array}$$

solución directa

generalización a polinomio grado n

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$(x_i, y_i) \quad i=1,\dots,m$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + \dots + a_n x_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_m + \dots + a_n x_m^n = y_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$A \quad x = b$$

$$A^t A \bar{x} = A^t b$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} m & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \dots \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & & \\ \Sigma x_i^2 & & \ddots & \\ & \ddots & & \\ & & & \Sigma x_i^n \end{pmatrix}$$

$$A^t b = \begin{pmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \Sigma x_i^n y_i \end{pmatrix}$$

Generalización a :

$$(x_i, y_i) \quad i=1\dots m$$

$$y = a_0 + a_1 \phi_1 + \dots + a_n \phi_n$$

ejemplo $(x_i, y_i)\ i=1\dots m$

$$y = a e^{x} + b e^{-x}$$

$$\begin{cases} a e^{x_1} + b e^{-x_1} = y_1 \\ \vdots \\ a e^{x_m} + b e^{-x_m} = y_m \end{cases}$$

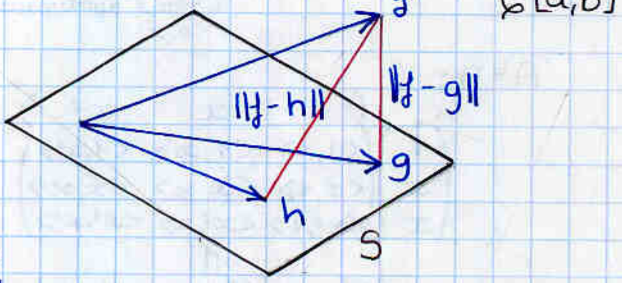
$$\begin{pmatrix} e^{x_1} & e^{-x_1} \\ e^{x_2} & e^{-x_2} \\ \vdots & \vdots \\ e^{x_m} & e^{-x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

· Aproximación de funciones

Dado $f \in \mathcal{C}[a,b]$ inalcanzable
Hallar $g \in S \hookrightarrow \mathcal{C}[a,b]$ tal que:

"aproxime mejor a f en $[a,b]$ que cualquier otra"

$$\|f-g\| \leq \|f-h\| \quad \forall h \in S$$



ej: aproximar en $[0,1]$
$f(x) = \text{sen}\, \pi x$
mediante $g \in \mathcal{P}_2[0,1]$

Este problema se puede abordar desde 3 puntos de vista:

1. Cálculo

$$R(a,b,c) = \| \text{sen}\, \pi x - ax^2 - bx - c \|^2$$

Minimizar $R(a,b,c)$
es decir, hallar (a,b,c) tal que $R(a,b,c)$ alcance su mínimo absoluto.

$$R(a,b,c) = \| \text{sen}\, \pi x - ax^2 - bx - c \|^2$$
$$= \langle \text{sen}\, \pi x - ax^2 - bx - c,\ \text{sen}\, \pi x - ax^2 - bx - c \rangle$$
$$= \int_0^1 (\text{sen}\, \pi x - ax^2 - bx - c)^2\, dx$$

$$= \ldots$$ DERIVE!

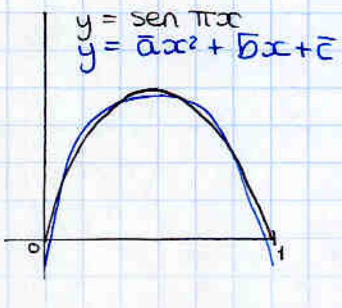
$$R(a,b,c) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{2}{3}a\cdot c + \frac{1}{2}a\cdot b + \frac{2(4-\pi^2)}{\pi^3}a + c^2 + bc - \frac{4}{\pi}c + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{\pi}b + \frac{1}{2}$$

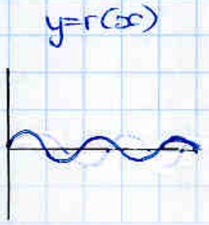
... DERIVE!

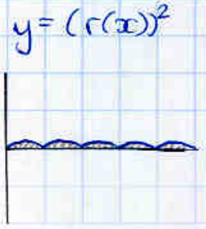
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{2}{5}a + \frac{1}{2}b + \frac{2}{3}c - \frac{2(\pi^2-4)}{\pi^3} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial b} &= \frac{a}{2} + \frac{2}{3}b + c - \frac{2}{\pi} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial c} &= \frac{2}{3}a + b + 2c - \frac{4}{\pi} = 0 \end{aligned}\right\}$$

punto crítico
$\bar{a} = -4.1225$
$\bar{b} = 4.1225$
$\bar{c} = -0.0505$

$$g = \bar{a}x^2 + \bar{b}x + c$$







de entre todos los polinomios $\mathcal{P}_2$ que pueden haber, este es el que menor $(r(x))^2$ tiene en $[0,1]$

2. Algebra

en el ej. anterior:

$$c + bx + ax^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hallaremos la mejor aproximación} \\ \text{a esta igualdad}}}{=} \operatorname{sen} \pi x \equiv \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = (\operatorname{sen} \pi x)$$

$$A \quad x \quad = \quad b$$

Teorema de mejor aproximación, ecuaciones normales

$$A^t A \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{x} = \text{mejor aproximación} \\ \text{a } x}}{\bar{x}} = A^t b$$

pero no hay que interpretarlo
como producto de matrices
sino segun el $\langle \cdot , \cdot \rangle = \int_0^1 g(x) f(x)\, dx$

$A^t A$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & x & x^2 \\ \hline 1 & \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ x & \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ x^2 & \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{array}$$

$$|||$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 dx & \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2 dx \\ \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2 dx & \int_0^1 x^3 dx \\ \int_0^1 x^2 dx & \int_0^1 x^3 dx & \int_0^1 x^4 dx \end{pmatrix}$$

$$|||$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$A^t b$:

$$\begin{array}{c|c} & \operatorname{sen} \pi x \\ \hline 1 & \langle 1, \operatorname{sen} \pi x\rangle \\ x & \langle x, \operatorname{sen} \pi x\rangle \\ x^2 & \langle x^2, \operatorname{sen} \pi x\rangle \end{array}$$

$$|||$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 \operatorname{sen} \pi x\, dx \\ \int_0^1 x \operatorname{sen} \pi x\, dx \\ \int_0^1 x^2 \operatorname{sen} \pi x\, dx \end{pmatrix}$$

$$|||$$

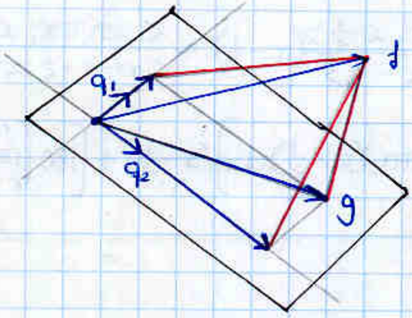
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} \\ -\frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$$

$A^t A \bar{x} = A^t b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} \\ -\frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12(\pi^2 - 10)}{\pi^3} \\ -\frac{60(\pi^2 - 12)}{\pi^3} \\ \frac{60(\pi^2 - 12)}{\pi^3} \end{pmatrix}$$

las soluciones
coinciden con las
obtenidas mediante
cálculo... ¡faltaría
más!

3. Geometria



$$g = \text{proy}_{\mathcal{P}_2[0,1]} f = \sum_{i=1}^{3} \text{proy}_{q_i} f$$

$\{q_1, q_2, q_3\}$ base O.N.

1) Gram-Schmidt → base ortogonal $\{c_1, c_1, ..\}$

2)a. proyectar directamente $\dfrac{\langle f, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle} c_1$ sobre cada vector ortogonal y sumar

2)b. base ortonomal dividiendo por el módulo $\{q_1, q_2, \dots\}$

↓

3)b. proyectar $\langle f, q_1\rangle q_1$ sobre cada vector ortonormal y sumar.

el mismo ej anterior. Aproximar sen πx en $[0,1]$ mediante $\mathcal{P}_2$

$\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ ortogonalizarla mediante G-S.

$b_1 = 1 \qquad c_1 = b_1 = 1$

$b_2 = x \qquad c_2 = b_2 - \dfrac{\langle b_2, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle} c_1 = x - \dfrac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1$

$$= x - \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 dx} = x - \frac{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1}{x\Big|_0^1}$$

$$= x - \frac{1}{2}$$

$b_3 = x^2 \qquad c_3 = b_3 - \dfrac{\langle b_3, c_1\rangle}{\langle b_3, c_1\rangle} \underline{c_1} - b_3 \dfrac{\langle b_3, c_2\rangle}{\langle c_2, c_2\rangle} \underline{c_2}$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{\int_0^1 dx} - \frac{\int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})\,dx}{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\,dx} \underline{\underline{(x - \tfrac{1}{2})}}$$

$$= x^2 - \frac{1/3}{1} \cdot 1 - \frac{1/12}{1/12}(x - \tfrac{1}{2})$$

$$= x^2 - x + 1/6$$

$\mathcal{C} = \{1, x, x^2\} \qquad \mathcal{B} = \{1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + 1/6\}$

$\|c_1\|^2 = 1$

$\|c_2\|^2 = 1/12$

$\|c_3\|^2 = 1/180$

↑

$$\int_0^1 (x^2 - x + \tfrac{1}{6})^2\,dx = \int_0^1 (x^4 - x^3 + \tfrac{x^2}{6} - x^3 + x^2 - \tfrac{x}{6} + \tfrac{x^2}{6} - \tfrac{x}{6} + \tfrac{1}{36})\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{x}{3} + \tfrac{1}{36})\,dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$$

ahora se suma la proyeccion de f sobre cada vector de la base ortogonal:

$$P_{P_2[0,1]}(\operatorname{sen}\pi x) = P_1(\operatorname{sen}\pi x) + P_{x-\frac{1}{2}}(\operatorname{sen}\pi x) + P_{x^2-x+\frac{1}{6}}(\operatorname{sen}\pi x)$$

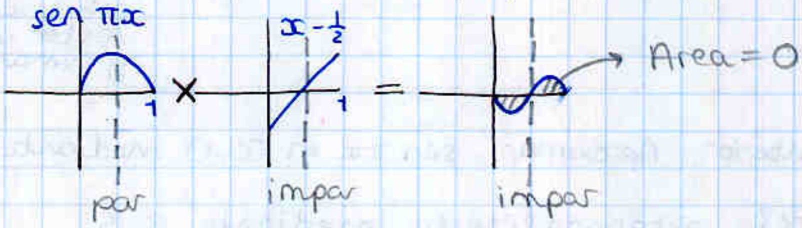
$$= \frac{\langle \operatorname{sen}\pi x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 + \frac{\langle \operatorname{sen}\pi x, x-\frac{1}{2}\rangle}{\langle x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}\rangle}(x-\tfrac{1}{2}) + \frac{\langle \operatorname{sen}\pi x, x^2-x+\frac{1}{6}\rangle}{\langle x^2 x+\frac{1}{6}, x^2 x+\frac{1}{6}\rangle}x^2-x+\tfrac{1}{6}$$

$$= \int_0^1 \operatorname{sen}\pi x\,dx + \left[12\int_0^1(\operatorname{sen}\pi x)(x-\tfrac{1}{2})dx\right](x-\tfrac{1}{2}) + \left[180\int_0^1 \operatorname{sen}\pi x\,(x^2-x+\tfrac{1}{6})dx\right].$$

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\pi x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

$$\int_0^1(\operatorname{sen}\pi x)(x-\tfrac{1}{2})dx = \int_0^1 x\operatorname{sen}\pi x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x\ \ dx$$

alto! siempre conviene pensar antes... $= 0$



$$\int_0^1(\operatorname{sen}\pi x)(x^2-x+\tfrac{1}{6})dx = \int_0^1(x^2\operatorname{sen}\pi x - x\operatorname{sen}\pi x + \tfrac{1}{6}\operatorname{sen}\pi x)dx$$

mal, mejor hacerlo por partes.

$$= \left[\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)\left(x^2-x+\tfrac{1}{6}\right)\right]_0^1 - \int_0^1\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)(2x-1)dx$$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)(2x-1)dx = \left[\left(\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi x\right)(2x-1)\right]_0^1 - \int_0^1\left(\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi x\right)(2)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi x\right)(2x-1)\right]_0^1}_{0} + \underbrace{\left[\frac{2}{\pi^3}\cos\pi x\right]_0^1}_{\left(-\frac{2}{\pi^3}\right)-\left(\frac{2}{\pi^3}\right)}$$

$$= -\frac{4}{\pi^3}$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)\left(x^2-x+\tfrac{1}{6}\right)\right]_0^1 + \left(-\frac{4}{\pi^3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}(1^2-1+\tfrac{1}{6}) - \left(-\frac{1}{\pi}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\right) + \left(-\frac{4}{\pi^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6\pi} + \frac{1}{6\pi} - \frac{4}{\pi^3}$$

$$= \frac{1}{3\pi} - \frac{4}{\pi^3}$$

$$= \frac{2}{\pi} + 12(0)(x-\tfrac{1}{2}) + 180\left(\frac{1}{3\pi} - \frac{4}{\pi^3}\right)\left(x^2 - x + \tfrac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{180x^2}{3\pi} - \frac{180x}{3\pi} + \frac{180}{18\pi} - \frac{(180x^2)4}{\pi^3} + \frac{(180x)4}{\pi^3} - \frac{(180)(4)}{6\pi^3}$$

$$= -4.1225x^2 + 4.1225x - 0.0505$$

de nuevo, el mismo resultado. ¡bieee...een!

$[-1, 1)$ $1, \operatorname{sen} \pi x, \cos \pi x, \ldots$

$(-\pi, \pi)$ $1, \operatorname{sen} x, \cos x, \ldots$

$f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi]$

aproximarla mediante un pol. trig.

$\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \ldots]$

$\langle 1, \cos kx \rangle = 0$

$\langle 1, \operatorname{sen} kx \rangle = 0$

$\langle \operatorname{sen} kx, \cos kx \rangle = 0$

$$|x| = a_0 + \sum_{x=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

$$P_{L_3}(|x|) = P_1(|x|) + P_{\operatorname{sen} x}(|x|) + P_{\cos x}(|x|)$$

$$= \frac{\langle |x|, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \frac{\langle |x|, \operatorname{sen} x \rangle}{\langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x \rangle} \operatorname{sen} x + \frac{\langle |x|, \cos x \rangle}{\langle \cos x, \cos x \rangle} \cos x$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} dx} + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{sen} x\, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx} \underline{\operatorname{sen} x} + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x\, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx} \cdot \underline{\cos x}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = 2 \int_0^{\pi} x\, dx = \pi^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underset{\uparrow\,\text{par}}{|x|}\,\underset{\uparrow\,\text{impar}}{\operatorname{sen} x}}_{\text{impar}}\, dx = 0$$

$$\int_{\pi}^{\pi} |x| \cos x\, dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos x\, dx = -2x \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= -2x \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi} + 2 \cos x \Big|_0^{\pi} = -4$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x \right|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$= \frac{\pi^2}{2\pi} + 0 + \frac{-4}{\pi} \underline{\cos x}$$

si hacemos tb para sen 2x, cos 2x, sen 3x, cos 3x

$$\frac{\langle |x|, \operatorname{sen} 2x \rangle}{\langle \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 2x \rangle} \operatorname{sen} 2x = 0 \qquad \frac{\langle |x|, \cos 2x \rangle}{\langle \cos 2x, \cos 2x \rangle} \cos 2x = 0 \qquad \frac{\langle |x|, \operatorname{sen} 3x \rangle}{\langle \operatorname{sen} 3x, \operatorname{sen} 3x \rangle} = 0$$

$$\frac{\langle |x|, \cos 3x \rangle}{\langle \operatorname{sen} 3x, \operatorname{sen} 3x \rangle} = -\frac{4}{9\pi} \cos 3x$$